論説報告

第十九卷第八號　昭和八年八月

鋪裝路面の橫斷曲線に關する理論

會員　工學博士　久　野　重　一　郎

Theory of Curves for the Cross Section of Paved Roads.

By Juichiro Kuno, Dr. Eng., Member.

內容梗概

路端落度（或は頂高）を h とし，路幅の半分を l として，指數公式

$$y=h\left(\frac{x}{l}\right)^n$$

を考へると，これは鋪裝路面の橫斷曲線に適するものになる。指數 n は 1～2 にとるわけであるが，普通は 1.5 に選べばよい。n を種々に變へれば，從來用ひられてゐる直線形，圓弧，拋物線，双曲線等と實用上差異のない曲線が夫々得られる。すなはちこの指數公式は，在來相互獨立に存在した諸曲線を一括して，之を一元に歸せしめた點に特長がある。式形が簡單で記憶しやすいのも，利便の一である。

第一章　序　　說

本文は，鋪裝路面の橫斷曲線について述べるものであるが，記述を簡單にするため，まづ特殊な用語を說明しこれによつて同時に問題の性質を明かにしたいと思ふ。

正常路 (normal road)。平坦な土地に於ける直線路であつて，步車道の區別あるときは，車道部だけをとり，また電車軌道はないものとする。かやうな路を本文では正常路と呼び，第二及三章でこれを取扱ひ，非正常路 (abnormal road) については，第四章で述べる。

路の頂點 (vertex of road)。橫斷面中の最高點を指す。正常路に於ては，橫斷面の中心 (center) と一致するわけである。從來も路頂といふ語があるのであるが，これは crown（最高點の高さ）を意味するやうに解されやすい虞があるので，その使用を避けた次第である。

路端。正常路の橫斷面に於ける鋪裝部の外端を，本文では，路端と名づけることにする。本當は橫斷面に於ける鋪裝端とでもいふべきであつて，道路敷地の端を指すのではない。

路端落度 (h)。いはゆる頂高 (crown) は，路端を基準として頂點の高さをいふたものであるが，ここでは反對に，頂點を原點として路端の低さを考へ，その量を路端落度と名づけ，h で表はす。

路端橫距 (l)。頂點と路端との水平距離をいひ l で表はす。正常路に於て有效幅員を w とすれば $w=2l$ である。

中點落度 (m)。頂點と路端との間の中點 (middle point) を M とし，M に於ける落度を m で表はし，これを中點落度と名づける。中點落度と路端落度との比を r で表はせば $r=m/h$, この比 r をどうきめるかといふことが，大切な問題になる。

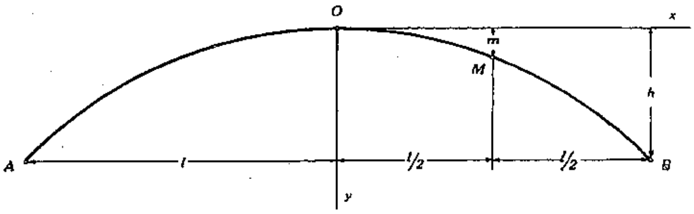
橫勾配 (cross slope)。これを s で表はせば $s=h/l$ である。

落度方程式。 路の頂點 O を原點に選び，x 軸を水平に，y 軸を鉛直下向きにとるならば，横斷面上の各點は

$$y=hF(x)$$

として示すことができる（第一圖）。ここで y は點 x に於ける落度である。而して $F(x)$ は横距 x の函數で，次の關係を滿たすことを要するわけである。

第一圖　横斷面の表はし方



頂點 $(x=0)$ では $y=0$ であるから $F(0)=0$，路端 $(x=l)$ では $y=h$ であるから $F(l)=1$，かやうに $F(x)$ は，常に 0〜1 の限界内にあつて元 (dimension) をもたないものである。以下これを落度係數と呼ぶ。特に $x=l/2$ のものは前の r に等しく，これを中點係數と名づけやう。本文の目的は，歸するところ，$F(x)$ を如何なる形にするがよいか，といふことの研究である。

第二章　指數公式

1. 横斷曲線の條件

正常路に於て頂點と路端とを通る曲線は，數學的には，無數に多く存在する。横斷曲線としてそのどれを選んでもよいかといふに，道路の實用性からして，次の條件を無視するわけにはゆかない。

1. 路面の排水が行はれやすい形でなければならない。
2. 交通に不便を與へる如き形狀であつてはならぬ。
3. 數式は簡單であるほどよい。

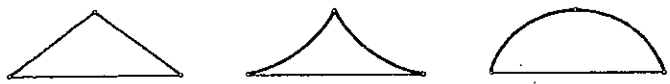
このうち，初めの 2 條件と，明かに相容れないものを擧げれば，まづ次のやうである。

A。 反曲點 (point of inflection) を有する形。頂點の左右に反曲點のある曲線を採用すると，陸軍の鐵兜の斷面のやうになつて，鋪設も面倒になるし，交通にも便利ではない。

B。 不連續點を有する形。頂點と路端とを直線で結べば，頂點で稍尖つて不連續點を生ずることになる（第二圖 a)。正常路の眞中に勾配の峰があることは，外觀上望ましいものではない。また一部分が磨滅すると，そこへ水がたまつて破損しやすくなるとの理由で，直線形を好まない人も少くない。しかし直線形はまだ許せると思はれるのである。もし頂點と路端との中間が，x 軸からみて凸形 (convex) である場合には，頂點が著しく尖る（第二圖 b) このとき中點落度に關しては一般に $m>0.5\,h$ である。かやうな形狀が好ましくないことは，多言を要しない。

C。 路端が急斜傾にすぎる形。原點で x 軸に接する抛物線を最初に考へてみやう。その方程式は一般に $y=px^2$ で與へられる。これへ路端の座標 $(x=l,\ y=h)$ を代入すれば，$h=pl^2$ となつて未知の係數 p がわかる。從て路端と頂點を通る抛物線の方程式は

第二圖　不適當な横斷曲線



(a) $m=\frac{1}{2}h$　(b) $m>\frac{1}{2}h$　(c) $m\leqq\frac{1}{4}h$

$$y=h\left(\frac{x}{l}\right)^2$$

となる（第一圖）。このとき中點落度は $m=0.25h$ である。また路端に於ける路面傾斜は

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=l}=2\left(\frac{h}{l}\right)=2s$$

すなはち横勾配の 2 倍に等しい。もし s を 1/15 位にとつた場合には，路端の傾斜は甚だ大きくなつて，ここへ自轉車を，路に平行に立てておかうとしても，轉倒する位の傾きになる。このやうな場合には，中央の平らな所へ交通が集まり，その部分だけ早く磨滅して，水がたまりやすいといふ欠點があるとさへいはれてゐる[1]。

拋物線よりも一層中央部を平らにして $m<0.25h$ の如き路面をつくるならば，路端に於ける路面傾斜はますます甚だしくなつて，非實用的なものになるわけである。

以上の考察によれば，横斷曲線は反曲線は反曲點のないなか高かの連續曲線であつて，中點係數は 0.25〜0.50 の限界内にあることが好ましいわけである。

2. 新 落 度 公 式

路の頂點を原點に選び，水平に x 軸を，鉛直下向きに y 軸をとつて（第一圖），次の指數方程式 (exponential equation) を考へてみやう。

$$y=h\left(\frac{x}{l}\right)^n \quad \cdots\cdots(1)$$

ここで h は路端落度，l は路端廣距であつて，指數 n はこれから吟味すべき値である。いま $n=1$ にとれば，

$$y=hx/l$$

これは直線の方程式であつて，中點落度 m は $0.5h$ に等しい。もし $n=2$ にとれば，

$$y=h\left(\frac{x}{l}\right)^2$$

これは拋物線であつて $m=0.25h$ である。n が 1 より小さいとき及 2 より大きい場合の中點係數は，次のやうである。

n の値	0.4	0.6	0.8	2.2	2.5	3.0
m/h	0.76	0.66	0.57	0.22	0.18	0.13

次に式 (1) を x で微分すれば

$$\frac{dy}{dx}=ns\left(\frac{x}{l}\right)^{n-1}$$

となる。これから頂點及路端の傾斜を求めれば，次のやうである。

n の値	$n<1$	$n=1$	$n=2$	$n>2$
頂點の傾斜	∞	s	0	0
路端の傾斜	ns	s	$2s$	ns

これから見てわかるやうに，n が 1 より小さければ第二圖 (b) のやうに頂點が尖るわけである。n が 2 より

(1) 牧野技師，道路工學，90 頁。江守技師，近世道路學，105 頁

大きければ中央部が極めて平坦になつて，路端が急傾斜を呈する。n が 1~2 の場合に於ける中點係數は，次のやうである。

n の値	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9
m/h	0.47	0.44	0.41	0.38	0.35	0.33	0.31	0.29	0.27

以上を綜合して考へて見るに，指數 n が 1~2 の間にあれば，式 (1) の曲線を實用的路面に採用して差支なさうである。よつて n に對しては，次の條件をつけやう。

$$1.0 \leq n \leq 2.0 \quad \cdots\cdots(2)$$

この關係式を，中點係數 r について示せば，次のやうである。

$$0.5 \geq r \geq 0.25 \quad \cdots\cdots(3)$$

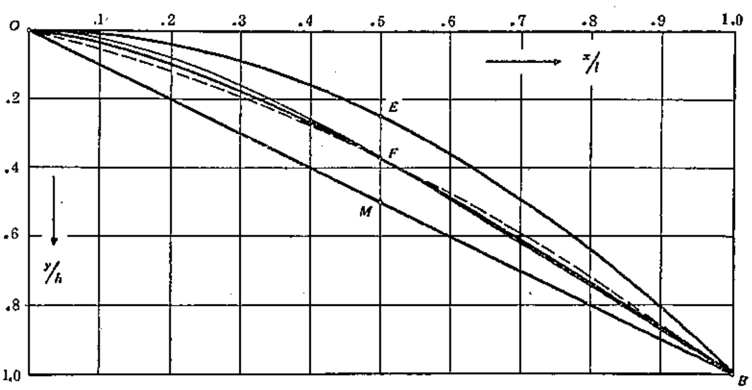
この最後の式は，前節末に述べた條件と一致してゐる。

横距 l の 10 等分點に於ける落度係數を，指數 n の種々なる値について計算すれば，次の第一表のやうになる。その中 $n=1$ と 1.4 と 2 の三者に對應する曲線を圖示したものが，第三圖である。

第 一 表　指數公式による落度係數の値

$x/l=$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$n=1.0$	0.100	0.200	0.300	0.400	0.500	0.600	0.700	0.800	0.900	1.000
1.2	063	145	236	333	435	542	652	765	881	1.000
1.3	050	123	209	304	406	515	629	748	872	1.000
1.4	040	105	185	277	379	489	607	732	863	1.000
1.456	035	096	173	263	364	475	595	723	858	1.000
1.5	032	089	164	253	354	465	586	716	854	1.000
1.6	025	076	146	231	330	442	565	700	845	1.000
1.7	020	065	129	211	308	420	545	684	836	1.000
1.8	016	055	114	192	288	399	526	669	827	1.000
2.0	010	040	090	160	250	360	490	640	810	1.000

第 三 圖　指 數 曲 線



OEB (太線)：指數公式 $n=2.0$
OFB (〃)：指數公式 $n=1.4$
OMB (〃)：指數公式 $n=1.0$
OFB (細イ實線)：ヌヌ曲線
OFB (細イ點線)：傾斜拋物線
點 F の落度は h の 3/8

次は，指數 n をどうとるべきかの問題である。交通の便利といふことよりすれば，外半部と雖もあまり急傾斜にしないこと，すなはち n を 1 に近くとるのが望ましい。然るに排水の點よりすれば，路端に近づくほど急傾斜にすること，すなはち n を 2 に近くするのが好ましいわけである。また鋪裝の普及しない都市では，泥埃が鋪道へもちこまれ易いのであるが，この泥埃は，交通の多く集まる中央部よりも外半部へ多く止まりやすい傾向がある。故に外半部を急傾斜にしておくことは，泥埃が側溝へ集まり

易くなるわけでもある。かやうに，交通を主とすれば n は 1 に近くなり，鋪裝の生命を重んずれは n を 2 に近くとらねばならぬことになつて，兩者は相反的な性質をもつてゐる。

指數のきめ方に關聯して，併せ考へねばならぬことは，横勾配である。この値は，從來，粗面なるものほど大きくとり，反對に滑面ほど小さくすることになつてゐる。これは固より當然であるが，わが國の如く降水量の多いところでは，路面の粗滑のほかに，鋪裝體が耐水的であるか，嫌濕的のものであるかをも，併せ考慮する必要があるやうに思はれるのである。例へば同樣に滑かではあるが，セメント・コンクリート道とアスファルト道の横勾配を全く同一に取扱ふ如きは，どうであらう。コンクリートは完全に耐水的であるから，出來るだけ平坦にして差支ない。しかるにアスファルト系路面は，鋪設後何等かの原因によつて，波狀や小凹所を生じたとき，それへ泥埃や雨水がたまると，とかくさういふ所から急速に傷みやすいのであるから，横勾配を相當に大きくしておくことの必要を認めないわけにはゆかない。而してここでは，適當な横勾配の値が各鋪裝に對して，夫々定められてゐるものと假定しやう。然るとき鋪裝體の差異によつて指數をもかへるか，それとも n を一定不變に保つか，といふ二樣の見解を生ずるわけである。この二者の何れをとるかは，人々の意見によつて相違すべき性質のものであると思はれるから，兩者の是非には觸れずに，各方法による n の値を，次に吟味する。

3. 定指數法

これは，路面の性質には關係なく常に同一指數を用ふる，といふ方法である。從て使用すべき曲線の形狀が一定してしまふわけで，事柄がまことに簡單になる。然るに交通の便利と排水除埃の容易さとは相反的なものであるから，實際には，「交通にはやや不便で排水にも多少遺憾がある」といつたやうな中庸形をもつて，我慢せねばならぬわけである。しかして中庸は，これを數學的にいへば，平均値である。よつて，まづ條件式 (2) に示した兩限界すなはち 1 と 2 の平均を求めて，それに對する中點係數を計算することにしやう。

平均の種類	平　均　値	對應する中點係數
算術平均	$\frac{1+2}{2}=1.500$	0.354
幾何平均	$\sqrt{1\times2}=1.414$	0.375
調和平均	$\frac{2\times1\times2}{1+2}=1.333$	0.397

つぎに條件式 (3) の限界について中點係數の平均を求めれば，次のやうである。

算術平均	$\frac{0.25+0.50}{2}=0.375$
幾何平均	$\sqrt{0.25\times0.50}=0.354$
調和平均	$\frac{2\times0.25\times0.50}{0.25+0.50}=0.333$

これらの數値からみて，定指數法による中點係數は，最も寛大なる場合でも 0.33～0.40 の範圍内にとるが穩當であると思はれる。これを少しく嚴格にすれば，0.35～0.38 に限定して然るべきであらう。更に一層適確な値を見出すために，

A: 算術並に幾何平均として得られた 0.354 と 0.375 との平均

B: 調和平均として求められた 0.333 と 0.397 との平均の 2 種を計算すれば，次の結果が得られる。

原數の性質	算術平均	幾何平均	調和平均
A	0.3645	0.3644	0.3643
B	0.3650	0.3637	0.3625

これら 6 個の値の算術平均は 0.3644 となり，またその幾何平均は 0.3641 となる。何れにせよ，中庸と見做さるべき中點係數が 0.364 附近であることがわかる。いま算術平均の方をとつて，それに對する指數 n の値を

$$(0.5)^n=0.3644$$

なる關係式から求めると $n=1.456$ が得られる。そしてこれに對する落度方程式は，次のやうになる。

$$y=h\left(\frac{x}{l}\right)^{1.456} \quad\cdots\cdots(4)$$

この式から求めた落度係數は，さきに示した**第一表**中に揭げてある。尙式 (4) の指數を小數第 2 位で四捨五入すれば 1.5 となつて，(4) は近似的に次のやうに書かれる。

$$y=h\left(\frac{x}{l}\right)^{1.5} \quad\cdots\cdots(5)$$

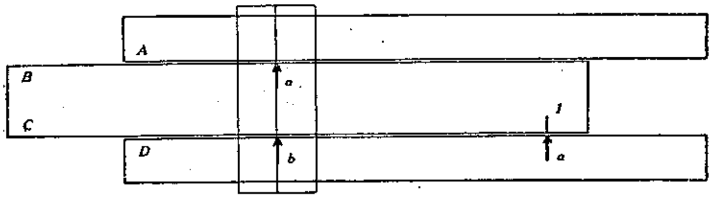
第一表に示した落度係數について比較すればわかる通り，(4) の代りに (5) を用ひても，實用上大きな差支を生ずるほどの事はない。しかも (4) に比べると (5) には二つの利點がある。すなはち第一は，記憶しやすいことである。第二は，計算の簡單な事である。上式はまた次のやうに書きかへることができる。

$$y=h\left(\frac{x}{l}\right)^{3/2} \text{ 或は } y=h\left(\frac{x}{l}\right)\sqrt{\frac{x}{l}} \quad\cdots\cdots(5a)$$

これからわかるやうに，平方根の表さへあれば，單純な掛け算によつて (5) の落度係數 (y/h) が求められるわけである。指數がもし 1.5 以外の帶小數であれば，是非とも對數計算を必要とするから，對數表を使つて一々計算するか，或は本文の **第一表** の如く豫め計算した表を手許に備へるかしなければ，實用に供せられないわけである。

(5a) のやうにすれば，平方根の表がなくても，計算尺があれば，容易に落度係數を求めることができる。すなはち ABCD の 4 尺度を備へた普通の計算尺を用ひて，次の手續をとればよい。

第 四 圖　計算尺で落度係數を求める方法



1。まづ D 尺度上へ $a=x/l$ なる値をとり，その目盛へ C 尺度の右端を合せる。但し a が 0.21 よりも小さいときは，C 尺度の左端を a へ合せる。

2。CD 尺度をそのままにしておいて，カーソルを，B 尺度上の a なる目盛へ合せる。(このとき a が 0.10 よりも小さければ，B 尺度の左半を用ひ，また a が 0.1 よりも大きければ，B 尺度の右半の目盛を使ふわけである)。

3。この狀態に於けるカーソルの示度を，D 尺度上で讀めば，それが求める y/h の値である。**第四圖**の b 目盛がそれである。

言葉で書けば長いけれども，これだけの計算は，1 分間とかゝらないですむのである。例へば $x=0.3\,l$ なる點の落度係數を求めてみやう。上の方法に從つて，(1) D 尺度上の 3 なる目盛へ C 尺度の右端を合せる。(2) カーソルを B 尺度の 30 へ合せる。(3) このときのカーソルの示度を，D 尺度上で讀むと 164 である。小數點

は最左端にあつて，答は 0.164 となる筈である。これは前の**第一表**に於て $n=1.5, x/l=0.3$ に對するものと一致する。次に落度 y を求めるには，こゝに得た係數へ路端落度 h を掛ければよい。これも計算尺で充分である。路端橫距 l は必ずしも 10 等分する必要はない。8 等分しても，6 等分しても，計算尺を以てする計算には，大して差異がないであらう。かやうに指數を 3/2 とすることは，實用上の便利が少くない。

次に 0.375 なる中點係數が，上の計算中に現れたことについて，一言加へたい。**中點落度を路端落度の 3/8 にとる**ことは，わが國に於て相當用ひられてゐる定規である[1]。この 3/8 がどうして決められたものであるかを，自分はかねがね知り度いと思つてゐた。しかるにいま本文の推論中に得た 0.375 が，計らずも 3/8 に等しいのである。すなはち從來の經驗が理論的にも相當の根據あるものであることを知つた次第である。3/8 説を指數公式へ適用すれば，その指數は 1.414 すなはち $\sqrt{2}$ といふ特別な數になる。しかるにこの値は 1.4 としても實用上差支を生ずるほど差異はない。よつて 3/8 説に對する落度方程式は，近似的に次の如く書かれる。

$$y=h\left(\frac{x}{l}\right)^{1.4}, \quad m=\frac{3}{8}h \quad \cdots\cdots(6)$$

前の**第三圖**に太線で示した中央のものが式 (6) による曲線である。尙第三章に述べる通り，式 (6) は，在來使はれてゐる拋物線及双曲線に甚だ近いものである。

4. 變 指 數 法

これは，鋪裝の性質によつて橫勾配とともに指數をも變へやうとする方法である。定指數法よりも一層多くの條件を考慮に入れるのであるから，理論的には完全なわけであるが，それだけに一方では複雜になつて，實用上どうかと思はれる點がないではない。この方法に於ては，交通と排水とを半々に滿足するといふのではなく，次の如き條件から，兩者の間に輕重を附して，指數をきめやうとするものである。

(1) **鋪裝の種類。** アスフアルト系路面の如く嫌濕的のものでは，交通よりも排水を重要視して，比較的大きい n を用ひる。セメントコンクリート道や鋪石道の如く耐水的のものでは，交通を重く見て，直線に近い形を使ふ。

(2) **環境。** 鋪裝がまだ充分にゆきわたつてゐない都市の街路や，一般の地方道路では，未鋪裝地から泥埃をもち込んで鋪裝をいためやすいから，n を大きくとつて路端を急傾斜にしておく方がよい。これに反して東京の中心部の如く鋪裝のゆきわたつてゐる所では，n は小さくて差支ないわけである。

(3) **維持の程度。** 泥埃の掃除がよく行はれ，また少しこはれても直に修繕するといふやうな組織の所では比較的小さい n で差支ないであらう。反對に，鋪設後はほつたらかしておくことを本則とするやうな所では，大きい n を使つておきたいものである。

以上の諸項を總括して具體的な數値を決定するわけであるが，これは鋪裝に經驗のある諸先輩の意見に待たねばならぬと考へてゐる。次の**第二表**は，假りに定めた自分の試案である。

第 二 表　　變指數法による指數の値

鋪裝の種類	耐水的路面		嫌濕的路面	
維持の良否	良	不良	良	不良
街路の n	1.2	1.5	1.5	1.8
地方道路の n	1.5	1.5	1.8	2.0

[1] 牧野技師，道路工學，100 頁，村上技師，近世道路工學．69 頁。菊地氏，道路工學，74 頁

第三章 在來の諸曲線

1。直線形

前章に示した通り，直線形路面は，指數公式に於て $n=1$ とした場合である。

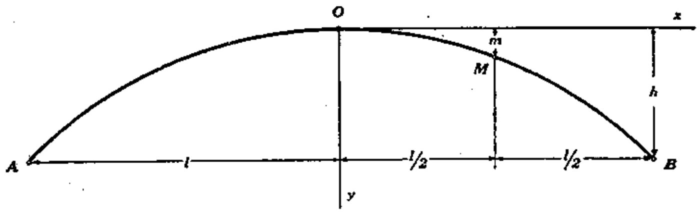
2，拋物線

指數公式に於て $n=2$ とすれば拋物線の方程式になることも，既に述べた通りである

3。圓弧

圓弧が原點に於て x 軸と接し，その中心が y 軸上にあるとき，半徑を a とすれば，圓の方程式は

第五圖 圓 弧



$$x^2+y^2=2ay$$

である。路端 A，B がこの圓周上にあるためには，その座標 ($x=\pm l$, $y=h$) を上式へ代入して，$a=(l^2+h^2)/2l$ なる關係式が成立することになる。これを前式へ入れて y を求めると，3 點 AOB を通る圓弧の嚴密式として，次のものが得られるのである（第五圖)。

$$y=h\left(\frac{1+s^2}{2s^2}\right)\left[1-\sqrt{1-\left(\frac{2s}{1+s^2}\,\frac{x}{l}\right)^2}\,\right] \quad \cdots\cdots(7)$$

式中の s は橫勾配で h/l に等しい。(7) から計算した落度係數を拋物線のそれに比較すれば，次の第三表の通りである。この表は，はじめ小數第 6 位まで求めておいて，その第 4 位を四捨五入して得たものである。

第三表 圓弧と拋物線との比較

x/l の値	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
圓弧，$s=1/20$	0.040	.090	.160	.250	.359	.489	.639	.810
圓弧，$s\leqq 1/25$	0.040	.090	.160	.250	.360	.490	.640	.810
拋物線	0.040	.090	.160	.250	.360	.490	.640	.810

これから見てわかるやうに，橫勾配 s が 1/25 又はそれより小さいときは，圓弧と拋物線との間に差異がない。s が 1/20 のときでも，實際の道路に於ては無視して差支ない程度のちがひである。例へば $x/l=0.6$ の場合について見るに，兩者のちがひは

$$\frac{0.360-0.359}{0.360}=0.0028$$

すなはち 0.3％ に達しない。

次に同じことを，數式の方から說明して見やう。まづ $x/l=1$ なる點すなはち路端に對して，(7) の右邊根號內の第二項を計算すれば，次のやうである。

s	1/20	1/25	1/30	1/40
$\left(\frac{2s}{1+s^2}\right)^2$	0.00995	0.00638	0.00444	0.0025
$\left(\frac{2s}{1+s^2}\right)^6$	$0.0^{6}985$	$0.0^{6}260$	$0.0^{7}875$	$0.0^{7}165$

この 6 乘の項は，1 に對して省略して差支ない程度のものである。よつて (7) の右邊根號內を二項定理で展

開し，その最初の 3 項だけをとつて整理すれば，(7) は次のやうになる。

$$y=h\left(\frac{x}{l}\right)^2\left[\frac{1}{1+s^2}+\frac{s^2}{(1+s^2)^3}\left(\frac{x}{l}\right)^2\right] \quad\cdots\cdots(7a)$$

これは實用上 (7) 式と變りがないのである。而してこの式の右邊の角括弧內は，次のやうに 1 に近いものである。

式 (7a) の角括弧內の數値

s の値	1/20	1/25	1/40
$x/l=1$ のとき	0.998	1.000	1.000
$x/l=0.5$ のとき	0.998	0.999	0.999

いま 0.2 % 以下の誤差を無視して上の値を 1 に等しいとおけば，(7a) の角括弧は不要になつて，結局次のやうに簡單になる。

$$y=h\left(\frac{x}{l}\right)^2$$

これは實は拋物線の方程式である。

以上二た通りの證明によつて明かなやうに，鋪裝路面の橫斷曲線として使はれるべき圓弧は，實用上拋物線に一致すると見做してよい。從て圓弧は，また，指數公式に於て $n=2$ とした特別の場合であると考へて差支ないわけである。

4. 傾 斜 拋 物 線

拋物線路面の式といはれてゐるものの中に，次の 2 式がある(1)。

$$y=\frac{h}{w}x+\frac{2h}{w^2}x^2 \quad\cdots\cdots(8)$$

$$Y=h-\frac{3h}{w}X+\frac{2h}{w^2}X^2 \quad\cdots\cdots(9)$$

ここで w は，路の全幅員である。これを $2l$ とおいて書き直せば，夫々次のやうになる。

$$y=\frac{h}{2}\left[\left(\frac{x}{l}\right)+\left(\frac{x}{l}\right)^2\right] \quad\cdots\cdots(8a)$$

$$Y=h\left[1-\frac{3}{2}\frac{X}{l}+\frac{1}{2}\left(\frac{X}{l}\right)^2\right] \quad\cdots\cdots(9a)$$

まづ第一に，この兩者が同じものであるかどうかを吟味しやう。

(9a) について調べて見ると，次の關係がある。

X の 値	0	$0.5\,l$	l	$2l$
Y/h の値	1	3/8	0	0

すなはち (9a) の座標原點は，曲線上に存在しないで，**第六圖**の D 點（路端 B の上方）にあることがわかる。

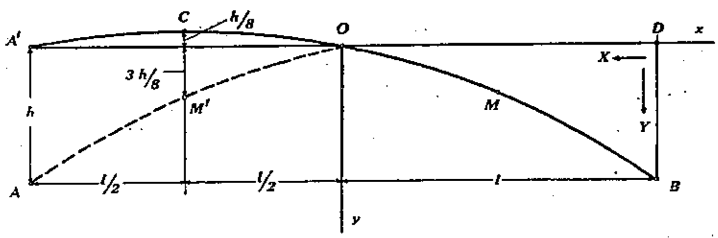
(1) 牧野技師，道路工學，103 頁。菊地氏，道路工學，75 頁

そして X 軸は水平左向きに，又 Y 軸は鉛直下向きになつてゐるわけである。いま

$$x=l-X. \qquad y=Y$$

とおいて，水平軸の方向を反轉し，且つ原點を路の頂點に移せば，(9a) は (8a) と全く同じ形になる。從て兩者は同じ曲線であつたわけである。

第六圖 傾斜拋物線



次にこの曲線の形について吟味しやう。まづ (8a) を x で微分して路面の傾斜を求めると，

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=0}=0.5\,s, \qquad \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=l}=1.5\,s$$

すなはち路の頂點に於ても路面が傾斜してゐるのである。又 (8a) は x の偶函數でないから，曲線は y 軸に對して對稱でないことがわかる。尙 (8a) を少しく變形すれば，

$$\left[y+\frac{h}{8}\right]=\frac{sh}{2}\left[x+\frac{l}{2}\right]^2$$

となる。これから明かなやうに，「拋物線の頂點」は負領域の 1 點 C ($x=-l/2$, $y=-h/8$) に存在する。そして (8a) の示す曲線は**第六圖**の A'COMB のやうになる。かやうに片寄つたものであるから，これを假りに傾斜拋物線と名づける。

この曲線で正常路を造るためには，**第六圖**に示す如く，OMB 及 OM'A なる 2 曲線を用ひねばならぬ。從て路の中央には勾配の峰が出來るわけである。相會する兩路面の傾斜は夫々 0.5 s に等しい。

指數公式に於て $n=1.4$ にとれば (8a) に近い曲線が得られる。兩者の落度係數は**第四表**のやうである。

第四表 傾斜拋物線と指數公式との比較

x/l	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
式 (8a)	0.055	120	195	280	375	480	595	720	855
指數公式	0.040	105	185	277	379	489	607	732	863
兩式の差	0.015	015	010	003	004	009	015	012	008

前に示した**第三圖**の中央の太線が $n=1.4$ とした指數曲線であつて，その隣りに細い點線で示したものが，傾斜拋物線である。圖に見る通り兩者の間に若干の差はあるのであるが，(8a) の代りに $n=1.4$ とした指數公式を用ひても，實用上大きな不都合があらうとは思はれない。のみならず，傾斜拋物線の如く中央に勾配の峰ができることはない。

5。双　曲　線

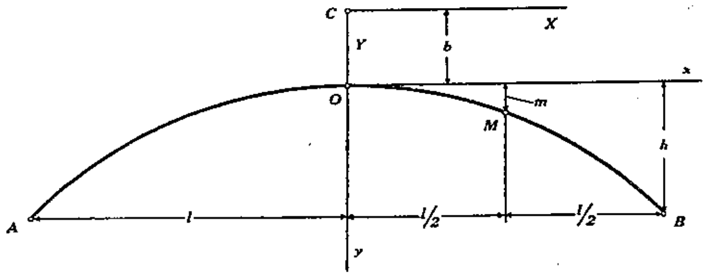
第七圖に於て，曲線 AOB は O 點で x 軸に接する双曲線とし，その中心が C 點にあつて，transverse axis の半分が b に等しいとする。尙中心 C を原點とする直交軸を X, Y とし，また O 點を原點とする直交軸を x, y とする。

まづ，中心 C を原點とする双曲線の方程式は，

$$Y^2/b^2-X^2/a^2=1$$

である。ここで　$Y=b+y$　とおいて，原點を O に移せば

第七圖　双　曲　線



$$\left(\frac{y+b}{b}\right)^2-\left(\frac{x}{a}\right)^2=1 \quad \cdots\cdots(10)$$

式中の常數 a, b をきめるには，條件が 2 個入要である。よつて

(1)　曲線が路端を通るべきことから　$x=\pm l$　で　$y=h$　でなければならぬ。

(2)　中點 ($x=0.5\,l$) に於ける落度として　$y=m$　を指定する。

これらを夫々 (10) へ代入して整理すれば，次の關係が出る。

$$\frac{1}{a^2}=-\frac{16hm}{l^2}\frac{(h-m)(h-4m)}{(h^2-4m^2)^2}$$

$$b=-\frac{1}{2}\frac{h^2-4m^2}{h-4m}$$

ここで中點落度 m は任意の大さにとり得るかどうかを吟味しなければならぬ。まづ，問題の性質上，transverse axis $2b$ は正でなければならぬし，また m は路端落度 h よりも常に小さいわけである。この二つの理由から，b の式の分母子は，次の關係を滿足せねばならぬ。

$$(h^2-4m^2)>0, \qquad (h-4m)<0$$

或は　　$h>2m$,　　$h<4m$

從て　　$$0.25<\frac{m}{y}<0.50 \quad \cdots\cdots(11)$$

尙 (10) から y を求めれば

$$y=h\left(\frac{b}{h}\right)\left[\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}-1\right] \quad \cdots\cdots(12)$$

となる。ここで m/h を r とおけば次の關係がある。

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{b}{h}\right)&=\frac{1-4r^2}{2(4r-1)}\\ \left(\frac{x}{a}\right)^2&=\frac{16r(1-r)(4r-1)}{(1-4r^2)^2}\left(\frac{x}{l}\right)^2\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(12a)$$

(11) 及 (12*a*) を伴ふた (12) 式が双曲線路面の一般式である。(12) が双曲線であるのは，中點落度 r が (11) の限界內にあるときに限る。その下限 0.25 と上限 0.50 は，r のとり得る値から除外される。何故かといふに，0.25 は實は拋物線の場合である。また 0.50 は直線のときである。すなはち r を適當に選べば，(12) の双曲線をして，拋物線と直線形との間の任意の形狀をとらせることができるのである。この融通無凝な點が，双曲線の一つの特長である。一例として $r=3/8$ にとれば (12) は次の形になる。

$$y=\frac{h}{16}\left[\sqrt{49+1\,920\left(\frac{x}{2l}\right)}-7\right]\cdots\cdots(12b)$$

更に $x=\frac{w}{12}t$, とおけば $1\,920\left(\frac{x}{w}\right)^2=\frac{40}{3}t^2$ となつて，多少簡單である。これらの式は，我國の道路書の殆どすべてに記載されてゐる[1]。

双曲線 (12) は頂點に於ける傾斜が 0 である。路端に於ては一般には次の傾斜を與へる。

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=l}=s\left(\frac{b}{h}\right)\left(\frac{1}{a^2}\right)\Big/\sqrt{1+\frac{1}{a^2}}$$

この値は，中點係數のとり方によつて s と $2s$ の中間にある。特に $r=3/8$ の場合には 1.30 s となる。かやうなわけで曲双線路面の路端傾斜を他の曲線のそれに比較する場合には，必ずそのときの中點係數を指示しなければならぬ。

双曲線に於て中點係數を種々に指定し得ることは，指數公式の場合によく似てゐる。いま $n=1.4$ とした指數式公と双曲線 (12*b*) とを比較すれば，次の第五表のやうになる。

第 五 表　　双曲線と指數曲線との比較

x/l	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
式 (12 *b*)	0.021	079	163	264	375	493	616	742	870
指数公式	0.040	105	185	277	279	489	607	732	863
兩式ノ差	0.019	026	022	013	004	004	009	010	007

表からわかるやうに，中點より前では若干の差がある。中點より後ではあまりちがはない。前の第三圖に於て，細い實線が双曲線 (12 *b*) であつて，中央の太線が指數曲線 ($m=1.4$) である。指數曲線は，頂點附近では双曲線ほど平坦にならず，また後半では多少丸味をもつてゐる。然かも兩者間には，交通及排水の便否を論ずるほど大きな差異はない。

尙在來は，双曲線 (12 *b*) は鋪裝街路に適し，前節の傾斜拋物線 (8*a*) は砂利道や碎石道に適するといはれてゐる。然るに兩曲線を第三圖の如く圖示して見ると，その差は比較的僅少であつて，指數曲線 ($n=1.4$) がほぼその

(1) 牧野技師，道路工學，100 頁。 江守技師，道路學，106 頁。 村上技師，近世道路工學，69 頁。 菊地氏道路工學，76 頁

中間を通ることがわかる。

6. 在來の諸曲線と指數曲線との關係

指數公式　$y=h(x/l)^n$　に於て　$n=1$　は直線形を示し $n=2$ は拋物線及圓弧を表はし $n=1.4$ は傾斜拋物線に近い。また n を 1∼2 の中間にとれば，從來双曲線に於て認められてゐた特長を有することになる。故に指數公式は．在來相互獨立に存在した各種の横斷曲線を統一して，之を一元に歸せしめたといへるわけである。

指數公式は，在來の圓弧，傾斜拋物線，及双曲線などよりも，式形が簡單で記憶し易いし，計算も樂である。また指數の大さから，路端の傾斜が直に知れる便もある。

第四章　非正常路に對する指數公式

1. 非正常路の性質

落度に關する指數公式を非常正路に適用するについては，まづ 3 個の量を定めねばならぬ。すなはち路端落度 h, 路端横距 l, 及指數 n がそれである。このうち指數 n は鋪裝の性質からきめることにして，正常路に於けると同じ値を用ふるものとしやう。道路の外形によつて一々指數をかへるほどの必要はないと思はれるからである。次に h と l は實は相關聯する量であつて，頂點の位置，路端の位置及横勾配の値の 3 條件からきまるわけである。この中横勾配は鋪裝の種類と縱勾配から定まる。從て特に考へねばならぬことは，頂點と路端の位置を如何にとるかといふ事だけになつて，これが正常路の場合とちがう點である。

2. 坂　　路

路に縱勾配がある場合には，普通，横勾配の量を若干減らすことになつてゐる。しかし直線路であれば，路の頂點と路端は正常路に於けると同樣にとればよいわけである。

3. 併用軌道の存する車道

この場合には，外側軌條の頂面外端を以て路の頂點と見做し，路端は正常路に於けると同じやうにとる。

4. 步　　道

指數公式にいふ路の頂點を建築線の位置にとり，一方緣石の端を指數公式の路端と見做して l と h を決定する。步道は幅がせまい上に人のみが步く所で磨滅量も比較的少いから，直線又は直線に近い横斷形が多く使はれるやうである。從て指數は 1 に近くとる。

5. 屈　曲　部

カーブでは，急走車に對する用意から，外側部を高くして片勾配に作らねばならぬ，從て指數公式にいふ路の頂點は屈曲部の外側端にとり，その內側端を路端とする。尙この場合にも n は 1 に選ぶことが好ましい。

6. 非對稱形の横斷面

丘地などで路の兩側の土地が同じ高さにないとき，横斷面が非對稱形になつてゐると，路の頂點は偏することになる。その他の事は正常路に準じて行へばよいわけである。

第五章 要 結

1. 鋪裝路面の橫斷曲線を，指數公式

$$y=h\left(\frac{x}{l}\right)^n$$

によつて定義した。指數 n は 1～2 の範圍にとるのであるが，正常路に於ては 1.4 又は 1.5 位にとるとよい。

2. 指數 n を適當にとれば，在來の各曲線と實用上差異のない橫斷形が容易に得られることを明かにした。すなはち在來相互獨立に存した直線形 圓弧，抛物線，傾斜抛物線，及双曲線を一括して，これを一元に歸せしめたわけである。

3. 指數公式は，形が簡單で記憶しやすいし，圓弧や双曲線よりも計算が樂である。