

## 論 說 報 告

第十九卷第九號 昭和八年九月

## 走行蒸氣機關車に因る橋桁強制振動の理論

## 第一編

## 橋桁及び機關車彈機に摩擦抵抗力の作用せざる場合

准員 工 學 士 小 澤 久 太 郎

Theory of the Forced Vibration of a Bridge  
caused by the Passage of a Locomotive.

By Kyutaro Ozawa, C. E., Assoc. Member.

## 内 容 梗 概

本論文は蒸氣機關車が或る一定なる速度を以つて橋桁上を走行せる場合の橋桁及び機關車の振動を關聯的に解いたもので、橋桁及び機關車の振動性態は橋桁の自己振動週期並に機關車働輪の回轉角速度に關係するの外、機關車彈機の振動週期に大いに支配される事を述べたものである。

## 1. 緒 言

走行蒸氣機關車が橋桁に與へる衝撃の原因は大體

- (1) 機關車働輪過平衡對重の打撃
- (2) 軌條接目及び軌條の不整
- (3) 偏心車輪又は不規則車輪
- (4) 縱桁の撓度
- (5) 車輪突入間隔

に分つ事が出来る。此の内短支間の橋桁を除いては機關車働輪過平衡對重の打撃が最も大なる衝撃を橋桁に與へる事は稍々近代の定説をなしてゐる。機關車働輪過平衡對重の衝撃を最初に取扱つたのは St. Timoshenko<sup>1)</sup>であつて

$$Q = P \sin \sigma t \quad \text{但し } P: \text{ 過平衡對重に因る遠心力, } \sigma: \text{ 働輪の回轉角速度}$$

なる外力が橋桁上を移動するものとして橋桁の振動を求め外力の週期が橋桁の振動週期と一致せる際が最も危険状態であると結論した。後物部博士,<sup>2)</sup> C. E. Inglis,<sup>3)</sup> H. H. Jeffcott,<sup>4)</sup> M. R. Desprets<sup>5)</sup>等に依つても同問題が

1) St. Timoshenko. "On the Forced Vibration of Bridge" Phil. Mag., Vol. 43 (1923), p. 1018.

2) 物部長祺; "橋桁の振動並に其の衝撃作用との關係に就て" 土木學會誌第十卷第一號

3) C. E. Inglis; "Theory of Transverse Oscillations in Girders, and its Relation to Live Load and Impact Allowances." Min. Proc. Inst. C. E. Vol. 218 (1925), p. 225.

C. E. Inglis; "Oscillations in a Bridge caused by the Passage of a Locomotive." Proc. Roy. Soc. London. Vol. 118 (1928), p. 60.

4) H. H. Jeffcott; "On the Vibration of Beams under the Action of Moving Loads" Phil. Mag., 8 (1929) p. 66.

5) M. R. Desprets; "Actions Dynamiques des Charges Roulantes sur les Ponts de Chemins de Fer. Ann. Pont. Chaus. (1932) p. 325.

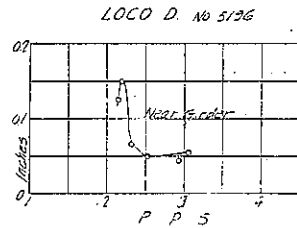
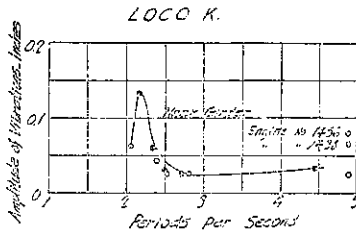
取扱はれ大體同じ結論に達したが蒸気機関車重量並に彈機の影響が導入されてゐないのである (Inglis は彈重量並に彈機の影響を考へたが補正的のものであつて本質的のものではない)。元來、彈機を有する車輛が橋桁上に疾走する場合には橋桁の振動は車輛彈重量に強制振動を與へ、車輛彈重量の振動は又橋桁に強制振動を起させ斯くして橋桁及び車輛彈重量は彈機を通じて關聯的に振動を續行するのである。蒸気機関車に因る橋桁の振動を論ずるに際しても斯る見地より出發しなければ橋桁並に機關車の振動の眞相は掴めないものであつて此の事は英國の Bridge Stress Committee に於ける實驗の結果<sup>1)</sup>にも顯はれてゐるのである。即ち今同報告書中より

- a. Queen Alexandra (支間 345'-0" = 105.16 米)
- b. Newark Dyke ( " 262'-0" = 80.01 " )
- c. Brotherton ( " 343'-7" = 78.94 " )
- d. River Aire ( " 210'-0" = 64.00 " )
- e. Stoke Canon ( " 132'-0" = 40.23 " )
- f. Langport East ( " 112'-0" = 34.14 " )

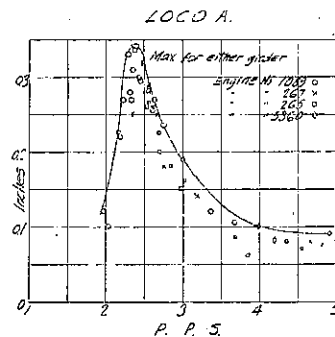
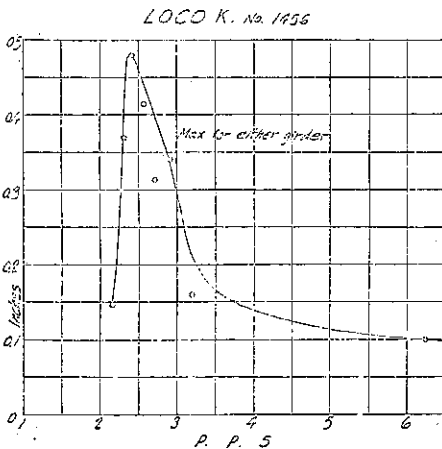
の 6 橋に就き側輪回轉數 (毎秒) と最大振幅との關係を抄録すれば第一圖の如くなり、第一圖を通觀する時は中徑間に於ては橋桁の危險状態は機關車側輪の回轉週期が橋桁自己振動週期と一致せる時の外猶 1 箇所ある事を發見するので、斯る振動状態は前記論文にては説明し得ないのである (英國 Bridge Stress Committee 報告書中

第 一 圖

(a)

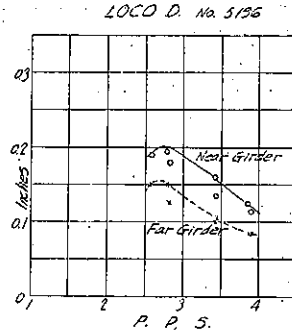
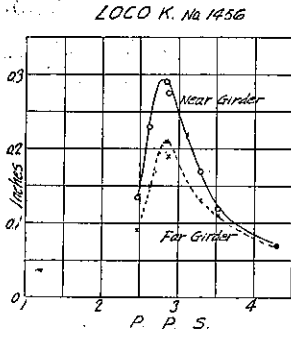


(b)

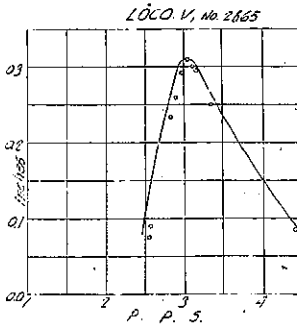
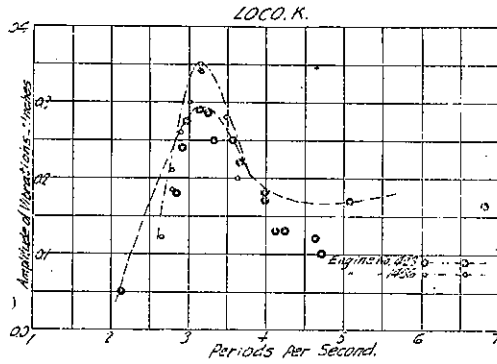


<sup>1)</sup> Report of the Bridge Stress Committee (1928).

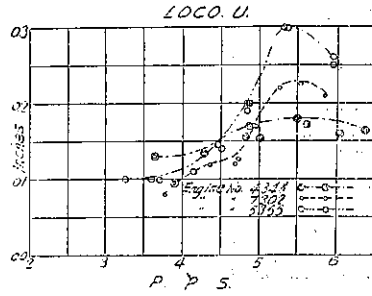
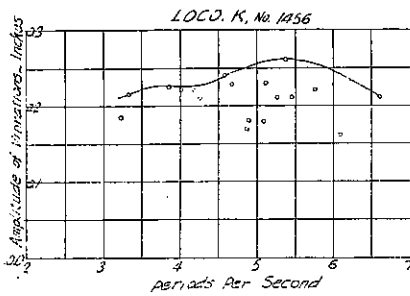
(c)



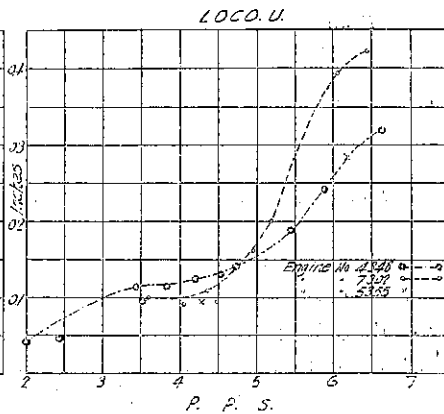
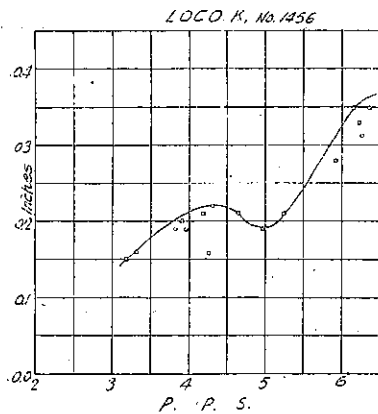
(d)



(e)



(f)



に於ては前記現象を説明する爲或時は弾機の影響を考へ、或る時は全然働かずと假定してゐるが<sup>7)</sup>理論的には甚だ不十分である。又極めて最近 Schaper は彼の著書に於て橋桁のレデュースング、マスと機関車彈重量とを關聯的に考へて本問題を取扱つたが<sup>8)</sup>強制振動の基礎をなす外力に就て何等の考察を拂はなかつた爲、結局橋桁及び機関車自己振動の域を脱する事が出来なかつた。

又本問題を實驗的に解決せんとし古くは American Railway Engineering and Maintenance of Way Association,<sup>9)</sup> Indian Railway Bridge Committee<sup>10)</sup> に於て又最近には英國の Bridge Stress Committee に於て數多くの實驗を行つたが斯る複雑なる問題を妥當なる理論的根據なく唯實驗によつてのみ解決せんとするは無意味に等しいのであつて理論の追究こそ先決問題である。

本論は橋桁及び蒸気機関車の振動を關聯的に考へて機関車過平衡對重の橋桁に與へる衝擊理論を導かんとするものであつて簡單のため橋桁は斷面積、慣性率共に一様とし橋桁及び機関車彈機の摩擦抵抗力は全然無視した。

## 2. 外 力

走行蒸気機関車に因りて橋桁に加はる外力は橋桁上を或る速度にて移動する垂直外力と或る角速度にて回轉する働輪過平衡對重に因る打撃とに分つ事が出来る。

(a) 垂直外力は機関車の重みを其の儘用ふれば良いので今

$$W_s: \text{彈重 (スプリング・ウエイト)}, \quad W_n: \text{非彈重 (アンス・ラング・ウエイト)}$$

とすれば垂直外力は

$$F' = W_s + W_n \quad \dots\dots\dots (1)$$

にて與へらる。

(b) 働輪過平衡に因る打撃は第二圖に於て

$M$ : 過平衡對重の質量

$r$ : 過平衡對重中心までの半徑

$\sigma$ : 働輪角速度

とすれば遠心力は

$$F'' = Mr\sigma^2 \quad \dots\dots\dots (2)$$

なるを以つて遠心力の垂直分力

$$\begin{aligned} F_n'' &= Mr\sigma^2 \sin \theta = Mr\sigma^2 \sin \sigma t \\ &= P \sin \sigma t \quad \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

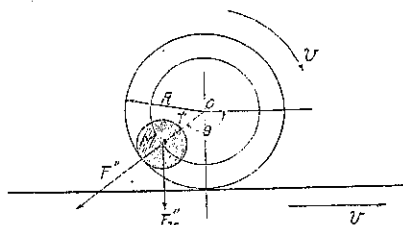
但し

$$P = Mr\sigma^2 \quad \dots\dots\dots (3')$$

にて表はされる。

故に (1) 式及び (3) 式より走行蒸気機関車に因りて橋桁に加はる外力は

第 二 圖



7) Report of the Bridge Stress Committee § 129, § 130.

8) Schaper; Mechanische Schwingungen der Brücken (Berlin 1933) § 9, § 19.

9) Proc. Am. Railway Eng. and Maint. of Way Assoc. (1911)

10) First Report of the Indian Railway Bridge Committee (1917) 外數種

$$F = W_s + W_n + P \sin \sigma t \dots\dots\dots (4)$$

にて與へらる。

### 3. 橋桁及び機関車の振動基本式

#### (1) 振動の微分方程式

蒸気機関車が橋桁上を走行する場合、橋桁の振動は機関車彈重量に強制振動を與へ、機関車彈重量の振動は再び橋桁に強制振動を起させ、斯くして橋桁及び機関車彈重量は彈機を通じて關聯的に振動を續けるのである。今之等橋桁及び機関車彈重量の振動を論ずるに當つて次の如き假定をなす。

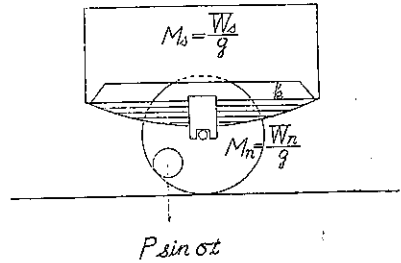
- (1) 蒸気機関車は第三圖の如き機構とす。
- (2) 蒸気機関車は常に橋桁支間の中央部に定置され垂直外力

$$F = W_s + W_n + P \sin \sigma t$$

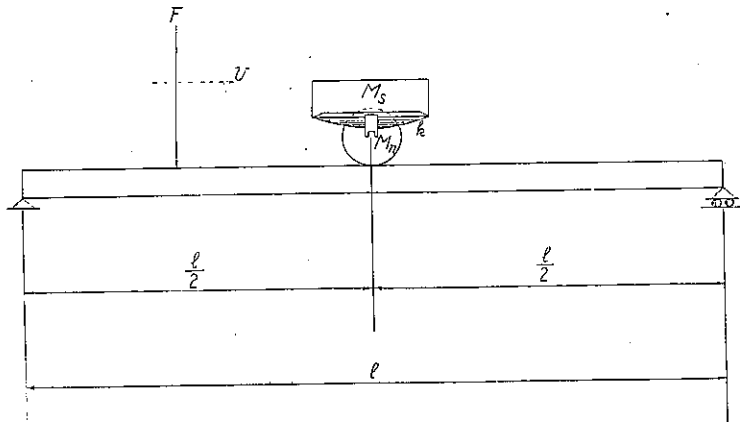
のみ一定なる速度を以つて橋桁上を移行す (第四圖)

- (3)  $k$ : 蒸気機関車彈機の彈係數
- (4)  $M_s$ : 彈重量 (スプリング・マス) =  $\frac{W_s}{g}$
- (5)  $M_n$ : 非彈重量 (アンスプリング・マス) =  $\frac{W_n}{g}$
- (6)  $EJ$ : 橋桁の彎曲に對する剛性率 (=一定)
- (7)  $A$ : 橋桁斷面積 (=一定)
- (8)  $\rho$ : 橋桁單位體積の質量

第三圖



第四圖



とし且つ橋桁の振動曲線を

$$y = \varphi \sin \frac{\pi x}{l} \dots\dots\dots (5)$$

を以つて表はし橋桁支間中央部に定置せる機関車彈重量の上下振動を  $\varphi$  にて表はすとすれば

(a) 橋桁及び蒸気機関車非彈重量の育する運動の勢力

$$\begin{aligned}
 T_1 &= \frac{1}{2} \rho A \int_0^l \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} M_n (\dot{\phi})^2 \\
 &= \frac{1}{2} \rho A (\dot{\phi})^2 \int_0^l \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx + \frac{1}{2} M_n (\dot{\phi})^2 = \frac{1}{4} \rho A l (\dot{\phi})^2 + \frac{1}{2} M_n (\dot{\phi})^2 \\
 &= \left( \frac{1}{4} \rho A l + \frac{1}{2} M_n \right) (\dot{\phi})^2
 \end{aligned}$$

(b) 機関車弾重量の有する運動の勢力

$$T_2 = \frac{1}{2} M_s (\dot{\phi})^2$$

(c) 橋桁の有する位置の勢力

$$\begin{aligned}
 V_1 &= \frac{EJ}{2} \int_0^l \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 dx = \frac{EJ \pi^4}{2 l^3} \int_0^l \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx \\
 &= \frac{EJ \pi^4}{4 l^3} \varphi^2
 \end{aligned}$$

(d) 機関車弾重量の有する位置の勢力

$$V_2 = \frac{1}{2} k (\phi - \varphi)^2$$

故に橋桁及び機関車を總轄して一つの振動系とすれば此の振動系の有する運動の勢力は

$$\begin{aligned}
 T &= T_1 + T_2 \\
 &= \left( \frac{1}{4} \rho A l + \frac{1}{2} M_n \right) (\dot{\phi})^2 + \frac{1}{2} M_s (\dot{\phi})^2 \dots \dots \dots (6)
 \end{aligned}$$

振動系の有する位置の勢力は

$$\begin{aligned}
 V &= V_1 + V_2 \\
 &= \frac{EJ \pi^4}{4 l^3} \varphi + \frac{1}{2} k (\phi - \varphi)^2 \dots \dots \dots (7)
 \end{aligned}$$

にて表はされる。

茲に於て  $\varphi$  及び  $\phi$  を決定するには Lagrange の運動の方程式

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \phi} + \frac{\partial V}{\partial \phi} &= \theta_\phi \\
 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} + \frac{\partial V}{\partial \varphi} &= \theta_\varphi
 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

を用ふれば良い。(8) 式中  $\theta_\phi$  及び  $\theta_\varphi$  は座標  $\varphi$  及び  $\phi$  に對應する一般力を示すものである。今 (6) 式及び (7) 式より

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} &= \left( \frac{1}{2} \rho A l + M_s \right) \dot{\phi} \\
 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} \right) &= \left( \frac{1}{2} \rho A l + M_s \right) \ddot{\phi} \\
 \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= 0 \\
 \frac{\partial V}{\partial \varphi} &= \frac{1}{2} \frac{EJ \pi^4}{l^3} \varphi - k (\phi - \varphi)
 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

及び

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \phi} &= M_s \dot{\phi} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} \right) &= M_s \ddot{\phi} \\ \frac{\partial T}{\partial \phi} &= 0 \\ \frac{\partial V}{\partial \phi} &= k(\phi - \varphi) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(10)$$

を得、(9) 式及び (10) 式の値を (8) 式に代入すれば聯立二次微分方程式

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{1}{2} \rho A l + M_n \right) \ddot{\phi} + \left( \frac{1}{2} \frac{EJ\pi^4}{l^3} + k \right) \varphi - k\phi &= \theta_\varphi \\ M_s \ddot{\phi} + k\phi - k\varphi &= \theta_\phi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(11)$$

を得るのである。

(a) 今  $\theta_\varphi$  を決定せんとするに第五圖に於て外力  $F$  が  $x=a$  に來りたる時を考ふれば

座標  $\varphi$  の微小變位  $\delta\varphi$  に對する橋桁の撓み  $\delta y$  は (5) 式より

$$\delta y = \delta\varphi \sin \frac{\pi x}{l}$$

なるを以て、此の間に外力  $F$  のなす仕事  $\delta A$  は

$$\delta A = F \delta\varphi \left( \sin \frac{\pi x}{l} \right)_{x=a} = F \delta\varphi \sin \frac{\pi a}{l} \dots\dots\dots(12)$$

にして之は一般力  $\theta_\varphi$  のなす仕事

$$\delta A' = \theta_\varphi \delta\varphi \dots\dots\dots(13)$$

と等しくしなければならぬ。故に (12) 式及び (13) 式より一般力  $\theta$  は

$$\theta_\varphi = F \sin \frac{\pi a}{l}$$

にて與へらる。然るに蒸氣機關車の速度は  $v$  なるを以つて  $a = vt$ 、故に走行機關車荷重に因る一般力  $\theta_\varphi$  は

$$\theta_\varphi = F \sin \frac{\pi vt}{l} = (W_s + W_n + P \sin \sigma l) \sin \frac{\pi vt}{l} \dots\dots\dots(14)$$

にて表はす事が出来る。

(b) 次に  $\theta_\phi$  を決定せんとするに蒸氣機關車には全然外力作用せずと考へ得るが故に

$$\theta_\phi = 0 \dots\dots\dots(15)$$

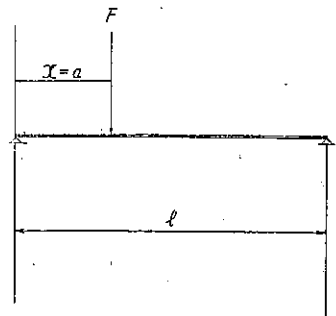
と置く事が出来る。

茲に於て (8) 式及び (15) 式の値を (11) 式中に代入すれば橋桁及び蒸氣機關車の振動の方程式として

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{1}{2} \rho A l + M_n \right) \ddot{\phi} + \left( \frac{1}{2} \frac{EJ\pi^4}{l^3} + k \right) \varphi - k\phi \\ = (W_s + W_n + P \sin \sigma l) \sin \frac{\pi vt}{l} \\ M_s \ddot{\phi} + k\phi - k\varphi = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(16)$$

なる聯立二次微分方程式を得。

第五圖



今

$$\left. \begin{aligned} \frac{k}{M_s} &= a \\ \frac{EJ\pi^4}{\rho Al^4 + 2M_n l^3} &= b \\ \frac{2k}{\rho Al + 2M_n} &= c \\ \frac{2(W_s + W_n)}{\rho Al + 2M_n} &= w \\ \frac{2P}{\rho Al + 2M_n} &= A \\ \frac{\pi r}{l} &= m \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

と置けば (16) 式は

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\varphi} + (b+c)\varphi - c\phi &= (w + A \sin \sigma t) \sin mt \\ \ddot{\phi} + a\phi - a\varphi &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

の如き簡単なる形となる。(18) 式を解いて  $\varphi$  及び  $\phi$  を求むれば橋桁及び蒸気機関車の振動は劃一的に決定されるのである。

(2) 微分方程式の解

(a) (18) 式の一般解を求むるためには先づ (18) 式の餘函数即ち

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\varphi} + (b+c)\varphi - c\phi &= 0 \\ \ddot{\phi} + a\phi - a\varphi &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

の一般解を求めなければならぬ。

(19) 式の一般解は本誌第十九卷第六號所載、拙著；“スプリングを有する走行車輛に因る橋桁の強制振動”中 (22) 式に由り

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= A_1 \sin(p_1 t + \alpha_1) + A_2 \sin(p_2 t + \alpha_2) \\ \phi &= \frac{a}{a-p_1^2} A_1 \sin(p_1 t + \alpha_1) + \frac{a}{a-p_2^2} A_2 \sin(p_2 t + \alpha_2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

にて表はされ  $p_1, p_2$  は

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \sqrt{\frac{(a+b+c) + \sqrt{(a+b+c)^2 - 4ab}}{2}} \\ p_2 &= \sqrt{\frac{(a+b+c) - \sqrt{(a+b+c)^2 - 4ab}}{2}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

にて與へられる。(20) 式中  $A_1, A_2, \alpha_1, \alpha_2$  は環境條件によりて決定さるべき任意常數である。

(b) 次に (18) 式の特解を求めなければならぬ。(18) 式第一式右邊は

$$(w + A \sin \sigma t) \sin mt = w \sin mt + \frac{A}{2} \cos(\sigma - m)t - \frac{A}{2} \cos(\sigma + m)t$$

なれば (18) 式の特解は



$$\left. \begin{aligned} \ddot{\varphi} + (b+c)\varphi - c\phi &= w \sin mt \\ \ddot{\phi} + a\phi - a\varphi &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\varphi} + (b+c)\varphi - c\phi &= \frac{A}{2} \cos(\sigma - m)t \\ \ddot{\phi} + a\phi - a\varphi &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\varphi} + (b+c)\varphi - c\phi &= -\frac{A}{2} \cos(\sigma + m)t \\ \ddot{\phi} + a\phi - a\varphi &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

の特解の和でなければならぬ。

(22) 式の特解を求めるには

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \lambda_1 \sin mt \\ \phi &= A_1 \sin mt \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

と置いて (22) 式に代入すれば

$$\begin{aligned} (b+c-m^2)\lambda_1 - cA_1 &= w \\ a\lambda_1 - (a-m^2)A_1 &= 0 \end{aligned}$$

なる関係が成立ち、之より  $\lambda_1, A_1$  を決定すれば

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\begin{vmatrix} w & -c \\ 0 & -(a-m^2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (b+c-m^2) & -c \\ a & -(a-m^2) \end{vmatrix}} = \frac{w(a-m^2)}{[(a-m^2)(b+c-m^2) - ac]} \\ A_1 &= \frac{\begin{vmatrix} (b+c-m^2) & w \\ a & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (b+c-m^2) & -c \\ a & -(a-m^2) \end{vmatrix}} = \frac{aw}{[(a-m^2)(b+c-m^2) - ac]} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

なる値を得。

同様に (23) 式の特解を求めるには

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{\lambda_2}{2} \cos(\sigma - m)t \\ \phi &= \frac{A_2}{2} \cos(\sigma - m)t \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27)$$

と置いて (23) 式に代入、 $\lambda_2, A_2$  の値を決定すれば

$$\left. \begin{aligned} \lambda_2 &= \frac{A[a - (\sigma - m)^2]}{[a - (\sigma - m)^2][b + c - (\sigma - m)^2] - ac} \\ A_2 &= \frac{aA}{[a - (\sigma - m)^2][b + c - (\sigma - m)^2] - ac} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

なる値を得。 $m$  は他の数値に比して甚だしく小なれば無視するも差支へ無く、然らば

$$\left. \begin{aligned} \lambda_2 &\doteq \frac{A[a - \sigma^2]}{[a - \sigma^2][b + c - \sigma^2] - ac} \\ A_2 &\doteq \frac{aA}{[a - \sigma^2][b + c - \sigma^2] - ac} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

又 (24) 式の特解は

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{\lambda_2}{2} \cos(\sigma + m)t \\ \phi &= \frac{A_3}{2} \cos(\sigma + m)t \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (30)$$

と置いて (43) 式に代入,  $\lambda_2, A_3$  の値を決定すれば

$$\left. \begin{aligned} \lambda_2 &= \frac{-A[a - (\sigma + m)^2]}{[a - (\sigma + m)^2][b + c - (\sigma + m)^2] - ac} \\ A_3 &= \frac{-aA}{[a - (\sigma + m)^2][b + c - (\sigma + m)^2] - ac} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (31)$$

なる値を得。前と同じ理由に因り (31) 式中に於て  $m$  を無視すれば

$$\left. \begin{aligned} \lambda_2 &\div \frac{-A[a - \sigma^2]}{[a - \sigma^2][b + c - \sigma^2] - ac} \\ A_3 &\div \frac{-aA}{[a - \sigma^2][b + c - \sigma^2] - ac} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (32)$$

となる。(29) 式, (32) 式より

$$\lambda_2 = -\lambda_1 (= \lambda \text{ と置く})$$

$$A_3 = -A_1 (= A \text{ と置く})$$

なる関係が判る。

斯くして (18) 式の特解は (25) 式乃至 (33) 式の關係より

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \lambda_1 \sin mt + \frac{\lambda}{2} \cos(\sigma - m)t - \frac{\lambda}{2} \cos(\sigma + m)t \\ &= \lambda_1 \sin mt + \lambda \sin \sigma t \sin mt \\ \phi &= A_1 \sin mt + \frac{A}{2} \cos(\sigma - m)t - \frac{A}{2} \cos(\sigma + m)t \\ &= A_1 \sin mt + A \sin \sigma t \sin mt \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (34)$$

にて與へられ, 微分方程式 (18) の一般解は (29) 式並に (34) 式より

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= A_1 \sin(p_1 t + \alpha_1) + A_2 \sin(p_2 t + \alpha_2) + \lambda_1 \sin mt + \lambda \sin \sigma t \sin mt \\ \phi &= \frac{a}{a - p_1^2} A_1 \sin(p_1 t + \alpha_1) + \frac{a}{a - p_2^2} A_2 \sin(p_2 t + \alpha_2) \\ &\quad + A_1 \sin mt + A \sin \sigma t \sin mt \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (35)$$

にて與へらる。

(c) 今環境條件  $A_1, A_2, \alpha_1, \alpha_2$  を決定するため始源状態として

$$\left. \begin{aligned} t = 0 \text{ の時} & \quad \varphi = 0 & \text{(i)} \\ & \quad \phi = 0 & \text{(ii)} \\ t = 0 \text{ の時} & \quad \dot{\varphi} = 0 & \text{(iii)} \\ & \quad \dot{\phi} = 0 & \text{(iv)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (36)$$

とすれば (36) 式 (i) 及び (ii) より

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= 0 \\ \alpha_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (37)$$

なる値を得。

又 (36) 式 (iii) 及び (iv) より

$$\left. \begin{aligned} 0 &= p_1 A_1 + p_2 A_2 + m \lambda_1 \\ 0 &= \frac{\alpha p_1}{a - p_1^2} A_1 + \frac{\alpha p_2}{a - p_2^2} A_2 + m A_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (38)$$

なる關係式を得。(38) 式より  $A_1, A_2$  の値を決定すれば

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{\begin{vmatrix} -m \lambda_1 & p_2 \\ -m A_1 & \frac{\alpha p_2}{a - p_2^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ \frac{\alpha p_1}{a - p_1^2} & \frac{\alpha p_2}{a - p_2^2} \end{vmatrix}} = \frac{m v (a - p_1^2) (p_2^2 - m^2)}{p_1 (p_1^2 - p_2^2) [(a - m^2)(b + c - m^2) - a c]} \\ A_2 &= \frac{\begin{vmatrix} p_1 & -m \lambda_1 \\ \frac{\alpha p_1}{a - p_1^2} & -m A_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ \frac{\alpha p_1}{a - p_1^2} & \frac{\alpha p_2}{a - p_2^2} \end{vmatrix}} = \frac{m v (a - p_2^2) (p_1^2 - m^2)}{p_2 (p_1^2 - p_2^2) [(a - m^2)(b + c - m^2) - a c]} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (39)$$

なる値を得。

斯くして微分方程式 (18) 式の一般解は (35) 式に由つて劃一的に決定せられ (35) 式に (39) 式の値を代入すれば

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{v}{[(a - m^2)(b + c - m^2) - a c]} \left[ \frac{m(a - p_1^2)(p_2^2 - m^2)}{p_1(p_1^2 - p_2^2)} \sin p_1 t \right. \\ &\quad \left. + \frac{m(a - p_2^2)(p_1^2 - m^2)}{p_2(p_1^2 - p_2^2)} \sin p_2 t + (a - m^2) \sin m t \right] \\ &\quad + \frac{a(a - \sigma^2)}{[(a - \sigma^2)(b + c - \sigma^2) - a c]} \sin \sigma t \sin m t \\ \phi &= \frac{v}{[(a - m^2)(b + c - m^2) - a c]} \left[ \frac{a m (p_2^2 - m^2)}{p_1(p_1^2 - p_2^2)} \sin p_1 t \right. \\ &\quad \left. + \frac{a m (p_1^2 - m^2)}{p_2(p_1^2 - p_2^2)} \sin p_2 t + a \sin m t \right] \\ &\quad + \frac{a a}{[(a - \sigma^2)(b + c - \sigma^2) - a c]} \sin \sigma t \sin m t \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (40)$$

にて與へられる。 $\varphi$  及び  $\phi$  共第一の項は蒸氣機關車重量に因る 強制振動を第二の項は 側輪過平衡對重の打撃に因る強制振動を表はすものである。

5. 中徑間及び大徑間の鐵道橋に對する機關車側輪過平衡對重打撃の影響

私は前説に於て蒸氣機關車が或る一定の速度を以つて橋桁上を疾走せる場合の橋桁及び機關車の振動に就て論じたが、同論旨に據る時は橋桁及び機關車の振動は橋桁の自己振動週期、側輪の回轉角速度の外に機關車彈機の自己振動週期に大いに関係する事を知つた。現在普通に使用されてゐる蒸氣機關車彈機の自己振動數(載荷状態)は毎秒 2.5~4.2 であつて<sup>11)</sup>鐵道橋の自己振動數は第一表に掲げる如きものである。<sup>12)</sup>

<sup>11)</sup> T. H. Sanders; "Laminated Springs" p. 201

<sup>12)</sup> 英國に於ける鐵道橋振動數の實例であつて Report of the Bridge Stress Committee p. 160 に據る。

| 第 一 表             |       |          |             |
|-------------------|-------|----------|-------------|
| 橋 名               | 工 種   | 支間 (呎-吋) | 無載荷自己振動數(秒) |
| Manningtree - 228 | 鋼板桁橋  | 41 7-1/2 | 14          |
| Langport East     | "     | 42 6     | 12.5        |
| Newby Wiske       | "     | 44 8     | 13.0        |
| Narborough        | "     | 45 0     | 8.5         |
| Sellafield        | "     | 47 6     | 10.0        |
| Ainderby          | "     | 49 6     | 10.0        |
| Manningtree - 228 | "     | 52 4-1/2 | 10.5        |
| Deeping           | "     | 53 3     | 9.8         |
| Stafford's        | "     | 56 2     | 8.0         |
| Manningtree - 228 | "     | 61 6     | 7.7         |
| Ulleskelf - New   | "     | 63 6     | 8.1         |
| Ulleskelf - Old   | "     | 64 0     | 7.8         |
| Stafford's        | "     | 64 0     | 8.0         |
| Didsbury - 27     | "     | 66 4     | 6.1         |
| Keadby            | "     | 68 6     | 11.0        |
| Bicester          | "     | 72 2     | 9.4         |
| Sellafield        | "     | 72 8     | 6.6         |
| Wressle           | "     | 76 0     | 7.9         |
| Huntingdon        | "     | 81 4     | 7.6         |
| Yalding           | 構 桁 橋 | 88 2     | 8.0         |
| Boyne             | 鋼板桁橋  | 91 5     | 6.5         |
| Blackthorn        | "     | 94 9     | 5.3         |
| Castle Bytham     | 構 桁 橋 | 102 0    | 4.9         |
| Langport East     | "     | 112 0    | 6.3         |
| Bridgwater        | "     | 116 0    | 5.7         |
| Stoke Canon       | "     | 132 0    | 5.0         |
| Keadby            | "     | 135 0    | 5.6         |
| Broxbourne        | "     | 136 0    | 5.4         |
| Maunby            | "     | 146 8    | 4.8         |
| Hilgay            | "     | 156 0    | 3.4         |
| Rugby             | "     | 168 8    | 4.0         |
| Norbury           | "     | 184 4    | 4.6         |
| Aire              | "     | 210 0    | 3.7         |
| Brotherton        | "     | 242 7    | 3.2         |
| Newark Dyke       | "     | 262 6    | 2.86        |
| Monkwearmouth     | "     | 311 8    | 2.65        |
| Runcorn           | "     | 315 0    | 2.34        |
| Queen Alexandra   | "     | 345 0    | 2.18        |

斯く小、中徑間の場合には橋桁の自己振動數は機關車彈機の振動數に比して甚だしく大なるも大徑間の場合には次第に一致して來るのである。故に働輪過平衡對重の衝撃を考へる場合、橋桁及び機關車自己振動數の甚しく

異なる中徑間と兩者振動數の一致せる大徑間とに分けて研究しなければならぬ。本節に於ては其の各々の場合に就て橋桁及び機關車の振動を論じ且つ機關車の速度に由つて橋桁の振幅が如何に變ずるかを述べんとするものである。

(a) 中徑間の場合

先づ橋桁及び蒸氣機關車の自己振動週期を考ふるに

$$\left. \begin{aligned} \text{機關車彈重自己振動週期} \quad T_u &= 2\pi\sqrt{\frac{M_s}{k}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a}} \\ \text{橋桁自己振動週期}^{13)} \quad T_b &= 2\pi\sqrt{\frac{\rho Al^3 + 2Mm^3}{EJ\pi^4}} = \frac{2\pi}{\sqrt{b}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (41)$$

にて與へらる。故に橋桁及び機關車の自己振動週期が互に異なる場合には

$$|a - b| \gg 0$$

なる條件が成立ち振動指數

$$\begin{aligned} p_1 &= \sqrt{\frac{(a+b+c) + \sqrt{(a+b+c)^2 - 4ab}}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{(a+b+c) + \sqrt{(a-b-c)^2 + 4ac}}{2}} \end{aligned}$$

及び

$$\begin{aligned} p_2 &= \sqrt{\frac{(a+b+c) - \sqrt{(a+b+c)^2 - 4ab}}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{(a+b+c) - \sqrt{(a-b-c)^2 + 4ac}}{2}} \end{aligned}$$

中に於て  $c$  は  $a, b$  及び  $(a-b)$  に比して無視し得べしとすれば振動指數は近似的に

$$\left. \begin{aligned} p_1 &\doteq \sqrt{a} \\ p_2 &\doteq \sqrt{b} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (42)$$

にて表はさる。茲に於て (42) 式の關係を (40) 式に代入し且つ  $m$  は  $a, b$  に比し甚だ小なる數値と置けば

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{wm}{\sqrt{b}(b-m^2)} \sin p_2 t + \frac{w}{(b-m^2)} \sin mt \\ &\quad + \frac{A(a-\sigma^2)}{[(a-\sigma^2)(b+c-\sigma^2)-ac]} \sin \sigma t \sin mt \\ \phi &= \frac{awm}{\sqrt{a}(a-b)(a-m^2)} \sin p_1 t + \frac{awm}{\sqrt{b}(a-b)(b-m^2)} \sin p_2 t \\ &\quad + \frac{aw}{(a-m^2)(b-m^2)} \sin mt + \frac{aA}{[(a-\sigma^2)(b+c-\sigma^2)-ac]} \sin \sigma t \sin mt \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (43)$$

を得。

今橋桁振動の座標  $\varphi$  が機關車の速度に由つて如何に變化するかを研究するため (43) 式  $\varphi$  の各項に就て別々に解析を行へば

<sup>13)</sup> 橋桁の中央に機關車の非彈重量が載れる場合の自己振動週期である。符號は 2. の場合と同様。

(1)

$$\frac{wv}{\sqrt{b(b-m^2)}} = \frac{w\pi l v}{\sqrt{b(lb^2 - \pi^2 v^2)}} = \frac{w\pi l R \sigma}{\sqrt{b(lb^2 - \pi^2 R^2 \sigma^2)}} \quad (14)$$

$$= f_1$$

今横軸に  $v$  及び  $\sigma$  を採り、縦軸に  $f_1$  の値を採れば  $f_1$  の曲線は第六圖の如くなる。第六圖よりも明かなる如く

$$\left. \begin{aligned} (i) \quad v &= \sqrt{\frac{bl^2}{\pi^2}} \\ (ii) \quad \sigma &= \sqrt{\frac{bl}{\pi^2 R}} \end{aligned} \right\} \dots\dots (44)$$

に於て無限大となる。然して今斯かる危険状態の意味を考ふるに (44) 式の條件より

$$v = l \frac{\sqrt{b}}{\pi} = \frac{2l}{T_b}$$

$$\frac{l}{v} = \frac{T_b}{2} \dots\dots (45)$$

なる關係が成立つ。(45) 式は橋桁自己振動週期の  $\frac{1}{2}$  時間に蒸気機関車が橋桁上を通過する時橋桁が危険状態に達する事を示すものであつて實際には斯かる速度を考へる必要はないのである。

又速度が次第に増加する時  $f_1$  の増加の仕方を考ふるに (速度の小なる場合)

$v$  横軸に關しては

$$\tan \alpha = \left( \frac{df_1}{dv} \right)_{v=0} = \frac{w}{b^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\pi}{l}$$

$$= \frac{2(W_s + W_n)}{(EJ\pi^4)^{\frac{3}{2}}} \pi l^{\frac{7}{2}} (\rho A l + 2M_n)^{\frac{1}{2}}$$

又  $\sigma$  横軸に關しては

$$\tan \alpha = \left( \frac{df_1}{d\sigma} \right)_{\sigma=0} = \frac{w}{b^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\pi R}{l} = \frac{2(W_s + W_n)}{(EJ\pi^4)^{\frac{3}{2}}} \cdot \pi R l^{\frac{7}{2}} (\rho A l + 2M_n)^{\frac{1}{2}}$$

なる關係を得。故に速度の増加による  $f_1$  の増加は  $(W_s + W_n)$  及び  $(\rho A l)^{\frac{1}{2}}$  に正比例し  $(EJ)^{\frac{3}{2}}$  に反比例する事を知るのである。

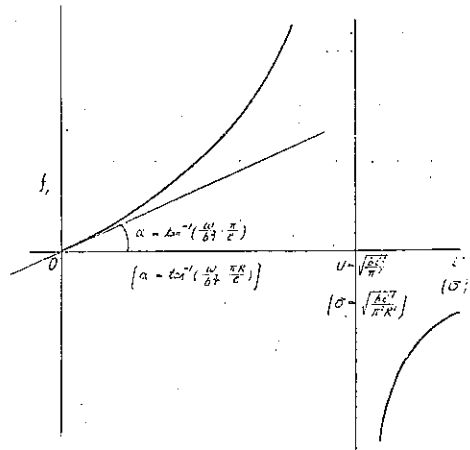
(2)

$$\frac{w}{b-m^2} = \frac{w l^2}{bl^2 - \pi^2 v^2} = \frac{w l^2}{bl^2 - \pi^2 R^2 \sigma^2}$$

$$= f_2$$

横軸に  $v$  及び  $\sigma$ 、縦軸に  $f_2$  の値を採るとすれば  $f_2$  は第七圖の如くなる。 $f_2$  の無限大になる點は  $f_1$  の場合と全然同様で

第六圖



14)  $m = \frac{\pi n}{l} = \frac{\pi R \sigma}{l}$  ( $R$  は動輪半徑)

$$\left. \begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{bl^2}{\pi^2}} \\ \sigma &= \sqrt{\frac{bl^2}{\pi^2 F^2}} \end{aligned} \right\}$$

なる条件が満足される時であつて蒸気機関車の斯かる速度は前同様考へる必要はないのである。

又第七圖より明かなる如く  $v=0$  に於て曲線は横軸に接するを以つて速度の大ならざる場合に於て速度の増大と共に  $f_0$  は大して増大する事はないのである。

(3)

$$\begin{aligned} & \frac{A(a-\sigma^2)}{[(a-\sigma^2)(b+c-\sigma^2)-ac]} \\ &= \frac{2Mr}{(\rho Al + 2M_n)} \cdot \frac{\sigma^2(a-\sigma^2)}{[(a-\sigma^2)(b+c-\sigma^2)-ac]} \\ &= f_0 \end{aligned}$$

$a > b, a < b$  に由つて曲線が異つて来るのである。中徑間に於ては橋桁自己振動数の方が機関車振動数より大なるを以つて(第一表参照)常に  $a < b$  なる關係が成立つのである。

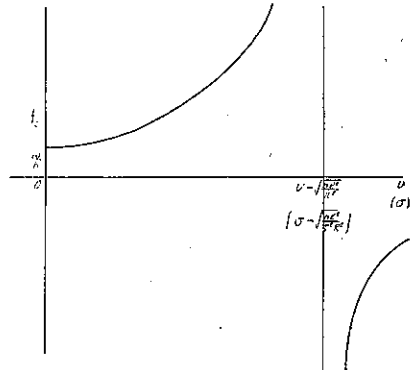
今横軸に  $\sigma$ , 縦軸に  $f_0$  の値を採れば  $f_0$  の曲線は第八圖によりて表はされる。<sup>15)</sup> 而して  $f_0$  の無限大になる點は  $\sigma$  が

$$(a-\sigma^2)(b+c-\sigma^2)-ac=0$$

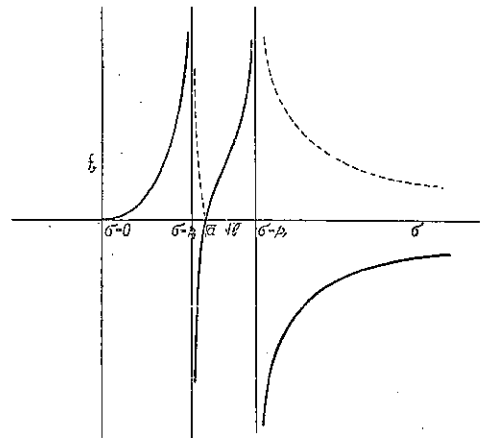
を満足する時即ち

$$\sigma^2 = \frac{(a+b+c) \pm \sqrt{(a+b+c)^2 - 4ab}}{2} \dots \dots \dots (46)$$

第七圖



第八圖



<sup>15)</sup> 第八圖に於て  $\sqrt{a}, \sqrt{b}$  は必ず  $\sigma_1, \sigma_2$  の間に挟まれる。  $\therefore a < b$  の場合に於て

$$\begin{aligned} b-\sigma_1^2 &= \frac{1}{2} \left[ (-a+b-c) - \sqrt{(a+b+c)^2 - 4ab} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ -(a-b+c) - \sqrt{[-(a-b+c)]^2 + 4bc} \right] < 0 \\ a-\sigma_2^2 &= \frac{1}{2} \left[ (a-b-c) + \sqrt{(a+b+c)^2 - 4ab} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ (a-b-c) + \sqrt{(a-b-c)^2 + 4ac} \right] > 0 \end{aligned}$$

であつて (46) 式と (21) 式とを比較する時は

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= p_1 \\ \sigma &= p_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (47)$$

なる時橋桁は危険状態に達する事を知るのである。

$\varphi$  は之等三つの振幅を有する振動の集りであつて複雑なる振動を爲すと雖も其の合成最大振幅は第九圖に由つて表はす事が出来る。斯くして橋桁の振動は側輪の角速度  $\sigma$  が  $p_1, p_2$  に一致したる時無限大になり危険状態に入る事を知るのである。

(b) 大徑間の場合

大徑間の場合には中徑間の場合と全然異り、橋桁の自己振動数は機關車彈機の自己振動數と殆んど等しくなるのである。故に  $a \doteq b$  となりて振動指數は (21) 式より導き

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}} \left[ a+b+c + \sqrt{(a-b-c)^2 + 4ac} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}} \sqrt{a+b+c} + \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}}} \sqrt{\frac{(a-b-c)^2 + 4ac}{a+b+c}} \\ &= \omega + \varepsilon \end{aligned} \dots\dots\dots (48)$$

同様に

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}} \sqrt{b+b+c} - \frac{2}{2\sqrt{\frac{1}{2}}} \sqrt{\frac{(a-b-c)^2 + 4ac}{a+b+c}} \\ &= \omega - \varepsilon \end{aligned}$$

にて表はされる。但し

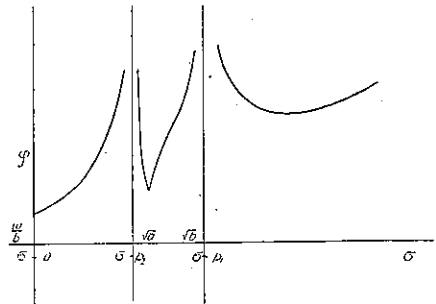
$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}} \sqrt{a+b+c} \\ \varepsilon &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}}} \sqrt{\frac{(a-b-c)^2 + 4ac}{a+b+c}} \end{aligned} \dots\dots\dots (49)$$

今 (40) 式の値の中に (48) 式及び

$$\begin{aligned} p_1^2 - p_2^2 &= \sqrt{(a-b-c)^2 + 4ac} \\ a - p_1^2 &= \frac{1}{2} \left[ (a-b-c) - \sqrt{(a-b-c)^2 + 4ac} \right] \\ a - p_2^2 &= \frac{1}{2} \left[ (a-b-c) + \sqrt{(a-b-c)^2 + 4ac} \right] \\ p_1 p_2 &= \sqrt{ab} \\ p_1^2 &= \omega^2 (\omega + 3\varepsilon) \\ p_2^2 &= \omega^2 (\omega - 3\varepsilon) \end{aligned} \dots\dots\dots (49)'$$

の値を代入すれば  $\varphi$  の式として

第九圖





$$\begin{aligned} \varphi = & \frac{wm}{(a-m^2)(b-m^2)} \left[ \frac{(a-p_1^2)(p_2^2-m^2)}{p_1(p_1^2-p_2^2)} \sin p_1 t \right. \\ & \left. + \frac{(a-p_2^2)(p_1^2-m^2)}{p_2(p_1^2-p_2^2)} \sin p_2 t \right] \\ & + \frac{w}{b-m^2} \sin mt + \frac{A(a-\sigma^2)}{[(a-\sigma^2)(b+c-\sigma^2)-ac]} \sin \sigma t \sin mt \\ = & \frac{2wm}{(a-m^2)(b-m^2)\sqrt{ab}\sqrt{(a-b-c)^2+4ac}} \\ & [r \sin \omega t \cos \varepsilon t - s \cos \omega t \sin \varepsilon t] \\ & + \frac{w}{b-m^2} \sin mt + \frac{A(a-\sigma^2)}{[(a-\sigma^2)(b+c-\sigma^2)-ac]} \sin \sigma t \sin mt \end{aligned} \quad (50)$$

を得。<sup>16)</sup> 但し (50) 式中  $r, s$  は

$$\begin{aligned} r = & \frac{1}{2} \left\{ \omega^3(a-b-c) + 3\varepsilon\omega\sqrt{(a-b-c)^2+4ac} \right. \\ & \left. - m^2\omega(a-b-c) - m^2\varepsilon\sqrt{(a-b-c)^2+4ac} \right\} \\ s = & \frac{1}{2} \left\{ \omega^3\sqrt{(a-b-c)^2+4ac} + 3\varepsilon\omega(a-b-c) \right. \\ & \left. - m^2\varepsilon\sqrt{(a-b-c)^2+4ac} - m^2\varepsilon(a-b-c) \right\} \end{aligned} \quad (51)$$

にて表はすものである。(50) 式に於て  $\varepsilon$  を次第に小さく採り極限即ち

$$\begin{aligned} \varepsilon' = & \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{4ac}{(a+b+c)}} \\ a-b-c = & 0 \end{aligned}$$

の場合を考ふれば

$$\begin{aligned} \varphi = & \frac{-(a+b+c)^{\frac{3}{2}}wm}{2\sqrt{2}\sqrt{ab}(a-m^2)(b-m^2)} \cos \omega t \sin \varepsilon' t \\ & + \frac{w}{b-m^2} \sin mt + \frac{A(a-\sigma^2)}{[(a-\sigma^2)(b+c-\sigma^2)-ac]} \sin \sigma t \sin mt \end{aligned} \quad (52)$$

(52) 式中第一項は蒸氣機關車の重量に由る橋桁の振動を表はし第二項は蒸氣機關車の通過に因る橋桁の撓み、第三項は機關車過平衡對重に因る振動を示すものである。今各項に就て解析を行へば

$$(1) \quad \frac{(a+b+c)^{\frac{3}{2}}wm}{2\sqrt{2}\sqrt{ab}(a-m^2)(b-m^2)} \div \frac{1}{(bl^2-\pi^2v^2)^{\frac{3}{2}}} \div \frac{1}{(bl^2-\pi^2R^2\sigma^2)^{\frac{3}{2}}} = f_1'$$

今横軸に  $v$  及び  $\sigma$  を採り縦軸に  $f_1'$  を採るとすれば  $f_1'$  は第十圖の如き曲線で表はされる。 $f_1'$  の無限大になる點は

<sup>16)</sup> 筆者, “スプリングを有する走行車輛に因る橋桁の強制振動” 土木學會誌第十九卷第六號 (50) 式

又は 
$$\left. \begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{al^2}{\pi^2}} \\ \sigma &= \sqrt{\frac{bl^2}{\pi^2}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(53)$$

なる時であつて (45) 式同様

又は 
$$\left. \begin{aligned} \frac{l}{v} &= \frac{T_a}{2} \\ \frac{l}{\sigma} &= \frac{T_l}{2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(54)$$

なる關係が成立つ。之は橋桁自己振動週期又は機關車自己振動週期の  $\frac{1}{2}$  時間に機關車が橋桁上を通過する事を意味するので實際として斯かる速度は考へる必要が無いのである。

又速度の増加と共に  $f_1'$  の増加の仕方を考ふるに  $v$  軸に就て言へば

$$\begin{aligned} (\tan \alpha)_{v=0} &= \left( \frac{df_1'}{dv} \right)_{v=0} = \frac{w}{b^{\frac{3}{2}}} \frac{\pi}{b} \\ &= \frac{2(W_s + W_n)}{(EJ\pi^4)^{\frac{3}{2}}} \pi l^{\frac{7}{2}} (\rho Al + 2Mn)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

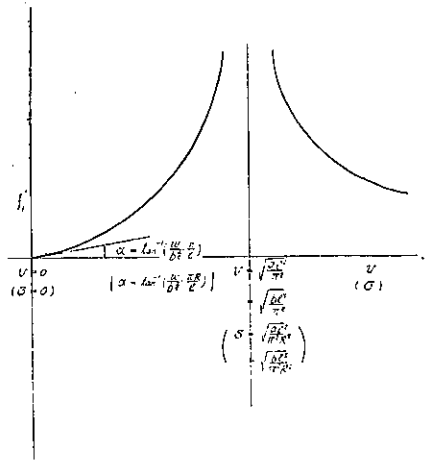
故に中徑間の場合と同様、速度の増加に因る  $f_1'$  の増加は  $(W_s + W_n)$  及び  $(\rho Al)^{\frac{1}{2}}$  に正比例し  $(EJ)^{\frac{3}{2}}$  に反比例する事を知る。

(2) 
$$\frac{w}{b - m^2} = f_2'$$

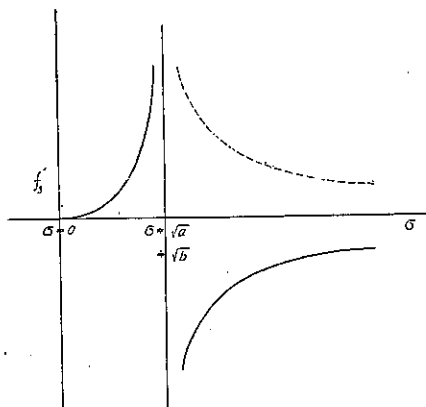
$f_2'$  は中徑間の場合の  $f_2$  と全然同じである。(第七圖参照)

(3) 
$$\frac{A(a - \sigma^2)}{[(a - \sigma^2)(b + c - \sigma^2) - ac]} = \frac{2Mr}{(\rho Al + 2Mn)} \cdot \frac{\sigma^2(a - \sigma^2)}{[(a - \sigma^2)(b + c - \sigma^2) - ac]} = \frac{2Mr}{(\rho Al + 2Mn)} \frac{\sigma^2}{(b - \sigma^2)} = f_3'$$

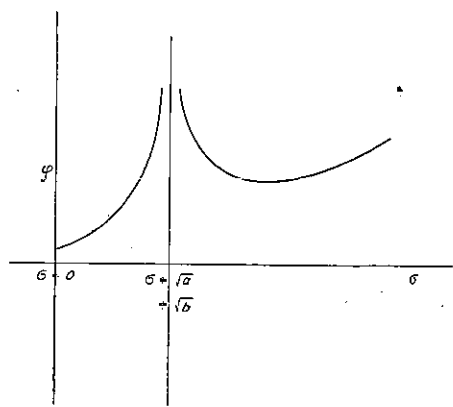
第十圖



第十一圖



第十二圖



今横軸に  $\sigma$  縦軸に  $f_3'$  を採れば  $f_3'$  は第十一圖に由りて表はさる。第十一圖よりも明かなる如く

$$\text{又は } \left. \begin{array}{l} \sigma \doteq \sqrt{b} \\ \doteq \sqrt{a} \end{array} \right\} \dots\dots\dots (55)$$

の時  $f_3'$  は無限大になるのである。<sup>17)</sup>

斯くして  $\varphi$  は之等三つの振幅を有する振動の集りであつて時々刻々複雑なる振動をなすと雖も其の合成最大振幅は第十二圖に由つて表はされる。

(c) 私は (a) 及び (b) に於て中徑間及び大徑間の場合に就て齒輪回轉角速度と橋桁最大振幅との關係を明かにした。今之を第一圖 (英國に於ける Bridge Stress Committee の報告) と比較するに理論と實際と良く合致する事を知るのである。唯本理論に於ては橋桁及び機關車彈機の摩擦抵抗力を全然無視せる爲、實際の場合とは多少の相違あるも橋桁の振動性態を察知するには充分である。猶ほ最後に本誌第十九卷第六號所載 “スプリングを有する走行車輛に因る橋桁の強制振動”，並に本論文を通じて御指導を賜はりし物部博士、田中博士、三浦博士、藤井博士に對し深き感謝の意を表はすものである。

<sup>17)</sup>  $f_3'$  は正確には  $\sigma = p_1, \sigma = p_2$  に於て無限大,  $\sigma = \sqrt{a}$  に於て 0 になるのであつて第十一圖の如く考へるのは些か論據薄弱の如く感ぜられるが  $p_1 \doteq p_2 \doteq \sqrt{a} \doteq \sqrt{b}$  なるを以つて近似的には二つの山が一所になつたと考へ得。猶ほ此の點に關しては後編に於て細かく論ずる心算である。