

論 說 報 告

第二十卷 第二號 昭和九年 二月

走行蒸氣機關車に因る橋桁強制振動の理論

第三編

應 用 計 算 例

會員 工 學 士 小 澤 久 太 郎*

Theory of the Forced Vibration of a Bridge
caused by the Passage of a Locomotive.

By Kyuntaro Ozawa, C. E., Member.

内 容 梗 概

本編は第一編、第二編（第十九卷第九號及び第十二號所載）に於て導ける理論の應用計算例を示せるものでこれ等計算例に依つて橋桁の振動性態を明かにした。

1. 橋桁自己振動數が機關車自己振動數に比して大なる場合

(1) デ ー タ -

(a) 橋 桁

支 間	$l=74$ 米
總死荷重	$W_b=825$ 噸
	$\rho A = \frac{W_b}{l} = 1.13646$ 噸質量
自己振動數	$n_b=3.0$ /秒

(b) 蒸 氣 機 關 車

彈重 (スプリング・ウエイト)	$W_s=60$ 噸
	$M_s = \frac{W_s}{g} = 6.1162$
非彈重 (アンスプリング・ウエイト)	$W_n=20$ 噸
	$M_n = \frac{W_n}{g} = 2.0387$
軸輪回轉毎秒5回の時に於ける過平衡對重に因る衝擊	$P=15$ 噸
軸輪直徑	$D=1.37$ 米
機關車自己振動數	$n_l=2.8$ /秒

(c) 茲に於て計算に必要な數値を求むれば次の如くなる (但し單位は總て米, 噸, 秒を用ふ)。

機關車の自己振動數は

$$n_l = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{M_s}}$$

* 内務技師

にて與へらる。故に

$$k = 4\pi^2 n_l^2 M_s = 1893.04$$

更に

$$a = \frac{k}{M^3} = 309.512$$

又支間 l , 彎曲に對する剛性率 EJ , 單位長質量 ρA なる橋桁の自己振動數は

$$n_b = \frac{\pi}{2l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho A}}$$

にて與へらる。故に

$$EJ = \frac{4l^4}{\pi^2} n_b^2 \rho A = 12430.33 \times 10^4$$

$$b = \frac{EJ\pi^4}{\rho A l^4 + 2Mn^2} = 335.446$$

$$c = \frac{2k}{\rho A l + 2Mn} = 43.9382$$

$$w = \frac{2(W_s + W_n)}{\rho A l + 2Mn} = 1.81457$$

又

$$Mr = \frac{P}{\sigma^2} = \frac{P}{(2\pi n)^2} = 0.0151982 \quad (n: \text{側輪毎秒回轉數})$$

$$A = \frac{2P}{\rho A l + 2Mn} = \frac{2Mr\sigma^2}{\rho A l + 2Mn} = 0.000844727 \sigma^2$$

$$m = \frac{\pi v}{l} = \frac{\pi(Dn)}{l} = 0.182721 n$$

(2) 振動指數

茲に於て振動指數 p_1, p_2 を求めれば (I-21) 式より

$$p_1 = \sqrt{\frac{(a+b+c) + \sqrt{(a+b+c)^2 - 4ab}}{2}} = 21.5467$$

$$p_2 = \sqrt{\frac{(a+b+c) - \sqrt{(a+b+c)^2 - 4ab}}{2}} = 14.9544$$

(3) 減衰摩擦力の作用せざる場合

今減衰摩擦力の作用せざる場合を考ふるに橋桁の振動は (I-5) 式並に (II-40) 式より

$$y = \varphi \sin \frac{\pi x}{l}$$

但し

$$\begin{aligned} \varphi = & \frac{w}{[(a-m^2)(b+c-m^2)-ac]} \left[\frac{m(a-p_1^2)(p_2^2-m^2)}{p_1(p_1^2-p_2^2)} \sin p_1 t \right. \\ & \left. + \frac{m(a-p_2^2)(p_1^2-m^2)}{p_2(p_1^2-p_2^2)} \sin p_2 t + (a-m^2) \sin mt \right] \\ & + \frac{A(a-\sigma^2)}{(a-\sigma^2)(b+c-m^2)-ac} \sin \sigma t \sin mt \\ = & f_1 \sin p_1 t + f_2 \sin p_2 t + f_3 \sin mt + f_4 \sin \sigma t \sin mt \end{aligned}$$

にて表はされる。今これ等 f_1, f_2, f_3, f_4 の値を計算すれば

(a)

$$f_1 = \frac{wm(a-p_1^2)(p_2^2-m^2)}{[(a-m^2)(b+c-m^2)-ac]p_1(p_1^2-p_2^2)}$$

$$\doteq \frac{wmp_2^2(a-p_1^2)}{abp_1(p_1^2-p_2^2)} = -0.0000\ 2131\ 84\ n$$

上式より側輪回転数 n と f_1 との関係を計算すれば第一表の如くなる。

(b)

$$f_2 = \frac{wm(a-p_2^2)(p_1^2-m^2)}{[(a-m^2)(b+c-m^2)-ac]p_1(p_1^2-p_2^2)}$$

$$\doteq \frac{wmp_1^2(a-p_2^2)}{abp_2(p_1^2-p_2^2)} = 0.0000\ 3451\ 88\ n$$

上式より側輪回転数 n と f_2 との関係を計算すれば第二表の如くなる。

第 一 表

側輪回転数 n	f_1 (米)
1	(-) 0.0000 2132
2	(-) 0.0000 4264
3	(-) 0.0000 6396
4	(-) 0.0000 8527
5	(-) 0.0001 066

第 二 表

側輪回転数 n	f_2 (米)
1	(+) 0.0000 3452
2	(+) 0.0000 6904
3	(+) 0.0001 036
4	(+) 0.0001 381
5	(+) 0.0001 726

(c)

$$f_3 = \frac{w(a-m^2)}{(a-m^2)(b+c-m^2)-ac} \doteq \frac{w}{b} = 0.0054\ 094$$

(d)

$$f_4 = \frac{A(a-\sigma^2)}{(a-\sigma^2)(b+c-\sigma^2)-ac} = \frac{0.0003\ 4472\ 7(-\sigma^4+309.512\sigma^2)}{(\sigma^4-687.895\sigma^2+103\ 824)}$$

今上式を計算して f_4 を求めれば第三表の如くなる。

第 三 表

側輪回転数 n	f_4 (米)	側輪回転数 n	f_4 (米)
1.0	(+) 0.0000 4698	3.2	(+) 0.0012 183
1.5	(+) 0.0001 334	3.4	(+) 0.0125 79
2.0	(+) 0.0004 099	3.43	(±) ∞
2.2	(+) 0.0011 097	3.6	(-) 0.0028 127
2.38	(±) ∞	3.8	(-) 0.0013 969
2.4	(-) 0.0072 217	4.0	(-) 0.0010 27
2.6	(-) 0.0004 596	4.5	(-) 0.0006 996
2.8	0	5.0	(-) 0.0005 777
3.0	(+) 0.0003 910		

猶参考の爲 $f' = \frac{d}{b - \sigma^2} = 0.000344727 \frac{\sigma^2}{335.446 - \sigma^2}$

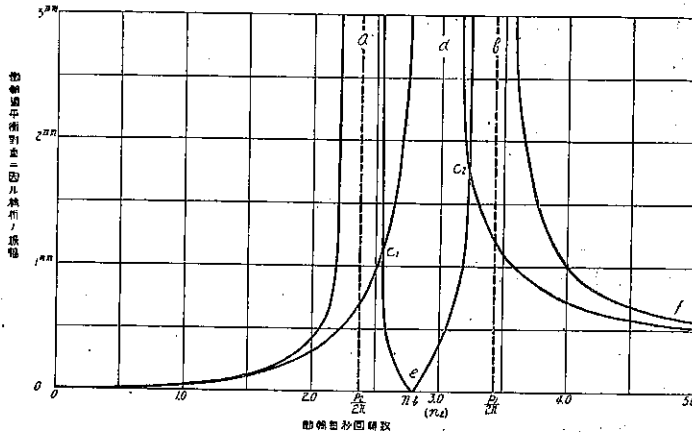
の値を計算すれば第四表の如し

第 四 表

働輪回轉數 n	f' (米)	働輪回轉數 n	f' (米)
1.0	(+) 0.00004598	3.2	(-) 0.002025
1.5	(+) 0.0001242	3.6	(-) 0.001001
2.0	(+) 0.0003066	4.0	(-) 0.0007351
2.4	(+) 0.0007255	4.5	(-) 0.0005940
2.8	(+) 0.004114	5.0	(-) 0.0005222
3.0	(±) ∞		

今第三表、第四表の値(絶対値を採る)をプロットすれば第一圖の如くなる。圖中 $oacbf$ は $v=0$ の場合に於ける橋桁の振幅を表はし odf は $v=\infty$ の場合の橋桁の振幅を表はすものである。これに依り彈機に作用する摩擦力が零なる場合と無限大なる場合とは橋桁の振動性態に甚だしき相違のある事が判る。

第 一 圖



(4) 減衰摩擦力の作用する場合

次に減衰摩擦力の作用する場合を考ふるに f_1, f_2, f_3 は減衰摩擦力に依りて大なる影響を受けざるを以て前記計算をその儘用ふ。 f' を計算するには (II-62) 式を用ふればよいのであつて、今

$\mu = 1.00$

$v = 30.00$

とすれば

$\xi = \frac{\mu l}{\rho A l + 2M_n} = 0.83924$

$\zeta = \frac{v}{M_s} = 4.90501$

故に (II-63) 式より F_n, F_a を求むれば

$$F_n = \frac{4M^2 r^2}{(\rho A l + 2Mn)^2} [\sigma^8 - (2a - \xi^2)\sigma^6 + a^2\sigma^4] = (0.000344727)^2 [\sigma^8 - 594.963\sigma^6 + 95797.059\sigma^4]$$

$$F_a = \sigma^8 - [2(a+b+c) - a(\xi^2 + \zeta^2)]\sigma^6 + [(a+b+c)^2 + 2ab + \xi^2\zeta^2 - 2a\xi^2 - 2b\zeta^2 + 2c\xi\zeta]\sigma^4$$

$$- [2ab(a+b+c) - (a^2\xi^2 + b^2\zeta^2)]\sigma^2 + a^2b^2$$

$$= \sigma^8 - 1351.026\sigma^6 + 664641.4\sigma^4 - 1400656 \times 10^2 \sigma^2 + 1077947 \times 10^4$$

を得。これより σ 従つて働輪毎秒回転数 n と F_n, F_a との關係を計算しその値を (II-62) 式に代入すれば第五表の如く f'_i の値を求め得。

第 五 表			
働輪回転数 n	f'_i (米)	働輪回転数 n	f'_i (米)
1	0.0004268	3.2	0.001266
1.5	0.0001329	3.4	0.001802
2.0	0.0003775	3.6	0.001559
2.2	0.0006516	3.8	0.001184
2.4	0.0009401	4.0	0.0009545
2.6	0.0007605	4.5	0.0006867
2.8	0.0004601	5.0	0.0005784
3.0	0.0007901		

(5) 最大振幅

最大振幅は第五表より $\sigma = p_1 (= 21.5467)$ の近所なる事が判る。今最大振幅を與へる回転角速度を

$$\sigma = p_1 + h_1$$

と置き h_1 を求めんとするに (II-65) 式より

$$[F_n]_{\sigma=21.5467} = \frac{4M^2 r^2}{(\rho A l + 2Mn)^2} [\sigma^8 - (2a - \xi^2)\sigma^6 + a^2\sigma^4]_{\sigma=21.5467}$$

$$= 0.000344727^2 \times 7569025 \times 10^3$$

$$[F_n']_{\sigma=21.5467} = \frac{4M^2 r^2}{(\rho A l + 2Mn)^2} [8\sigma^7 - 6(2a - \xi^2)\sigma^5 + 4a^2\sigma^3]$$

$$= 0.000344727^2 \times 4553305 \times 10^3$$

$$[F_n'']_{\sigma=21.5467} = \frac{4M^2 r^2}{(\rho A l + 2Mn)^2} [56\sigma^6 - 30(2a - \xi^2)\sigma^4 + 12a^2\sigma^2]$$

$$= 0.000344727^2 \times 2288369 \times 10^3$$

又

$$[F_a]_{\sigma=21.5467} = \sigma^8 - [2(a+b+c) - a(\xi^2 + \zeta^2)]\sigma^6$$

$$+ [(a+b+c)^2 + 2ab + \xi^2\zeta^2 - 2a\xi^2 - 2b\zeta^2 + 2c\xi\zeta]\sigma^4$$

$$- [2ab(a+b+c) - (a^2\xi^2 + b^2\zeta^2)]\sigma^2 + a^2b^2$$

$$= 242972 \times 10^3$$

$$[F_a']_{\sigma=21.5467} = 8\sigma^7 - 6[2(a+b+c) - a(\xi^2 + \zeta^2)]\sigma^5$$

$$+ 4[(a+b+c)^2 + 2ab + \xi^2\zeta^2 - 2a\xi^2 - 2b\zeta^2 + 2c\xi\zeta]\sigma^3$$

$$- 2[2ab(a+b+c) - (a^2\xi^2 + b^2\zeta^2)]\sigma$$

$$= 161669 \times 10^3$$

$$\begin{aligned}
 [F_a'']_{\sigma=21.5467} &= 56\sigma^6 - 30[2(a+b+c) - (\xi^2 + \zeta^2)]\sigma^4 \\
 &\quad + 12[a+b+c]^2 + 2ab + \xi^2\zeta^2 - 2a\xi^2 - 2b\zeta^2 + 2c\xi\zeta\sigma^2 \\
 &\quad - 2[2ab(a+b+c) - (a^2\xi^2 + b^2\zeta^2)] \\
 &= 850694 \times 10^3
 \end{aligned}$$

故に (II-66) 式より

$$h_1 = - \left[\frac{F_n' F_a - F_n F_a'}{F_n'' F_a - F_n F_a''} \right]_{\sigma=21.5467} = 0.001995$$

$$\therefore \sigma = 21.5467 + 0.001995 = 21.5487$$

これより $\sigma = 21.5487$ に於ける振幅を求むるに (II-62) 式より

$$\begin{aligned}
 f_4'(\sigma=21.5487) &= \left[\frac{4\sqrt{(a-\sigma^2)^2 + \xi^2\sigma^2}}{\sqrt{[(a-\sigma^2)(b+c-\sigma^2) - ac - \xi\zeta\sigma^2]^2 + \sigma^2[\xi(a-\sigma^2) + \zeta(b-\sigma^2)]^2}} \right]_{\sigma=21.5487} \\
 &= 0.001815
 \end{aligned}$$

を得。この値と第五表より側輪毎
秒回轉數と側輪過平衡對重に因る
橋桁振幅との關係をプロットすれ
ば第二圖太線の如く表はさる。(他
の線は第一圖に於ける f_4 及び f'
の値を示すものとす)。又第二圖よ
り明かなるが如く p_1 に對應する
振幅 $f_4'(\sigma=p_1)$ は p_2 に對應する
振幅 $f_4'(\sigma=p_2)$ に比して大となり
結局絶對最大振幅は $f_4'(\sigma=p_1)$ と
なるのである。

猶近似式 (II-67) 式によつて最
大振幅を計算すれば

$$f_4'(\sigma=p_1) = \left[\frac{4\sqrt{(a-\sigma^2)^2 + \xi^2\sigma^2}}{\sqrt{\xi^2\zeta^2\sigma^4 + \sigma^2[\xi(a-\sigma^2) + \zeta(b-\sigma^2)]^2}} \right]_{\sigma=21.5467} = 0.001815$$

これは正確なる方法に依つて求めし値と一致するのである。

(6) 減衰摩擦力が橋桁最大振幅に及ぼす影響

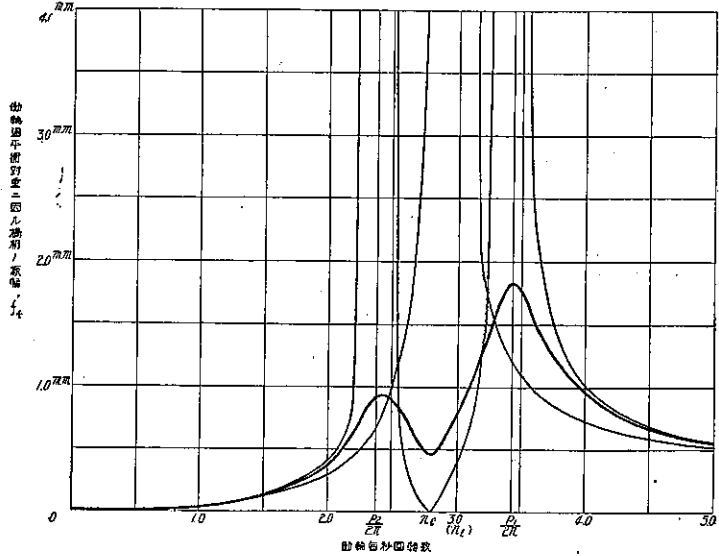
普通に存在する減衰摩擦力の範圍内にあつては過平衡對重に因る橋桁の最大振幅は (II-67) 式

$$f_4'(\sigma=p_1 \text{ 又は } p_2) = \left[\frac{4\sqrt{(a-\sigma^2)^2 + \xi^2\sigma^2}}{\sqrt{\xi^2\zeta^2\sigma^4 + \sigma^2[\xi(a-\sigma^2) + \zeta(b-\sigma^2)]^2}} \right]_{\sigma=p_1 \text{ 又は } p_2}$$

に依つて計算さる。今

μ	0	0.5	1.0	1.5	2.0
$\xi = \frac{\mu l}{\rho A l + 2M_n}$	0	0.41962	0.83924	1.25886	1.67848

第 二 圖



及び

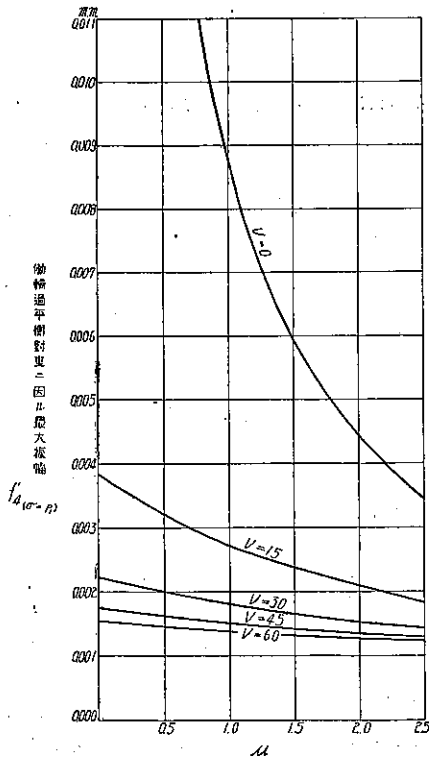
v	0	15	30	45	60
$\xi = \frac{v}{M_s}$	0	2.4525	4.9050	7.3575	9.8100

の場合に就て $f'_d (\sigma = 2) = 21.5407$ の値を計算すれば第六表の如くなる。

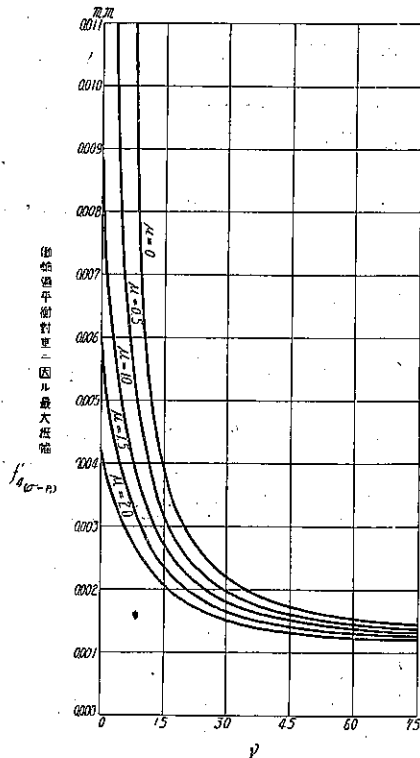
第六表 働輪過平衡對重に因る橋桁の最大振幅 $f'_d (\sigma = v_1)$ (米)

μ \ / \ v	0	15	30	45	60
0	∞	0.0038 44	0.0022 03	0.0017 36	0.0015 40
0.5	0.0177 0	0.0031 83	0.0019 90	0.0016 22	0.0014 61
1.0	0.0088 55	0.0027 11	0.0018 15	0.0015 16	0.0013 85
1.5	0.0059 00	0.0023 58	0.0016 70	0.0014 19	0.0013 13
2.0	0.0044 25	0.0020 85	0.0015 31	0.0013 31	0.0012 44

第三圖



第四圖



これをグラフに表せば第三圖、第四圖の如くなり之に依つて橋桁及び彈機に作用する減衰摩擦力に依つて最大振幅が如何に影響されるかを察知せらる。

(7) 橋桁撓みの動的増加

蒸気機関車が橋桁上を疾走せる場合減衰摩擦力を無視すれば橋桁中央部の振動は

$$y = f_1 \sin p_1 t + f_2 \sin p_2 t + f_3 \sin mt + f_4 \sin \sigma t \sin mt$$

にて表はされた。 f_1, f_2, f_3 は減衰摩擦力に由つて殆んど影響を受けざるを以て減衰摩擦力を考へる場合の橋桁中央部の振動は

$$y = f_1 \sin p_1 t + f_2 \sin p_2 t + f_3 \sin mt + f_4' \sin \sigma t \sin mt$$

にて表はす事が出来る。但し f_4' は減衰摩擦力を考へた場合の側輪過平衡對重に因る橋桁中央部の振幅を表はすものである。本式に於て橋桁中央部の最大撓みはこれ等各振幅の絶対値の和と考へ得るが故に

$$f = |f_1| + |f_2| + |f_3| + |f_4'|$$

$$= 0.00002132n + 0.00003452n + 0.0054094 + |f_4'|$$

前式に於て $|f_3|$ は橋桁中央部の静的撓みを表はすを以て走行蒸気機関車に因る橋桁撓みの動的増加は

$$\Delta f = 0.00002132n + 0.00003452n + |f_4'|$$

にて與へらる。今橋桁最大撓みを生ずる側輪角速度 $\sigma = p_1 = 21.5467$ に對する Δf を計算すれば

$$n_{(\sigma=p_1)} = \frac{p_1}{2\pi} = 3.42915$$

$$\therefore \Delta f_{(\sigma=p_1)} = 0.0001915 + |f_4'|_{(\sigma=p_1)}$$

であつて $|f_4'|_{(\sigma=p_1)}$ は第六表より求められる。故に上式及び第六表より種々の $\mu\nu$ に對する $\Delta f_{(\sigma=p_1)}$ を計算すれば第七表の如くなる。

第七表 橋桁撓みの動的増加 $\Delta f_{(\sigma=p_1)}$ (米)

$\mu \backslash \nu$	0	15	30	45	60
0	∞	0.004036	0.002395	0.001928	0.001732
0.5	0.01789	0.003375	0.002182	0.001814	0.001652
1.0	0.009047	0.002903	0.002007	0.001708	0.001577
1.5	0.006092	0.002550	0.001862	0.001611	0.001505
2.0	0.004617	0.002277	0.001723	0.001523	0.001436

第七表より動的増加と静的撓みとの比を求めれば第八表の如くなる。

第八表

$\mu \backslash \nu$	0	15	30	45	60
0	∞	74.61%	44.27%	35.64%	32.02%
0.5	330.7%	62.39%	40.34%	33.53%	30.56%
1.0	167.2%	53.67%	37.10%	31.57%	29.15%
1.5	112.6%	47.14%	34.42%	29.78%	27.82%
2.0	85.35%	42.09%	31.85%	28.15%	26.55%

第八表の値をプロットすれば第五圖の如くなる。

2. 橋桁自己振動数が機關車自己振動數に比し小なる場合

(1) データ

(a) 橋 桁

支 間 $l=95$ 米

總死荷重 $W_b=1800$ 吨

$$\therefore \rho A = \frac{W_b \cdot g}{l} = 1.3949 \text{ 吨質量}$$

自己振動數 $n_b=2.55$

$$\therefore EJ = \frac{4\rho A n_b^2 l}{\pi^2} = 299442 \times 10^3 \text{ [米}^2 \cdot \text{[吨]$$

(b) 機 關 車

1. の場合と同じ

(c) これ等の資料より計算に必要な數値を求めれば(單位は總て米, 吨, 秒) 次の如くなる。

$$a = 309.513 \text{ (1. の場合と同じ)}$$

$$\text{又 } b = \frac{EJ\pi^4}{\rho A l^4 + 2M_n l^3} = 249.046$$

$$c = \frac{2k}{\rho A l + 2M_n} = 27.718$$

$$w = \frac{2(W_s + W_n)}{\rho A l + 2M_n} = 1.17135$$

$$A = \frac{2P}{\rho A l + 2M_n} = \frac{2M_n \sigma^2}{\rho A l + 2M_n} = 0.000222528 \sigma^2$$

(2) 振 動 指 數

$$\text{(I-21) 式より } p_1 = \frac{\sqrt{(a+b+c) + \sqrt{(a+b+c)^2 - 4ab}}}{2} = 19.677$$

$$p_2 = \frac{\sqrt{(a+b+c) - \sqrt{(a+b+c)^2 - 4ab}}}{2} = 14.109$$

振動指數 p_1, p_2 に對應する働輪の毎秒回轉數は

$$n_1 = \frac{p_1}{2\pi} = 3.1317$$

$$n_2 = \frac{p_2}{2\pi} = 2.2455$$

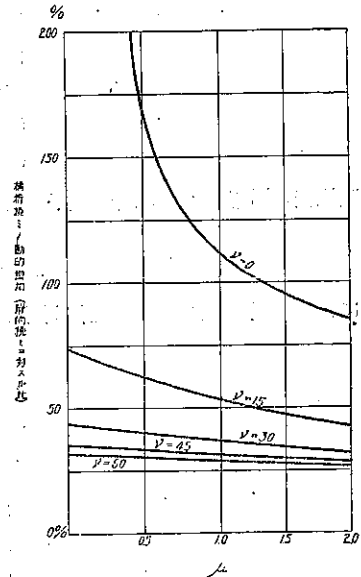
(3) 減衰摩擦力の作用せざる場合

減衰摩擦力の作用せざる場合に於ける働輪過平衡對重に因る橋桁の振幅は (I-40) 式より

$$f_s = \frac{A(\alpha - \sigma^2)}{(\alpha - \sigma^2)(b + c - \sigma^2) - ac} = \frac{0.000222528(-\sigma^4 + 309.511\sigma^2)}{\sigma^4 - 5.6275\sigma^2 + 77082.5}$$

にて與へらる。今本式を用ひて働輪回轉數 n ($= 2\pi\alpha$) と振幅との關係を計算すれば第九表の如くなる。

第 五 圖



第九表

働回轉數 n	働輪過平衡對重に因る橋桁振幅 f_n (米)	働回轉數 n	働輪過平衡對重に因る橋桁振幅 f_n (米)
1.0	(+) 0.0000 4275	2.8	0
1.4	(+) 0.0001 005	3.0	(+) 0.0007 269
1.6	(+) 0.0001 671	3.1317	(±) ∞
1.8	(+) 0.0002 801	3.2	(-) 0.0024 35
2.0	(+) 0.0005 644	3.4	(-) 0.0008 379
2.2	(+) 0.0040 59	3.6	(-) 0.0005 917
2.2455	(±) ∞	4.0	(-) 0.0004 282
2.4	(-) 0.0009 186	5.0	(-) 0.0003 149
2.6	(-) 0.0003 104		

又比較の爲 $\xi = \infty$ の場合の過平衡對重に因る振幅は

$$f' = \frac{2Mr\sigma^2}{\rho Al + 2M_n b - \sigma^2} = 0.0002 2252 8 \frac{\sigma^2}{249.046 - \sigma^2}$$

によりて與へられ、これを計算すれば第十表の如くなる。

第十表

働回轉數 n	働輪過平衡對重に因る橋桁振幅 f' (米)	働回轉數 n	働輪過平衡對重に因る橋桁振幅 f' (米)
1.0	(+) 0.0000 4192	2.6	(-) 0.0033 41
1.4	(+) 0.0000 9541	2.8	(-) 0.0011 40
1.6	(+) 0.0004 520	3.0	(-) 0.0007 444
1.8	(+) 0.0002 350	3.2	(-) 0.0005 798
2.0	(+) 0.0003 855	3.4	(-) 0.0004 900
2.2	(+) 0.0007 332	4.0	(-) 0.0003 674
2.4	(+) 0.0023 35	5.0	(-) 0.0002 977

今これ等絶対値をプロットすれば第六圖の如くなる。圖中 a, e, b, f は $v=0$ の場合に於ける橋桁の振幅を表はし c, d, f は $v=\infty$ の場合の橋桁の振幅を表はすものである。

(4) 減衰摩擦力の作用する場合

(a)

$\mu=1.0, v=30$ とすれば

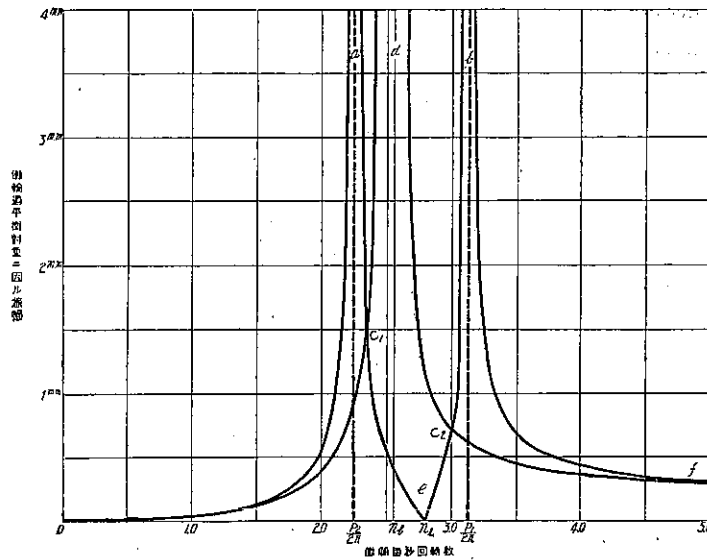
$$\xi = \frac{\mu l}{\rho Al + 2M_n} = 0.6954 87, \quad \zeta = \frac{v}{M_s} = 4.9050 1$$

故に橋桁中央部の振幅は (II-62) 式により

$$f_a' = \frac{2Mr}{\rho Al + 2M_n} \frac{\sqrt{\sigma^8 - (2a - \zeta^2)\sigma^6 + a^2\sigma^4}}{\sqrt{\sigma^8 - [2(a+b+c) - (\xi^2 + \zeta^2)]\sigma^6 + [(a+b+c)^2 + 2ab + \xi^2\zeta^2 - 2a\xi^2 - 2b\zeta^2 + 2c\xi\zeta]\sigma^4 - [2ab(a+b+c) - (a^2\xi^2 + b^2\zeta^2)]\sigma^2 + a^2b^2}}$$

$$= \frac{0.0002 2252 8 \sqrt{\sigma^8 - 594.963\sigma^6 + 95 797.1\sigma^4}}{\sqrt{\sigma^8 - 1 148.01\sigma^6 + 485 801\sigma^4 - 88 844.5 \times 10^3\sigma^2 + 5 941.71 \times 10^6}}$$

第 六 圖



にて與へらる。本式に依つて側輪回転數 $n (=2\pi\sigma)$ と振幅との關係を計算すれば第十一表の如くなる。

第 十 一 表

側輪 回 轉 數 n	側輪過平衡對重 に因る橋桁振幅 f'_s (米)	側輪 回 轉 數 n	側輪過平衡對重 に因る橋桁振幅 f'_s (米)
1.0	0.0000 3877	2.6	0.0004 800
1.4	0.0001 002	2.8	0.0005 424
1.6	0.0001 658	3.0	0.0006 727
1.8	0.0002 733	3.2	0.0007 337
2.0	0.0004 907	3.4	0.0006 339
2.2	0.0011 26	4.0	0.0004 170
2.4	0.0009 567	5.0	0.0003 137

(b) 最大振幅は $\sigma = p_2 = 14.109$ の時に起り (II-67) 式を用ひて計算すれば

$$f'_s(\sigma = p_2) = \left[\frac{4\sqrt{(a-\sigma^2)^2 + \xi^2\sigma^2}}{\sqrt{\xi^2\sigma^2 + \sigma^2[\xi(a-\sigma^2) + \xi(b-\sigma^2)]^2}} \right]_{\sigma=14.109}$$

$$= 0.001257$$

第十一表及びこれ等の結果をプロットすれば第七圖太線の如くなる (細線は第六圖と同じ)。

第七圖を見る時は p_2 に對應する振幅 $f'_s(\sigma = p_2)$ は p_1 に對應する振幅に比して大となり絶対最大振幅は結局 $f'_s(\sigma = p_2)$ となるのである。猶第一編 4, に於て中徑間の場合には山が 2 箇所あるが大徑間の場合には 1 箇所しか無いと概論的に述べたのは早計であつて本計算よりも明かなる如く矢張り中徑間同様 2 箇所ありとすべきである。茲に訂正して置く次第である。

又この場合の靜的撓度は

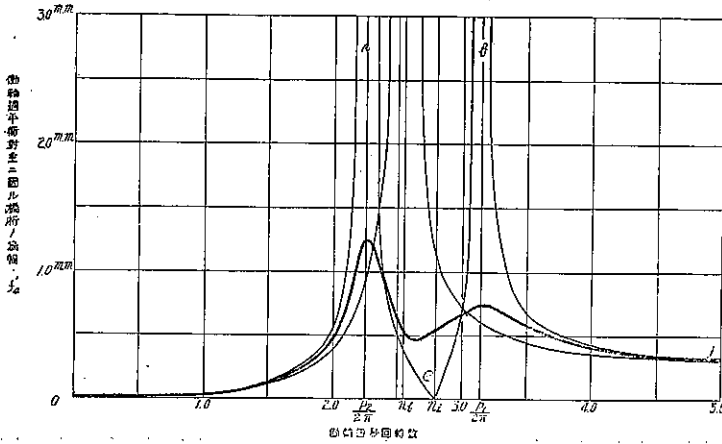
$$f'_s = \frac{w}{b} = 0.004703 \text{ 米}$$

であつて過平衡對重に因る橋桁撓度の動的増加は

$$\frac{0.001257}{0.004708} = 23.9\%$$

となるのである。

第七圖



3. 橋桁の絶対最大振幅

本編計算例より見る時は橋桁自己振動数が機關車自己振動数に比して大なる場合には p_1 に對應する振幅 $f'_d(\sigma=p_1)$ が絶対最大振幅となり橋桁自己振動数が 機關車自己振動数に比して小なる 場合には p_2 に對應する振幅 $f'_d(\sigma=p_2)$ が絶対最大振幅となつた。故に橋桁の絶対最大振幅は橋桁自己振動数と機關車自己振動数との比に關係する事が判る。又最大振幅 $f'_d(\sigma=p_1)$ 及び $f'_d(\sigma=p_2)$ の値は橋桁並に機關車彈機に作用する摩擦抵抗力に因りて甚だしく影響さるゝを以つて (1. (6) 參照) 橋桁の絶対最大振幅も摩擦抵抗力に關係する事が想像せらる。斯く橋桁の絶対最大振幅は橋桁及び機關車の自己振動数並に摩擦係數に關係するので 本節に於ては斯かる諸要素と絶対最大振幅との關係を明かにせんとするものである。今

(1) $\mu=0$ 即ち摩擦抵抗力は機關車彈機にのみ作用し橋桁には全然作用せざる場合を考ふるに

$$p_1 \text{ に對應する最大振幅は } (\mu=0)f'_d(\sigma=p_1) = \frac{\Delta\sqrt{(a-p_1^2)^2 + \xi^2 p_1^2}}{\xi p_1^2(b-p_1^2)}$$

$$p_2 \text{ に對應する最大振幅は } (\mu=0)f'_d(\sigma=p_2) = \frac{\Delta\sqrt{(a-p_2^2)^2 + \xi^2 p_2^2}}{\xi p_2^2(b-p_2^2)}$$

にて表はされる。今 $|(\mu=0)f'_d(\sigma=p_1)| \geq |(\mu=0)f'_d(\sigma=p_2)|$ なる條件を求むるためには

$$D = \frac{(a-p_1^2)^2 + \xi^2 p_1^2}{\xi^2 p_1^2(b-p_1^2)^2} - \frac{(a-p_2^2)^2 + \xi^2 p_2^2}{\xi^2 p_2^2(b-p_2^2)^2} \geq 0 \dots\dots\dots (1)$$

なる不等式を解かなければならぬ。(1) 式を直接解く事は到底不可能なるを以つて (1) 式を變形し

$$D = \left[\frac{(a-p_1^2)^2}{\xi^2 p_1^2(b-p_1^2)^2} - \frac{(a-p_2^2)^2}{\xi^2 p_2^2(b-p_2^2)^2} \right] + \left[\frac{1}{(b-p_1^2)^2} - \frac{1}{(b-p_2^2)^2} \right] \geq 0 \dots\dots\dots (2)$$

とし先づ (2) 式の各項

$$\frac{(a-p_1^2)^2}{p_1^2(b-p_1^2)^2} - \frac{(a-p_2^2)^2}{p_2^2(b-p_2^2)^2} \geq 0 \dots\dots\dots (3)$$

$$\frac{1}{(b-p_1^2)^2} - \frac{1}{(b-p_2^2)^2} \geq 0 \dots\dots\dots (4)$$

の成立する条件を求めんとす。

(a) (3) 式を變形すれば

$$\frac{(a-p_1^2)^2(b-p_2^2)^2}{(a-p_2^2)^2(b-p_1^2)^2} \geq \frac{p_1^2}{p_2^2}$$

更に上式を解くため先づ

$$\frac{(a-p_1^2)^2}{(a-p_2^2)^2} \geq \frac{p_1^2}{p_2^2}$$

の条件を求めんとするに p_1, p_2 の値を代入すれば

$$\frac{[a-b-c-\sqrt{(a+b+c)^2-4ab}]^2}{[a-b-c+\sqrt{(a+b+c)^2-4ab}]^2} \geq \frac{[a+b+c+\sqrt{(a+b+c)^2-4ab}]^2}{[a+b+c-\sqrt{(a+b+c)^2-4ab}]^2}$$

となり上式を展開整理すれば

$$a \leq b$$

なる条件式を得。故に

$$a \leq b \text{ なる時には } \frac{(a-p_1^2)^2}{(a-p_2^2)^2} \geq \frac{p_1^2}{p_2^2} \dots\dots\dots (5)$$

なる不等式が成立つ。

$$\text{又 } \frac{(b-p_2^2)^2}{(b-p_1^2)^2} \geq 1$$

の条件を求めんとするに p_1, p_2 の値を代入すれば上式は

$$[b-a-c+\sqrt{(a+b+c)^2-4ab}]^2 \geq [b-a-c-\sqrt{(a+b+c)^2-4ab}]^2$$

となりこれを展開整理すれば

$$a+c \leq b$$

なる条件式を得。故に

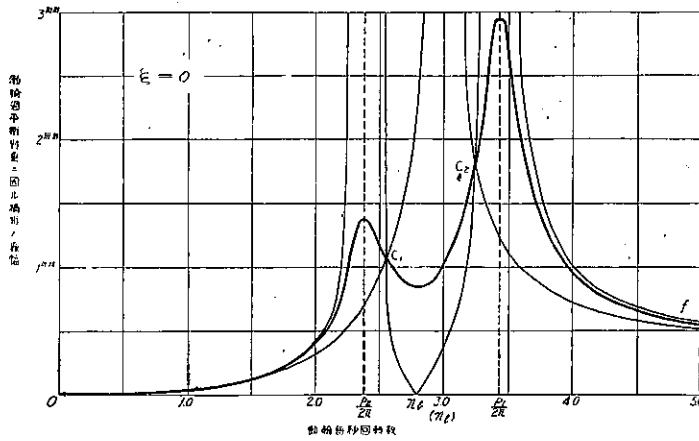
$$a+c \leq b \text{ なる時には } \frac{(b-p_2^2)^2}{(b-p_1^2)^2} \geq 1 \dots\dots\dots (6)$$

なる不等式が成立す。従つて (5) 式及び (6) 式より

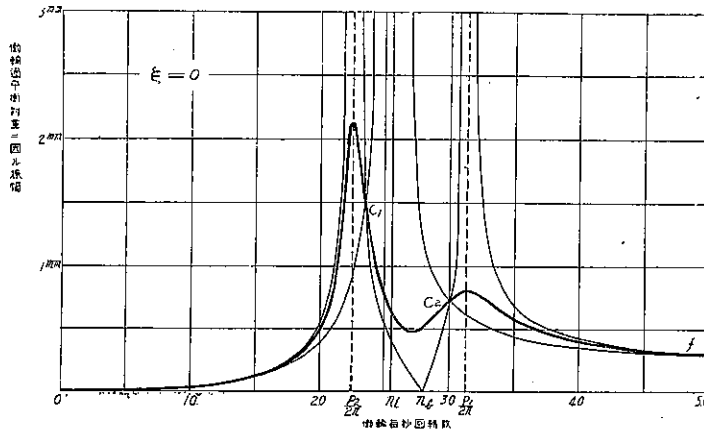
$$\left. \begin{aligned} a+c < b \text{ の時には } & \frac{(a-p_1^2)^2(b-p_2^2)^2}{(a-p_2^2)^2(b-p_1^2)^2} > \frac{p_1^2}{p_2^2} \\ \text{即ち} & \frac{(a-p_1^2)^2}{p_1^2(b-p_1^2)^2} - \frac{(a-p_2^2)^2}{p_2^2(b-p_2^2)^2} > 0 \\ a > b \text{ の時には} & \frac{(a-p_1^2)^2(b-p_2^2)^2}{(a-p_2^2)^2(b-p_1^2)^2} < \frac{p_1^2}{p_2^2} \\ \text{即ち} & \frac{(a-p_1^2)^2}{p_1^2(b-p_1^2)^2} - \frac{(a-p_2^2)^2}{p_2^2(b-p_2^2)^2} < 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

なる不等式が成立する。

第 八 圖



第 九 圖



(b) (4) 式の成立する条件を求むるに (6) 式と全然同じで

$$a+c \geq b \text{ なる時には } \frac{1}{(b-p_1^2)^2} - \frac{1}{(b-p_2^2)^2} \geq 0 \dots\dots\dots (8)$$

なる不等式が成立する。斯くして (7) 式並に (8) 式より

$$\left. \begin{aligned} a+c < b \text{ の時には (第八圖参照) } D > 0 \\ \text{即ち } |(\mu=0)f'_a(\sigma=p_1)| > |(\mu=0)f'_a(\sigma=p_2)| \\ a < b \text{ の時には (第九圖参照) } D < 0 \\ \text{即ち } |(\mu=0)f'_a(\sigma=p_1)| < |(\mu=0)f'_a(\sigma=p_2)| \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

なる不等式が成立する。上式中 c は a, b に比して小なる数なれば大體論としては橋桁に摩擦抵抗力の作用せざる場合には橋桁自己振動数が機關車自己振動数に比して大なる場合には p_1 に對する振幅 $(\mu=0)f'_a(\sigma=p_1)$ が絶対最大振幅となり、橋桁自己振動数が機關車自己振動数に比して小なる場合には p_2 に對應する振幅 $(\mu=0)f'_a(\sigma=p_2)$ が絶対最大振幅となる。

(2) 次に $\nu=0$ 即ち摩擦抵抗力は橋桁にのみ作用し機關車彈機には全然作用しない場合を考ふるに第二編 6.(a) により

$$\frac{(\mu=0)f_4'(\sigma=p_1)}{(\mu=0)f_4'(\sigma=p_2)} = \frac{p_1}{p_2}$$

にして常に

$$|(v=0)f_4'(\sigma=p_1)| > |(v=0)f_4'(\sigma=p_2)| \dots\dots\dots(10)$$

なる關係が成立つ (第二編第二圖参照)。

(3) 一般の場合は (1) と (2) との結合した場合であつて (9) 式及び (10) 式より

- (a) $a+c < b$ の場合には常に $|f_4'(\sigma=p_1)| > |f_4'(\sigma=p_2)|$ なる關係が成立つ
- (b) $a > b$ の場合には摩擦係數の關係に由り
 - (i) $\mu \ll v$ なる時には $|f_4'(\sigma=p_1)| < |f_4'(\sigma=p_2)|$
 - (ii) $\mu \ll v$ なる時には $|f_4'(\sigma=p_1)| > |f_4'(\sigma=p_2)|$

なる關係が成立つ、故に橋桁自己振動數が大體機關車自己振動數に比して大なる場合には常に $f_4'(\sigma=p_1)$ が絶対最大振幅になると雖も (第二圖参照) 橋桁自己振動數が機關車振動數に比して小なる場合には橋桁並に機關車彈機に作用する摩擦係數によつて $f_4'(\sigma=p_1)$, $f_4'(\sigma=p_2)$ の大小が決るのである。然れども普通橋桁の摩擦抵抗力は機關車彈機の摩擦係數力に比して甚だしく小なれば橋桁自己振動數が機關車自己振動數に比して小なる場合には $f_4'(\sigma=p_2)$ が絶対最大振幅となるのである (第七圖参照)。

4. 附 記

本理論は蒸氣機關車彈重暈と橋桁とは彈機を通じて關聯的に振動するとの假定より出發せるもので理論並に計算例より明かなる如く次の如き結果に達した。

(1) 橋桁の振幅を最大ならしむるが如き機關車の側輪毎秒回轉數は $n_1 = \frac{p_1}{2\pi}$, $n_2 = \frac{p_2}{2\pi}$ の 2 箇所ある事 (第二圖及び第七圖参照, この側輪危險毎秒回轉數は橋桁並に機關車に作用する摩擦抵抗力に依りて變化するも普通に存在する摩擦抵抗力の範圍内にあつては變化なしと假定するも支障なし)。

(2) 側輪危險毎秒回轉數 $n_1 = \frac{p_1}{2\pi}$ は橋桁及び機關車何れの振動數よりも大にして $n_2 = \frac{p_2}{2\pi}$ は橋桁及び機關車何れの振動數よりも小である。

(3) 橋桁自己振動數が大體機關車自己振動數に比して大なる場合 (中徑間) には機關車側輪毎秒回轉數が n_1 に達せる時橋桁の振幅は絶対最大となり橋桁自己振動數が機關車自己振動に比して小なる場合 (大徑間) にして機關車彈機の摩擦係數が橋桁摩擦係數に比して大なる時には (これが普通の場合) 機關車側輪毎秒回轉數が n_2 に達せる時橋桁の振幅は絶対最大に達す。

今これ等の結果を英國の Bridge Stress Committee (1928) の報告せる實驗記錄 (第一編第一圖参照) と比較する時はその趣の全く合致するを見るので以つて本理論の妥當性を證して餘りありと私は信ずるものである。又本理論を活用する事によつて走行蒸氣機關車に因る橋桁強制振動に關する諸性質を一層深く解析する事が出来るのである。幸に先輩諸賢の御叱正を乞ふて已まざる次第である。