# 討　　議

第十九卷第十二號　昭和八年十二月

# 抗壓材の强制振動

(第十九卷第四號及第九號所載)

會員 庄　野　卷　治

小澤工學士が强制振動に關し至難の問題を秩序的に解決せる御研究を續々發表されますのは實に感謝に堪へない次第であります。その內の"抗壓材の强制振動"に就て筆者は曩に討議を書きましたがこれに對し强制振動は共振の狀態に於て振幅無限大となるべきは明白と思ふと言ふ意味の忠言を寄せられた篤學の人もありまして今更ながら筆者の書方が杜撰で理由を明示せざる獨斷的空論の形になり居るを自分乍ら驚きました。且つ $u=f(x)\cdot F(t)$ に就て思違ひの爲，大家に見當違ひの御迷惑をかけた事も判りましたので，この際該討議の補足と修正を試みたいのであります。先づ泰西の學者が强制振動を如何なる風に扱ひしかを顧る必要がある。Lord Rayleigh "Theory of Sound" Vol. I. Art. 46 の强制振動の解法は一元振動則ち棒ならばその縱振動に關するものなるも橫振動にも同樣の理窟が當嵌まるのみならず說明に好都合であるから先づその記事を抄錄します。

一元振動に於て固有振動も强制力も共に單弦運動を爲す場合，强制振動の微分方程式は

$$\ddot{u}+k\dot{u}+n^2u=E\cos pt \quad \cdots\cdots(1)$$

茲に　$\dfrac{2\pi}{n}$：自由振動の周期

$\dfrac{2\pi}{p}$：强制力の周期

$E$：强制力の量

$k$：摩擦力

$\dot{u}$ は $\dfrac{du}{dt}$，$\ddot{u}$ は $\dfrac{d^2u}{dt^2}$ の略

本式は合理的に誘導されたる正しき公式であることを附言して置きます。

この微分方程式を解くのに都合のよい樣に

$$u=a\cos(pt-\epsilon) \quad \cdots\cdots(2)$$

と假定し $\dot{u}$ 及び $\ddot{u}$ を作り (1) 式の前節に入れ，又 $\cos pt=\cos\epsilon\cos(pt-\epsilon)-\sin\epsilon\sin(pt-\epsilon)$ であるからこれを (1) 式の後節に入れる時は前後節の $\cos(pt-\epsilon)$ 及び $\sin(pt-\epsilon)$ の各係數が互に相等しからねばならぬに依り

$$\left.\begin{aligned} a(n^2-p^2)&=E\cos\epsilon \\ apk&=E\sin\epsilon \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(3)$$

を得。(3) の第二式を第一式にて除し $\tan\epsilon$ が定まり，又第二式より求むる $a$ を (2) 式に入れ次の結果を得。

$$u=\frac{E\sin\epsilon}{pk}\cos(pt-\epsilon) \quad \cdots\cdots(4)$$

茲に　$\tan\epsilon=\dfrac{pk}{n^2-p^2}$

これ摩擦力を考慮する强制振動の方程式である。特別に摩擦力を無視する場合は $k=0$ とし (3) の第一式より求

むる $a$ を (2) 式に入れて

$$u=\frac{E}{n^2-p^2}\cos pt \quad\cdots\cdots(5)$$

を得。本式に於て $n=p$ 則ち自由振動の周期と强制力との周期が同じき時は振幅 $u$ が無限大となる。勿論玆に振幅の無限大と言ふのは同周期の場合には極微量の摩擦力でも必ずこれを考慮に入れ (5) 式の代りに (4) 式を以て $u$ を求めねばならぬ事を意味するに過ぎないので總て吾人の論述する振幅の量に就てはこの制限があることを忘れてはならぬ。以上が Lord Rayleigh の所論の大要でありまして同周期の場合，振幅の無限大になるのを防ぐのは摩擦力のみの御蔭である。則ち摩擦力を無視すれば振幅の無限大（註。任意時に？）になるのは當然であるとするのであります。更に一層明瞭な記事が Lamb "Infinitecimal Calculus" page 434～435 の Ex. 3 及び Ex. 4 に在る。それは單弦强制力の作用する振子の問題なるも，微分方程式その他が全く以上と同様のもので直ちにこの場合に當嵌ります。Lamb の解法は趣を異にせるも結果は上記のものに全く一致して居ます。而して $n=p$ の時は (5) 式は成立せず（註。任意時振幅の無限大は有り得ないから)。故にこの場合は

$$u=\frac{Et}{2n}\sin nt \quad\cdots\cdots(6)$$

が答である。何となれば本式は (1) 式の $p$ を $n$ とし，$k$ を零とする微分方程式を滿足するからである。(註。時間の經過に連れ $u$ が漸次無限大に接近するから正しき公式である)。猶 Lamb は僅少の紙面に於ても微分方程式 (1) が 2 次以上高次の $u$ を無視して得たる略式に過ぎざるを以てこれを物理的問題に適用すれば振幅が或制限に達した時以後は最早近似的にすらも當嵌らざるを普通とす。又以上論ずる所は强制力に基因する强制振幅であるからこれに自由振幅を加へ實際に起る振幅を得るのであると言ふ周到な注意を學徒に授けて居ます。$n=p$ の時には如何程微量の $k$ でも必ず考慮に入れて (4) 式を使はねばならぬと言ふ Rayleigh の不條理な記事は學徒を迷はすもので (4) 式と (5) 式では實値に或程度の急變があるのであります。加之 (5) 式で $n=p$ の時 $u$ が常時無限大の爲，不成立になつてもこれに代るべき合理的解が $t=\infty$ に對し無限大にならない事も屢々あります。上記の場合偶々 $t=\infty$ に於て $u$ が無限大となる (6) 式を得たのは偶然の出來事に過ぎないのである。靜力學的に撓度の問題を考究する際にもこの種の實例に屢々遭遇します。これを要するに不條理の公式は潔よく棄てねばならぬ。而して問題が實在せねばならぬ性質のものなる時は必ずこれに代るべき合理的公式がある筈と考へてよいと思ひます。

以上 Lord Rayleigh 及び Lamb の記事が示す様に强制振動の根本原理は明快に解決し既に定論として各種の科學に應用され居る今日に於て筆者がこれに疑ひを挾む理由を述べねばなりません。筆者は學生時代に或問題を解く爲，微分方程式を作りその一特別解を以て答となし先生から懇切に訓誡されたことを終生忘れ得ないのでありまして上記强制振動の解法が又これに該當するのであります。故に Rayleigh の本を初めて讀んだ時 (1) 式の一般解を求めて見るべく努力したが不可能でした。そこで强制振動に對しても自由振動に對しても棒の環境條件に變りなく而して答の中に自由振動の $n$ を含んで居るから Rayleigh の方法でも一般解から求めると同様の結果に達するならんと誤り樂觀して居ましたが Lamb の本を讀むに及び Lamb が特別解であることを明記せるを見て狼狽へ出しました。よく檢べて見ると矢張り特別解に過ぎないのであります。按ずるに (1) 式は二次微分方程式であるから相互に無關係の二つの特別解を考慮せねばならぬ。その双方を考へ環境條件を取入れて $u$ を求むるのが完全の解法である。或一方の特別解を勝手に採用したのでは假令實際に符合する公式を得ても正解でありま

せん。その故は除外されたる他の特別解が一層良く實際に符合するかも知れないからである。念のために玆に注意したきは $n=p$ の時 (5) 式と (6) 式は相互に無關係の特別解なるも (5) 式が不成立のため實質的に 2 個の特別解を得て居らぬことである。要するに (4) 式と (6) 式は除外の特別解から來るべき當然の修正を無視し且つ Lamb の言ふ通り 2 次以上高次の $u$ を根本の微分方程式に無視せる公式であることを忘れてはならぬ。而して實際的に强制振動の位相 $\epsilon$ は勝手に指定し得る筈なるに，これを許さぬ (4) 式は實に不思議なものと言はねばならぬ。又 (6) 式が $t=\infty$ に於て $u$ が無限になるのは算式上は正しき强制振動の實際に當嵌まるものと筆者には思はれません。これを要するに (4) 式及び (6) 式等はその誘導に非常な無理があるから他に正法が發見された曉に當然解消するものである。その詳細は後に判る。以上は主として一元振動の場合を述べました。

次に二元振動に屬する棒の横振動の强制振動に關する在來の研究を概括的に批判したいと思ひます。この所では上記同様問題を單弦振動を固有振動とする棒に單弦强制力の作用する强制振動に局限します。この種强制振動の從來各家の研究は强制振動弧線は自由振動弧線と同類なりと看做しその微分方程式は自由振動の儘とし，その一般解に於て强制振動の特徴を加味する手段を取つて居ます。これは双方が單弦振動である以上正當にして且便利な方法であります。此の如く微分方程式の一般解に環境條件を取入れて解くを原則とする爲，數學上一點の批難すべき餘地のないのが既述の一元振動の場合と趣を異にす。從て筆者が前回の討議を書いた時の考は此の如くして求めた結果は正當にして確定不動，最早修正の餘地無きに係らず $p=n$ に於て不成立（任意時振幅の無限大）を宣告せねばならぬ原因は根本の假定に存せねばならぬ爲

$$u=f(x)\cdot F(t)$$

の $f(x)$ に自由振動のノーマル函數，$F(t)$ に强制力のノーマル座標をその儘使用するのが悪いと斷定する外なかつたのであります。然るにその後熟考しますと $f(x)$ に就ては筆者の主張通りなるも從來の如く微分方程式の一般解にこれを適用する限り結果に影響がない。而して $F(t)$ は實に强制力のノーマル座標をその儘使用せねばならぬのでこれを否認すれば大變な事になり幾多の重要なる成果が打壊されて自縄自縛の窮境に陷ることになりました。この點に就ては深く謝罪し斬首の刑を待つ次第であります。筆者はその爲本問題を根本的に糺明して贖罪すべく研究に馬力をかけまして最近漸くその目的を達し得たからそれを玆に申上げます。$u$ に就ては後にも說く如く强制振動は自由振動と異る振幅及び强制力同様の周期を持つ單弦振動であるから

$$u=\beta\,(\text{自由振動のノーマル函數})\cos pt$$

式中 $\beta$ は $p$ の値に呼應して異る係數にして $p=n$ の時は $\beta=1$ である。

とするのが正しいので式中の $\beta$ を無視しては間違ひである。併しこれを基本微分方程式の一般解に適用してから環境條件を取入れる時は $\beta$ が常に任意常數に含まれて消失するのである。從て $\beta$ の或値を考へ又は常にこれを 1 と見る區々の在來解法が同一の結果を得て居る所以である。玆には $p=n$ の時に $\beta=1$ であることのみが入用であります。今在來諸家の强制振動の解は合理的なる微分方程式の一般解に環境條件を取入れて求めたものでその結果は正當にして確定不動，最早修正の餘地なきものである。而して何れも $p=n$ の時の解は不成立につき棄てねばならぬ。併し問題が是非共成立せねばならぬ性質を持つ故，これに代るべき他の解があらねばならぬ。此の如き註文に應ずるには與へられたる微分方程式が一般解の外に singular solution を有するものであらねばならぬ結論に達す。個々の研究に就てその singular solution を求むる手數を取らなくとも次の如く簡單に總ての場合の singular solution を求むるを得。

∵ 强制振動の振れ $u=\beta$（自由振動のノーマル函數）$\cos pt$

$p=n$ の時は $\beta=1$ なるを以て本式が次の如くなる．

$$u=(\text{自由振動のノーマル函數})\cos nt$$

然るに本式の後節は全く自由振動の振れであります。故に $p=n$ の時，强制振動の振幅は自由振動の振幅に同じ，則ち無限大ではありません。これは後述の如く自由，强制兩振動の特性から推して證明を要せざる明瞭な事柄を殊更に證明らしく書いて見たゞけであります。猶從來の研究家が $p=n$ の時に $u$ が最大にして最も危險であると速斷するのは間違ひであります。この事は後に判る。以上の樣な次第でこの種の强制振動に對する爭ひは

1. 眞島博士が任意時振幅の無限大を否認したのは學徒の感銘すべき正論である。
2. 筆者が一時的にせよ，$u=f(x)\cdot F(t)$ の $F(t)$ に强制力のノーマル座標を用ゆるを不都合として振動學の先輩を侮辱したのは罪惡である。
3. 我國に於ける振動學の諸大家が任意時振幅の無限大を承認しこの際の振幅の實値を實に無限大と考へたるは Lord Rayleigh その他泰西學者の説を鵜呑にした迄にてこの不條理を創案したものでない。

と言ふ位で終りにしたいと思ひます。併し乍らこの問題につき筆者の任務は終了しない。それは Lamb の與へた (6) 式が $p=n$ に於て振幅無限大の實在を許し二元振動の場合に合致せぬからである。本式は既述の通り微分方程式の特別解を答とせる不條理な公式であるからこれに代るべき正解が發見さるれば自然に解消する公式である。茲に於てこの場合をも包含する强制振動の筆者の解法を擧げ特別解を直ちに答とするの危險を明示せんとす。

强制振動に關する筆者の公式は最初，その誘導に棒の振動に依る振幅，應力等の實値を求むる正法を必要とし可成，面倒にして棒の横振動に限る如く見えましたがその後一般且つ極めて簡單に同一の公式を求め得るを發見したからそれを書きます。先づ自由振動の意味を探究する必要がある。從來自由振動は彈性體が平衡狀態を亂された儘放任すると自然に起る振動にして外力の作用せざるを特徴とすべく强調されて來ました。これは外力の作用では自由振動が起らないと聞えるので大變な間違ひを起す。今彈性體が平衡を亂され體中の或點が平衡位置から $a$ だけ移動して居る時自然に放任すれば自由振動を始め該點の運動の方程式は $u_1=a\cos nt$，その $a$ は振動前に質點を $a$ だけ移動せしめた外力の函數にして，それが永久に消耗せざるは外力が永久に何かの形で働いて居るのを示す。而して振動自體から見るとその外力は振動開始の瞬間に作用したものと考へねばならぬ。この見地から瞬間的外力がたゞ一回彈性體に作用して起る振動は自由振動にして各彈性體特有の固有周期を有するものであると言ひ得るのである。これを又別方面から解釋すると彈性體特有の固有周期を持つ周期的外力が作用する振動は自由振動である，而して任意周期の周期的外力が作用する振動は强制振動である。勿論兩種振動の振幅は違ひます。振幅は外力の量と各々の周期のみの函數であります。故に若し强制振動の强制周期がその彈性體の固有周期に同じき時はその强制振動は全く同一外力に對する自由振動になるのであります。曩に $p=n$ の時に $\beta=1$ であると書きしはこの爲である。今外力 $E$ が任意の周期を持つ周期的外力となつて平衡靜止の狀態に在る彈性體に作用し始むる時はその平衡を破る瞬間的外力 $E$ の爲にこれに相當する振幅並に固有周期を有する自由振動が起り，同時に又力量 $E$ の周期的强制力の爲に他の振幅並に强制周期を周期とする强制振動が起らねばならぬ。而して兩者の合成が實際に現はれる振動であります。以下主としてこの場合を論じます。勿論既に自由振動を爲しつゝある彈性體に後れて强制力が作用する時は兩者の原因力 $E$ が同量でありません。

以下平衡狀態に在る彈性體が强制振動を始めんとする瞬間より時間 $t$ を測ることにします。先づ證明を判り易くする前提として茲に彈性以外は形狀質量等全く同じき 2 個の彈性體の自由振動を考へると，甲は振動數多く乙は少きだけで同一位置の質點の運動は甲は $u_1=a\sin nt$，乙は $u_2=A\sin pt$ で表はし得ます。各振動が $t=0$ の瞬

間に作用せる外力の爲に起るものなる時，甲は $v=na$，乙は $v=pA$ なる速度をその瞬間に得てこれに對する勢力を失はずに永久單弦運動を繰り返すのである。彈性の外は總てが同一の質點であるから同一外力より受ける勢力從て速度は互に等しからねばなりません。自由振動と强制振動と同類であると看做す限り全く上記と同様の關係で甲を自由振動とせば乙は强制振動となるのであります。

$$\left.\begin{array}{ll}\text{自由振動の振れ} & u_1=a\sin nt \\ \text{强制振動の振れ} & u_2=A\sin pt\end{array}\right\}\cdots\cdots(7)$$

この兩振動は $t=0$ に於て平衡を破る瞬間的同一原因力より受くる勢力從て速度が同量であらねばならぬ。故に

$$an=Ap, \quad \therefore\ A=\frac{n}{p}a$$

これを (7) 式の第二式に入れて

$$u_2=\beta a\sin pt \cdots\cdots(8)$$

$$\text{式中}\quad \beta=\frac{n}{p}=\frac{\text{自由振動数}}{\text{强制振動数}}=\frac{\text{强制周期}}{\text{自由周期}}$$

$a$ は自由振動の振幅

これが筆者の强制振動に關する基本公式であります。

(8) 式から次の様なことが判る。

1. (8) 式は一元振動にも二元振動にも共通に當嵌まるものである。又彈性體の形狀材質及び環境にも無關係である。故に棒ならば直棒又は曲棒，均一斷面又は適意の變斷面，均一材質又は不均一材質並に兩端の環境條件の如何に關せず總ての場合に適用し得る一般公式である。故に一元振動の强制振動の微分方程式が Lamb の言ふ通り精密ならざるに加へてその特別解を答とせる不條理な (4) 式及び (6) 式等は解消して (8) 式を用ふればよいと思ひます。

2. 强制振動に關する限り $p$ も $n$ も有限値であるから强制振動の振幅は無限大になることなく，減衰振動の場合も同様の結論を得ます。故に原則としてこの種の强制振動は自由振動と合成しても共振作用を起すことなきは有限振幅の 2 種の單弦運動の合成が決して無限大にならぬことから明白である。

3. 自由周期に比し强制周期が小なる程强制振幅は小である。而して强制周期が自由周期に同じくなれば强制振動振幅は自由振動の振幅に同じく合成振幅が自由振幅の 2 倍となります。更に强制周期が增大すればこれが 2 倍以上となるのである。從來は $n=p$ の時に共振作用を起し合成振幅が無限大になるものとし非常に恐れて居たがその心配はいりません。原則として强制周期と自由周期の比が極端に大なる工作物は是非共避くるを安全とす。勿論工作物の安否を周期のみから判定すると重大の間違ひを招くこと多きに依り應力密度と材料の强度から定めねばならぬものである。

4. 棒の横振動の强制振動を解く時 (8) 式中の $a$ は勿論“自由振動のノーマル函數”となります。而して式中の $\beta$ に就ては特に說明せねばならぬことがある。この $\beta$ は前に述べた $\beta$ と全く同物である。然るに從來 $\beta$ の實値を知らずに强制振動の問題が解けた理由は任意常數を含む所の自由振動の一般解から來るノーマル函數を使用して居るため勝手に定めた $\beta$ を採用しても强制力を加味せる環境條件から任意常數を消去する際 $\beta$ も一緒に消失して仕舞ふ故であります。筆者の强制振動の解法は全く趣を異にし，任意常數は勿論原因力に對する考察迄も決定濟の自由振動の最終確定せる純代數式を使用するのであります。然る時は $\beta$ の實値をこれに乘ずるの外別に面倒な手數を要せず直ちにこれに對する强制振動の諸公式を得るので實際的に非常な便利を得ます。その代

りに是非共 $\beta$ の實値が必要となるのであります。

5. この際撓振動の强制振動の在來解法に就き筆者の意見を述べねばならぬ。從來の方法に依るも環境條件の正しき取方にて任意常數を定め，數學上の手續に誤なき限り正當の結果を得て居る筈である。則ち從來は正しき解法を行ひながら $n=p$ に於て不成立の公式から振幅の無限大を速斷し，この時の振幅を最大なりと誤認し $n>p$ の場合更にこれより著しく大なることあるに氣付かざりしものと考ふる外ありません。

6. 猶ほ從來の考へ方と筆者の考へ方に根本の相違があることを述べて置かねばなりません。それは往復運動必らずしも振動でない。振動とは必らず變形從て應力の伴ふ所の往復運動である。變形せず原形の儘無應力で往復運動するのは振動と區別して動揺と名付けらる。實際には振動と動揺の合成する往復運動も有り得る譯である。玆に於て地上工作物の地震動に依る强制振動の時でも筆者は動揺と振動の合成を求めたのでは工作物の應力計算の用に供することが出來ないと言ふ考からその工作物が車體の上に建てられ，車體が單弦運動をする時の工作物の振動を車體の上に立て觀測する氣持で研究する爲，根元に於ける振幅は零であると言ふ環境條件が成立するのであります。この方法に據る時は如何なる場合でも全く動揺を除外したる振動のことが判ります。その代りに $\beta$ の實値が必要となるのであります。然るに從來の方法は車體の運動の中位點に位する地上に立て車體上の工作物の振動を觀測する建前から研究するため工作物の根元に於ける振幅は車體の運動の振幅に同じと言ふ環境條件を用ひて居るのであります。この方法は車體の往復運動が動揺と振動より成る時は矢張り兩者の合成となりますが幸にも單弦運動には加速度の不變なる時無く從て動揺がないから結果に於ては振動の解となる譯である。但し振幅は常に地動の中位點から測るのであるから地動振幅だけの動揺をわざと公式中に含めたものである。則ち人體などに感ずる廣義の振動を表はす公式を得て居るのであります。故に式中の動揺を除外する手續を取らずして公式の儘工作物の應力を計算すれば大變な間違ひを招くことを忘れてはならぬのである。

(8) 式の示す强制振動は決して單獨に實在するものでない。何となれば强制振動を始むる瞬間から自由振動も發生して兩者の合成が實際に現はれるからである。實際に現はれる合成振動の振れは (7) 式の第一式と (8) 式の代數和を取つて

$$u=a\{\sin nt+\beta\sin pt\} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (9)$$

式中 $u$ は合成振動の振れ，その他は凡て (8) 式の通り

則ち $u$ は振幅及び周期の異る同位相の2種の單弦運動の合成にして最早一般に單弦運動でない。而して特殊の場合の外はその最大値則ち振幅を求むるに煩はしき手數を要するものである。その詳細に立入るは今の目的でないから略します。

上記筆者の所說は確信を以て發表する次第なるも亦如何なる意外の勘違ひがあるやも知れません。問題は從來の定說を覆へす重大事であるから大方識者の嚴正なる檢討と深刻なる批判を御願ひ致します。又この種の問題は机上の研究よりも實驗が大切であることも承知しながら筆者には出來ませんから學府や研究所に於て學問の進步の爲，無料で實驗して下さることを切望致します。

以上は主として周期的强制力に依る强制振動の振幅は無限大になることなく，從て共振作用の起らざる所以を理論的に說明する爲，書いたものである。然らば如何なる種類の强制振動に於て共振作用が起るかを探究するに，それは言ふ迄も無く繰返し何回も適意の外力若くは周期的外力が合成振幅の增大を促進する樣な位相の差を以て作用する如き特別の場合に限るのである。而して加力回數の增加に連れ合成振幅が漸次無限大に接近する筈にし

て合成振幅が無限大となる迄には無限の加力回數則ち無限の時間を要するのであります。勿論これは毎回加ふる力が有限力であることを前提とした議論であります。

著者の論文“抗壓材の强制振動”に對する筆者の前回討議の補足と修正は以上にて終ります。前回の討議は忽卒に認めし爲，尙ほ不備の點があるかも知れませんが一先づ打切ります。若し前後矛盾する事でもありましたら上記の方が正しく前回の討議は上記所論の趣旨を敷衍せるに過ぎないものと御承知願ひます。

その後著者の發表されたる强制振動に關する諸論文はいづれも有益貴重なものにして難解の問題を判り易く合理的に解答され居るのは實に學界の爲，感謝すべき偉業にして現今に於ける最高權威の新解法であります。一方又隴を得て蜀を望むは學問の進歩を促がす所以であるから筆者の心境を述べさして戴きたいのであります。筆者は嘗て曲棒の内最も簡單なるべき筈の圓弧棒の振動問題を滿足に解決せんと試みしも振動の微分方程式が難解の非線微分方程式となるので全く失敗した。その後何如に考へても稍々難解の振動問題は勢力法に據る外，解決の途無き樣な氣がするのであります。この見地から著者が勢力法を巧みに應用する適例を發表されたるは感謝措く能はざる所である。然るに勢力法に依りますと今の所，是非共振動次數を假定し又これに相應する振動弧線の方程式を適當に假定してかゝらねばならぬのであります。この假定に極端な不都合が無い限り振動數從て周期には大なる影響を與へず，相當に正しき結果を得るは事實にして Lord Rayleigh も夙にこれを保證して居ます。主として振動數，周期及び稀に振動弧線の型の概念を論ずる音響學者の取扱ふ振動學はこれにて充分とも考へられますが，工學者の取扱ふ振動學はこの外に振動體が破壞を招く應力を起すことなきやの應力問題が重要の題目とならねばならぬのであります。應力問題が這入つて來ますと振動弧線の方程式の假定に重大なる注意を拂はねばなりません。その適例として嘗て本誌上に發表された三浦博士の單鉸拱の振動數に關する實驗報告を擧げることが出來ます。本實驗は曲棒に於ても合理的に振動弧線を假定する限り殆んど正しき振動數を得ることを實證する貴重な實驗でありますが，振動弧線は拱を直線に引延ばして鉸點を開放したる突桁の靜力學的撓度弧線と看做すのであります。此の如き大膽なる假定の下でも振動數は殆んど正しきものと思はる結果を得たのであります。併し乍らこの假定の下に應力を求めたならば大變に間違つた結果を得るは明瞭である。三浦博士がこの見地から應力問題を全く除外したのは卓見と言はねばなりません。されど從來工學者が音響學者に倣ひ振動數にのみ重きを置く傾向は改めねばならぬと思ひます。著者が振動弧線を

$$y=\varphi\sin\frac{\pi x}{l}$$

と假定されますのは兩鉸端の桁にして等布荷重でも受くる場合の振動弧線としては申分なきも集中荷重や動荷重から來る振動弧線としては不合理と思ひます。此の如き $y$ は振動數を求むる目的には不都合なからんも振幅の實値や應力問題にこれを使用すれば甚敷く違つた結果を得る筈に思ひます。然らば如何にしてこれを救濟するかの案は筆者にも持合さないのであります。筆者は今の所振動弧線を靜力學的撓度弧線と看做すのが概して著しき謬を招かず解法も可能且つ比較的容易なる場合多く，通例3割位は應力が少く出るからこの略法の結果に約3割を增して所要の應力とすればよいかも知れぬと言ふ位の漠然たる考を所持して居るだけであります。餘程前からこの問題に頭を惱ましますが到底自分達に解決出來る見込が付きませんので悲鳴をあげて少壯有爲の篤學者にこの種の御研究をも御願して工學的振動學の發達を見たいのであります。

筆者が最大の興味を以て有益に拜讀したのは著者の“走行蒸氣機關車に因る橋桁强制振動の理論第一編”であります。根本の各假定に大分無理がある樣ですがこの種の難問題を解くには已むを得ぬ事で英國 Bridge Stress

Committee の單なる觀測結果を理論的に有意義たらしめた事は何と言つても空前の大成功であります。たゞ(40)式の $\varphi$ も $\phi$ も僅かに 4 種の單弦運動樣のものゝ合成であるから摩擦抵抗を無視しても決して無限大になる筈なく，觀測結果も無限大を想像させる樣なもので無いから中徑間，大徑間に區分して各項の最大值を考究する場合に無限大を目標とする代りに滯在值 (stationary value) を目標とすることが出來ればよいと思ひますけれども從來の定說からは著者の方法も當然の如く見えると思ひます。文献を漁る便宜のない筆者に取り天來の福音として感謝するのは著者の引用せる英國 Bridge Stress Committee の觀測結果であります。その第一表が大體理論から推して當然なるは勿論のことですが第一圖 (*a*), (*b*), (*c*), (*d*), (*e*), (*f*) の各圖表が筆者の强制振動に關する公式からも大略的に當然の結果と推量し得るのであります。則ち機關車の働輪回轉數を周期的强制力の振動數 $p$，第一表の橋桁の固有振動數を $n$，橋桁の振幅を $u_2$ と看做し且つ機關車の速度則ち $p$ が著しく振動の原因力の量從て $u_2$ に影響するので比較的微小の $p$ は亦 $u_2$ の值を微小にすることを念頭に置き $\beta$ の數值で橋桁振幅の大小を推斷し得るものと假定してこれ等の圖表を檢討する時は徑間の大小を問はず一律にその當然なる所以を概略的に見ることが出來ますのは面白いと思ひます。本件は又單純なる强制振動の公式を實際に當嵌める時原因力の變化及びその大小を考慮せねばならぬと言ふ貴重な當然の教訓を授けるものである。