

## 論 説 報 告

第十九卷第十二號 昭和八年十二月

## 走行蒸氣機關車に因る橋桁強制振動の理論

## 第二編

## 橋桁及機關車彈機に減衰摩擦力の作用する場合

准員 工 學 士 小 澤 久 太 郎

Theory of the Forced Vibration of a Bridge  
caused by the Passage of a Locomotive.

By Kyutaro Ozawa, C. E., Assoc. Member.

## 内 容 梗 概

本編は第一編（第十九卷第九號所載）に続き橋桁及び機關車彈機に摩擦力の作用する場合の橋桁及び機關車の振動理論を導いたものである。

## 1. 緒 論

本誌第十九卷第九號所載、拙著“走行蒸氣機關車に因る橋桁強制振動の理論（第一編）”に於て橋桁並に蒸氣機關車の振動式を導いたが減衰摩擦力を無視せるが爲、側輪回轉角速度が

$$\sigma = \sqrt{\frac{(a+b+c) \pm \sqrt{(a+b+c)^2 - 4ab}}{2}}$$

なる値に達せる時振幅が無限大になるとの結論に達した。従つて橋桁及び機關車の振動性態を知るには充分であるが、最大振幅を知る事能はず、衝撃係数を算定する事は不可能であつた。本論に於ては斯かる不便を取除く爲減衰摩擦力を考へ入れたる振動式を導かんとするものである。

## 2. 減 衰 摩 擦 力

## (a) 橋桁に作用する減衰摩擦力

橋桁に作用する減衰摩擦力としては橋桁材料の内部摩擦力、支承部に於ける摩擦抵抗力、橋桁鎮結部に於ける摩擦抵抗力及び空氣抵抗力等を擧げる事が出来る。これ等の諸抵抗力が橋桁の減衰振動に如何に關係するかは困難なる問題ではあるが、<sup>(1)</sup>本編に於ては考へる必要はない。唯本編に於てはこれ等諸抵抗力に依りて橋桁が如何なる形

<sup>(1)</sup> 棒の減衰振動に關しては

物部長穂；“塔狀構造物の震動並に其耐震性に就て”。土木學會誌第五卷第三號 639 頁

H. Holzer；“Biegungsschwingungen mit Berücksichtigung der Stabmasse und der äusseren und inneren Dämpfung”，Z.A.M.M. 8 (1928) S. 272.

末廣恭二；“On the damped Transversal Vibration of Prismatic Bars”，東大地震研究所彙報 6 (1929) 63 頁

K. Muto；“Biegungsschwingungen mit Berücksichtigung der Stabmasse und der äusseren und inneren Dämpfung”，Z.A.M.M. 10 (1930) S. 346.

の減衰振動を爲すかを見れば足りるのである。

今橋桁の自由減衰振動を記録せしむれば第一圖の如くなり

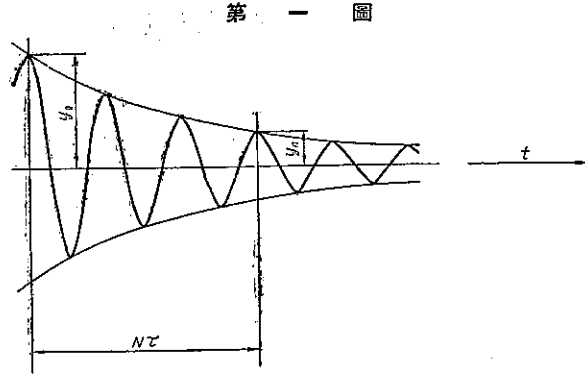
- $y_0$ : 最初の振幅
- $y_n$ :  $N$  番目の振幅
- $\tau$ : 週期

とすれば

$$\delta = \frac{\lg y_0 - \lg y_n}{N\tau}$$

は或る橋桁に就ては大體一定なるを知るのである。(2) 故に

$$\left(\frac{y_n}{y_0}\right) = e^{-\delta N\tau} \dots \dots (1)$$



となり、橋長各單位長に作用する減衰摩擦抵抗力は速度に正比例し

$$f' = -\mu \frac{\partial y}{\partial t} \dots \dots \dots (2)$$

と置き得。係數  $\mu$  は實驗より決定すべき値であつて今單位長質量  $\rho A$ 、彎曲に對する剛性率  $EJ$  共に一定なる支間となる桁が、橋長各單位長に  $f' = -\mu \frac{\partial y}{\partial t}$  なる減衰抵抗力を受けて振動する際の微分方程式は

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial y}{\partial t} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \dots \dots \dots (3)$$

にて表はさる。(3) 式を解くために

$$y = X(x) T(t) \dots \dots \dots (4)$$

但し  $X(x)$ :  $x$  のみの函數

$T(t)$ :  $t$  のみの函數

と置いて (3) 式に代入すれば

$$\frac{1}{X} \frac{d^4 X}{dx^4} + \frac{\mu}{EJ} \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} + \frac{\rho A}{EJ} \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = 0 \dots \dots \dots (5)$$

又橋梁の減衰振動に關しては

物部長穂; “橋桁の振動並に其の衝撃作用との關係に就て”, 土木學會誌第十卷第一號 119 頁

Streletzky; “Die Stosswirkung bewegter Last auf Brücken”, Bericht über die II International Tagung für Brückenbau und Hochbau (1929) S. 84.

Gg. Reutlinger; “Dynamische Untersuchung von Brücken und Hochbauten,” Publications of the International Association for Bridge and Structural Engineering, Vol. 1 (1932) p. 387.

(2) 筆者は鐵道橋に就ては何等の資料を有しないが道路橋に就て測定の結果に依れば、大和根橋（國道六號線我孫子町取手町立合、曲弦ワレン構、支間 62 米、構中心間距離 8.5 米、死荷重 6.33 噸/橋長米、昭和 7 年 5 月 18 日測定）にあつては  $\delta = 0.35$ 、水府橋（國道六號線水戸市川田村立合、曲弦ワレン構、支間 56 米、幅員車道 6 米、歩道各 2 米、死荷重 8.77 噸/橋長米、昭和 7 年 5 月 7 日測定）にあつては  $\delta = 0.21$ 。

モスコウの Streletzky は支間 25 米乃至 100 米の橋梁にあつては製作維持良好なる場合には  $\delta = 0.5 \sim 1.0$ 、製作維持良好ならざる場合には  $\delta = 1.5 \sim 2.0$  なる値を擧げて居る (Bericht über die II International Tagung für Brückenbau und Hochbau, (1929) S. 104).

となり (5) 式を解く事は各

$$\frac{1}{X} \cdot \frac{d^4 X}{dx^4} = m^4 \dots\dots\dots (6)$$

$$\frac{\mu}{EJ} \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} + \frac{\rho A}{EJ} \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = -m^4 \dots\dots\dots (7)$$

を解けば良いのである。(6) 式の一般解は

$$X = A \cos mx + B \sin mx + H \cosh mx + K \sinh mx \dots\dots\dots (8)$$

であつて両端ヒンジの条件即ち

$$\begin{aligned} x=0; & \quad X=0, & \quad \frac{d^2 X}{dx^2} = 0 \\ x=l; & \quad X=0, & \quad \frac{d^2 X}{dx^2} = 0 \end{aligned}$$

を代入すれば

$$\left. \begin{aligned} A=H=K=0 \\ B \neq 0 \\ ml = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots\dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

であつて (8) 式及び (9) 式より

$$X = B \sin mx \dots\dots\dots (10)$$

を得。(7) 式を解くには

$$T = u e^{\lambda t} \dots\dots\dots (11)$$

但し  $u, e^{\lambda t}$  は共に  $t$  のみの函数

と置いて (7) 式に代入すれば

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \left(2\lambda + \frac{\mu}{\rho A}\right) \frac{du}{dt} + \left(\lambda^2 + \frac{\mu}{\rho A} \lambda + \frac{EJm^4}{\rho A}\right) u = 0 \dots\dots\dots (12)$$

(12) 式中に於て

$$\lambda = -\frac{\mu}{\rho A} \dots\dots\dots (13)$$

と置けば (12) 式は

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \left(-\frac{\mu^2}{4\rho^2 A^2} + \frac{EJm^4}{\rho A}\right) u = 0$$

となり上式は普通の単弦運動である。今

$$-\frac{\mu^2}{4\rho^2 A^2} + \frac{EJm^4}{\rho A} = n^2 \dots\dots\dots (14)$$

と置けば

$$u = a \cos(nt + \varepsilon) \dots\dots\dots (15)$$

従つて  $T$  の解としては

$$T = ae^{-\frac{\mu}{\rho A} t} \cos(nt + \varepsilon) \dots\dots\dots (16)$$

(3) J. Prescott; Applied Elasticity (London, 1924) p. 210.

を得。(10) 式及び (16) 式より微分方程式 (3) 式の解としては

$$y = A' \sin \frac{m\pi}{l} e^{-\frac{\mu}{2\rho A} t} \cos \left( \sqrt{\frac{EJm^4}{\rho A} - \frac{\mu^2}{4\rho^2 A^2}} t + \varphi \right) \dots\dots\dots (17)$$

を得るのである。今  $m = \frac{\pi}{l}$ 、最初の振幅を  $y_0$ 、 $N$  番目の振幅を  $y_n$  とし、週期を  $\tau$  とすれば (17) 式より

$$\left. \begin{aligned} y_0 &= A' \\ y_n &= A' e^{-\frac{\mu}{2\rho A} N\tau} \\ \frac{y_n}{y_0} &= e^{-\frac{\mu}{2\rho A} N\tau} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

故に

(1) 式及び (18) 式より  $\mu$  は

$$\mu = 2\rho A \delta \dots\dots\dots (19)$$

にて計算さる。(4)

(b) 機関車弾機に作用する減衰摩擦力

機関車弾機に作用する減衰摩擦力は弾機各葉間の摩擦、弾機材料の内部摩擦力及び空気抵抗等に分つ事が出来る。これ等諸抵抗力の中弾機各葉間の摩擦抵抗力が相當大なる影響を與へ、(6) 橋桁の減衰振動に比して甚だしく摩擦減衰振動(6)に近き振動を現はすと雖も工學的には對數減衰振動と看做す事を得。

然らば摩擦抵抗力は (2) 式と同様に

$$f'' = -v \frac{\partial x}{\partial t} \dots\dots\dots (20)$$

にて表はす事を得。今  $M_s = \frac{W_s}{g}$  なる質量が弾係數  $k$  なる弾機上に載り、且つ弾機に  $f''$  なる摩擦抵抗力が作用するとすれば振動の方程式は

$$M_s \frac{d^2 x}{dt^2} + v \frac{dx}{dt} + kx = 0 \dots\dots\dots (21)$$

(4) 例へば大和根橋にあつては

$$\mu = 2 \times \frac{6.33}{9.81} \times 0.35 = 0.45 \quad (\text{單位; 米, 噸, 秒})$$

水府橋にあつては

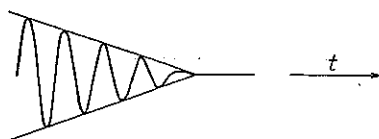
$$\mu = 2 \times \frac{8.77}{9.81} \times 0.21 = 0.38 \quad (\quad \quad \quad)$$

(脚註 (2) 参照)

(5) G. Marié; Les dénivellements de la Voie et les Oscillations du Materiel des Chemins de Fer.

福島縫次郎; “鐵道車輛の動搖に就て” 機械學會誌, 第二十二卷第五六號

(6) 摩擦減衰振動は下圖の如く振幅が直線狀に減衰して行く。



摩擦減衰並に對數減衰強制振動に關しては J. P. Den Hartog; “Forced Vibrations with Combined Viscous and Coulomb Damping,” Phil. Mag. (1930) p. 81. 参照。

にて表はされ、更に上式中に於て  $v^2 < 4kM_s$  とすれば (21) 式の解は (7) 式と全然同様に

$$x = C e^{-\frac{v}{2M_s} t} \cos \left( \sqrt{\frac{k}{M_s} - \frac{v^2}{4M_s^2}} t + \epsilon' \right) \dots\dots\dots (22)$$

にて與へらる。斯くして (19) 式と同様の考へに由り  $v$  は

$$v = 2M_s \delta' \dots\dots\dots (23)$$

に由つて計算さる。(7) 但し  $\delta'$  は振動記録より求めし、

$$\delta' = \frac{1}{N\tau} \lg \left( \frac{y_0}{y_n} \right) \dots\dots\dots (24)$$

を示すものとす。

### 3. 微分方程式

前編と等しく橋桁及び蒸氣機關車振動の微分方程式は

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{1}{2} \rho A l + M_n \right) \ddot{\varphi} + \left( \frac{1}{2} \frac{EJ\pi^4}{e^3} + k \right) \varphi - k\psi = \Theta_\varphi \\ M_s \ddot{\psi} + k\psi - k\varphi = \Theta_\psi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

にて與へらる。(8) 前編に於ては橋桁及び機關車彈機之減衰摩擦力は全然考慮せざるを以て一般力は

$$\left. \begin{aligned} \Theta_\varphi' = (W_s + W_n + P \sin \sigma t) \sin \frac{\pi x}{l} \\ \Theta_\psi' = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

にて表はされた。然るに本編に於ては減衰摩擦力を考へに入る  $\mu$  を以て (25) 式に於ける一般力の中には (26) 式の外に減衰力に因る一般力をも加へねばならぬ。

(a) 今橋桁に作用する減衰摩擦力に因る一般力  $\Theta_\varphi''$  を決定せんとするに橋桁單位長に作用する減衰力は (2) 式に由り

$$f' = -\mu \frac{\partial y}{\partial t} = -\mu \dot{\varphi} \sin \frac{\pi x}{l}$$

なれば座標  $\varphi$  の微小變位  $\delta\varphi$  に對して  $f'$  のなす仕事は

$$\begin{aligned} \delta A &= \int_0^l \left( -\mu \dot{\varphi} \sin \frac{\pi x}{l} \right) \left( \delta\varphi \sin \frac{\pi x}{l} \right) dx \\ &= -\frac{\mu l}{2} \dot{\varphi} \delta\varphi \dots\dots\dots (27) \end{aligned}$$

(7) 獨逸に於ける實驗の結果に依れば (Schaper; Mechanische Schwingungslehre S. 195)

(1) Loko. 64013

$$\tau = 0.5, \quad N = \frac{1}{2}, \quad \lg \left( \frac{y_0}{y_n} \right) = 0.51, \quad M_s = \frac{75.00}{9.81}$$

$$v = 31.16 \quad (\text{單位; 米, 噸, 秒})$$

(2) Loko. 01018

$$\tau = 0.5, \quad N = \frac{1}{2}, \quad \lg \left( \frac{y_0}{y_n} \right) = 0.29, \quad M_s = \frac{109.8}{9.81}$$

$$v = 25.97 \quad (\text{單位; 米, 噸, 秒})$$

(8) 第一編 (11) 式.

にして之は座標の微小變位  $\delta\varphi$  に対して一般力  $\theta_{\varphi}''$  のなす仕事

$$\delta A' = \theta_{\varphi}'' \delta\varphi \dots\dots\dots(28)$$

と等しくなければならぬ。故に (27) 式及び (28) 式より

$$\theta_{\varphi}'' = -\frac{\mu l}{2} \dot{\varphi} \dots\dots\dots(29)$$

(b) 又機関車彈機に作用する減衰摩擦力に因る一般力  $\theta_{\psi}''$  を決定せんとするに

$$\begin{aligned} \theta_{\psi}'' &= f''_{x=\frac{l}{2}} = -v \frac{d}{dt} (\eta - \eta)_{x=\frac{l}{2}} \\ &= -v(\dot{\psi} - \dot{\varphi}) \dots\dots\dots(30) \end{aligned}$$

斯くして (26) 式及び (29) 式より座標  $\varphi$  に對する一般力は

$$\theta_{\varphi} = \theta_{\varphi}' + \theta_{\varphi}'' = (W_s + W_n + P \sin \sigma t) \sin \frac{\pi v}{l} t - \frac{\mu l}{2} \dot{\varphi} \dots\dots\dots(31)$$

$\psi$  に對する一般力は (26) 式及び (30) 式より

$$\theta_{\psi} = \theta_{\psi}' + \theta_{\psi}'' = -v(\dot{\psi} - \dot{\varphi}) \dots\dots\dots(32)$$

にて表はされる。(31) 式及び (32) 式を (25) 式中に代入すれば減衰摩擦抵抗力を考慮せる場合の橋桁及び機関車振動の微分方程式は

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{2} \rho A l + M_n \right) \ddot{\varphi} + \frac{\mu l}{2} \dot{\varphi} + \left( \frac{1}{2} \frac{E J \pi^4}{l^3} + k \right) \varphi - k\psi &= (W_s + W_n + P \sin \sigma t) \sin \frac{\pi v t}{l} \quad \left. \begin{matrix} \text{③} \\ \dots\dots\dots(33) \end{matrix} \right\} \\ M_s \ddot{\psi} + v(\dot{\psi} - \dot{\varphi}) + k\psi - k\varphi &= 0 \end{aligned}$$

にて與へらる。今前編 (17) 式の符號を想起し且つ

$$\left. \begin{aligned} \frac{\mu l}{\rho A l + 2M_n} &= \xi \\ \frac{v}{M_s} &= \zeta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(34)$$

と置けば (33) 式は

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\varphi} + \xi \dot{\varphi} + (b+c)\varphi - c\psi &= (w + A \sin \sigma t) \sin mt \\ \ddot{\psi} + \zeta \dot{\psi} - \zeta \dot{\varphi} + a\psi - a\varphi &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(35)$$

の如き簡單なる形となる。(35) 式の一般解は (35) 式の余函數に

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\varphi} + \xi \dot{\varphi} + (b+c)\varphi - c\psi &= w \sin mt \\ \ddot{\psi} + \zeta \dot{\psi} - \zeta \dot{\varphi} + a\psi - a\varphi &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(36)$$

③ 正確に言へば彈機に作用する摩擦抵抗力はその反力を橋桁に及ぼすを以て振動の微分方程式は

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{2} \rho A l + M_n \right) \ddot{\varphi} + \dot{\varphi} \left( \frac{\mu l}{2} + v \right) - v\psi + \left( \frac{1}{2} \frac{E J \pi^4}{l^3} + k \right) \varphi - k\psi \\ = (W_s + W_n + P \sin \sigma t) \sin \frac{\pi v t}{l} \quad \left. \dots\dots\dots(33') \right\} \\ M_s \ddot{\psi} + v(\dot{\psi} - \dot{\varphi}) + k\psi - k\varphi = 0 \end{aligned}$$

とせねばならぬ。然るに彈機に作用する摩擦抵抗力の反力は橋桁に作用する外力としては第二次的のものなるを以つて本編に於てはこれを無視し、(33) 式より出發する事とす。猶 (33') 式の解は (33) 式と全然同様に求むる事を得。

及び

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\varphi} + \xi \dot{\varphi} + (b+c)\varphi - c\psi &= \Delta \sin \sigma t \sin mt \\ \dot{\psi} + \zeta \dot{\psi} - \xi \dot{\varphi} + a\psi - \alpha\varphi &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (37)$$

の特解を加へたものであつて前編 (35) 式よりも明かなるが如く余函数は自己振動を、(36) 式の特解は撓度を、(37) 式の特解は強制振動を表はすものである。この 3 者の内最も重要にして且つ減衰力に因つて最も大なる影響を受けるものは強制振動の項なるを以て本編に於ては強制振動の特解に就てのみ論ず。

#### 4. 微分方程式の解

(37) 式の右邊を變形すれば

$$\Delta \sin \sigma t \sin mt = \frac{\Delta}{2} [\cos(\sigma-m)t - \cos(\sigma+m)t] \dots\dots\dots (38)$$

故に (38) 式の特解は

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\varphi} + \xi \dot{\varphi} + (b+c)\varphi - c\psi &= \frac{\Delta}{2} \cos(\sigma-m)t \\ \dot{\psi} + \zeta \dot{\psi} - \xi \dot{\varphi} + a\psi - \alpha\varphi &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (39)$$

及び

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\varphi} + \xi \dot{\varphi} + (b+c)\varphi - c\psi &= -\frac{\Delta}{2} \cos(\sigma+m)t \\ \dot{\psi} + \zeta \dot{\psi} - \xi \dot{\varphi} + a\psi - \alpha\varphi &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (40)$$

の特解の和でなければならぬ。

今 (39) 式を解くために  $\varphi, \psi$  を同軸ベクトルに轉換すれば (39) 式は次の如く變形さる。(10)

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\Phi} + \xi \dot{\Phi} + (b+c)\Phi - c\Psi &= \frac{\Delta}{2} e^{i(\sigma-m)t} \\ \dot{\Psi} + \zeta \dot{\Psi} - \xi \dot{\Phi} + a\Psi - \alpha\Phi &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (41)$$

但し  $\Phi, \Psi$  = 同軸ベクトル

$$i = \sqrt{-1}$$

(41) 式の特解を求むるのは容易の事であつて今

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \mathbf{A}_1 e^{i(\sigma-m)t} \\ \Psi &= \mathbf{B}_1 e^{i(\sigma-m)t} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (42)$$

と置いて (41) 式に代入すれば

$$\left. \begin{aligned} [(b+c) - (\sigma-m)^2 + i\xi(\sigma-m)]\mathbf{A}_1 - c\mathbf{B}_1 &= \frac{\Delta}{2} \\ [-a - i\zeta(\sigma-m)]\mathbf{A}_1 + [a - (\sigma-m)^2 + i\{\zeta(\sigma-m)\}]\mathbf{B}_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (43)$$

なる關係を得。(43) 式より  $\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1$  を求むれば

(10) W. Hort; Technische Schwingungslehre (Berlin, 1922) § 43, § 120.

A. L. Kimball; Vibration Prevention in Engineering (New York, 1932) § 29.

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{\begin{vmatrix} \frac{d}{2} & -c \\ 0 & [a - (\sigma - m)^2 + i\zeta(\sigma - m)] \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} [(b+c) - (\sigma - m)^2 + i\xi(\sigma - m)] & -c \\ -[a + i\zeta(\sigma - m)] & [a - (\sigma - m)^2 + i\zeta(\sigma - m)] \end{vmatrix}} \\
 &= \frac{\frac{d}{2} [a - (\sigma - m)^2 + i\zeta(\sigma - m)]}{\begin{vmatrix} [a - (\sigma - m)^2] \{b+c - (\sigma - m)^2\} - ac - \xi\zeta(\sigma - m)^2 \\ + i(\sigma - m) [\xi \{a - (\sigma - m)^2\} + \zeta \{b - (\sigma - m)^2\}] \end{vmatrix}} \dots\dots\dots (44) \\
 B_1 &= \frac{\begin{vmatrix} [(b+c) - (\sigma - m)^2 + i\xi(\sigma - m)] & \frac{d}{2} \\ -[a + i\zeta(\sigma - m)] & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} [(b+c) - (\sigma - m)^2 + i\xi(\sigma - m)] & -c \\ -[a + i\zeta(\sigma - m)] & [a - (\sigma - m)^2 + i\zeta(\sigma - m)] \end{vmatrix}} \\
 &= \frac{\frac{d}{2} [a + i\zeta(\sigma - m)]}{\begin{vmatrix} [a - (\sigma - m)^2] \{b+c - (\sigma - m)^2\} - ac - \xi\zeta(\sigma - m)^2 \\ + i(\sigma - m) [\xi \{a - (\sigma - m)^2\} + \zeta \{b - (\sigma - m)^2\}] \end{vmatrix}}
 \end{aligned}$$

なる値を得。(44) 式に於て  $m$  は他の値に比し極めて小なる數値なればこれを無視すれば

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{\frac{d}{2} [(a - \sigma^2) + i\zeta\sigma]}{[(a - \sigma^2)(b+c - \sigma^2) - ac - \xi\zeta\sigma^2] + i\sigma[\xi(a - \sigma^2) + \zeta(b - \sigma^2)]} \\
 & \quad \left( = \frac{d}{2} \cdot \frac{Z_1}{Z} \text{ と置く} \right) \dots\dots\dots (45) \\
 B_1 &= \frac{\frac{d}{2} [a + i\zeta\sigma]}{[(a - \sigma^2)(b+c - \sigma^2) - ac - \xi\zeta\sigma^2] + i\sigma[\xi(a - \sigma^2) + \zeta(b - \sigma^2)]} \\
 & \quad \left( = \frac{d}{2} \cdot \frac{Z_2}{Z} \text{ と置く} \right)
 \end{aligned}$$

(45) 式の値を (42) 式に代入すれば

$$\left. \begin{aligned}
 \varphi &= \frac{d}{2} \frac{Z_1}{Z} e^{i(\sigma - m)t} \\
 \psi &= \frac{d}{2} \frac{Z_2}{Z} e^{i(\sigma - m)t}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (46)$$

を得。茲に於て  $\varphi, \psi$  より  $\varphi, \psi$  に戻せば  $\varphi, \psi$  は

$$\left. \begin{aligned}
 \varphi &= A_1 \cos[(\sigma - m)t + \alpha_1] \\
 \psi &= B_1 \cos[(\sigma - m)t + \beta_1]
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (47)$$

なる形にて表はさる。(47) 式中に於て  $A_1$  はベクトル  $A_1$  の絶對値であつて

$$\begin{aligned}
 A_1 &= |A_1| = \frac{d}{2} \frac{|Z_1|}{|Z|} \\
 &= \frac{d}{2} \frac{\sqrt{(a - \sigma^2)^2 + \zeta^2 \sigma^2}}{\sqrt{[(a - \sigma^2)(b+c - \sigma^2) - ac - \xi\zeta\sigma^2]^2 + \sigma^2 [\xi(a - \sigma^2) + \zeta(b - \sigma^2)]^2}} \dots\dots\dots (48)
 \end{aligned}$$



又  $\alpha_1$  は同轉ベクトル  $\frac{A}{2} \cdot \mathbf{1}$  に對する同轉ベクトル  $\Phi$  の位相の變化であつて

$$\alpha_1 = \Re\left(\frac{Z_1}{Z}\right) = \Re(Z_1) - \Re(Z) \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \dots\dots\dots (49)$$

$$= \tan^{-1} \frac{\xi\sigma}{a-\sigma^2} - \tan^{-1} \frac{\sigma[\xi(a-\sigma^2) + \zeta(b-\sigma^2)]}{[(a-\sigma^2)(b+c-\sigma^2) - ac - \xi\zeta\sigma^2]}$$

にて表はされる。

同様に

$$B_1 = |\mathbf{B}_1| = \frac{A}{2} \frac{|Z_2|}{|Z|} \dots\dots\dots (50)$$

$$= \frac{\frac{A}{2} \sqrt{a^2 + \xi^2 \sigma^2}}{\sqrt{[(a-\sigma^2)(b+c-\sigma^2) - ac - \xi\zeta\sigma^2]^2 + \sigma^2 [\xi(a-\sigma^2) + \zeta(b-\sigma^2)]^2}}$$

$$\beta_1 = \Re\left(\frac{Z_2}{Z}\right) = \Re(Z_2) - \Re(Z) \dots\dots\dots (51)$$

$$= \tan^{-1} \frac{\xi\sigma}{a} - \tan^{-1} \frac{\sigma[\xi(a-\sigma^2) + \zeta(b-\sigma^2)]}{[(a-\sigma^2)(b+c-\sigma^2) - ac - \xi\zeta\sigma^2]}$$

次に (40) 式の特解を求めんとするに全然 (39) 式と同様の方法に由つて求める事が出来る。即ち  $\varphi, \psi$  を同轉ベクトルに轉換すれば (40) 式は

$$\ddot{\Phi} + \xi\dot{\Phi} + (b+c)\Phi - c\psi = -\frac{A}{2} e^{i(\sigma+m)t} \dots\dots\dots (52)$$

$$\ddot{\psi} + \zeta\dot{\psi} - \zeta\dot{\Phi} + a\psi - a\Phi = 0$$

となり (52) 式に於て

$$\Phi = \mathbf{A}_2 e^{i(\sigma+m)t} \dots\dots\dots (53)$$

$$\psi = \mathbf{B}_2 e^{i(\sigma+m)t}$$

と置き  $\mathbf{A}_2$  及び  $\mathbf{B}_2$  を求めれば

$$\mathbf{A}_2 = \frac{-\frac{A}{2} [a - (\sigma+m)^2 + i\zeta(\sigma+m)]}{\{[a - (\sigma+m)^2] \{b+c - (\sigma+m)^2\} - ac - \xi\zeta(\sigma+m)^2\} + i(\sigma+m) [\xi \{a - (\sigma+m)^2\} + \zeta \{b - (\sigma+m)^2\}]} \dots\dots\dots (54)$$

$$\mathbf{B}_2 = \frac{-\frac{A}{2} [a + i\zeta(\sigma+m)]}{\{[a - (\sigma+m)^2] \{b+c - (\sigma+m)^2\} - ac - \xi\zeta(\sigma+m)^2\} + i(\sigma+m) [\xi \{a - (\sigma+m)^2\} + \zeta \{b - (\sigma+m)^2\}]}$$

なる値を得。(54) 式に於て  $m$  を無視すれば

$$\mathbf{A}_2 = \frac{-\frac{A}{2} [(a-\sigma^2) + i\zeta\sigma]}{[(a-\sigma^2)(b+c-\sigma^2) - ac - \xi\zeta\sigma^2] + i\sigma[\xi(a-\sigma^2) + \zeta(b-\sigma^2)]} = \frac{A}{2} \frac{Z_1}{Z} \dots\dots\dots (55)$$

$$\mathbf{B}_2 = \frac{-\frac{A}{2} [a + i\zeta\sigma]}{[(a-\sigma^2)(b+c-\sigma^2) - ac - \xi\zeta\sigma^2] + i\sigma[\xi(a-\sigma^2) + \zeta(b-\sigma^2)]} = \frac{A}{2} \frac{Z_2}{Z}$$

にして (55) 式の値を (53) 式に代入すれば

$$\left. \begin{aligned} \bar{\varphi} &= -\frac{A}{2} \frac{Z_1}{Z} e^{i(\sigma+m)t} \\ \bar{\psi} &= -\frac{A}{2} \frac{Z_2}{Z} e^{i(\sigma+m)t} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (56)$$

を得。茲に於て  $\bar{\varphi}, \bar{\psi}$  より  $\varphi, \psi$  に戻せば  $\varphi, \psi$  は

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= A_1 \cos[(\sigma+m)t + \alpha_1] \\ \psi &= B_2 \cos[(\sigma+m)t + \beta_2] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (57)$$

なる形にて表はされ、 $A_1, \alpha_1, B_2, \beta_2$  は

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= |A_1| = -\frac{A}{2} \frac{|Z_1|}{|Z|} \\ &= -A_1 (= -A \text{ と置く}) \\ \alpha_1 &= \Re\left(\frac{Z_1}{Z}\right) \\ &= \alpha_1 (= \alpha \text{ と置く}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (58)$$

$$\left. \begin{aligned} B_2 &= |B_2| = -\frac{A}{2} \frac{|Z_2|}{|Z|} \\ &= -B_2 (= -B \text{ と置く}) \\ \beta_2 &= \Re\left(\frac{Z_2}{Z}\right) \\ &= \beta_2 (= \beta \text{ と置く}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (59)$$

にて與へらる。

斯くして微分方程式 (39) 式並に (40) 式の特解を求め得た。故に微分方程式 (37) の特解はこれ等を加へ合せたもので (47) 式並に (57) 式より

$$\begin{aligned} \varphi &= A_1 \cos[(\sigma-m)t + \alpha_1] + A_2 \cos[(\sigma+m)t + \alpha_2] \\ &= A \cos[(\sigma-m)t + \alpha] - A \cos[(\sigma+m)t + \alpha] \\ &= 2A \sin(\sigma t + \alpha) \sin mt \\ &= \frac{A\sqrt{(a-\sigma^2)^2 + \xi^2 \sigma^2}}{\sqrt{[(a-\sigma^2)(b+c-\sigma^2) - ac - \xi^2 \sigma^2]^2 + \sigma^2[\xi(a-\sigma^2) + \xi(b-\sigma^2)]^2}} \times \\ &\quad \sin \left[ \sigma t + \left\{ \tan^{-1} \frac{\xi \sigma}{a-\sigma^2} - \tan^{-1} \frac{\sigma[\xi(a-\sigma^2) + \xi(b-\sigma^2)]}{[(a-\sigma^2)(b+c-\sigma^2) - ac - \xi^2 \sigma^2]} \right\} \right] \sin mt \dots\dots\dots (60) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi &= B_1 \cos[(\sigma-m)t + \beta_1] + B_2 \cos[(\sigma+m)t + \beta_2] \\ &= B \cos[(\sigma-m)t + \beta] - B \cos[(\sigma+m)t + \beta] \\ &= 2B \sin(\sigma t + \beta) \sin mt \\ &= \frac{A\sqrt{a^2 + \xi^2 \sigma^2}}{\sqrt{[(a-\sigma^2)(b+c-\sigma^2) - ac - \xi^2 \sigma^2]^2 + \sigma^2[\xi(a-\sigma^2) + \xi(b-\sigma^2)]^2}} \times \\ &\quad \sin \left[ \sigma t + \left\{ \tan^{-1} \frac{\xi \sigma}{a} - \tan^{-1} \frac{\sigma[\xi(a-\sigma^2) + \xi(b-\sigma^2)]}{[(a-\sigma^2)(b+c-\sigma^2) - ac - \xi^2 \sigma^2]} \right\} \right] \sin mt \dots\dots\dots (61) \end{aligned}$$

を得るのである。(60) 式及び (61) 式に由つて吾々は減衰摩擦力ある場合の機関車過平衡對重に由る橋桁及び機關車の振動を知る事が出来るのである。

5. 橋桁中央部に於ける最大振幅

扱次に最も重要なる橋桁最大振幅を求めねばならぬ。それが爲には先づ働輪が如何なる回轉角速度の時に振幅が最大に達するかを検する必要がある。橋桁中央部に於ける振幅は (60) 式より

$$f = \frac{4\sqrt{(a-\sigma^2)^2 + \xi^2\sigma^2}}{\sqrt{[(a-\sigma^2)(b+c-\sigma^2) - ac - \xi^2\sigma^2]^2 + \sigma^4[\xi^2(a-\sigma^2) + \xi^2(b-\sigma^2)]^2}} \dots\dots\dots (62)$$

$$= \frac{\sqrt{F_n}}{\sqrt{F_a}}$$

にて與へられる。今計算の便宜の爲  $F_n, F_a$  を變形すれば

$$F_n = 4^2[(a-\sigma^2)^2 + \xi^2\sigma^2]$$

$$= \frac{4M^2r^2}{(\rho Al + 2M_n)} [\sigma^8 - (2a - \xi^2)\sigma^6 + a^2\sigma^4] \dots\dots\dots (63)$$

$$F_a = \sigma^8 - [2(a+b+c) - (\xi^2 + \zeta^2)]\sigma^6 + [(a+b+c)^2 + 2ab + \xi^2\zeta^2 - 2a\xi^2 - 2b\xi^2 + 2c\xi\zeta]\sigma^4 - [2ab(a+b+c) - (a^2\xi^2 + b^2\zeta^2)]\sigma^2 + a^2b^2$$

となり  $f$  は常に正數なるを以つて (62) 式に於て  $f$  を最大となす  $\sigma$  を求むるには  $f^2 = \frac{F_n}{F_a}$  を最大となす如き  $\sigma$  を求むれば良い。故に斯かる  $\sigma$  は

$$f(\sigma) = F_n' F_a - F_n F_a' = 0 \dots\dots\dots (64)$$

の條件式より求め得る筈である。然るに (64) 式は一般に高次の方程式となり解く事は不可能になるので次の如き近似的解法を用ふ。

今減衰摩擦力の存在せざる場合には  $\sigma$  が

$$\sigma = \sqrt{\frac{(a+b+c) \pm \sqrt{(a+b+c)^2 - 4ab}}{2}} = p_1 \text{ 又は } p_2$$

なる値の時に振幅が極大になつた。故に摩擦力の存在する場合には (64) 式の根は

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= p_1 + h_1 \\ \sigma &= p_2 + h_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (65)$$

と置き得。(65) 式に於て  $h_1$  又は  $h_2$  は極めて小なる數値であつて  $h_1, h_2$  を求め得れば  $\sigma$  の眞値が決定されるのである。

$h_1$  を求めるには (65) 式を (64) 式に代入すれば

$$f(p_1 + h_1) = 0$$

故に平均値の定理に由り

$$f(p_1) + h_1 f'(p_1 + \theta h_1) = 0$$

$$(但し 0 < \theta < 1)$$

$h_1$  は普通小なる數値なれば

$$\begin{aligned}
 f(p_1) + h_1 f'(p_1) &= 0 \\
 h_1 &= -\frac{f(p_1)}{f'(p_1)} \\
 &= -\left[ \frac{F_n' F_a - F_n F_a'}{F_n'' F_a - F_n F_a''} \right]_{\sigma=p_1} \dots\dots\dots (66)
 \end{aligned}$$

同様に  $h_2$  は

$$h_2 = -\frac{f(p_2)}{f'(p_2)} = -\left[ \frac{F_n' F_a - F_n F_a'}{F_n'' F_a - F_n F_a''} \right]_{\sigma=p_2}$$

斯くして (65) 式及び (66) 式より振幅を最大となす如き  $\sigma$  を求め得。斯かる  $\sigma$  を (62) 式に代入すれば最大の振幅を求め得るのである。

然し普通に存在する  $\mu, \nu$  の値の範囲内にあつては  $h_1 \neq 0, h_2 \neq 0$  と置き得るのであつて  $\sigma = p_1$  又は  $p_2$  となり、この値を (62) 式に代入すれば

$$(a - p^2)(b + c - p^2) - ac = 0$$

なるを以て最大振幅は近似的に

$$f = \left[ \frac{4\sqrt{(a - \sigma^2)^2 + \xi^2 \sigma^2}}{\sqrt{\xi^2 \sigma^3 + \sigma^2 \xi (a - \sigma^2) + \xi (b - \sigma^2)^2}} \right]_{\sigma=p_1 \text{ 又は } p_2} \dots\dots\dots (67)$$

にて與へらる。

### 6. 減衰摩擦力の振幅に及ぼす影響

第4節 (60) 式及び (61) 式によつて減衰摩擦力の存在する場合の機関車過平衡對重に因る橋桁並に機関車の振動を知る事を得たが、今同式に於て

$$\left. \begin{aligned}
 \xi &= 0 \\
 \zeta &= 0
 \end{aligned} \right\}$$

と置けば

$$\begin{aligned}
 \varphi &= \frac{4(a - \sigma^2)}{[(a - \sigma^2)(b + c - \sigma^2) - ac]} \sin \sigma t \sin mt \\
 \psi &= \frac{4a}{[(a - \sigma^2)(b + c - \sigma^2) - ac]} \sin \sigma t \sin mt
 \end{aligned} \dots\dots\dots (68)$$

なる値を得。(68) 式は減衰摩擦力無き場合の橋桁並に機関車の振動状態を表はす式であつて前編 (40) 式中過平衡對重に因る振動の項と合致するのである。

今 (60) 式及び (61) 式と (68) 式とを比較するに (68) 式にあつては

$$\sigma^2 = \frac{(a + b + c) \pm \sqrt{(a + b + c)^2 - 4ab}}{2}$$

なる時に  $\varphi$  並に  $\psi$  は無限大となり  $\sigma^2 = a$  なる時に  $\varphi$  は零となるに反し (60) 式及び (61) 式にあつては  $\varphi$  及び  $\psi$  は零若くは無限大になる事は絶対に無いのである。これは減衰摩擦力の影響であつて本節にあつては斯かる影響を研究せんとするものである。

今橋桁に働く減衰摩擦力及び機関車彈機に働く減衰摩擦力の影響を明かにするため

(a) 橋桁にのみ減衰摩擦力が作用する場合、即ち  $\zeta = 0$  なる場合を考ふるに橋桁中央部の振幅は

$$f = \frac{D(a - \sigma^2)}{\sqrt{[(a - \sigma^2)(b + c - \sigma^2) - ac]^2 + \sigma^2 \xi^2 (a - \sigma^2)^2}} \dots (69)$$

にて表はされ横軸に歯輪回転数  $n \left( = \frac{\sigma}{2\pi} \right)$ , 縦軸に振幅をとり圖面上にプロットすれば第二圖<sup>(11)</sup>の如くなる。

今振幅の二つの最大値を求むるに, (69) 式に於て各々  $\sigma = p_1$  又は  $\sigma = p_2$  と置けば

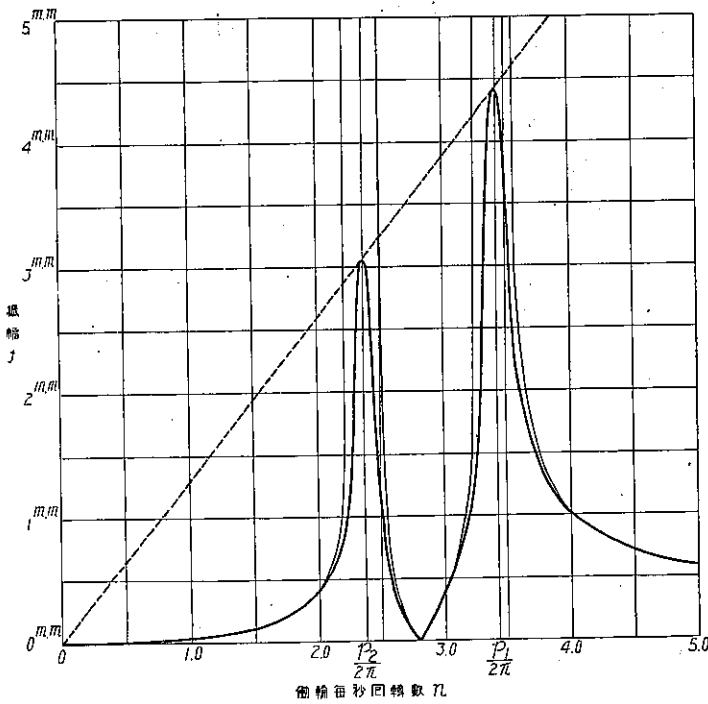
$$p_1 \text{ に対する最大値 } fp_1 = \frac{D}{p_1 \xi} = \frac{2Mr}{(\rho Al + 2Mn)} \frac{p_1}{\xi}$$

$$= 4\pi Mr \frac{n_1}{\mu l}$$

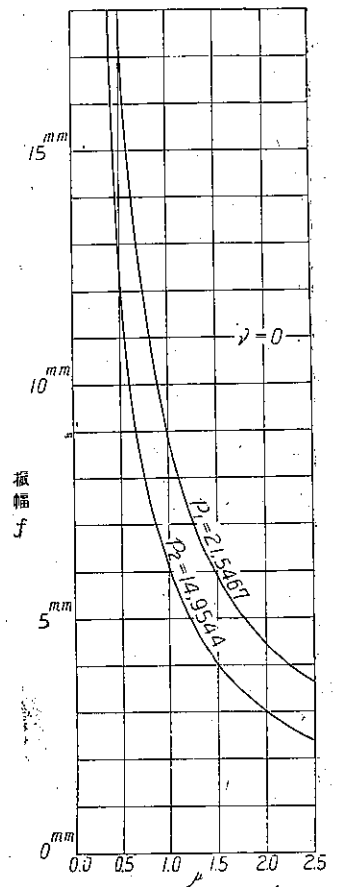
$$p_2 \text{ に対する最大値 } fp_2 = \frac{D}{p_2 \xi} = \frac{2Mr}{(\rho Al + 2Mn)} \frac{p_2}{\xi}$$

$$= 4\pi Mr \frac{n_2}{\mu l}$$

第二圖



第三圖



故に第二圖に於て  $p_1$  及び  $p_2$  に對應する振幅の頂點は常に原點 0 を通過する一直線上にある事が判る。

(11) 計算例 (後出) 参照

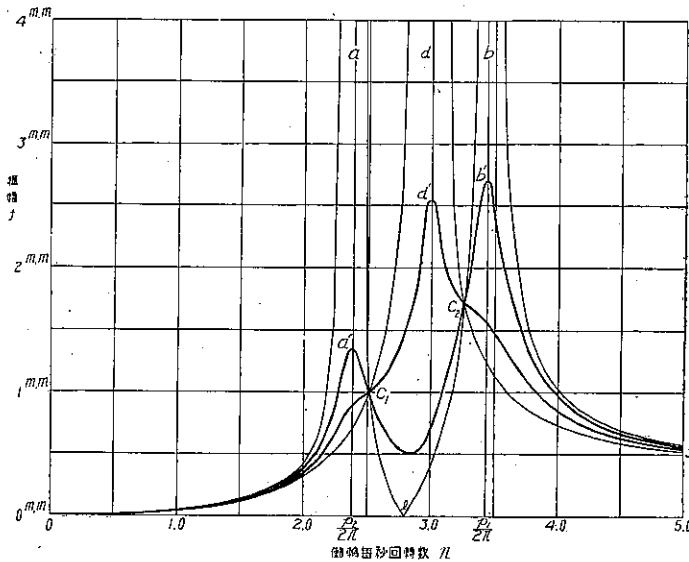
又横軸に  $\mu$  縦軸に最大振幅を採れば第三圖<sup>(12)</sup>の如くなり、最大振幅は  $\mu$  の増加と共に双曲線形に減じ、且つこれ等の双曲線は最大振幅に対応する  $p$  の値が小になるに従つて益々シャープになる事が判る。

(b) 次に弾機にのみ減衰摩擦力が作用するとすれば  $\xi=0$  であつて橋桁中央部の振幅は

$$f = \frac{d\sqrt{(a-\sigma^2)^2 + \xi^2\sigma^2}}{\sqrt{[(a-\sigma^2)(b+c-\sigma^2)-ac]^2 + \sigma^2\xi^2(b-\sigma^2)^2}} \dots\dots\dots(70)$$

にて與へられ、 $\xi$  の二つの極限值即ち  $\xi=0$   $\xi=\infty$  に於ける振幅の中間になければならぬ。 $\xi=0$  の場合の振幅は第四圖に於て  $oaebf$  にて表はされ、 $\xi=\infty$  の場合の振幅は (70) 式より

第 四 圖



$$f = \frac{d\sqrt{\frac{(a-\sigma^2)^2}{\xi^2} + \sigma^2}}{\sqrt{\frac{[(a-\sigma^2)(b+c-\sigma^2)-ac]^2}{\xi^2} + \sigma^2(b-\sigma^2)^2}}$$

$$\therefore \lim_{\xi \rightarrow \infty} f = \frac{d}{(b-\sigma^2)} \dots\dots\dots(71)$$

にて與へられ、これを圖上にプロットすれば  $odf$  の如く表はさる。今  $oacbf$  と  $odf$  との交点を  $c_1, c_2$  とすれば、(70) 式の曲線は常に  $c_1, c_2$  點を通過し、<sup>(13)</sup>  $oa'b'f$  及び  $od'f$  にて表はされる事が判る。但し  $oa'b'f$  は  $\xi$  の小なる

(12) 計算例 (後出) 参照

(13) 曲線  $oacbf$  と (70) 式の曲線との交點の座標は

$$\frac{(a-\sigma^2)^2}{[(a-\sigma^2)(b+c-\sigma^2)-ac]^2} = \frac{(a-\sigma^2)^2 + \xi^2\sigma^2}{[(a-\sigma^2)(b+c-\sigma^2)-ac]^2 + \xi^2\sigma^2(b-\sigma^2)^2}$$

即ち

$$\frac{(a-\sigma^2)^2}{[(a-\sigma^2)(b+c-\sigma^2)-ac]^2} = \frac{1}{(b-\sigma^2)^2}$$

を満足せしめなければならぬ。然るにこの最後の條件は  $oacbf$  と  $odf$  との交點  $c_1, c_2$  の座標が満足しなければならぬ條件である。故に  $oacbf$  と (71) 式の曲線との交點は  $c_1, c_2$  に合致する事を知る。

場合  $od'f$  は  $\xi$  の大なる場合を示すものである。故に  $\xi$  の小なる場合には振幅の最大値は  $\sigma \doteq p_1$  又は  $\sigma \doteq p_2$  に於て起り、 $\xi$  の大なるに従てその値を減ずると雖も、 $\xi$  が或る限度を超して大となる時には振幅の最大値は  $\sigma \doteq \sqrt{b}$  に於て生じ、 $\xi$  の大なるに従てその値を増加するを以て振幅の最大値を最小にするには  $\xi$  に或る値が必要なる事が判る。猶ほ (71) 式を考ふるに、 $\xi \rightarrow \infty$  なる事は彈機的全然作用しない事を意味し週期的外力のみ橋桁上を疾走せる場合の橋桁振幅の式を示すものであつて、Timoshenko の論文よりも導く事が出来る。(14) 即ち第五圖に於て

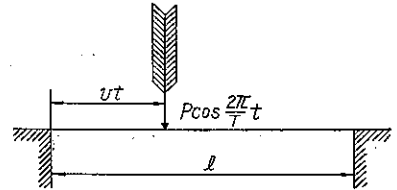
$EJ$  = 橋桁の彎曲に對する剛性率

第五圖

$$a'^2 = \frac{gEJ}{w'} \quad (w' \text{ は單位長の橋桁の重量})$$

$$\alpha = \frac{vl}{a'\pi}$$

$$\beta = \frac{2l^2}{\pi a' T}$$



とすれば任意の一點に於ける變位は Timoshenko によれば

$$y = \frac{Pl^3}{EJ\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{l} \left[ \frac{\sin\left(\frac{n\pi v}{l} + \frac{2\pi}{T}\right)t}{n^4 - (\beta + n\alpha)^2} + \frac{\sin\left(\frac{n\pi v}{l} - \frac{2\pi}{T}\right)t}{n^4 - (\beta - n\alpha)^2} \right] + \frac{\alpha}{n} \left[ \frac{\sin \frac{n^2 \pi^2 a' t}{l^2}}{n^2 \alpha^2 - (n^2 - \beta)^2} + \frac{\sin \frac{n^2 \pi^2 a' t}{l^2}}{n^2 \alpha^2 - (n^2 + \beta)^2} \right] \dots \dots \dots (72)$$

にて表はされる。(72) 式中第一項は強制振動を、第二項は自己振動を表はす項であつて、今第一項のみを採り且つ第一次振動のみを考へるとすれば、(72) 式は

$$y = \frac{Pl^3}{EJ\pi^4} \sin \frac{\pi x}{l} \left[ \frac{\sin\left(\frac{\pi v}{l} + \frac{2\pi}{T}\right)t}{1 - (\beta + \alpha)^2} + \frac{\sin\left(\frac{\pi v}{l} - \frac{2\pi}{T}\right)t}{1 - (\beta - \alpha)^2} \right] \dots \dots \dots (73)$$

に變形さる。(73) 式に於て  $\alpha$  及び  $\beta$  の意味を考ふれば

$$\alpha = \frac{vl}{a'\pi} = \frac{\pi a'}{2l} = \frac{\text{(橋桁第一次自己振動週期)}}{2 \times \text{(外力の橋桁通過時間)}}$$

$$\beta = \frac{2l^2}{\pi a' T} = \frac{\pi a'}{T} = \frac{\text{(橋桁第一次自己振動週期)}}{\text{(外力の週期)}}$$

であつて  $\alpha$  は極めて小なる數値なれば  $\beta=1$  なる範圍を除きては無視するも支障なく、然る時は任意の點、任意の時に於ける橋桁の變位は

$$y = \frac{Pl^3}{EJ\pi^4} \sin \frac{\pi x}{l} \frac{1}{1 - \beta^2} \left[ \sin\left(\frac{\pi v}{l} + \frac{2\pi}{T}\right)t + \sin\left(\frac{\pi v}{l} - \frac{2\pi}{T}\right)t \right] = \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \frac{1}{1 - \beta^2} \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{\pi vt}{l} \cos \frac{2\pi}{T} t \dots \dots \dots (74)$$

にて與へられ橋桁の中央部に於ける最大振幅は

(14) St. Timoshenko; "On the Forced Vibration of Bridge". Phil. Mag (1922), 該論文に於ては車輛の質量は考へず週期的外力のみ橋桁上を疾走するとして問題を解いてゐる。

$$\frac{y}{l} = \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \frac{1}{1-\beta^2} \dots\dots\dots (75)$$

にて表はされる。今 (71) 式と (75) 式とを比較するため (71) 式に  $A, b$  の値を代入すれば

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} f = \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \frac{1}{1-\frac{\sigma^2}{b}} \dots\dots\dots (76)$$

となり

$$\frac{\sigma^2}{b} = \frac{\left(\frac{2\pi}{\sqrt{b}}\right)^2}{\left(\frac{2\pi}{\sigma}\right)^2} = \frac{(\text{橋桁第一次振動週期})^2}{(\text{外力の週期})^2} = \beta^2$$

故に (76) 式は (75) 式と全然同一式なる事を知る。

#### 附 記

第 19 卷 6 號所載“スプリングを有する走行車輛に因る橋桁の強制振動”及び同第 9 號所載本文第一編中の  $\phi$  の代りに本編に於ては  $\psi$  を使用せり。