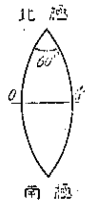
大洋に於ける潮汐

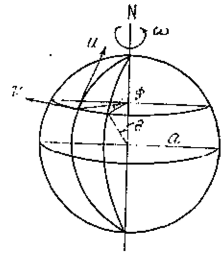
(G. R. Goldsbrough; Tides in Oceans on a Rotating Grobe. Proceeding of The Royal Society. Series A, vol. 140. may 3, 1933.)

〔譯者註〕 著者は常に潮汐の問題を廻轉する天體上の流體力學の問題として取扱ひ，既に數回に渉つて誘潮ポテンシアルを假定せる強制振動としての潮汐理論を發表してゐる。氏の最も注意する處は大西洋の潮汐であつて，之を 60° の球面角をなす二つの經線 (meridian) にて圍まれた一様水深の水域と考へて問題を解決せんとしてゐる。今回の論文に於ては同様の力學的取扱ひによつてかゝる水域の自由振動の週期を計算し，之を各分潮の週期と比較することにより Ferrel, Harris 等の主唱せる潮汐の定常波理論 (Stationary wave theory) を検討せんとしてゐる。

第一圖



第二圖



本論文に用ひられる記號は Lamb その他一般に用ひられるものと同じである。

ζ＝靜水面よりの水面昇降

$$\bar{\zeta}=-\frac{\text{誘潮ポテンシアル}}{\text{重力加速度}},\qquad \zeta'=\zeta-\bar{\zeta}$$

運動方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}-2\omega v\cos\theta=-\frac{g}{a}\frac{\partial\zeta'}{\partial\theta}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+2\omega u\cos\theta=-\frac{g}{a\sin\theta}\frac{\partial\zeta'}{\partial\phi}\qquad\cdots\cdots(1)$$

連續方程式

$$-\frac{\partial\zeta}{\partial t}=\frac{h}{a\sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}(u\sin\theta)+\frac{\partial v}{\partial\phi}\right\}$$

時間因數を $e^{i\sigma t}$ とし，Love の轉換

$$u=i\sigma\left\{\sqrt{1-\mu^2}\frac{\partial p}{\partial\mu}+\frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}}\frac{\partial q}{\partial\phi}\right\}$$

$$v=-i\sigma\left\{\frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}}\frac{\partial p}{\partial\phi}-\sqrt{1-\mu^2}\frac{\partial q}{\partial\mu}\right\}\qquad\cdots\cdots(2)$$

$(\mu=\cos\theta)$

を行ひ，且つ

$$\Delta\equiv\frac{\partial}{\partial\mu}(1-\mu^2)\frac{\partial}{\partial\mu}+\frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2},\qquad f=\sigma/2\omega\ \text{及び}$$

$\beta=gh/4\omega^2a^2$ と書けば，連續方程式を運動方程式に代入することにより

$$-f\Delta(q)+i\mu\Delta(p)+i(1-\mu^2)\frac{\partial p}{\partial\mu}+i\frac{\partial p}{\partial\phi}=0$$

$$-f^2\Delta(p)+if\frac{\partial p}{\gamma\phi}-if\mu\Delta(q)-if(-\mu^2)\frac{\partial q}{\partial\mu}\qquad\cdots\cdots(3)$$

$$-\beta\Delta^2(p)=-(g/4\omega^2a^2)\Delta(\bar{\zeta})$$

大洋の周邊 O 及び ϕ_1 にて滿さるべき條件は，兩極 $(\mu=\pm1)$ にて解は有限値を有し，且つϕが O及び ϕ_1 に

て $v=0$ である。$\alpha=\pi/\phi_1$ と書けばこの條件を滿足する如き (3) の解は次の形である。

$$\left.\begin{aligned} p&=\sum_s\sum_n A^{s\alpha}_{s\alpha+n}P^{s\alpha}_{s\alpha+n}(\mu)\cos s\alpha\phi \\ q&=\sum_s\sum_n B^{s\alpha}_{s\alpha+n}P^{s\alpha}_{s\alpha+n}(\mu)\sin s\alpha\phi \end{aligned}\right\}\qquad\cdots\cdots(4)$$

s, n は整數, A, B は常數, $P^{s\alpha}_{s\alpha+n}(\mu)$ は tesseral harmonics である。0 と ϕ_1 の間にて次の表はし方を用ふる。

$$\sin s\alpha\phi=\sum_r a^s_r\cos r\alpha\phi,\qquad (r-s)\text{ は奇數}$$

$$a^s_r=\frac{4s}{(s^2-r^2)\pi},\qquad (r\neq 0),\qquad a^s_0=\frac{2}{s\pi}$$

$$\cos s\alpha\phi=\sum_r b^s_r\sin r\alpha\phi,\qquad (r-s)\text{ は奇數}$$

$$b^s_r=\frac{4r}{(r^2-s^2)\pi}$$

且つ α が整數ならば μ の値が -1 と 1 の間にて

$$P^{s\alpha}_{s\alpha+m}(\mu)=\sum_m g^{r\alpha}_{r\alpha+m}(s\alpha,\ s\alpha+n)P^{r\alpha}_{r\alpha+m}(\mu)$$

$$g^{r\alpha}_{r\alpha+m}(s\alpha,s\alpha+n)=\frac{1}{2}(2r\alpha+2m+1)\frac{m!}{(2r\alpha+m)!}\int_{-1}^{1}P^{s\alpha}_{s\alpha+n}P^{r\alpha}_{s\alpha+m}d\mu$$

(4) 式を (3) 式に代入して變形すれば自由振動 ($\zeta=0$) に對し

$$\begin{aligned} &fB^{r\alpha}_{r\alpha+m}(r\alpha+m)(r\alpha+m+1) \\ &\quad+i\sum_s\sum_n\Bigg[B^{s\alpha}_{s\alpha+n}s\alpha g^{r\alpha}_{s\alpha+m}(s\alpha,\ s\alpha+n)b^s_r \\ &\quad-A^{s\alpha}_{s\alpha+n}\frac{(s\alpha+n)(s\alpha+n+2)(n+1)}{2(s\alpha+n)+1}g^{r\alpha}_{r\alpha+m}(s\alpha,\ s\alpha+n+1)b^s_r \\ &\quad-A^{s\alpha}_{s\alpha+n}\frac{(s\alpha+n+1)(s\alpha+n-1)(2s\alpha+n)}{2(s\alpha+n)+1}g^{r\alpha}_{r\alpha+m}(s\alpha,\ s\alpha+n-1)b^s_r\Bigg]=0\ \cdots\cdots(5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(r\alpha+m)(r\alpha+m+1)\{f^2-\beta(r\alpha+m)(r\alpha+m+1)\}A^{r\alpha}_{r\alpha+m} \\ &\quad-if\sum_s\sum_n\Bigg[s\alpha A^{s\alpha}_{s\alpha+n}a_r{}^s g^{r\alpha}_{r\alpha+m}(s\alpha,\ s\alpha+n) \\ &\quad-B^{s\alpha}_{s\alpha+n}a^s_r\Bigg[\frac{(s\alpha+n)(s\alpha+n+2)(n+1)}{2(s\alpha+n)+1}g^{r\alpha}_{r\alpha+m}(s\alpha,\ s\alpha+n+1) \\ &\quad+\frac{(s\alpha+n+1)(s\alpha+n-1)(2s\alpha+n)}{2(s\alpha+n)+1}g^{r\alpha}_{r\alpha+m}(s\alpha,\ s\alpha+n-1)\Bigg]=0\ \cdots\cdots(6) \end{aligned}$$

r, m, s, n は $r-s$ が常に奇數となる樣に撰ばれた整數である。(5) 式及び (6) 式が振動の週期を決定する基本式であるが，この2式の特性として次の如きものが擧げられる。

(α) 何れの式にも A^0_0 の項は現れない。

(β) $A^{r\alpha}$, $B^{r\alpha}$ の中 r の隅數のものを實數なりとすれば，r の奇數のものは虚數となる。從つて前者は $\cos\sigma t$ と組み合はされ，後者は $\sin\sigma t$ と組み合はされる。

(γ) f の符號の變化は r の奇數なる $A^{r\alpha}$, $B^{r\alpha}$ の符號の變化に伴つて起る。若し $u=P\cos\sigma t+Q\cos\sigma t$ と書き

P が r の偶數なる項の和を表はし Q が r の奇數なる項の和を表はすものとすれば，f（又は σ）の符號の變化は Q と伴ふから $\pm f$ によつて表はされる運動は同一である。

（δ） 係數 $g_m^{r\alpha}(s\alpha, n)$ に含まれる $\int_{-1}^{1} P_m^{r\alpha} P_n^{s\alpha} d\mu$ は $m-r\alpha$ 及び $n-s\alpha$ が共に奇數又は共に偶數ならざる限り零である。

（ε） 上の係數の性質より $A_m^{r\alpha}$ の suffix の差が偶數ならば $B_n^{s\alpha}$ の suffix の差は奇數でなければならない。この逆も必要である。

次に（5）式及び（6）式の近似解を求める。$\zeta=(h/a)\Delta(p)$ として運動を表はす最も適當な形のうち，p を表はす項の最小のものは 2 項である。即ち一項は實數，他は虚數である。Hough の證明によりこの 2 項は他の項に比して充分大きな値を持つ。數値計算を大西洋の例につきて行ふことゝし，$\alpha=3$, $h=12,880$ ft. とすれば $\beta=gh/4\omega^2a^2=1/22.54$ である。之を用ひて最長週期の對稱的振動及び半日週潮に最も近き週期の振動を計算したが茲には前者は省略する。後者の場合は主要なる係數として $A_4^0, A_5^3, B_4^3, B_7^6$ を取れば

$$f^6-2.307f^4+1.238f^2-0.0062=0$$

を得る。之の正根は $f^2=1.37,\ 0.931,\ 0.0049$ である。

(i) $f^2=1.37$, $f=1.17$ 故に週期$=10.3$ 恒星時

$$\zeta=20P_4\cos\sigma t-0.59P_5^3\cos 3\phi\sin\sigma t$$

節線 (nodal line) の形狀は

$$\tan\sigma t=-\frac{0.59\times 52.5(1-\mu^2)^{\frac{3}{2}}(9\mu^2-1)\cos 3\phi}{\frac{5}{2}(35\mu^4-30\mu^2+3)}$$

無潮點 (amphidromic point) は $\phi=30°$, $\mu=0.35$, 0.86 節線の廻轉方向は負である。

(ii) $f^2=0.931$, $f=0.965$, 週期$=12.4$ 恒星時

$$\zeta=20P_4\cos\sigma t+0.00224P_5^3\cos 3\phi\sin\sigma t$$

無潮點は (i) と同じであるが廻轉方向は正である。

(iii) $f^2=0.00488$, $f=0.070$, 週期$=7.1$ 恒星日

$$\zeta=20P_4\cos\sigma t+2.04P_5^3\cos 3\phi\sin\sigma t$$

節線の廻轉方向は正である。

この中 (ii) の値を近似値として第二次近似計算を行へば $f=0.954$, 從つて週期として 12.5 恒星時即ち 12 時 33 分（平均太陽時）を得る。而してこの値は實際の半日週潮 M_2 に對する f の値 0.9625 に頗る近いものであることを知る。無潮點はこの計算によれば $\phi=30°$, $\theta=20.5°$ 及び $59.2°$ であるが實際は $\phi=30°$, $\theta=28.5°$ 及び $46°$ である。

（本間 仁抄譯）