論 說 報 告

第20卷第6號 昭和9年6月

吊橋の振動に就て

准員 工學士 最 上 武 雄*

On the Vibration of Suspension Bridge

By Takeo Mogami, C. E., Assoc. Member.

內 容 梗 概

本文は吊橋の振動に就て，自由振動，强制振動を空氣抵抗及び補剛桁の內部粘性抵抗のある場合並にそれ等のない場合を分けて調べたものである。

1. 緒 言

橋梁の振動問題は古くから，色々の人々に依つて手が付けられてゐる。これは一般に見て耐震性に關する問題としてよりも動荷重に依る强制振動の研究の樣である。

吊橋は聞く所に依ると，鐵道橋に利用されてゐるものは現在の所ないさうであつて，これは吊橋が他の橋梁型式よりも振れやすいと言ふ所にあるらしい。

吊橋の振動についての論文は物部博士のものがある[1] と聞いてゐるが，私は妹澤博士の振動論[2] にある僅かの紹介に依つての外拜見出來なくて遺憾と思つてゐる。

私のこの吊橋の論文は，私の東京帝國大學の卒業論文の拔き書きであり，田中敎授の御指導に依るものである。又本文を書くに當つても，原稿を丁寧に讀んで下さつて，種々御注意を賜はつた。厚く御禮を申し上げる次第である。

2. 棒の撓み振動の基本式

棒の撓み振動の基本式の粘性を考へに入れぬものは，昔から有名であるし，粘性を考へに入れたものは妹澤博士，末廣博士に依つて求められた[3]。諸抵抗を考へぬものは次の如くである。

$$EJ\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}-\frac{\gamma}{g}J\frac{\partial^4 y}{\partial x^2\partial t^2}+\frac{p}{g}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=p+P(x,t) \quad \cdots\cdots(1)$$

茲に E: Young's Modulus.

J: 中立軸を通る水平軸の廻りの慣性モーメント

γ: 棒の物質の比重

g: 重力の加速度

p: 單位長の重さ

$P(x,t)$: 外 力

---

* 東京帝國大學工學部土木工學敎室

1) 2) 3) ....等は本文の終りに參考文獻を示す

一般に回轉に關する項 $\frac{\lambda}{g}J\frac{\partial^4 y}{\partial x^2\partial t^2}$ は小さい値であるから，これを無視すれば，諸抵抗を考へぬときは

$$EJ\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+\frac{p}{g}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=p+P(x,\ t)\qquad\cdots\cdots(2)$$

空氣の抵抗，粘性抵抗を考へに入れる場合には

$$EJ\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+\frac{p}{g}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+J\xi\frac{\partial^5 y}{\partial t\partial x^4}=p+P(x,t)-\zeta\frac{\partial y}{\partial t}\qquad\cdots\cdots(3)$$

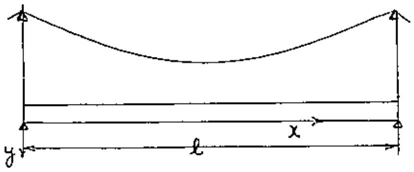
茲に　ξ：粘性に關する係數で本多光太郎博士に依れば 5×10^8 C.G.S. の値を有す (gr/cm sec.,)

　　　ζ：空氣抵抗に關する定數

3. 吊橋の撓み振動の基本式

ケーブルでとる荷重は H をケーブルの水平張力とし (死荷重のみの時の)，小なる項を無視すれば，$H\partial^2 y/\partial x^2$ であるから

第 1 圖



吊橋の撓み振動の基本式は (2) 式より

$$EJ\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+\frac{p}{g}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=p+P(x,t)+H\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\qquad\cdots\cdots(4)$$

粘性抵抗，空氣抵抗を考へれば (3) 式を考へて

$$EJ\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+\frac{p}{g}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=p+P(x,\ t)-J\xi\frac{\partial^5 y}{\partial t\partial x^4}-\zeta\frac{\partial y}{\partial t}+H\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\qquad\cdots\cdots(5)$$

補剛桁のないか又はあつても細くて J が無視される場合には，(4) 式は

$$\frac{p}{g}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=p+P(x,t)+H\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\qquad\cdots\cdots(6)$$

5) 式は

$$\frac{p}{g}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=p+P(x,t)-\zeta\frac{\partial y}{\partial t}+H\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\qquad\cdots\cdots(7)$$

となる。

4. 補剛桁がないか又は J が無視される場合の自由振動

$p+P(x,t)=p(x,\ t)$ とすれば (6) 式はもう一段簡單となり

$$\frac{p}{g}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=p(x,\ t)+H\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\qquad\cdots\cdots(8)$$

この式で $p(x,t)=0$ とすれば自由振動の式となる。そして

$$\frac{p}{gH}=\frac{1}{k^2}$$

とおけば

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=k^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

となり，簡單な絲の振動の式となるから，直ちに

$$y=\sum_n \left\{A_n\cos\frac{n\pi k}{l}t+B_n\sin\frac{n\pi k}{l}t\right\}\sin\frac{n\pi}{l}x \quad\cdots\cdots(9)$$

茲に　A_n, B_n はある定數。

週期は

$$T_{nl}=\frac{2\pi}{nk}=\frac{2l}{n}\sqrt{\frac{p}{gH}} \quad\cdots\cdots(10)$$

5. 補剛構のある場合の自由振動

(4) 式より自由振動の式として

$$EJ\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+\frac{p}{g}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=p+H\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad\cdots\cdots(11)$$

(11) 式の一般解は, (11) 式の一つの特別解 y_1 と (11) 式の complementary equation

$$EJ\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+\frac{p}{g}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=H\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad\cdots\cdots(12)$$

の一般解 y_2 の和である。

今 y_1 として

$$\frac{\partial y_1}{\partial t}\equiv 0,\qquad EJ\frac{\partial^4 y_1}{\partial x^4}=p+H\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} \quad\cdots\cdots(13)$$

をとる。

これは時間に關係のない解であるから, 振動問題としては重要でない。故に單にその解を揭げるのみとする。

$$y_1=\frac{pEJ}{H^2\cosh\sqrt{\frac{H}{EJ}}\frac{l}{2}}\cosh\sqrt{\frac{H}{EJ}}\left(x-\frac{l}{2}\right)-\frac{p}{2H}x^2+\frac{pl}{2H}x-\frac{pEJ}{H^2} \quad\cdots\cdots(14)$$

y_2 を求めるのに, (12) 式に於て

$$y_2=\chi(x)\,e^{iqt},\qquad i=\sqrt{-1} \quad\cdots\cdots(15)$$

とおけば

$$EJ\frac{d^4\chi}{dx^4}-\frac{p}{g}q^2\chi-H\frac{d^2\chi}{dx^2}=0 \quad\cdots\cdots(16)$$

となる。こゝで $\chi=e^{\lambda x}$ とおけば

$$EJ\lambda^4-H\lambda^2-\frac{p}{g}q^2=0 \quad\cdots\cdots(17)$$

$$\therefore\quad \lambda^2=\frac{H\pm\sqrt{H^2+(4pEJq^2)/g}}{2EJ} \quad\cdots\cdots(18)$$

故に (17) 式を滿足する λ は 4 つあつて 2 つは實數, 他の 2 つは虛數である。即ち

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1&=+\sqrt{\frac{H+\sqrt{H^2+(4pEJq^2)/g}}{2EJ}}, & \lambda_2&=-\sqrt{\frac{H+\sqrt{H+\sqrt{H^2+(4pEJq^2)/g}}}{2EJ}}\\ \lambda'_3&=i\lambda_3=i\sqrt{\frac{\sqrt{H^2+(4pEJq^2)/g}-H}{2EJ}}, & \lambda'_4&=i\lambda_4=-i\sqrt{\frac{\sqrt{H^2+(4pEJq^2)/g}-H}{2EJ}}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(19)$$

故に (16) 式の一般解は A_1, A_2, A_3, A_4 を定數として

$$\chi = A_1 e^{\lambda_1 x} + A_2 e^{\lambda_2 x} + A_3 \cos \lambda_3 x + A_4 \sin \lambda_4 x \quad \cdots\cdots (20)$$

$$x=0,\quad x=l \quad に於て \quad \chi=0,\quad \frac{d^2\chi}{dx^2}=0$$

なる如く定數をきめれば

$$A_1=0,\quad A_2=0,\quad A_3=0,\quad \lambda_4=\frac{n\pi}{l}$$

であるから

$$\lambda = A_4 \sin\frac{n\pi}{l}x \quad \cdots\cdots (21)$$

(19) 式より

$$\frac{\sqrt{H^2+(4pEJq^2)/g}-H}{2EJ}=\frac{n^2\pi^2}{l^2}$$

又
$$\frac{\sqrt{H^2+(4pEJq^2)/g}+H}{2EJ}=\frac{l^2}{n^2\pi^2}\frac{1}{4E^2J^2}\frac{4EJpq^2}{g}=\frac{l^2pq^2}{n^2\pi^2EJg}$$

この2式から

$$\frac{H}{EJ}=\frac{l^2pq^2}{n^2\pi^2EJg}-\frac{n^2\pi^2}{l^2}$$

$$\therefore \quad q^2=\frac{n^2\pi^2EJg}{pl^2}\left(\frac{n^2\pi^2}{l^2}+\frac{H}{EJ}\right) \quad \cdots\cdots (22)$$

故に

$$y_2=\sum_n \sin\frac{n\pi}{l}x\left[C_1\cos\frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{EJg}{p}\left(\frac{n^2\pi^2}{l^2}+\frac{H}{EJ}\right)}\,t+C_2\sin\frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{EJg}{p}\left(\frac{n^2\pi^2}{l^2}+\frac{H}{EJ}\right)}\,t\right] \cdots (23)$$

C_1, C_2 は n のみの函數であり初期條件によつてきまる。

$\frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{EJg}{p}\left(\frac{n^2\pi^2}{l^2}+\frac{H}{FJ}\right)}$, $\sqrt{\frac{H}{EJ}}$ はあとで屢々あらはれるので便宜のため

$$\left.\begin{aligned}\frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{EJg}{p}\left(\frac{n^2\pi^4}{l^2}+\frac{H}{EJ}\right)}&=t_{fn}\\ \sqrt{\frac{H}{EJ}}&=t_0\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (24)$$

とおけば

$$y=y_1+\sum_n \sin\frac{n\pi}{l}x\left[C_1\cos t_{fn}t+C_2\sin t_{fn}t\right] \quad \cdots\cdots (25)$$

6. 空氣抵抗，補剛桁の內部粘性抵抗を考へる場合の自由振動

方程式は (3) 式より

$$EJ\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+\frac{p}{g}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+J\xi\frac{\partial^5 y}{\partial t\,\partial x^4}=p-\zeta\frac{\partial y}{\partial t}+H\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \cdots\cdots (26)$$

同樣に $\quad y=y_1+y_2$

として，y_1 は (14) 式を用ふ。 y_2 には

$$EJ\frac{\partial^4 y_2}{\partial x^4}+\frac{p}{g}\frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2}+J\xi\frac{\partial^5 y_2}{\partial t\partial x^4}+\zeta\frac{\partial y_2}{\partial t}-H\frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2}=0 \qquad \cdots\cdots(27)$$

を滿足する y_2 を取る。

$$y_2=e^{iqt}\chi, \qquad i=\sqrt{-1}$$

とおき χ に關する式を作ると

$$(EJ+iqJ\xi)\frac{d^4\chi}{dx^4}-H\frac{d^2\chi}{dx^2}+\left(\zeta qi-\frac{pq^2}{g}\right)\chi=0 \qquad \cdots\cdots(28)$$

$$\chi=e^{\lambda x}$$

とおき且つ

$$EJ+iqJ\xi=\alpha, \qquad \zeta qi-\frac{pq^2}{g}=\beta$$

とすれば

$$\alpha\frac{d^4\chi}{dx^4}-H\frac{d^2\chi}{dx^2}+\beta\chi=0$$

より

$$(\alpha\lambda^4-H\lambda^2+\beta)e^{\lambda x}=0$$

$$\therefore\quad \lambda^2=\frac{H+\sqrt{H^2-4\alpha\beta}}{2\alpha}$$

前と同樣にして

$$\chi=A\cosh\sqrt{\frac{H+\sqrt{H^2-4\alpha\beta}}{2\alpha}}\,x+B\sinh\sqrt{\frac{H+\sqrt{H^2-4\alpha\beta}}{2\alpha}}\,x$$
$$+C\cos\sqrt{\frac{\sqrt{H^2-4\alpha\beta}-H}{2\alpha}}\,x+D\sin\sqrt{\frac{\sqrt{H^2-4\alpha\beta}-H}{2\alpha}}\,x$$

となり

$$A=0, \qquad B=0, \qquad C=0.$$

$$q=\left(\frac{n^4\pi^4}{2pl^4}+\frac{g\zeta}{2p}\right)i\pm\sqrt{\frac{n^2\pi^2 gEJ}{pl^2}\left(\frac{n^2\pi^2}{l^2}+\frac{H}{EJ}\right)-\frac{n^4\pi^4 g^2}{4p^2l^4}\left(\frac{l^2\zeta^2}{n^2\pi^2}+\frac{n^2\pi^2 J\xi}{l^2}\right)^2}$$

となるから

$$y_2=\sum_n l^{-\left(\frac{g\zeta}{2p}+\frac{n^4\pi^4 gJ\xi}{2pl^4}\right)t}\left\{A\cos\frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{gEJ}{p}\left(\frac{n^2\pi^2}{l^2}+\frac{H}{EJ}\right)-\frac{n^2\pi^2 g^2}{4p^2l^2}\left(\frac{l^2\zeta^2}{n^2\pi^2}+\frac{n^9\pi^2 J\xi}{l^2}\right)^2}\,t\right.$$
$$\left.+B\sin\frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{gEJ}{p}\left(\frac{n^2\pi^2}{l^2}+\frac{H}{EJ}\right)-\frac{n^2\pi^2 g^2}{4p^2l^2}\left(\frac{l^2\zeta}{n^2\pi^2}+\frac{n^2\pi^2 J\xi}{l^2}\right)^2}\,t\right\}\sin\frac{n\pi}{l}x \qquad \cdots\cdots(29)$$

今

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{g\zeta}{2p}+\dfrac{n^4\pi^4 gJ\xi}{2pl^4}=u_n\\[2ex] \sqrt{\dfrac{gEJ}{p}+\left(\dfrac{n^2\pi^2}{l^2}+\dfrac{H}{EJ}\right)-\dfrac{g^2n^2\pi^2}{4p^2l^2}\left(\dfrac{l^2\zeta}{n^2\pi^2}+\dfrac{n^2\pi^2 J\xi}{l^4}\right)^2}=v_n\end{array}\right\} \qquad \cdots\cdots(30)$$

とおけば

$$y=y_1+\sum_n e^{-u_n t}\left\{A\cos\frac{n\pi}{l}v_n t+B\sin\frac{n\pi}{l}v_n t\right\}\sin\frac{n\pi}{l}x \qquad \cdots\cdots(31)$$

7. 自由振動の週期

補剛桁のない場合には (10) 式により

$$T_{nl}=\frac{2l}{n}\sqrt{\frac{p}{gH}}$$

補剛桁のある場合には (23) 式又は (25) 式より

$$T_{ns}=\frac{2l\pi}{n\pi\sqrt{\frac{EJg}{p}\left(\frac{n^2\pi^2}{l^2}+\frac{H}{EJ}\right)}}\quad\cdots\cdots(32)$$

補剛桁の內部粘性抵抗，空氣の抵抗を考へるときには，

$$T'_{ns}=\frac{2l\pi}{n\pi\sqrt{\frac{gEJ}{p}\left(\frac{n^2\pi^2}{l^2}+\frac{H}{EJ}\right)\frac{g^2n^2\pi^2}{4p^2l^2}\left(\frac{l^2\zeta^2}{n^2\pi^2}+\frac{n^2\pi^2J\xi}{l^2}\right)^2}}\cdots\cdots(33)$$

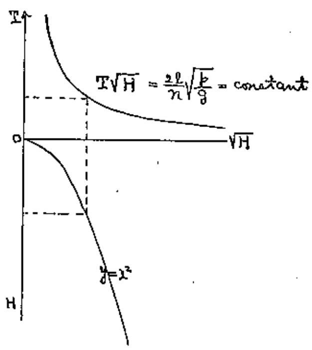
なる事が判る。

諸抵抗を考へるときには週期は上に掲げた樣に增大する。

T_{nl} は n に對して双曲線的に減少する。T_{ns} の方は T_{nl} よりも，減少率が大きい。叉補剛桁が低く徑間がずつと長い場合には l^2 に對して EJ が無視出來る樣になり，T_{ns} は T_{nl} となる。そのときは補剛桁が補剛桁の役目をしない事になるのであつて，上の事はその事から考へても明かである。

T と H の關係は双曲線と拋物線を併用すれば直ちにあらはせる。卽ち第 2 圖の如くすればよい。T_{ns} に對しては多少座標軸をづらせば，そのまゝ出來る。H が大なる程週期が小さく，p, l が大きい程週期は大きくなる。

第 2 圖



叉，第 2 圖より直ちに判る事は，H が大變大きな時には，H を相當に廣範圍に亙つて變化しても，T は左程變化しないといふ事であり，同樣にして H が小さい時には，僅かの範圍で H を變化しても T は大きな變化をすると言ふ事も判る。

8. 强制振動（一般の場合）

基本式は (5) 式である。

卽ち

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+\frac{p}{g}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=p+P(x,t)-J\xi\frac{\partial^5 y}{\partial t\partial x^4}-\zeta\frac{\partial y}{\partial t}+H\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\cdots\cdots(5)$$

$$y=y_1+y_2$$

とし

$$EI\frac{\partial^4 y_1}{\partial x^4}+\frac{p}{g}\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2}=p-J\xi\frac{\partial^5 y_1}{\partial t\partial x^4}-\zeta\frac{\partial y_1}{\partial t}+H\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}\cdots\cdots(34)$$

$$EI\frac{\partial^4 y_2}{\partial t^4}+\frac{p}{g}\frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2}=P(x,t)-J\xi\frac{\partial^5 y_2}{\partial t\partial x^4}-\zeta\frac{\partial y_2}{\partial t}+H\frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2}\cdots\cdots(35)$$

を滿足するものとする。この y_1 は (26) 式の y である。(35) 式を解くのに，Fourier 級數を使ふのであるが，

級數を微分する危險を避けるために，こゝでは Stokes の方法[4]を用ひる事にする。即ち $\partial^4y_2/\partial x^4$, $\partial^2y_2/\partial x^2$ を先づ Fourier 級數に展開し，後に $x=0$, $x=l$ に於て $y_2=0$, $\partial^2y_2/\partial x^2=0$ の條件の下に，部分積分を行ふのである。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^4y_2}{\partial x^4}&=\frac{2}{l}\sum_1^\infty \sin\frac{n\pi}{l}x\int_0^l \frac{\partial^4y_2}{\partial\lambda^4}\sin\frac{n\pi}{l}\lambda d\lambda\\
&=\frac{2}{l}\sum_1^\infty \sin\frac{n\pi}{l}x\left\{\left|\frac{\partial^3y_2}{\partial\lambda^3}\sin\frac{n\pi}{l}\lambda\right|_0^l-\frac{n\pi}{l}\int_0^l\frac{\partial^3y_2}{\partial\lambda^3}\cos\frac{n\pi}{l}\lambda d\lambda\right\}\\
&=\frac{2}{l}\sum_1^\infty \sin\frac{n\pi}{l}x\left\{\left|-\frac{n\pi}{l}\frac{\partial^2y_2}{\partial\lambda^2}\cos\frac{n\pi}{l}\lambda\right|_0^l-\frac{n^2y^2}{l^2}\int_0^l\frac{\partial^2\pi_2}{\partial\lambda^2}\sin\frac{n\pi}{l}\lambda d\lambda\right\}\\
&=\frac{2}{l}\sum_1^\infty \sin\frac{n\pi}{l}x\left\{\left|-\frac{n^2\pi^2}{l^2}\frac{\partial y_2}{\partial\lambda}\sin\frac{n\pi}{l}\lambda\right|_0^l+\frac{n^3\pi^3}{l^3}\int_0^l\frac{\partial y_2}{\partial\lambda}\cos\frac{n\pi}{l}\lambda d\lambda\right\}\\
&=\frac{2}{l}\sum_1^\infty \sin\frac{n\pi}{l}x\left\{\left|\frac{n^3\pi^3}{l^3}y_2\cos\frac{n\pi}{l}\lambda\right|_0^l+\frac{n^4\pi^4}{l^4}\int_0^l y_2\sin\frac{n\pi}{l}\lambda d\lambda\right\}\\
&=\frac{2\pi^4}{l^5}\sum_1^\infty n^4\sin\frac{n\pi}{l}x\int_0^l y_2\sin\frac{n\pi}{l}\lambda d\lambda \quad\cdots\cdots\cdots(36)
\end{aligned}$$

同樣に

$$\frac{\partial^2y_2}{\partial x^2}=\frac{-2\pi^2}{l^3}\sum_1^\infty n^2\sin\frac{n\pi}{l}x\int_0^l y_2\sin\frac{n\pi}{l}\lambda d\lambda \quad\cdots\cdots\cdots(37)$$

今

$$y_2=\sum_1^\infty T_n\sin\frac{n\pi}{l}x \quad\cdots\cdots\cdots(38)$$

とおく。T_n は n と t の函數である。所謂ノーマル座標である。(38) 式を (36), (37) 式に入れ

$$\begin{aligned}
\int_0^l \sin\frac{i\pi}{l}x\sin\frac{j\pi}{l}x dx&=0, & i&\neq j\\
&=\frac{l}{2}, & i&=j
\end{aligned}$$

を考へれば

$$\frac{\partial^4y_2}{\partial x^4}=\frac{\pi^4}{l^4}\sum_1^\infty n^4T_n\sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$\frac{\partial^2y_2}{\partial x^2}=\frac{-\pi^2}{l^2}\sum_1^\infty n^2T_n\sin\frac{n\pi}{l}x$$

又 $P(x,t)$ を 0 と l の間で Fourier の正弦級數に展開して

$$P(x,t)=\sum_1^\infty A_n\sin\frac{n\pi}{l}x$$

などを (35) 式に入れると

$$\sum_1^\infty\left(\frac{p}{g}\frac{d^2T_n}{dt^2}+\frac{n^4\pi^4}{l^4}EJT_n+J\xi\frac{n^4\pi^4}{l^4}\frac{dT_n}{dt}+\frac{n^2\pi^2}{l^2}HT_n\right)\sin\frac{n\pi}{l}x=\sum_1^\infty A_n\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

故に

$$\frac{p}{g}\frac{d^2T_n}{dt^2}+\left(J\xi\frac{n^4\pi^4}{l^4}+\zeta\right)\frac{dT_n}{dt}+\left(\frac{n^4\pi^4}{l^4}EJ+\frac{n^2\pi^2}{l^2}H\right)T_n=A_n \qquad \text{(39)}$$

この式は容易に解けて

$$T_n=e^{-u_nt}\left[\dot{T}_0\frac{\sin\frac{n\pi}{l}v_nt}{\frac{n\pi}{l}v_n}+T_0\left\{\cos v_n\frac{n\pi}{l}t+\frac{u_n}{\frac{n\pi}{l}v_n}\sin\frac{n\pi}{l}v_nt\right\}\right]$$

$$+\frac{1}{\frac{n\pi}{l}v_n}\int_0^t e^{-u_n(t-t')}\sin\frac{n\pi v_n}{l}(t-t')\cdot A(t')\,dt' \qquad \text{(40)}$$

である。u_n, v_n は (30) 式にあるものである。

故に一般に y は

$$y=\frac{pEJ}{H^2\cosh\sqrt{\frac{H}{EJ}}\,\frac{l}{2}}\cosh\sqrt{\frac{H}{EJ}}\left(x-\frac{l}{2}\right)-\frac{p}{2H}x^2+\frac{pl}{2H}x-\frac{pEJ}{H^2}$$

$$+\sum_1^\infty e^{-u_nt}\left\{A\cos\frac{n\pi}{l}v_nt+B\sin\frac{n\pi}{l}v_nt\right\}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$+\sum_1^\infty e^{-u_nt}\left[\dot{T}_0\frac{1}{\frac{n\pi}{l}v_n}\sin\frac{n\pi}{l}v_nt+T_0\left\{\cos\frac{n\pi}{l}v_nt+\frac{u_n}{\frac{n\pi}{l}v_nt}\sin\frac{n\pi}{l}v_nt\right\}\right]\sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$+\sum_1^\infty\frac{1}{\frac{n\pi}{l}v_n}\sin\frac{n\pi}{l}x\int_0^t e^{-u_n(t-t')}\sin\frac{n\pi}{l}v_n(t-t')\cdot A(t')dt' \qquad \text{(41)}$$

で與へられる。

9. 左端より a なる點に正弦的に變化する荷重がのる場合

$$A_n=\frac{2}{l}P(a)\sin\lambda t\sin\frac{n\pi}{l}a \qquad \text{(42)}$$

とおき (41) 式の積分を計算して見るのに

$$y=y_1+\sum_1^\infty e^{-u_nt}\left[\dot{T}_0\frac{1}{\frac{n\pi}{l}v_n}\sin\frac{n\pi}{l}v_nt+T_0\left\{\cos\frac{n\pi}{l}v_nt\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{u_n}{\frac{n\pi}{l}v_n}\sin\frac{n\pi}{l}v_nt\right\}\right]\sin\frac{n\pi}{l}x+\sum_1^\infty\frac{P(a)}{n\pi v_n}\sin\frac{n\pi}{l}a\sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$\times\left[-u_n\left\{\frac{1}{u_n^2+\left(\frac{n\pi}{l}v_n-\lambda\right)^2}-\frac{1}{u_n^2+\left(\frac{n\pi}{l}v_n+\lambda\right)^2}\right\}\cos\lambda t\right.$$

$$+\left\{\frac{\left(\frac{n\pi}{l}v_n+\lambda\right)}{u_n^2+\left(\frac{n\pi}{l}v_n+\lambda\right)^2}+\frac{\left(\frac{n\pi}{l}v_n-\lambda\right)}{u_n^2+\left(\frac{n\pi}{l}v_n-\lambda\right)^2}\right\}\sin\lambda t\Bigg]$$

$$+\sum_1^\infty\frac{e^{-u_nt}P(a)}{n\pi v_n}\sin\frac{n\pi}{l}a\sin\frac{n\pi}{l}x\left[-u_n\left\{\frac{1}{u_n^2+\left(\frac{n\pi}{l}v_n+\lambda\right)^2}-\frac{1}{u_n^2+\left(\frac{n\pi}{l}v_n-\lambda\right)^2}\right\}\cos\frac{n\pi}{l}v_nt\right.$$

$$\left.+\left\{\frac{\left(\frac{n\pi}{l}v_n+\lambda\right)}{u_n^2+\left(\frac{n\pi}{l}v_n+\lambda\right)^2}-\frac{\left(\frac{n\pi}{l}v_n-\lambda\right)}{u_n^2+\left(\frac{n\pi}{l}v_n-\lambda\right)^2}\right\}\sin\frac{n\pi}{l}v_nt\right]\quad\cdots\cdots(43)$$

10. 慣性なき荷重が c なる速さで左端より動く場合

この場合は
$$P(x,t)=\frac{2P}{l}\sum_1^\infty\sin\frac{nc\pi}{l}t\sin\frac{n\pi}{l}x$$
なる故
$$A_n=\frac{2P}{l}\sin\frac{nc\pi}{l}t$$
である。これを (41) 式に入れて

$$y=y_1+\sum_1^\infty e^{-u_nt}\left[\dot{T}_0\frac{1}{\frac{n\pi}{l}v_n}\sin\frac{n\pi}{l}v_nt+T_0\left\{\cos\frac{n\pi}{l}v_nt+\frac{u_n}{\frac{n\pi}{l}v_n}\sin\frac{n\pi}{l}v_nt\right\}\right]\sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$+\sum_1^\infty\frac{P}{n\pi v_n}\left[u_n\left\{\frac{1}{u_n^2+\frac{n^2\pi^2}{l^2}(v_n+c)^2}-\frac{1}{u_n^2+\frac{n^2\pi^2}{l^2}(v_n-c)^2}\right\}\cos\frac{n\pi c}{l}t\right.$$

$$+\left\{\frac{\frac{n\pi}{l}(v_n-c)}{u_n^2+\frac{n^2\pi^2}{l^2}(v_n-c)^2}-\frac{\frac{n\pi}{l}(v_n+c)}{u_n^2+\frac{n^2\pi^2}{l^2}(v_n+c)^2}\right\}\sin\frac{n\pi c}{l}t$$

$$+e^{-u_nt}\left\{\frac{\frac{n\pi}{l}(v_n+c)}{u_n^2+\frac{n^2\pi^2}{l^2}(v_n+c)^2}-\frac{\frac{n\pi}{l}(v_n-c)}{u_n^2+\frac{n^2\pi^2}{l^2}(v_n-c)^2}\right\}\sin\frac{n\pi v_n}{l}t$$

$$\left.+e^{-u_nt}\left\{\frac{u_n}{u_n^2+\frac{u^2\pi^2}{l^2}(v_n-c)^2}-\frac{u_n}{u_n^2+\frac{n^2\pi^2}{l^2}(v_n+c)^2}\right\}\cos\frac{n\pi v_n}{l}t\right]\sin\frac{n\pi}{l}x\quad\cdots\cdots(44)$$

11. 10. の場合に荷重が正弦的に變化する場合

この場合には
$$A_n=\frac{2P}{l}\sin\lambda t\sin\frac{n\pi c}{l}t$$
であるから，(41) 式より

$$y=y_1+\sum_1^\infty e^{-u_n t}\left[\dot{T}_0\frac{1}{\frac{n\pi}{l}v_n}\sin\frac{n\pi v_n}{l}t+T_0\left\{\cos\frac{n\pi v_n}{l}t+\frac{u_n}{\frac{n\pi}{l}v_n}\sin\frac{n\pi v_n}{l}t\right\}\right]\sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$-\frac{1}{2}\sum_1^\infty\frac{P}{n\pi v_n}\left[\left\{\frac{u_n}{u_n^2+\left(\frac{n\pi v_n}{l}+\lambda-\frac{n\pi c}{l}\right)^2}-\frac{u_n}{u_n^2+\left(\frac{n\pi v_n}{l}-\lambda+\frac{n\pi c}{l}\right)^2}\right\}\sin\left(\lambda-\frac{n\pi c}{l}\right)t\right.$$

$$-\left\{\frac{\frac{n\pi v_n}{l}+\lambda-\frac{n\pi c}{l}}{u_n^2+\left(\frac{n\pi v_n}{l}+\lambda-\frac{n\pi c}{l}\right)^2}+\frac{\frac{n\pi v_n}{l}-\lambda+\frac{n\pi c}{l}}{u_n^2+\left(\frac{n\pi v_n}{l}-\lambda+\frac{n\pi c}{l}\right)^2}\right\}\cos\left(\lambda-\frac{n\pi c}{l}\right)t$$

$$-\left\{\frac{u_n}{u_n^2+\left(\frac{n\pi v_n}{l}+\lambda+\frac{n\pi c}{l}\right)^2}-\frac{u_n}{u_n^2+\left(\frac{n\pi v_n}{l}-\lambda-\frac{n\pi c}{l}\right)^2}\right\}\sin\left(\lambda+\frac{n\pi c}{l}\right)t$$

$$+\left\{\frac{\frac{n\pi c}{l}+\lambda+\frac{n\pi c}{l}}{u_n^2+\left(\frac{n\pi v_n}{l}+\lambda+\frac{n\pi c}{l}\right)^2}+\frac{\frac{n\pi v_n}{l}-\lambda-\frac{n\pi c}{l}}{u_n^2+\left(\frac{n\pi v_n}{l}-\lambda-\frac{n\pi c}{l}\right)^2}\right\}\cos\left(\lambda+\frac{n\pi c}{l}\right)t$$

$$+e^{-u_n t}\left\{\frac{u_n}{u_n^2+\left(\frac{n\pi v_n}{l}-\lambda+\frac{n\pi c}{l}\right)^2}+\frac{u_n}{u_n^2+\left(\frac{n\pi v_n}{l}+\lambda-\frac{n\pi c}{l}\right)^2}-\frac{u_n}{u_n^2+\left(\frac{n\pi v_n}{l}+\lambda+\frac{n\pi c}{l}\right)^2}\right.$$

$$\left.-\frac{u_n}{u_n^2+\left(\frac{n\pi v_n}{l}-\lambda-\frac{n\pi c}{l}\right)^2}\right\}\sin\frac{n\pi v_n}{l}t+e^{-u_n t}\left\{\frac{\frac{n\pi v_n}{l}+\lambda-\frac{n\pi c}{l}}{u_n^2+\left(\frac{n\pi v_n}{l}+\lambda-\frac{n\pi c}{l}\right)^2}\right.$$

$$+\frac{\frac{n\pi v_n}{l}-\lambda+\frac{n\pi c}{l}}{u_n^2+\left(\frac{n\pi v_n}{l}-\lambda+\frac{n\pi c}{l}\right)^2}+\frac{\frac{n\pi v_n}{l}+\lambda+\frac{n\pi c}{l}}{u_n^2+\left(\frac{n\pi v_n}{l}+\lambda+\frac{n\pi c}{l}\right)^2}$$

$$\left.\left.+\frac{\frac{n\pi v_n}{l}-\lambda-\frac{u\pi c}{l}}{u_n^2+\left(\frac{n\pi v_n}{l}-\lambda-\frac{n\pi c}{l}\right)^2}\right\}\cos\frac{n\pi v_n}{l}t\right]\sin\frac{n\pi}{l}x \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(45)$$

12. 强制振動（特殊な場合即ち諸抵抗を無視す）

色々の事を調べるのには,諸抵抗を無視した式の方が便利であるから,次に式のみを書く。

(40) 式に對して

$$T_n=\dot{T}_0\frac{\sin t_{fn}t}{t_{fn}}+T_0\cos t_{fn}t+\frac{g}{p\,t_{fn}}\int_0^t A(t')\sin t_{fn}(t-t')dt' \quad\ldots\ldots\ldots\ldots(46)$$

(43) 式に對しては

$$y=y_1+\sum_1^\infty\sin\frac{n\pi}{l}x\left\{\dot{T}_0\frac{\sin t_{fn}t}{t_{fn}}+T_0\sin t_{fn}t-\frac{2gP(a)\lambda}{pl(\lambda+t_{fn})(\lambda-t_{fn})}\sin\frac{n\pi}{l}a\sin t_{fn}t\right.$$

$$\left.-\frac{2gP(a)}{pl(\lambda+t_{fn})(\lambda-t_{fn})}\sin\frac{n\pi}{l}a\sin\lambda t\right\} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots(47)$$

玆に y_1 は自由振動の項である。

(44) 式に對して

$$y=y_1+\sum_1^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{l}\left[\dot{T}_0\frac{\sin t_{fn}t}{t_{fn}}+T_0\cos t_f t+\frac{2\pi cugP}{pl^2 t_{fn}\left(\frac{nc\pi}{l}+t_{fn}\right)\left(\frac{nc\pi}{l}-t_{fn}\right)}\sin t_{fn}t\right.$$

$$\left.-\frac{2gP}{pl\left(\frac{nc\pi}{l}+t_{fn}\right)\left(\frac{nc\pi}{l}-t_{fn}\right)}\sin\frac{nc\pi}{l}t\right]\cdots\cdots(48)$$

y_1 は (47) の式 y_1 と同じ

(45) 式に對しては

$$y=y_1+\sum_1^{\infty}\sin\frac{n\pi}{l}x\left[\dot{T}_0\frac{\sin t_{fn}t}{t_{fn}}+T_0\cos t_{fn}t\right.$$

$$+\frac{2gP}{pl}\left\{\frac{1}{\left(\lambda-\frac{n\pi c}{l}\right)^2-t^2_{fn}}\sin\left(\frac{\lambda-\frac{n\pi c}{l}-t_{fn}}{2}\right)t\sin\left(\frac{\lambda-\frac{n\pi c}{l}+t_{fn}}{2}\right)t\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{\left(\lambda+\frac{n\pi c}{l}\right)^2-t^2_{fn}}\sin\left(\frac{\lambda+\frac{n\pi c}{l}-t_{fn}}{2}\right)t\sin\left(\frac{\lambda+\frac{n\pi c}{l}+t_{fn}}{2}\right)t\right\}\right]\cdots\cdots(49)$$

y_1 は上と同じ

13. 再び特殊な場合

補剛構のない場合

(43) 式に對しては

$$y=y_1+\sum\sin\frac{n\pi}{l}x\left\{\dot{T}\sin t'_{fn}\,t+T\cos t'_{fn}t\right\}$$

$$-\frac{2gP}{pl}\sum_1^{\infty}\sin\frac{n\pi}{l}x\frac{1}{(\lambda+t'_{fn})(\lambda-t'_{fn})}\sin\frac{n\pi}{l}a\sin\lambda t\quad\cdots\cdots(50)$$

玆に

$$y_1=-\frac{p}{2H}x^2+\frac{pl}{2H}x,\qquad t'_{fn}=\frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{gH}{p}}$$

(44) 式に對しては

$$y=y_1+\sum_1^{n}\sin\frac{n\pi}{l}x\left\{T\cos t'_{fn}t+\dot{T}\sin t'_{fn}\,t-\frac{2gP}{pl\left(\frac{n\pi c}{l}+t'_{fn}\right)\left(\frac{n\pi c}{l}-t'_{fn}\right)}\sin\frac{n\pi}{l}ct\right\}\cdots(51)$$

(45) 式に對しては

$$y=y_1+\sum\sin\frac{n\pi}{l}x\left\{T\cos t'_{fn}t+\dot{T}\sin t_{fn}t\right.$$

$$+\frac{2gP}{pl}\left\{\frac{1}{\left(\lambda-\frac{n\pi c}{2}\right)^2-t'^2_{fn}}\sin\left(\frac{\lambda-\frac{n\pi c}{l}-t'_{fn}}{2}\right)t\sin\left(\frac{\lambda-\frac{n\pi c}{l}+t'_{fn}}{2}\right)t\right.$$

$$-\frac{1}{\left(\lambda+\frac{n\pi c}{l}\right)^2-t'^2_{fn}}\sin\left(\frac{\lambda+\frac{n\pi c}{l}-t'_{fn}}{2}\right)t\sin\left(\frac{\lambda+\frac{n\pi c}{l}+t'_{fn}}{2}\right)t\ \dots\dots\dots\dots(52)$$

y_1 は (50) 式の y_1, t'_{fn} も然り。 T, T' は n の函數である。

14. 共　振

以上揭げた諸式を一瞥すれば直ちに判るが, 實際の振動狀態に最も近いであらうと考へられる (諸式の中で) (43)~(45) 式で調べないといけない。 即ち, 振幅がある荷重狀態で無限大になると言ふ樣な事は全くない。

15. 車輛の影響

車輛が走る場合には, その車輛は種々の原因により振動するのであり, これが橋梁に對して外力となり强制振動を生じさせ, 又その橋梁の振動が車輛につたわつて行く。 かゝる現象に就ては小澤氏の御研究[5]が詳細を極めてゐると考へるし, 本論文の場合とは僅かに $H\partial^2y/\partial x^2$ の項だけが異なるのであるから, 本質的には變らない故省略する。

16. 衝　擊

衝擊と言ふ現象は大變面倒な現象であつて, 所謂完全彈性衝擊と非彈性衝擊と言ふ 2 つの極限的考察が Wallis, Wren, Huygens に依つて 17 世紀の半ばに築き上げられてから, Herz の彈性球の衝突に對する解が與へられたなどの劃期的な仕事は多くあるが, この不連續的力學現象に對する考察は仲々困難なものゝ如くである。 Herz の衝突論は, 要するに動力學的な問題を靜力學的問題に歸するものであるが矢張り本質的でない樣である。

又衝擊を週期の大變小さい週期的な力であると考へて取扱つてゐる人があるさうであるが, 妹澤博士[5]の指摘されてゐる如くに間違つてゐると考へる。

妹澤博士は衝擊を[6]一種の波動なりとし棒や平面に加へられた衝擊作用の問題を解いて居られるが, このものは理論的には甚だ興味があるけれども, 果してそれが一般の衝擊に應用されて適當な結果が得られるか否か, 又最初與へられる歪が判らないのと又その歪が取れる時などに於て, 內部粘性の働く彈性體の式が當てはまるか否かと言ふ事や, また履歷現象などの影響はどの程度に入るであらうか等の重大な疑問があると考へる。

しかし理論上の興味から博士のお考へを吊橋の場合に適用して見る。

先づ振動と波動の關係を述べる。 空氣抵抗, 桁の粘性抵抗を考へに入れた吊橋の振動形式は

$$y=\sum e^{-u_n t}\frac{\cos}{\sin}\frac{n\pi}{l}v_n t\frac{\cos}{\sin}\frac{n\pi}{l}x$$

である。 今 $\frac{n\pi}{l}=\alpha$ とすれば

$$y=\sum e^{-u_n t}\left\{e^{i\alpha(x-v_n t)}+e^{i\alpha(x+v_n t)}\right\}\ \dots\dots\dots\dots(53)$$

と書ける。

即ちこの式は波動の式であつて, v_n なる速さの波が x の正と負の方向に進む事を示すものである。

$(x-v_n t)$ の項は進行波，$(x+v_n t)$ の項は入射波である。$e^{-u_n t}$ はその振幅が時と共に減衰する事を示す。

$t=0$ の時の變形が原點附近のみにあつて，それ以外の點では $y=0$ である場合に $t=0$ の時 $y=f(x)$ の形であるとすれば，一般に (53) 式を考へて

$$y=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-u_0 t}\,d\alpha\int_{-\infty}^\infty f(\lambda)\cos\alpha(x-v_0 t-\lambda)d\lambda \quad\cdots\cdots(54)$$

と，一般化して書く事は容易に出來る。

u_0, v_0 は u_n, v_n の中の $n\pi/l$ を α と書き換へたものである。

今衝擊性の波動を考へる場合には，

1. 最初にある大いさが對稱で，しかも x が増加すると共に急激に減少するが如き變位の分布を與へる。
2. 上の様な條件を滿足する様な速度分布を與へる。

かの 2 つである。今假りに斯くの如き變位を與へた場合をやつて見るのであるが，速度分布を與へた場合でも，全く同樣に取扱ふ事が出來る。

(54) 式で $t=0$ とすれば

$$y_{t=0}=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\alpha\int_{-\infty}^\infty f(\lambda)\cos\alpha(x-\lambda)d\lambda \quad\cdots\cdots(55)$$

今上述の性質を有する變位分布を與へる函數として一種の確率函數をとるのである。これは積分に便利であると言ふ事のためにも撰ばれたものである。

即ち　　$y_{t=0}=Ae^{-\frac{x^2}{b^2}}$

となる。これを Fourier の積分であらはし，(55) 式と比較する。しかる時は

$$f(\lambda)=Ae^{-\frac{\lambda^2}{b^2}}$$

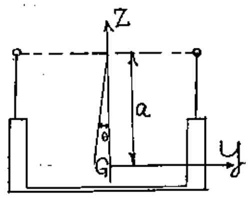
これを (54) 式に入れて簡單な計算を行へば

$$y=\frac{Ab}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{b^2\alpha^2}{4}-u_0 t}\cos\alpha(x-v_0 t)d\alpha \quad\cdots\cdots(56)$$

17. 横振動の方程式

主桁の方向に x 軸，上方に z 軸，横振れの方向に y 軸をとる。又 a は全長に亘つての平均を取つたものとし，第 3 圖の如き平均の斷面を有するものと考へる。

第 3 圖



吊材の質量は考へない。

z：主桁斷面の重心 G の平衡位置よりの上り

y：G の水平變位

θ：垂直線の傾き

ρ：主桁の單位長の質量

とすれば

$$z=a(1-\cos\theta), \qquad y=a\sin\theta$$

今 θ を小なりとし

$$\cos\theta \fallingdotseq 1-\frac{\theta^2}{2}, \qquad \sin\theta \fallingdotseq \theta$$

とすれば

$$z=\frac{a}{2}\theta^2, \qquad y=a\theta \quad \text{......(57)}$$

處が一般に

$$\theta=\sum_n \varphi_n \sin\frac{n\pi}{l}x \quad \text{......(58)}$$

又は (57) 式より

$$y=a\sum_1^{\infty}\varphi_n \sin\frac{n\pi}{l}x \quad \text{......(59)}$$

茲に $\varphi_i \ (i=1, 2, \ldots, n, \ldots)$ はノーマル座標

とおく事が出來る。

T_1: 主桁の横振れによる運動のエネルギー。

T_2: 主桁の縦振れによる 〃 〃

これは單に z に依るものと，各點に於ける $\partial y/\partial x$ が異なるためによつて各斷面が 2 重吊りの樣な作用をするのに依るものとに分けられるが，この方は小さいから後者を無視する。

T_3: 主桁では各點によつて y が異るから廻轉を生じ，これによる運動のエネルギーを生ずるが，小さいから無視する。

即ち

$$T_1=\int_0^l \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 dx \quad \text{......(60)}$$

$$T_2=\int_0^l \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 dx \quad \text{......(61)}$$

而して

$$T=T_1+T_2$$

(59) 式を (60), (61) 式に入れて計算するに，T_2 も小さい事を知る故これも無視する。故に

$$\begin{aligned} T&=T_1 \\ &=\frac{a^2\rho}{2}\int_0^l\left(\dot{\varphi}_1\sin\frac{\pi}{l}x+\dot{\varphi}_2\sin\frac{2\pi}{l}x+\ \ldots\right)^2 dx \\ &=\frac{1}{4}a^2\rho l\sum_1^{\infty}\dot{\varphi}^2_n \quad \text{......(62)} \end{aligned}$$

位置のエネルギーは

1. 重心の上昇によるもの　V_1
2. 主桁の曲る事によるもの　V_2
3. 剪力に依るもの　V_3

であるが V_3 は無視する。

$$V_1=\sum mgz=\int_0^l \rho gz\,dx$$

$$=\frac{\rho ga}{2}\int_0^l\left(\varphi_1\sin\frac{\pi}{l}x+\varphi_2\sin\frac{2\pi}{l}x+\ldots\right)^2dx=\frac{\rho gal}{4}\sum_1^\infty\varphi^2{}_n \quad\ldots\ldots(63)$$

$$V_2=\frac{EI}{2}\int_0^l\left(\frac{\partial^2y}{\partial x^2}\right)^2dx$$

である。處が

$$x=0,\qquad x=l\qquad で\qquad y=0,\qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0$$

なる時は

$$\frac{\partial^2y}{\partial x^2}=\frac{-a^2\pi^2}{l^2}\sum_1^\infty\left(n^2\varphi_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$$

である事は，前に掲げた通りであるから

$$V_2=\frac{EJ}{2}\int_0^l\frac{a^2\pi^4}{l^4}\left(\varphi_1\sin\frac{\pi}{l}x+2^2\varphi_2\sin\frac{2\pi}{l}x+\ldots\right)^2dx$$

$$=\frac{EJ}{2}\sum_1^\infty\frac{a^2n^2\pi^4}{l^4}\varphi^2{}_n\frac{l}{2}=\frac{EJa^2\pi^4}{4l^3}\sum_1^\infty n^4\varphi^2{}_n \quad\ldots\ldots(64)$$

(63), (64) 式より

$$V=\frac{\rho gal}{4}\sum_1^\infty\varphi^2{}_n+\frac{EJa^2\pi^4}{4l^3}\sum_1^\infty n^4\varphi^2{}_n \quad\ldots\ldots(65)$$

今勢力逸散函数 (dissipation function) を F とすれば，Lagrange の第 2 種運動方程式は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi_n}\right)-\frac{\partial T}{\partial\varphi_n}+\frac{\partial V}{\partial\varphi_n}+\frac{\partial F}{\partial\dot\varphi_n}=\Phi_n \quad\ldots\ldots(66)$$

$n=1,\ 2,\ldots\ldots,\ n,\ \ldots\ldots$

Φ_n は一般力の成分である。

一般座標を $q_1,\ q_2,\ldots,\ q_n,\ldots$ とすれば今外力の仕事を A とすれば

$$\delta A=\sum_1^\infty\Phi_n\delta q_n$$

である。

(66) 式に，(62), (65) 式を入れゝば

$$\ddot{\varphi}_n+\left(\frac{g}{a}+\frac{n^4\pi^4EJ}{\rho l^2}\right)\varphi_n+\frac{2}{a^2\rho l}\frac{\partial F}{\partial\dot{\varphi}_n}=\frac{2}{a^2\rho l}\Phi_n \quad\cdots\cdots(67)$$

なる吊橋の横振動の式を得る。

今勢力逸散として空氣の抵抗の如きものを考へれば，

$$F=k'\dot{\varphi}^2{}_n=\frac{a^2\rho l}{4}k\dot{\varphi}^2{}_n$$

なる k がきまるから，(67) 式は

$$\ddot{\varphi}_n+\left(\frac{g}{a}+\frac{n^4\pi^4EJ}{\rho l^2}\right)\varphi_n+k\dot{\varphi}_n=\frac{2}{a^2\rho l}\Phi_n \quad\cdots\cdots(68)$$

18.　自由振動

(68) 式に於て　$\Phi_n=0$ とおけば

$$\ddot{\varphi}_n+\left(\frac{g}{a}+\frac{n^4\pi^4EJ}{\rho l^2}\right)\varphi_n+k\dot{\varphi}_n=0$$

$$\therefore\quad \varphi_n=e^{-\frac{k}{2}t}\left\{A\cos\sqrt{\left(\frac{g}{a}+\frac{n^4\pi^4EJ}{\rho l^2}\right)-\left(\frac{k}{2}\right)^2}\,t+B\sin\sqrt{\left(\frac{g}{a}+\frac{n^4\pi^4EJ}{\rho l^2}\right)-\left(\frac{k}{2}\right)^2}\,t\right\}\cdots(69)$$

これを (59) 式に入れて

$$y=\sum_n ae^{-\frac{k}{2}t}\sin\frac{n\pi}{l}x\left\{A_n\cos\sqrt{\left(\frac{g}{a}+\frac{n^4\pi^4EJ}{\rho l^2}\right)-\left(\frac{k}{2}\right)^2}\,t\right.$$

$$\left.+B_n\sin\sqrt{\left(\frac{g}{a}+\frac{n^4\pi^4EJ}{\rho l^2}\right)-\left(\frac{k}{2}\right)^2}\,t\right\}\quad\cdots\cdots(70)$$

空氣の抵抗を考へなければ

$$y=\sum a\sin\frac{n\pi}{l}x\left\{A_n\cos\sqrt{\frac{g}{a}+\frac{n^4\pi^4EJ}{\rho l^2}}\,t+B_n\sin\sqrt{\frac{g}{a}+\frac{n^4\pi^4EJ}{\rho l^2}}\,t\right\}\quad\cdots\cdots(71)$$

自由振動の週期は，(70), (71) 式よりそれぞれ

$$T_{nk}=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{a}+\frac{n^4\pi^4EJ}{\rho l^2}+\frac{k^4}{4}}}\quad\cdots\cdots(72)$$

$$T_{ns}=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{a}+\frac{n^4\pi^4EJ}{\rho l^2}}}\quad\cdots\cdots(73)$$

(73) 式で　$J=0$　とおけば

$$T_{n0}=2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$$

となり單振子と同一形となる。

19.　左端より b なる點に正弦的に變る外力 $P\sin\lambda t$ が働く場合

$$P\sin\lambda t(\delta y_{x=b})=\Phi_n\delta\varphi_n$$

である。しかるに

$$(\delta y)_{x=b}=a\delta\varphi_n \sin\frac{n\pi}{l}b, \qquad \therefore\ aP\sin\lambda t\sin\frac{n\pi}{l}b\delta\varphi_n=\Phi_n\delta\varphi_n$$

$$\therefore\ \Phi_n=aP\sin\frac{n\pi}{l}b\sin\lambda t$$

従つて，(68) 式は

$$\ddot{\varphi}_n+\left(\frac{g}{a}+\frac{n^4\pi^4EJ}{\rho l^2}\right)\varphi_n+k\dot{\varphi}_n=\frac{2}{a\rho l}P\sin\frac{n\pi}{l}b\sin\lambda t$$

$$\therefore\ \varphi_n=e^{-\frac{k}{2}t}\left[\dot{\varphi}_{n0}\frac{1}{\left\{\left(\frac{g}{a}+\frac{n^4\pi^4EJ}{\rho l^2}\right)-\frac{k^2}{4}\right\}}\sin\left\{\left(\frac{g}{a}+\frac{n^4\pi^4EJ}{\rho l^2}\right)-\frac{k^2}{4}\right\}t\right.$$

$$\left.+\varphi_{n0}\left\{\cos\left(\frac{g}{a}+\frac{n^4\pi^4EJ}{\rho l^2}-\frac{k^2}{4}\right)+t\frac{k}{2\left(\frac{g}{a}+\frac{n^4\pi^4EJ}{\rho l^2}-\frac{k^2}{4}\right)}\sin\left(\frac{g}{a}+\frac{n^4\pi^4EJ}{\rho l^2}-\frac{k^2}{4}\right)t\right\}\right]$$

$$+\frac{1}{\frac{g}{a}+\frac{n^4\pi^4EJ}{\rho l^2}-\frac{k^2}{4}}\int_0^t e^{-\frac{k}{2}(t-t')}\sin\left(\frac{g}{a}+\frac{n^4\pi^4EJ}{\rho l^2}-\frac{k^2}{4}\right)(t-t')\ \frac{2}{a\rho l}P\sin\frac{n\pi}{l}b\sin\lambda t'\,dt' \quad \cdots\cdots(74)$$

$$I=\int_0^t e^{-\frac{k}{2}(t-t')}\sin\left(\frac{g}{a}+\frac{n^4\pi^4EJ}{\rho l^2}-\frac{k^2}{4}\right)(t-t')\cdot\frac{2}{a\rho l}P\sin\frac{n\pi}{l}b\sin\lambda t'\,dt'$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\frac{k^2}{4}+(t_n+\lambda)^2}\left\{\frac{k}{2}\cos\lambda t+(t_n+\lambda)\sin\lambda t\right\}\right.$$

$$-\frac{1}{\frac{k^2}{4}+(t_n-\lambda)^2}\left\{\frac{k^2}{2}\cos\lambda t-(t_n-\lambda)\sin\lambda t\right\}$$

$$+\frac{e^{-\frac{k}{2}t}}{\frac{k^2}{4}+(t_n+\lambda)^2}\left\{-\frac{k}{2}\cos t_n t+(t_n+\lambda)\sin t_n t\right\}$$

$$\left.+\frac{e^{-\frac{k}{2}t}}{\frac{k^2}{4}+(t_n-\lambda)^2}\left\{\frac{k}{2}\cos t_n t-(t_n-\lambda)\sin t_n t\right\}\right]$$

$$t_n=\frac{g}{a}+\frac{n^4\pi^4EJ}{\rho l^2}-\frac{k^2}{4}$$

とすれば

$$\varphi_n=e^{-\frac{k}{2}t}\left[\dot{\varphi}_{n0}\frac{\sin t_n t}{t_n}+\varphi_{n0}\left\{\cos t_n t+\frac{k}{2}\sin t_n t\right\}\right]+\frac{1}{t_n}\frac{2P}{a\rho l}\sin\frac{n\pi}{l}bI \quad \cdots\cdots(75)$$

この φ_n を (59) 式に入れれば y は容易に求まる。

即ち

$$y=a\sum_1^\infty a\left[e^{-\frac{k}{2}t}\left\{\dot{\varphi}_{n0}\frac{\sin t_n t}{t_n}+\varphi_{n0}\left(\cos t_n t+\frac{k}{2}\sin t_n t\right)\right\}+\frac{1}{t_n}\frac{2P}{a\rho l}\sin\frac{n\pi}{l}b\right]\sin\frac{n\pi}{l}x \quad \cdots(76)$$

20. 19. の場合に荷重が c の速さで動く場合

$$I=\int_0^t e^{-\frac{k}{2}(t-t')}\sin t_n(t-t')\sin\frac{n\pi c}{l}t'\sin\lambda t'\,dt'$$

$$=\frac{1}{4}\Bigg[\frac{k}{2}\left\{\frac{1}{\left(\frac{k}{2}\right)^2+\left(t_n+\lambda-\frac{n\pi c}{l}\right)^2}-\frac{1}{\left(\frac{k}{2}\right)^2+\left(t_n-\lambda+\frac{n\pi c}{l}\right)^2}\right\}\sin\left(\lambda-\frac{n\pi c}{l}\right)t$$

$$-\left\{\frac{t_n+\lambda-\frac{n\pi c}{l}}{\left(\frac{k}{2}\right)^2+\left(t_n+\lambda-\frac{n\pi c}{l}\right)^2}+\frac{t_n-\lambda+\frac{n\pi c}{l}}{\left(\frac{k}{2}\right)^2+\left(t_n-\lambda+\frac{n\pi c}{l}\right)^2}\right\}\cos\left(\lambda-\frac{n\pi c}{l}\right)t$$

$$-\frac{k}{2}\left\{\frac{1}{\left(\frac{k}{2}\right)^2+\left(t_n+\lambda+\frac{n\pi c}{l}\right)^2}-\frac{1}{\left(\frac{k}{2}\right)^2+\left(t_n-\lambda-\frac{n\pi c}{l}\right)^2}\right\}\sin\left(\lambda+\frac{n\pi c}{l}\right)t$$

$$+\left\{\frac{t_n+\lambda+\frac{n\pi c}{l}}{\left(\frac{k}{2}\right)^2+\left(t_n+\lambda+\frac{n\pi c}{l}\right)^2}+\frac{t_n-\lambda-\frac{n\pi c}{l}}{\left(\frac{k}{2}\right)^2+\left(t_n-\lambda-\frac{n\pi c}{l}\right)^2}\right\}\cos\left(\lambda+\frac{n\pi c}{l}\right)t$$

$$+e^{-\frac{k}{2}t}\,\frac{k}{2}\left\{\frac{-1}{\left(\frac{k}{2}\right)^2+\left(t_n+\lambda+\frac{n\pi c}{l}\right)^2}+\frac{-1}{\left(\frac{k}{2}\right)^2+\left(t_n-\lambda-\frac{n\pi c}{l}\right)^2}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\left(\frac{k}{2}\right)^2+\left(t_n+\lambda-\frac{n\pi c}{l}\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{k}{2}\right)^2+\left(t_n-\lambda+\frac{n\pi c}{l}\right)^2}\right\}\sin t_n t$$

$$+e^{-\frac{k}{2}t}\left\{\frac{t_n+\lambda-\frac{n\pi c}{l}}{\left(\frac{k}{2}\right)^2+\left(t_n+\lambda-\frac{n\pi c}{l}\right)^2}+\frac{t_n-\lambda+\frac{n\pi c}{l}}{\left(\frac{k}{2}\right)^2+\left(t_n-\lambda+\frac{n\pi c}{l}\right)^2}\right.$$

$$\left.+\frac{t_n+\lambda+\frac{n\pi c}{l}}{\left(\frac{k}{2}\right)^2+\left(t_n+\lambda+\frac{n\pi c}{l}\right)^2}+\frac{t_n-\lambda-\frac{n\pi c}{l}}{\left(\frac{k}{2}\right)^2+\left(t_n-\lambda-\frac{n\pi c}{l}\right)^2}\right\}\cos t_n t$$

とおけば，この問題の解は

$$y=a\sum e^{-\frac{1}{2}kt}\sin\frac{n\pi}{l}x\left[\dot{\varphi}_{n0}\frac{\sin t_n t}{t_n}+\varphi_{n0}\left\{\cos t_n t+\frac{k}{2}\sin t_n t\right\}\right]$$

$$+a\sum\sin\frac{n\pi}{l}x\cdot\frac{2P}{a\rho l t_n}I \quad\cdots\cdots(77)$$

21. 吊橋に横振動を生ぜしめる力

1. 風　力

2. 蛇行による横力

3. 車輛の横搖れ

等と考へる。

蛇行に就ては實驗的な研究もあるが,理論的にも面白い問題であると思ふ。その平均の週期は判つてゐる。

車軸についてゐるスプリングは主に上下の振動をするので,上下の衝撃をとるために設けられたものであるが,僅かには左右振動をすると思ふ。この爲に,吊橋と聯成振動 (coupled oscillation) をするのである。

又,本論文では境界條件として

$$x=0, \quad x=l \quad \text{に於て} \quad y=0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0$$

を取つたが,$y=0$ の方は,大體に於て心配はないが,$\partial^2 y/\partial x^2=0$ の方は,多少安心出來ぬ。その爲めに,こゝで出したより幾分週期は短かいと思ふ。

22. Remarks.

まだ私の卒業論文では,吊橋の設計に入つて來る諸量と週期の關係を論じたもの,吊橋の理論の假定に就ての疑問をいだけるものに就ての小さな注意とか,又積分方程式と本論文に於ける方程式との關係を考へたもの等大分殘つてゐるが,意に滿たないものとか,あまりに數學におち入りすぎてゐる嫌ひのあるものなので,すべて省く事にした。又,小澤氏(5)の甚だ結構な論文も,私の論文が大半出來上つてから,御發表になつたので,遂にあの様なきれいな形に於て,吊橋の振動を論ずる事が出來ず。Timoschenko 流のきたない形になつたのは殘念と考へる。

又,上に揭げた數項の結果より見ると,吊橋の振動問題の基本式は,全く抗張材の振動問題のそれと同じである事を知るのである。

私が諸抵抗を入れた式を出して來たのは原文では,この類似に依つたので,本論文に於けるが如き形に於てゞは全くなかつたのである。

この類似は甚だ面白い事であると思ふから,最後にこれを述べておきたいと思ふ。

參 考 文 獻

1) 物部博士 "吊橋の振動並にその衝擊作用に對する關係" 土木學會誌第 10 卷, 1924.

2) 妹澤博士 "振動學" p. 643~645.

3) 妹澤博士 "振動學" p. 88.

4) 佐野博士 "應用數學" p. 117.

5) 小澤工學士 "走行車輛に因る橋桁强制振動の理論" 土木學會誌第 19 卷第 9 號, 同第 12 卷第 2 號

6) 妹澤博士 "棒に傳はる縱衝擊波" 航研彙報 No. 52.

〃 〃 "On the decay of waves in Visco-elastic solid bodies"

〃 〃 震研彙報 No. 3.

〃 〃 "梁に於ける衝擊の擴散" 航研彙報 No. 3.

物部博士の論文を土木學會で拜見することが出來たが,それは,補剛桁のない場合は,微分方程式を作られてそれを解かれてゐるが,他の場合は勢力法に依つて週期を出されてゐる様であつた。横振動に就ては私の論文よりも一般な

形を出されてゐるものゝ如くであつた。

注　意

私が上にあげた文獻は，特別なものか又は一般的なものでは，それの載つてゐるものを一種あげたのみであるが，實は，もつと多くのものを參照してゐる。Rayleigh の名著や，寺澤博士の數學概論などは，あまり煩雜になるから一一書き記さなかつた。