討　　議

第十九卷第九號　昭和八年九月

抗壓材の强制振動

(第十九卷第四號所載)

會員　庄　野　卷　次

週期的外力に依る强制振動と云ふ問題ほど筆者を惱まし又興味を唆るものは他にないのであります。大正 12, 13 年の頃と記憶するも物部博士がこの種の問題を解答し耐震學の基礎を築かれました。然るに夫れは地震動の週期と工作物の固有週期が同じき時は時間に無關係に强制振動の振幅が無限大になると云ふ結論に達するので之には間違がある筈だと眞島博士が主張したのであります。常識的に考へて眞島博士の主張は正論である。然るに物部博士の記事を精査しましたが間違はない。所謂常識には往々にして勘違があるから終局の勝利は理論の正しきものに歸せねばならぬ。物部博士の理論正しき時は軍事上や工學上破壞力の絶大を要するものに之を利用出來る見込があるので筆者は本氣になつて人に隱れて種々の棒に一旦自由振動を與へ固有週期の大體の見當をつけ夫れに同じと思はる週期的振動を强制して見たが振幅の無限大從つて無造作に破壞する傾向は遂に發見し得なかつたのであります。勿論手加減でやる不完全の實驗なりしも數萬回繰返す内には固有週期と强制週期が完全に一致する瞬間がある筈と考へたのである。この失敗に懲り記事の再調査をしました所其の出發點に無造作に揭げたる基本公式に勘違があるのであつて之から出發する面倒な數學上の手續には間違のないこと判明しました。即ち道理付は正しきも其の根元に間違があるのであります。之に對する修正は早晩何人かに依つて發見さるべきも出來るなら自分が發見したいと考へ苦心慘憺せるも遂に失敗し，又劇務に追れて呑氣な研究に沒頭するを妨げられ不本意ながら荏苒數年を空費しました。この期間に於ても本問題は筆者の念頭を離れたことがない。殊に偏狹な考へかも知れぬがせめて本問題が我國の學者に依つて解決されんことを希望し恰かも國際的の重大學究問題の樣に思ふて强制振動と云ふ題目の論說には絶えず注意を拂ふて居ました。最近妹澤博士の振動學及び物部博士の土木耐震學なる二大名著が刊行せられ世人を裨益すること絶大である。殊に物部博士の著書は我等土木工學者に貴重の寶典にして是非共座右に備へねばならぬものである。併し乍ら上記の問題に就ては兩書共舊來の儘であるのは遺憾であります。筆者は其の後閑を得て再び上記の振動問題に沒頭し糠悅と勘違と遣直を何回となく繰返し近頃に至り漸く强制振動につき筆者の滿足する正解を得ました。成るべく速に公表して大方識者の批判を願ふ積りなるも何分にも振動學上他の重要問題と密接の關係あり强制振動のみを切放して說明することも實際に應用することも不可能であるため鋭意取纒中でありますが猶多數の日子を要する見込であります。從つて小澤工學士の論文も一應眼を通したゞけで討議を書く意思はなかつたのであるが本學會編輯部長殿から討議を書くべく要求されたのであります。思ふに振動學特に耐震學に於ては幾多改善の餘地がある。而して其の完成は實に少壯有爲の篤學者に俟つ外はない。筆者は從來渾身の努力を以てすら僅々二三の小問題に就て或る程度の改善を爲し得たに過ぎず，而して今や數萬回，棒を振り廻す樣な往年の元氣なく今後の研究生活に多くを期待し得ざるを殘念に思ふ矢先であるから，著者の如き青年篤學者に筆者の心境を告げ學問のために奮起を御願することを急務と考へ簡單に討議を試むことにしました。

討議の本論に入る前に在來法が研究の出發點に於て既に誤れる所以を參考の爲に書かねばならぬ。自由振動で

も强制振動でも一般に撓み振動は著者の第一圖を借り

$$y=f(x)\cdot F(t)$$

で表し得ることは Lord Reyleigh の有名なる所論にして正當且つ便利な公式である。然れども $f(x)$ 及び $F(t)$ は勝手に定めてはならぬものなるに從來の强制振動を解く場合 $f(x)$ に自由振動のノーマル函數，$F(t)$ に强制力のノーマル座標を其の儘使用して居るのであります。即ち Reyleigh の法則を曲解せる不當解法にして眞島博士の指摘せる不當結論を得るのも之に原因するのである。著者もこの點に着眼され全く解法を合理的に一新され居るのは實に愉快に感じました。序に筆者の研究結果だけを述べて置きます。工作物の固有週期を T_1，地震動の週期を T_2 とせば $T_2=\infty$ の時强制振動振幅は自由振幅に同じ。之より T_2 の減小するに從ひ漸次に强制振動振幅を增し $T_2=T_1$ に至り强制振動振幅自由振幅の 2 倍になります。T_2 が更に之より減小する時は强制振動振幅が自由振幅の 2 倍以上に增大し得る可能性あるも決して無限大になること無し。而して振幅應力等總て自由振動の場合を知る時は强制振幅の夫等は別に面倒な手數を要せず直ちに求め得るのであります。然れども筆者の解法は工作物の兩端（突桁の場合は固定端）に强制單弦運動の作働する場合に限るので兩端以外の箇所に强制力の作用する場合を含まないのである。この故に筆者は著者の論文の重要且つ有難味を特別に感ずるので深謝せねばなりません。

著者の場合に於ても强制振動の振幅が時間に關せず無限大になることなき所以を難か敷き數學を離れ常識的に說明せんとす。先づ强制力の爲に起る刻々の變位は常に有限値であらねばならぬ。有限値が積り積つて無限大となる迄には亦無限の時間を要します。從つて時間に係らず任意時に振幅が無限大なるを示す公式を得ば不都合のものと見て棄てねばなりません。更に具體的に之を云ふと著者の第一圖 AB 柱の A 點から B に向ひ距離 a の點を C 點と名づけ，この C 點に $Q\sin qt$ なる週期的强制力が横に作用する場合質點 C が柱體と分離せるものと考ふ時は質點 C は一種の單弦運動を爲し，其の振幅は永久に增減することなきは明白である。又質點 C が柱體の一部分である時 C 點の運動の振幅は量に於て相違あるべきも亦當然無限大とはならざる週期的運動の振幅であることは常識的に認識せねばならぬ。勿論之は强制力に依る强制振幅のことで，この外に强制力に依る固有週期があつて兩者の代數和が强制振動の振幅となるのであります。然るに幸にも著者は固有振幅は減衰し終局に殘るものは强制振幅であると云ふ重要の事柄を承認して居られるから單に以上の說明だけにて强制振動の振幅が無限大になることは實際に有り得ざる所以を納得して下さることゝ思ひます。然れども工作物の固有週期と强制力の週期が同じき時に强制振動の振幅が無限大になると云ふことは從來殆んど定論として公認され居る有樣であるから學窻を巢立つた許りの少壯工學士が之を正當視するを咎める譯では決してありません。又著者の論文の主體は之に關せず正當性を保持し抗壓材の强制振動に就て眞に貴重な合理的解法に成功されて居るのであります。

著者の論文を見て議論の餘地があるのは (1) 式及び (2) 式でありますが，便宜上この兩式に無關係のものから檢討します。著者が週期的外力を

$Q\sin qt$,　　式中 Q は一定の力にして常に正號とす

とし，Q を力とせるは從來の振幅とするに比し一段の進歩にして巧妙なる解法が之から湧き出て居るのに感心した。又柱端以外の任意點に强制力が作用する時は振動弧線が一般に自由振動の夫と別類の弧線を爲し解法を厄介にするのであるが，著者は Fourier 級數を用ひて之を征服した。即ち著者の (4) 式は兩鉸端の棒の自由振動の振幅弧線の方程式に外ならずと雖も任意の振動弧線が此の種のものゝ適當なる集合から成立すると見るも差間ないから兩鉸端の柱以外の時でも著者の解法を應用して可なる樣に思ふ位である。尤もこの時は著者の (19) 式の解を(20) 式の樣にせず任意常數を含む一般解を取り柱端の環境條件に依つて之を定めねばならぬが簡單に出來るか

否かは知りません。著者が勢力法を用ひ巧に Lagrange の方程式 (14) を利用して簡單且つ鮮かに振動弧線の方程式 (29) を誘導されたのは驚異に値する成功である。其の間毫末の間違も筆者には見出すことが出來ません。從つて結果も當然正當であると信じます。若しも結果が實際に符合せず非常識のものある時は其の原因を Fourier 級數に歸せねばならぬ。Fourier 級數が成立するためには數學上の條件がある。其の條件を初めに檢べるは純正數學家のすることで吾々工學者は通例頭から之を適用し得るものと假定するからである。著者の (29) 式は著者の言ふ通り $q^2=\frac{i^2\pi^2}{\rho Al^2}\left(\frac{i^2\pi^2EJ}{l^2}-P\right)$, 即ち强制力の週期が固有週期に同じき時に振幅 y が無限大となる。而して著者が從來の謬れる定説に囚はれ振幅の無限大を實在すと考へたるは不得已次第なるも，其の實はこの場合に限り (29) 式は成立せず之を棄てねばならぬのであります。則ちこの場合は Fourier 級數が發散級數となり和を有せざる爲，其の使用は許されず從つて著者の基本公式 (3) 式を用ひて本問題を解くことが出來ぬ場合に相當し，この際振動弧線の方程式は (29) 式とは全く別型になるのであります。斯樣に特殊の critical point に至り公式が俄然形を變ずるは屢々吾人の遭遇する事柄にして本會誌第 19 卷第 5 號 349 頁に直桁の兩端廻轉に對し固定不充分なる場合の彎曲率を求むる方法を述べましたが，何れか一端のみが廻轉に對し完全の自由を有する場合は公式が俄然一變するので夫處に述べた方法を應用し得ざるが如きは其の一例であります。又著者の (29) 式は $P=\frac{i^2\pi^2EJ}{l^2}$ の時に振幅 y が $-\infty$ となり棄てねばならぬが，之は後に説く如く柱の振動せる場合に起るのである。故に (29) 式には “柱の振動せぬ場合及び强制力の週期が固有週期に同じき場合には本公式を適用するを得ず” と云ふ但書を追加せねばならぬ。又强制週期と固有週期が極めて接近せる場合には Fourier 級數が甚しく緩慢收歛級數なるため實値の算出に煩はしき手數を要するものである。

著者の (1) 式は振動週期の公式にしてこの者が無限大若しくは虚數の時は柱が無振動無振幅若しくは振動不安定にして何れも普通の意味の振動をせぬ柱にして，$F\geqq\frac{n^2\pi^2EJ}{l^2}$ の時に起る。又 $F<\frac{n^2\pi^2EJ}{l^2}$ は有振動有振幅則ち抗壓材の彎折する條件であります。故に著者の (2) 式の = は < とすべきであると思ひます。而して柱が軸壓力のみを受くる時撓み振動を起さぬ樣に之を設計するは Euler に準じて可能なるも，週期的强制横力を受けても猶且つ振動を起さぬ樣にするは難事であるから，强制振動に於て其の振動が起ると起らぬの境界條件たる著者の P を算出するは無意味の樣に思はれます。假りに其の實値を算出しても非常に僅小なる P 若しくは負號の P を得て實用的に意味を爲さぬことになりはせぬかと筆者は直覺的に心配するのであります。之は著者の論文を精査する時間が無くなつたので單に達觀しての感想であるから間違つて居るかも知れません。實際は此の如き P よりも柱に振動させて其の振動に基因する應力に對し柱の安否を檢するのが急務であると思ひます。勿論著者の P を求めて見るのは工學上興味の多き事柄にして學校の卒業論文には立派な好題目であります。筆者は著者の論文を拜讀して着想巧妙，用意周到，推考嚴密にして難解の問題を合理的に平易に解答されたる腕前に敬服し著者の將來に多大の期待を持つものであります。

以上取急ぎ認めましたが御參考の一端ともならば望外の喜であります。終りに臨み著者の有益なる論文に依つて新知識を得たことの甚大なるを深謝し學問の爲，一層の御精勵と御自愛を希望致します。又この機會に於て物部博士，妹澤博士等振動學の諸元勳に對し多數同胞並に筆者迄も御蔭を以つて振動學の本體の幾分を體得するを得たる高恩を感謝し，學問のために高説を論議する事情を御諒察御許容賜はらんことを御願して擱筆します。