討　　議

第十九卷第十號　昭和八年十月

軌道下埋設管路縦彎曲に關する近似解法

（第十八卷第三號及第九號所載）

著者　准員　石　川　時　信

上記標題の拙稿に就て，本誌第十八卷第九號に於て會員福田武雄氏が長文の御討議を寄せられたるは誠に感謝に堪えません。

併しながら，拙稿は何分假定を澤山含みたるものなりし故か討議者福田氏に尠なからず御異見ありたる樣に拜見せられたるは著者の甚だ遺憾とする所であります。

玆には御討議に御答へすべく，討議の順序に從つて整然と述ぶるのは勿論でありますが，その前に極く簡單に討議拜見後に於ける感想を述べさせて戴きますならば，討議者福田氏は拙文に於ける種々なる假定及び推斷等を宛も獨斷的任意論斷の如く云はれてゐるが，著者をして云はしむれば，拙文に述べし種々なる假定及び推斷等は，實は著者に於ても，練達の學士數方の注意深き指導の下に充分考慮を重ねたものでありまして，先づ今日の實際技術の常識に徴して，支障なからんと思ふのであります。尙その外，理論的方面，特に彈床理論方面に於ても，過去の文獻は多少調査致したるも何れも土の沈下係數 K は，上方より下方に向ひて地盤を壓縮する時のみならず下方より上方に向つて地盤を持上げんとする時にも一樣の値として考へ得べきものゝ樣になつてゐるのを見ました。併しそれは勿論實際考へ得べからざるものを想定したに止り，理論上問題となるのは當然の事にして，一旦 K なる値を式中に取入れたる以上は，最後まで K は實際のものを考ふべきだと存じます，この點が拙文に於ては終始一貫して重要視してあり，その他のものは時に多少近似的に見てあるのであります。又福田氏の討議に於ても，拙文に於ても管路の上半部以上に載れる土の重量は，その影響は充分考慮に入れるが理論式中にはそれを文字に表はさぬでありますから，福田氏の式も，又拙文に於ける式も何れも理論式とは稱し難いと存じます。

以上の事を述べて福田氏の御討議の順序に從つて御答へ致しますならば，

第一　福田氏の示されたる (5) 式

$$
\left.\begin{aligned}
y&=\frac{P\beta}{2Kb}e^{-\beta x}(\cos\beta x+\sin\beta x),\\
\frac{dy}{dx}&=-\frac{P\beta^2}{Kb}e^{-\beta x}\sin\beta x,\\
\frac{d^2y}{dx^2}&=-\frac{P\beta^3}{Kb}e^{-\beta x}(\cos\beta x-\sin\beta x),\\
\frac{d^3y}{dx^3}&=\frac{2P\beta^4}{Kb}e^{-\beta x}\cos\beta x
\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots (5)
$$

はその (2) 式 $EI\dfrac{d^4y}{dx^4}+Kby=0$ の解 (3) 式

$$
y=Ae^{\beta x}\cos\beta x+Be^{\beta x}\sin\beta x+Ce^{-\beta x}\cos\beta x+De^{-\beta x}\sin\beta x\quad\cdots\cdots\cdots (3)
$$

に於ける最初の二つの項が急激に遞增する事あり，且つ x の無限大に於て無限大となる事あるためか (3) 式中の A, B を

$A=B=0$

として得らるゝのであるが，この $x=\infty$ に於てといふことは，$x=\infty$ まで(3)式がその正負の符號を變ぜずに連續するといふ條件なくしては云へ無い事である。何とならば若し(3)式がその原點近くに於て正號を有し，或る距離に於て負號を取るものとすれば，原點近くに於て成立する福田氏の(2)式

$$EI\frac{d^4y}{dx^4}+Kby=0 \qquad (2)$$

は或る距離に於ては

$$EI\frac{d^4y}{dx^4}+(-K)b(-y)=0$$

ならざるべからず，即ち土の沈下係數 K は正負何れも等値たるを要し，これ現實に於て考へ得ざるが故である。

勿論過去の文獻(1)は軌條の彎曲に對して福田氏の(5)式を使用してゐるが，それでもそれを以て理論的なりとはせず，只(5)式の具備する性質より結果的に，これを以て滿足せるに止る。

その外同じく彈性床上に橫はる桁にしても，軌條と埋設管路とではその上に加へらるゝ荷重が，一方は軌條自身の重さ及び枕木の重量が主なるものに係らず埋設管路の方は管路の自重の外に管路の中の水の重量及び非常に重い土被ある如く著しく異るを以て，假令軌條の彎曲に對して前記(5)式を以て滿足するとしても，埋設管路に對しては著者の示したる如く，「彈曲線は單一荷重を左方に距ること a なる點に於て遂に水平を爲し，最早沈下せざるもの」と，假定したる方が妥當なりと信ず。これ即ち拙文に於て福田氏の示されたる(5)式を使用せざりし理由の一つである。

第二　又福田氏の示されたる(6)式は多少誤つてゐるが

$$y=\frac{P\beta}{2Kb}\left[\frac{\cos 2\beta l-\sin 2\beta l+e^{-2\beta l}+2}{\sinh 2\beta l+\sin 2\beta l}\cdot\cosh\beta x\cos\beta x+e^{-\beta x}(\cos\beta x+\sin\beta x)\right.$$
$$\left.+\frac{\cos 2\beta l+\sin 2\beta l-e^{-2\beta l}}{\sinh 2Bl+\sin 2Bl}\cdot\sinh\beta x\sin\beta x\right] \qquad (6)$$

が本當の式にして，本式は $2\beta l\leqq\pi$ まで成立する所の或る有限長 $2l$ の長さの桁の中央に單一集中荷重 P の來た場合の式にして，若しこの式を强ひて $l=\infty$ として無限長といつても良い位の埋設管路に適用すれば(6)式に於ては

$$\frac{\cos\infty-\sin\infty+0+2}{\sinh\infty+\sin\infty}=0,\qquad \frac{\cos\infty+\sin\infty-0}{\sinh\infty+\sin\infty}=0$$

となりて結局

$$y=\frac{P\beta}{2Kb}e^{-\beta x}(\cos\beta x+\sin\beta x)$$

となりて先に示した福田氏の(5)式第一段に等しく，これ從來軌條等の如き比較的輕い等布荷重(軌條の重量及び枕木の重量を等布せしめたと考へたる重量)を有する無限長の桁が彈性床上に橫はり，それが單一集中荷重を受くる場合の式となる。即ち前述の通りとなりて本式より福田氏の(5)式を得るのも最初より $A=B=0$ として福田氏の示されたる(5)式を得るのも齊しく近似式たる事に相違はない。剩へ福田氏の示されたる(6)式は $\beta l=\beta x=\pi/2$ に於て $y=0$, $d^2y/dx^2=0$, $d^3y/dx^3=0$ となりて，同式は單一荷重の左右各 $x=\pi/2\beta$ の點に於て沈下もなく彎曲力率も起らず，又剪力も起つて居ない狀態を持し，從つてその狀態の先方を更に延長せしむれば，こゝに桁端は地表を

(1) American Society of Civil Engineers——Transactions——Paper No. 1420——Progress Report of the Special Committee to Report on Stresses in Railroad Track——November 3rd. 1917.

離るゝ傾向を有するが故に，若し多少の桁の自由ありて，且つ桁端を左右無限大の距離にまで延長せしむればその彎曲狀態が如何なる形狀を有すべきかは偏へに桁の自重の大さの如何に依る事にして，若しそれが埋設管の樣に極めて大なる等布荷重をその上半部に有する狀態ならば，或ひは或る近似狀態の曲線をこゝに假想し得べきも，軌條又は枕木位の重さの重量を有する狀態ならば，それは或る一定の形に依りて表はす事は極めて曖昧の事なりと思はれる。この點も即ち拙文に於て福田氏の示されたる (5) 式を使用せざりし理由の一つである。

第三　福田氏は又拙文に示した「彈曲線は單一荷重を左方に距る事 a なる點に於て遂に水平を爲し，最早沈下せざるものとし，その點を原點とすれば，次の四つの條件を得」なる條件は現實になきものゝ如く云はれてゐるが，それは福田氏の曲解なりと思ふ。何とならば，a なる點は遂には存在する事ある點にして，確にあるには在る點にして，只その距離が幾許なりやはこの際未だ問はず。それは後に至りて決定さるゝものなれば，その距離の大さを a なる値にて表はせば確に「彈曲線は單一荷重を左方に距る事 a なる點に於て遂に水平を爲し，最早沈下せざる」點は存在すべく，從つてその點を原點とすれば拙文に示した (18) 式

$$\left.\begin{array}{lll} \text{i)} & x=0 \text{ なる時} & y=0 \\ \text{ii)} & x=0 \quad 〃 & \dfrac{dy}{dx}=0 \\ \text{iii)} & x=a \quad 〃 & \dfrac{dy}{dx}=0 \\ \text{iv)} & x=0 \quad 〃 & \dfrac{d^3y}{dx^3}=0 \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots \{\text{拙文 (18) 式}\}$$

の四つの條件は相關聯して成立する譯である。但しこの場合 a の値はこゝに明示はしないし，又 $x=0$ 點に於て彎曲力率，EId^2y/dx^2 が零なるや否やも明示しない，それ等の事は後に決定される。

それで a の値であるが，a の値は彈曲線が遂に水平を爲す點までの距離であるからその値は或る特定の値であるのみならず一つのみである譯である，換言すれば彈曲線が遂に水平を爲し，最早沈下せざる點は只一點のみである譯である。然るに拙文に於ては事實存在する所の反曲點に於ては (16^0) 式より

$$\tan a_1\beta \tan Z\beta \doteqdot -1$$

であり，$a_1 \doteqdot a$ なるを以て (15^0) 式は

$$\frac{dy}{dx}=B\beta\{e^{\beta a_1}(\cos\beta a_1+\sin\beta a_1)-e^{-\beta a_1}(\cos\beta a_1-\sin\beta a_1)\}\doteqdot 0.$$

この二つの式を滿足する或る特定の値は

$$a_1\beta\doteqdot\frac{3}{4}\pi,\quad Z\beta=\frac{1}{4}\pi$$

これ，即ち拙文に於ける (19′) 式である。が併しこゝに問題となるのはこゝに揭げたる二つの式を滿足する $a_1\beta$ の値は $3\pi/4$ を除く他にもありはせぬかといふ事であるが $a_1\beta$ は前記二つの式を同時に滿足し，且つ $a_1\beta>Z\beta$ なる條件を滿足し尙その値は一つなるを要するため，結局 $a_1\beta\doteqdot 3\pi/4$ とするより外に道なき事となる。而してこの事も根源は y の値は正負の符號を變ずる事を許さぬ樣に與へられたからである。

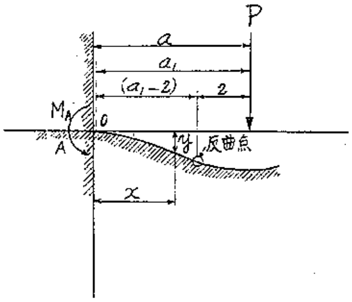
然かも討議書に於てはその (8 a) 式に於て

$$e^{2\beta a}(\tan\beta a+1)+\tan\beta a-1=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (8\text{ a})$$

となつて，B を決定する事は出來ず，たゞ a が任意の値ではいけないことを意味するものである。B の決定は著者の (21) 式の如く單一荷重 P の作用點に於て剪力が $P/2$ に相等しいと言ふ條件に依り決定し得るものであつ

て，結局(4)の條件丈では(3)式中の常數を一意的に決定するに不充分である。」とせられてゐるが，これは討議者の見違ひにして，拙文に於ては未だこゝには常數 B を決定すると云つては無い。尙それに次ぐに數行を以てせられ，終りに「反曲點卽ち彎曲率の零なる點と固定點とを略々同位置にあると言ふ樣な考へ方は著者の解の嚴密性を益々薄くするものである。」とせられてゐるが，これは大いなる見違ひにして，その外この間特に說明をつけられたる「第二圖(福田氏の第二圖の意。次に掲ぐる第一圖參照)に於て AC 間の距離 a_1」云々の如き見違ひが到底有り得ない譯である。この見違ひは單に文字の見違ひにあらずして拙文の解釋の見違ひである事は討議者のその討議の內容までが，見違ひの圖面と文字と文章とに依りて羅列せられてある事に依つて明かである。恐らくこの見違ひが拙文の根底を疑はれた元となつたであらうと察せらる。

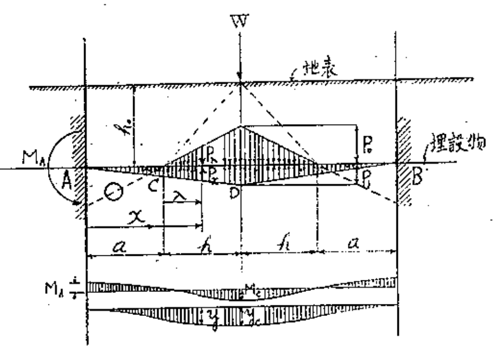
第一圖



第四　又福田氏はその第四圖(次に掲ぐる第二圖參照)に於て分布荷重 q_x を $0<x<a$ の區間に態々點線を以て延長せられてゐるが，これは確に間違ひにして $0<x<a$ の區間に於ては $q_x=0$ とするのが本當である。この事は次に第六の處で述ぶるのであるが，この間違ひを强ひてこの儘にして出發すると先でそれを相殺すために尠なからず手數を要するのである。

第五　福田氏は復，その第四圖(次に掲ぐる第二圖參照)の解說に於て，土の反力 P_x は直線變化であつてはならぬとせられ其の理由を彈曲線は x^5 を含むからであるとせられてゐるが，これは彈曲線が單に x^5 を含むといふ理由だけで不可なりとするのは，近似解法の存在の理由を沒却した事になる。といふのは假令彈曲線が x^5 を含んでゐても x^5 の係數が x の係數に比して遙に小であつたり，又 x の値があまり大なる値を取らない場合は $ax+bx^5 \fallingdotseq cx$ といふ樣な事も出來るからである。その上拙文に於ては最初土の反力を直線變化に假定はするも，彈曲線そのものは依然として x^5 を含ませ5次式は束縛せられてゐないから，この點は値は近似たりと雖も彈曲線の性質には相違の無い事となる。

第二圖



尙これに關しては拙文(61)式乃至(64)式に於て幾分述べたる如く其の本質は係數の問題にして質の問題に非ざる事がわかる。

第六　次は積分常數及び積分の限界に關する事にして，前に第四の處に於ても，多少述べたる所なるが福田氏はその第四圖(上に掲ぐる第二圖參照)の如き場合

$$EI\frac{d^4y}{dx^4}=P_\lambda-P_x$$

の積分は y を $x\leqq a$ のものと $x\geqq a$ のものとに分ちて積分すべきであり，且つその際積分常數は，兩範圍に別々のものとすべきであるとせられてゐるが，この事に就ては詳述すれば長くなりて却つて了解し憎くゝなる惧れあるを以て，こゝに簡單に述ぶれば先づ y を $x\leqq a$ と $x\geqq a$ との兩區間に分つは宜しとするも，$x\leqq a$ の區間に於ては

$P_\lambda=0$ として取扱ふべく，又 $x\geqq a$ の區間に於ては P_λ の積分にはその下限界 a を入るべきにして，從つてその際添加すべき積分常數の値は常に $x=0$ 點に於けるものを採用すべきである。その理由は上掲の微分方程式を積分する事に依りて生れて來る處の剪力，彎曲率，撓角及び撓度等は何れも x の連續函數にして急變する事なくたとへ P_λ の外に或る Q なる如き集中荷重が或る任意の點にありとするも，剪力はその點に於て或る既知量を添加されたに止り，それは強ひて積分常數なりと考へずともその取扱ひ上支障を起す事なければ，從つて特に積分常數として取扱ふ程のものは x の任意の點に添加されざるを一般的とするが故である。

併しこの事は割合に注意深く見られず，多くは前掲の微分方程式の例で云へば P_λ の積分にその下限界 a を入れずに只莫然と不定積分をなし，殊更に式を複雜にし積分常數の個數を無暗に殖して，後に其の積分常數を決定するのに非常な手數を要してゐる樣であるがそれは實に迂遠な方法にして，福田氏の云はるゝ如きはその方法の事であるが，拙文に於ては左樣な迂遠の方法に依らずに豫め積分變數の轉換を行つて置いて，演算及び解說を簡易ならしめて置いた，この點は改めて御檢討願ひ度き次第である。

第七　福田氏は亦その (13) 及 (14) 式を以て彈曲線をその領域に從つて y_1 及び y_2 の二つに分ち，自らその解法を行ひ決定されたる四つの常數をその (17) 式に示し

$$\left.\begin{aligned}
A&=+\frac{q_0}{\alpha e^{\alpha}Kb}(\cos\alpha-\sin\alpha),\\
B&=+\frac{q_0}{\alpha e^{\alpha}Kb}(\cos\alpha+\sin\alpha),\\
C&=+\frac{q_0}{2\alpha Kb}\Big[\cosh\alpha\ \cos\alpha+\sinh\alpha\ \sin\alpha-1\Big],\\
D&=-\frac{q_0}{2\alpha Kb}\Big[\cosh\alpha\ \cos\alpha-\sinh\alpha\ \sin\alpha-1\Big],
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(17)$$

とせられてゐるがこれは次の式の誤りである。即ち

$$\left.\begin{aligned}
A&=+\frac{q_0}{4\alpha e^{\alpha}Kb}(\cos\alpha-\sin\alpha),\\
B&=+\frac{q_0}{4\alpha e^{\alpha}Kb}(\cos\alpha+\sin\alpha),\\
C'&=+\frac{q_0}{2\alpha Kb}\Big[\cosh\alpha\ \cos\alpha+\sinh\alpha\ \sin\alpha-1\Big],\\
D'&=-\frac{q_0}{2\alpha Kb}\Big[\cosh\alpha\ \cos\alpha-\sinh\alpha\ \sin\alpha-1\Big].
\end{aligned}\right\}$$

第八　最後に福田氏は拙文中に於ける計算例題に就て 2 箇所の誤謬を擧げられたがこの點は誠に恐縮の至りである，而してその一方は土被 6 呎，管徑 36 吋に對して a を計算する時 $h=14.17$ 呎に係らず，$h=11.17$ 呎とせる事であるが，これは後に正誤表に出した如く，計算は $h=14.17$ 呎を以て爲したるも原稿を書く時に $h=11.17$ 呎と誤記したのであつた。從つて求められた $a=4.0$ 呎には誤りないのである。又他の一方は拙文の第五表に於て，土被 3 呎，管徑 36 吋の場合に $Mc=122\,000$ 吋封度，$f=405$ 封度/吋^2 とせるは，後に計算して見るに福田氏の云はるゝ通り $Mc=144\,000$ 吋封度，$f=479$ 封度/吋^2 である。

併しながら拙文に於ける第五表の値は拙文に述べたる誘導式の大體の傾向を上下，左右より見るのが目的なりしため數値が多少の精密さを缺く點は特に御容赦願ふ。

以上8箇條を揭げて御討議に對して御答へする次第であるが，之れを要約するに，討議者の文辭の割合に激越なりしは上記第三の場合に述べし所の討議者の見違ひに依る誤りと，第六に述べたる所の討議者自身の誤りとが，その根底を爲したるものゝ如く察せらる。併しながら著者は依然として拙文の結論に述べし如き見解を有してゐる，從つて討議者がその討議の末文に述べられしが如き見解は首肯し兼ねる。