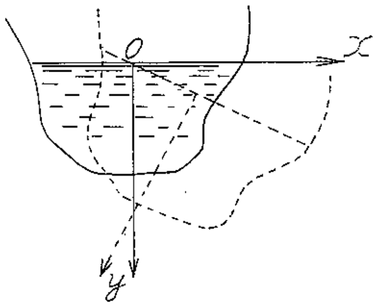
運動する水槽内の水の振動

(The Oscillation of Fluid in a Moving Tank. By G. E. Pavlenko, Philosophical Magazine and Journal of Science, February 1933.)

任意斷面の水槽が沿直平面內にて一定の週期的運動をなす時の槽內の水の振動を考へる。從つて取扱ひは總べて二次元的である。水の運動は (1) 水槽を充たす固體の運動と同じ形の變位及び (2) 固定水槽に於て可能なる流體の運動を表はす相對運動の2種の組み合はせである。この中で (1) は明瞭であるからこれを除外し，水槽が固定して水が週期的に變化する外力を受けるものとすればこの外力は，絕えず方向の變化する重力及び惰力である。

第　一　圖



先づ固定せる水槽內の水の自由振動を考へ，ある定つた一分子の振動の振幅を a とすれば座標 x, y の點にあつた水分子の運動は

$$\xi = x + A(x, y)a\sin(\sigma t + \alpha)$$

$$\eta = y + B(x, y)a\sin(\sigma t + \alpha)$$

Aa 及び Ba はこの分子の振幅の座標軸方向の値である。これを

$$\xi = x + Aq, \qquad \eta = y + Bq$$

と書けば座標軸の方向の分速度は

$$v_x = A(x, y)a\sigma\cos(\sigma t + \alpha) = Aq'$$

$$v_y = B(x, y)a\sigma\cos(\sigma t + \alpha) = Bq'$$

流體全體の運動勢力は

$$V = \frac{1}{2}\int_o (v_x^2 + v_y^2)dm = \frac{1}{2}a^2\sigma^2\cos^2(\sigma t + \alpha)\int_o (A^2 + B^2)\,dm$$

位置の勢力は

$$U = \frac{1}{2}a^2\sigma^2\sin^2(\sigma t + \alpha)\int_o (A^2 + B^2)\,dm$$

これ等を簡單に次の如く書く。

$$V = \frac{1}{2}Mq'^2, \qquad U = \frac{1}{2}\sigma^2 Mq^2, \qquad M = \int_o (A^2 + B^2)\,dm$$

次に外力の作用する場合を考へ (x, y) の分子に作用する外力を

$$X(x, y)\sin\omega t\,dm, \qquad Y(x, y)\sin\omega t\,dm$$

とすればその爲す仕事は流體全體にて

$$\int_o (Xv_x dt + Yv_y dt)\sin\omega t\,dm = q'\sin\omega t\,dt\int_o (AX + BY)\,dm$$

$$= Qq'\sin\omega t\,dt$$

但し
$$Q = \int_o (AX + BY)\,dm$$

$$\therefore \quad \frac{\partial(V + U)}{\partial t}dt = Qq'\sin\omega t$$

$$\therefore \quad q''+\sigma^2 q=\frac{Q}{M}\sin\omega t$$

これを解けば

$$q=\frac{Q/M}{1-(\omega/\sigma)^2}\sin\omega t \qquad \therefore \quad a=\frac{Q/M}{1-(\omega/\sigma)^2}$$

従つて强制振動の問題に於ても豫め A, B なる函數を定めて置く必要がある。かゝる函數が多數に存在する時は

$$\xi=x+\sum A_i q_i$$

$$\eta=y+\sum B_i q_i$$

次に一例として矩形斷面の水槽がその一壁に平行に振動する場合の解を求める。この場合は分子運動が速度ポテンシャル $\phi(x,y,t)$ を持つものと假定し更に特殊の場合として，これが週期性を有する場合を考へれば

$$\phi(x,y,t)=\tau(x,y)\sin(\sigma t+\alpha)$$

速度ポテンシャルは Laplace の方程式を滿足すべきであるから

$$\frac{\partial^2\tau}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\tau}{\partial y^2}=0$$

この解が $\tau(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y)$ の形となるものと考へれば

$$-\frac{1}{f_1}\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}=\frac{1}{f_2}\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}$$

この兩邊を κ^2 に等しと置けば

$$f_1(x)=b\sin(\kappa x+\beta)$$

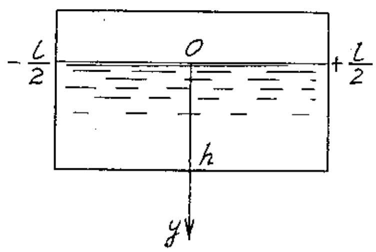
$$f_2(y)=ce^{\kappa y}+de^{-\kappa y}$$

但し b, c, d, β は任意常數である。

従つて速度ポテンシャルは次の形で表はされる。

$$\phi(x,y,t)=(ge^{\kappa y}+he^{-\kappa y})\sin(\kappa x+\beta)\sin(\sigma t+\alpha)$$

第　二　圖



速度ポテンシャルの滿足すべき境界條件は

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}=0 \quad \text{at} \quad y=h$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=0 \quad \text{at} \quad x=\pm\frac{l}{2}$$

これ等の條件より

$$g=\frac{m}{2}e^{-\kappa h}, \quad h=\frac{m}{2}e^{\kappa h} \qquad \text{但し } m \text{ は任意常數}$$

$$\kappa=\frac{(n_1-n_2)}{l}\pi, \quad \beta=(n_1+n_2+1)\frac{\pi}{2} \qquad \text{但し } n_1,\ n_2 \text{ は整數}$$

$$\therefore \quad \phi=m\cosh\kappa(y-h)\begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix}\kappa x\cdot\sin(\sigma t-\alpha)$$

但し $\sin\kappa x$ 中の κ は奇數の n を取る。即ち

$$\frac{\pi}{l},\ \frac{3\pi}{l},\ \frac{5\pi}{l},\ \ldots\ldots$$

$\cos\kappa x$ 中の κ は偶數の n を取る。即ち

$$\frac{2\pi}{l},\ \frac{4\pi}{l},\ \ldots\ldots$$

最後の境界條件として自由水面にては壓力が一定である。水面形を $y=\eta_0(x,t)$ とすれば

$$p(x,\ \eta_0,\ t)=\mathrm{const.}$$

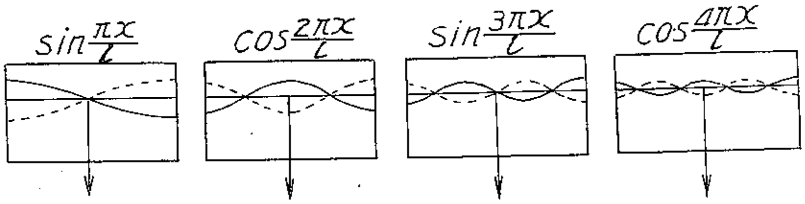
この條件は運動の大ならざる限り次の如く表はされる。

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}=\frac{\partial\eta_0}{\partial t}\quad \text{at}\quad y=0$$

この條件より

$$\eta_0=a\begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix}\kappa x\cos(\sigma t+\alpha)\quad 但し\quad a=\frac{m\kappa}{\sigma}\sinh\kappa h$$

第　三　圖



これ等の水面形は第三圖に示す。速度ポテンシャルは水面分子の振幅 a を用ひて表はせば

$$\phi=a\frac{\sigma}{\kappa}\frac{\cosh\kappa(y-h)}{\sinh\kappa h}\begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix}\kappa x\cdot\sin(\sigma t+\alpha)$$

外力のポテンシャル函數を U とすれば，運動の一般方程式は

$$U-P-\frac{v^2}{2}=\frac{\partial\phi}{\partial t}+f(t)$$

但し P は壓力に關する函數で $dp/\rho=dP$ より定まる。外力が重力のみなる時は $U=gy$ であり，水を非壓縮性とすれば $P=p/\rho$ であるから $v^2/2$ の項を無視すれば

$$p=\rho gy-\rho\frac{\partial\phi}{\partial t}$$

これに水面壓力の條件を代入すれば

$$p(x,\eta_0,t)=a\rho g\begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix}\kappa x\cos(\sigma t+\alpha)-a\rho\frac{\sigma^2}{\kappa}\coth\kappa h\begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix}\kappa x\cdot\cos(\sigma t+\alpha)$$

$$=\mathrm{const.}$$

この條件は總ての $x,\ t$ に對して

$$\sigma^2=\kappa g\tanh\kappa h$$

によつて滿足される。從つて

$$\sigma=\sqrt{\frac{n\pi\tanh\frac{n\pi h}{l}}{l}}\qquad 但し\quad n=1,2,3\ \ldots\ldots$$

分子速度は

$$v_x=\frac{\partial\phi}{\partial x}=a\sigma\frac{\cosh\kappa(y-h)}{\sinh\kappa h}\begin{Bmatrix}+\cos\\ -\sin\end{Bmatrix}\kappa x\sin(\sigma t+\alpha)$$

$$v_y=\frac{\partial\phi}{\partial y}=a\sigma\frac{\sinh\kappa(y-h)}{\sinh\kappa h}\begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix}\kappa x\sin(\sigma t+\alpha)$$

$$\therefore\quad A(x,y)=\frac{\cosh\kappa(y-h)\begin{Bmatrix}+\cos\\ -\sin\end{Bmatrix}\kappa x}{\sinh\kappa h}$$

$$B(x,y)=\frac{\sinh\kappa(y-h)\begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix}\kappa x}{\sinh\kappa h}$$

任意の運動の場合は水面の運動は次の形で表はし得る。

$$\eta_0(x,t)=\sum_{i=1}^{i=\infty}\left(a\sin\frac{2\left(i-\frac{1}{2}\right)\pi x}{l}+b_i\cos\frac{2i\pi x}{l}\right)\cos\sigma_i t$$

$$+\sum_{i=1}^{i=\infty}\left(\frac{a_i'}{\sigma_i}\sin\frac{2\left(i-\frac{1}{2}\right)\pi x}{l}+\frac{b_i'}{\sigma_i}\cos\frac{2i\pi x}{l}\right)\sin\sigma_i t$$

振動する水槽内の水の運動の一般形は

$$\xi=x+\xi_0\sin\omega t-y\theta_0\sin\omega t$$

$$\eta=y+\eta_0\sin\omega t+x\theta_0\sin\omega t$$

その加速度は

$$v_x'=-\xi_0\omega^2\sin\omega t+y\theta_0\omega^2\sin\omega t$$

$$v_y'=-\eta_0\omega^2\sin\omega t-x\theta_0\omega^2\sin\omega t$$

振動による重力の方向の變化に對しては x 方向の分力に $g\,dm\,\theta_0\sin\omega t$ を加へればよい。從つて外力は

$$X(x,y)=(\xi_0\omega^2-y\theta_0\omega^2+g\theta_0)$$

$$Y(x,y)=(\eta_0+x\theta_0)\omega^2$$

これ等の結果より M, Q を計算すれば

$$M=\frac{\rho l}{2\kappa\tanh\kappa h}$$

$$Q=\frac{2\rho\sin\frac{\kappa l}{2}}{\kappa^2}\left[\xi_0\omega^2+g\theta_0+\frac{\theta_0\omega^2}{\kappa}\frac{\cosh\kappa h-1}{\sinh\kappa h}\right]$$

但し $\quad\kappa=\frac{\pi}{l},\ \frac{3\pi}{l},\ \frac{5\pi}{l},\ \ldots.$

$\kappa=\frac{2\pi}{l},\ \frac{4\pi}{l},\ \ldots.$ に對しては Q は零となり，水槽内にては對稱形の振動は起り得ぬことを示す。水槽内の運動は次の形の水面形を用ひて決定される。

$$\eta_0(x,t)=\sum_{i=1,3,5,\ldots}\frac{4\tanh\frac{i\pi h}{l}\sin\frac{i\pi}{2}}{i\pi\left(1-\frac{\omega^2}{\sigma_i^2}\right)}\left[\xi_0\omega^2+g\theta_0+\frac{\theta_0\omega^2 l}{i\pi}\frac{\cosh\frac{i\pi h}{l}-1}{\sinh\frac{i\pi h}{l}}\right]\sin\frac{i\pi x}{l}\sin\omega t$$

但し $\qquad\sigma_i^2=\frac{i\pi g}{l}\tanh\frac{i\pi h}{l}$

この解法は更に一般の運動にまで應用される。例へば汽車が發車せる時の油槽内の油の運動は次式より決定される。

$$\eta_0(x,t)=\sum_{i=1,3,5\ldots}\frac{4\tanh\frac{i\pi h}{l}\sin\frac{i\pi}{2}}{i\pi}\sin\frac{i\pi x}{l}\int_0^\infty\frac{\xi_0(\omega)\omega^2}{1-\frac{\omega^2}{\sigma_i^2}}\sin\omega t\,d\omega$$

（本間　仁抄譯）

Cincinnati 新停車場

(E.N.R. April 22, 1933)

Cincinnati 市に入つて居る Baltimore & Ohio; Cleveland, Cincinnati, Chicago & St. Louis; Pennsylvania; Louisville & Nashville; Chesapeake & Ohio; Southern; Norfork & Western の 7 鐵道の合同停車場が約 3 年半の日子と 41 000 000 弗の金を費して完成し 4 月 1 日から開業したが，この新驛は種々の點に於て特長を有して居るからこゝにその概略を拔萃する事にした。

Cincinnati 市に於ける 1928 年度の鐵道乘降客は 1 日 17 000 人乃至 20 000 人であつて列車 108 往復，1 100 の車輛によつて處理されたことになつて居る。この市は Baltimore & Ohio 鐵道を除いた他の 6 鐵道には終端驛となつて居るので直通寢臺車の交替を必要とし，その數 1 日 50〜60 輛にも達した。このため停車場が從來通り散在して居る事は非常に不便であるので以前から合同停車場實現の議があつたが，種々困難な事情に阻まれて延び延びになつて居たのである。然るに今回遂に都心の西方約 $1\frac{1}{2}$ 哩の Mill Creek Valley に敷地を選び約 5 500 000 立方碼の盛土をし新驛が出來上つたのである。新驛は貫通式 (through type) で 2 層式とし本屋床面は軌道面の上方に置きこゝに種々の設備をした。

先づ本屋は線路の東方に位して市に面しその正面は重厚な石工拱よりなり垂直の窓仕切のある半圓形の窓を有し，その兩側は厚き壁柱によつて強調されこの壁柱に接しては更に低き弧形アーケードあり前方に突出して居る。この拱形正面の裏には半圓形の平面を有し半穹窿を有する大廣間 (concourse) あり，その大いさ間口 176 呎，奥行 125 呎，高さ 106 呎でこの廣い半圓形床面には案内亭があるのみで他には何等の邪魔物がない，而してこの廣間の北側には 18 の出札窓あり，南側にはソーダ・ファウンテン，電信臺，藥種屋，食堂への入口等がある。前面には中央に間口 45 呎，奥行 22 呎の玄關の他に 4 箇の店と旅行案内所とあり，更に北側玄關の東隣には喫茶室南側玄關の東隣には小さい活動寫眞館がある。廣間に續いて手荷物廣間 (checking lobby) あり，その南側は一時預室，婦人待合室，電話室，旅行相談所，食堂，臺所等あり。北側は手荷物室，靴磨所，理髪室，新聞室及び終端驛會社事務室に宛てられて居るが，尙この上部 2 層を事務所の殘りの部分に充てゝある。尙この廣間の東端には二階造りの信號塔がある。この廣間の次には列車廣間あり，幅 78 呎 8 吋，長さ 410 呎，拱頂の高さ 36 呎 $8\frac{1}{2}$ 吋の欠圓拱の天井を有し兩側に各 8 つの戸があり。これより階段又は斜路を降りて乘降場に至る。

弧形アーケードの中は 3 條に區分され，タキシー，乘合自動車，電車を通ずる如くなつて居るが，これらの通路はアーケード入口より內部に入るに從ひて漸次降下し，大廣間の下を潛り拔けて反對側に通じて居る。從つて車は北側より入り大廣間の下を通り拔け南側より出でる，これ等 3 條の車道を挾んで步道が設けられアーケードの外にては乘客の乘降に便なる高さにあり，內部に至るに從ひ漸次上昇して南北玄關の處で大廣間の床と同じ高さになつて居る。步行の旅客並びに自家用自動車による旅客は東側の玄關を出入する。