論說報告

第十九卷第四號　昭和八年四月

抗壓材の强制振動

准員 工學士 小澤久太郎

Forced Vibration of Column

By Kyutaro Ozawa, C. E., Assoc. Member.

內容梗概

本文は週期的に變化する橫力の作用を受けたる場合の抗壓材の振動曲線並にその彎折荷重に就て述べたものである。

1. 緒　　言

私は本論文に於て，抗壓材が週期的に變化する橫力の作用を受けたる場合の振動曲線並に彎折荷重に就て考へて見たいと思ふ。載荷せる抗壓材の自由振動に關しては，既に Cowley & Levy(1), Howland(2) 等が研究し

l: 抗壓材の長

EJ: 抗壓材の彎曲に對する剛性率

F: 荷　重

q: 抗壓材の斷面積

ρ: 抗壓材單位體積の質量

とすれば，兩端ヒンヂなる場合の抗壓材の振動週期は

$$T=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{n^2\pi^2EJ}{l^2\rho q}\left(\frac{n^2\pi^2}{l^2}-\frac{F}{EJ}\right)}} \qquad (1)$$

玆に $n=1, 2, 3, \ldots$ 整数

にて表はされる事を證明した。吾々は (1) 式より抗壓材の彎折する條件は

$$F=\frac{n^2\pi^2EJ}{l^2} \qquad (2)$$

にして，之は Euler の彎折荷重に異ならず，抗壓材の彎折荷重は振動に依つて些少の變化をも受けない事を知つた。然れども，之は自由振動の場合であつて，外力の作用を受けながら强制振動をなす際には，自ら異るものがなければならぬ。私の論文は此點を明かにしたものである。本論文は私の東京帝國大學卒業論文の拔萃で，論文を草するに當り，東京帝國大學教授田中豐博士の御指導を蒙る事多く，玆に更めて感謝の意を表はすものである。

---

(1) W. L. Cowley & H. Levy, "Vibration and Strength of Struts and Continuous Beams under End Thrusts," Proc. Roy. Soc., London 95 (1919) p. 440-457.

(2) R. C. J. Howland, "The Vibrations of Rods and Shafts with Tension or End Thrusts," Phil. Mag. {7} 1 (1926) p. 674-694.

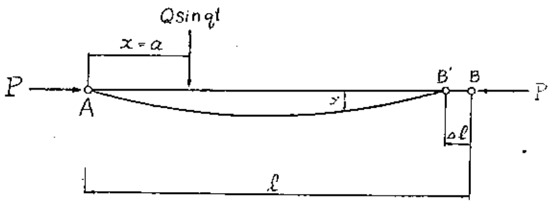
2. 兩端ヒンヂ，斷面均一なる抗壓材が一點に於て週期的に變化する外力 $Q\sin qt$ の作用を受けたる場合の振動曲線

今 $x=a$ に於て，$Q\sin qt$ なる外力の作用を受けて强制振動をなす場合の振動曲線は一般座標系を用ひ

$$y=\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i u_i\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

にて表はす事が出來る。[3]

第 一 圖



玆に

φ_i: ノルマル座標 (t のみの函數)

u_i: ノルマル函數 (φ_i に相當する x のみの函數)

本問題に於ては

$$u_i=\sin\frac{i\pi x}{l}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

と置き得るを以て，[4] φ_i を決定する事が出來れば，各瞬間に於ける振動曲線は單一的に確定されるのである。

今內部抵抗を無視し

l: 抗壓材の長

EJ: 抗壓材の彎曲に對する剛性率

A: 抗壓材の斷面積

ρ: 物質單位體積の質量

P: 抗壓材の兩端に於て抗壓材の重心に作用する荷重

とすれば，或る瞬間に於ける振動系の有する運動の勢力 T は，抗壓材の有する運動の勢力 T_1 と荷重の有する運動の勢力 T_2 とに分つ事が出來る。抗壓材の有する運動の勢力 T_1 は

$$T_1=\frac{1}{2}\rho A\int_0^l\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2dx$$

$$=\frac{1}{2}\rho A\int_0^l[\dot{\varphi}_1u_1+\dot{\varphi}_2u_2+\ldots\ldots+\dot{\varphi}_iu_i+\ldots\ldots]^2dx$$

$$=\frac{1}{2}\rho A\sum_{i=1}^{\infty}(\dot{\varphi}_i)^2\int_0^l(u_i)^2dx+\rho A\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(\dot{\varphi}_m)(\dot{\varphi}_n)\int_0^l(u_m)(u_n)dx$$

但し　$m\neq n$，$\dot{\varphi}_i=\dfrac{d\varphi_i}{dt}$

然るに上式中

$$\int_0^l(u_i)^2dx=\int_0^l\sin^2\frac{i\pi x}{l}dx=\frac{l}{2}$$

$$\int_0^l(u_m)(u_n)dx=\int_0^l\sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}dx=0$$

なるを以て

---

(3) Lord Rayleigh, Theory of Sound § 92, 93.

(4) Prescott, Applied Elasticity p. 210.

$$T_1=\frac{1}{4}\rho A\sum_{i=1}^{\infty}l(\dot{\varphi})^2 \quad\cdots\cdots(5)$$

又荷重の有する運動の勢力 T_2 は

$$T_2=\frac{1}{2}\frac{P}{g}\left(\frac{\partial\Delta l}{\partial t}\right)^2 \quad\cdots\cdots(6)$$

にて表はされ，Δl は

$$\begin{aligned}\Delta l&=\frac{1}{2}\int_0^l\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2dx^{(5)}\\&=\frac{1}{2}\int_0^l(\varphi_1\dot{u}_1+\varphi_2\dot{u}_2+\ldots\ldots+\varphi_i\dot{u}_i+\ldots\ldots)^2dx\\&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}(\varphi_i)^2\int_0^l(\dot{u}_i)^2dx+\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{n=1}^{n=\infty}(\varphi_m)(\varphi_n)\int_0^l(\dot{u}_m)(\dot{u}_n)dx\end{aligned}$$

但し　$m\neq n,\quad \dot{u}_i=\frac{du_i}{dx}$

然るに上式中

$$\int_0^l(\dot{u}_i)^2dx=\frac{i^2\pi^2}{l^2}\int_0^l\cos^2\frac{i\pi x}{l}dx=\frac{i^2\pi^2}{2l}$$

$$\int_0^l(\dot{u}_m)(\dot{u}_n)dx=\frac{mn\pi}{l^2}\int_0^l\cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx=0$$

故に

$$\Delta l=\frac{\pi^2}{4l}\sum_{i=1}^{\infty}i^2(\varphi_i)^2 \quad\cdots\cdots(7)$$

(7) 式を (5) 式に代入すれば

$$T_2=\frac{P\pi^4}{8gl^2}\left[\sum_{i=1}^{\infty}i^2\varphi_i\dot{\varphi}_i\right]^2 \quad\cdots\cdots(8)$$

を得。故に (5) 式並に (8) 式より

$$T=\frac{1}{4}\rho Al\sum_{i=1}^{\infty}(\dot{\varphi}_i)^2+\frac{P\pi^4}{8gl^2}\left[\sum_{i=1}^{\infty}i^2\varphi_i\dot{\varphi}_i\right]^2 \quad\cdots\cdots(9)$$

然るに (9) 式中右邊第二項は振幅の小なる時は第一項に比して非常に小なれば無視するも支障なく，從てつ振動系の有する或る瞬間の運動の勢力は

$$T=\frac{1}{4}\rho Al\sum_{i=1}^{\infty}(\varphi_i)^2 \quad\cdots\cdots(10)$$

にて表はされる。

又或瞬間に於ける振動系の有する位置の勢力 V も抗壓材の有する位置の勢力 V_1 と荷重の有する位置の勢力 V_2 とに分つ事を得。抗壓材の有する位置の勢力 V_1 は

---

(5) $$\begin{aligned}\Delta l&=\overline{AB}-\overline{AB'}=\widehat{AB'}-\overline{AB'}\\&=\int_0^{l-\Delta l}\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}dx-(l-\Delta l)\doteqdot\frac{1}{2}\int_0^l\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2dx\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= \frac{EJ}{2}\int_0^l \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2 dx \\ &= \frac{EJ}{2}\sum_{i=1}^{\infty}(\varphi_i)^2\int_0^l (\ddot{u}_i)^2\, dx \\ &= \frac{EJ}{2}\sum_{i=1}^{\infty}(\varphi_i)^2\frac{i^4\pi^4}{l^4}\int_0^l \sin^2\frac{i\pi x}{l}\, dx \\ &= \frac{\pi^4 EJ}{4l^3}\sum_{i=1}^{\infty} i^4(\varphi_i)^2 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(11)$$

にて與へられ，荷重の有する位置の勢力 V_2 は

$$V_2 = -P\cdot\Delta l = -\frac{P\pi^2}{4l}\sum_{i=1}^{\infty} i^2(\varphi_i)^2 \quad \cdots\cdots(12)$$

にて與へられる。(11) 式及 (12) 式より，或瞬間に於ける振動系の有する位置の勢力は

$$V = \frac{\pi^4 EJ}{4l^3}\sum_{i=1}^{\infty} i^4(\varphi_i)^2 - \frac{P\pi^2}{4l}\sum_{i=1}^{\infty} i^2(\varphi_i)^2 \quad \cdots\cdots(13)$$

にて表はされる。

扨て玆に於てノルマル座標 φ_i を決定するには，Lagrange の方程式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}_i} - \frac{\partial T}{\partial\varphi_i} = -\frac{\partial V}{\partial\varphi_i} + \Theta_i \quad \cdots\cdots(14)$$

を利用すれば良い。上式に於て Θ_i はノルマル座標 φ_i に對應する一般力を示すものである。

(10) 式より

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}_i} = \frac{1}{2}\rho Al(\ddot{\varphi}_i) \\ &\frac{\partial T}{\partial\varphi_i} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(15)$$

(13) 式より

$$\frac{\partial V}{\partial\varphi_i} = \frac{i^2\pi^2}{2l}\left[\frac{i^2\pi^2 EJ}{l^2} - P\right]\varphi_i \quad \cdots\cdots(16)$$

を得。(15) 式及 (16) 式に代入すれば

$$\frac{1}{2}\rho Al\,\ddot{\varphi}_i + \frac{i^2\pi^2}{2l}\left[\frac{i^2\pi^2 EJ}{l^2} - P\right]\varphi_i = \Theta_i \quad \cdots\cdots(17)$$

を得。今簡單のために

$$\left.\begin{aligned} &\frac{i^2\pi^2}{\rho Al^2}\left[\frac{i^2\pi^2 EJ}{l^2} - P\right] = n_i^2 \\ &\frac{2}{\rho Al}\Theta_i = \Phi_i \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(18)$$

とすれば (17) 式は

$$\ddot{\varphi}_i + n_i^2\varphi_i = \Phi_i \quad \cdots\cdots(19)$$

となり，(19) 式の解は明らかに

$$\varphi_i = (\varphi_i)_0\cos n_i t + \frac{1}{n_i}(\dot{\varphi}_i)_0\sin n_i t + \frac{1}{n_i}\int_0^t \Phi_i \sin n_i(t-t_1)dt_1 \quad \cdots\cdots(20)$$

にて與へられる。[6] $(\varphi_i)_0$, $(\dot{\varphi}_i)_0$ は始原狀態に於ける値であつて，今 $(\varphi_i)_0=0$, $(\dot{\varphi}_i)_0=0$ と採れば

$$\varphi_i=\frac{1}{n_i}\int_0^t \Phi_i \sin n_i(t-t_1)dt_1 \qquad \text{(21)}$$

となる。

次に一般力 Θ_i を求めんとす。今 $x=a$ なる點に於て $Q\sin qt$ なる外力が作用するとすれば，ノルマル座標 φ_i の微小變位 $\delta\varphi_i$ に對する抗壓材中軸線の變位 δy_i は

$$\delta y_i=\delta\varphi_i \sin\frac{i\pi x}{l} \qquad \text{(22)}$$

にて表はされるを以て，此間に外力 $Q\sin qt$ のなす仕事 δW_i は

$$\begin{aligned}\delta W_i&=Q\sin qt(\delta y_i)_{x=a}\\&=Q\sin qt\,\delta\varphi_i \sin\frac{i\pi a}{l}\end{aligned} \qquad \text{(23)}$$

にして，之は一般力のなす仕事

$$\delta W_i'=\Theta_i\delta\varphi_i \qquad \text{(24)}$$

に等しくなければならぬ。故に (23) 式及 (24) 式より一般力 Θ_i は

$$\Theta_i=Q\sin qt\sin\frac{i\pi a}{l} \qquad \text{(25)}$$

にて與へらる。(25) 式の値を (21) 式中に代入すれば

$$\varphi_i=\frac{2Q}{\rho Al}\frac{1}{n_i}\sin\frac{i\pi a}{l}\int_0^t \sin qt_1\sin(t-t_1)dt_1 \qquad \text{(26)}$$

にして，定積分の値

$$\int_0^t \sin qt_1 \sin n_i(t-t_1)dt_1=\frac{1}{n_i^2-q^2}\left[n_i\sin qt-q\sin n_i t\right]$$

を (26) 式中に代入すれば任意のノルマル座標 φ_i は

$$\varphi_i=\frac{2Q}{\rho Al}\cdot\frac{1}{n_i}\cdot\sin\frac{i\pi a}{l}\cdot\frac{1}{n_i^2-q^2}\left[n_i\sin qt-q\sin n_i t\right] \qquad \text{(27)}$$

に依りて決定さる。然らば (3) 式及 (27) 式によりて抗壓材の振動曲線 y は

$$\left.\begin{aligned}y=&\frac{2Q}{\rho Al}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n_i^2-q^2}\sin\frac{i\pi a}{l}\cdot\sin\frac{i\pi x}{l}\cdot\sin qt\\&-\frac{2Q}{\rho Al}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{q}{n_i(n_i^2-q^2)}\sin\frac{i\pi a}{l}\cdot\sin\frac{i\pi x}{l}\cdot\sin n_i t\end{aligned}\right\} \qquad \text{(28)}$$

にて表はされる。

(28) 式に (18) 式の値を代入すれば

$$y=\frac{2Ql}{\pi^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{i\pi a}{l}\cdot\sin\frac{i\pi x}{l}}{i^2\left[\frac{i^2\pi^2EJ}{l^2}-P-\frac{\rho Al^2q^2}{i^2\pi^2}\right]}\sin qt$$

(6) Lord Rayleigh, Theory of Sound I. p. 75

$$-\frac{2Qlq}{\pi^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{i\pi a}{l}\sin\frac{i\pi x}{l}}{i^2\sqrt{\frac{i^2\pi^2}{\rho Al^2}\left(\frac{i^2\pi^2EJ}{l^2}-P\right)}\left[\frac{i^2\pi^2EJ}{l^2}-P-\frac{\rho Al^2q^2}{i^2\pi^2}\right]} \times\sin\sqrt{\frac{i^2\pi^2}{\rho Al^2}\left(\frac{i^2\pi^2EJ}{l^2}-P\right)}\,t \;\Bigg\} \quad \cdots\cdots(29)$$

にして，(29) 式中の第一項は外力と同週期の振動を表はすもので所謂强制振動を表はすものである。第二項は

$$T_i=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{i^2\pi^2}{\rho Al^2}\left(\frac{i^2\pi^2EJ}{l^2}-P\right)}}$$

を週期とせる振動で，T_i は (1) 式に對應せる抗壓材の自己振動を表はすものである。外力の週期が i 次自己振動週期に近き時は

$$q^2\cong\frac{i^2\pi^2}{\rho Al^2}\left(\frac{i^2\pi^2EJ}{l^2}-P\right)$$

にして，i 次の振動のみ明瞭に顯はれる。故に斯かる時の振動曲線としては i 次のみを採ればよいのである。

3. 兩端ヒンヂ，斷面均一なる抗壓材が一點に於て週期的に變化する横力の作用を受けたる時の彎折荷重

一點 $x=a$ に於て週期的に變化する應力 $Q\sin qt$ の作用を受けたる場合の抗壓材の振動曲線は (29) 式にて表はされる事を知つた。(29) 式に於て

$$q=\sqrt{\frac{i^2\pi^2}{\rho Al^2}\left(\frac{i^2\pi^2EJ}{l^2}-P\right)}$$

なる時，即ち强制振動週期が載荷抗壓材の自己振動週期と一致する場合には振幅は無限大になるにより

$$P=\frac{i^2\pi^2EJ}{l^2}-\frac{i^2\pi^2q^2}{\rho Al^2}\quad\cdots\cdots(30)$$

を以て彎折荷重と看做し得るのである。式中 $\frac{i^2\pi^2EJ}{l^2}$ は Euler の i 次彎折荷重である。然れども (29) 式を導くには，振幅小なりとの假定より (9) 式中に於ける右邊第二項を無視してゐるので，振幅の大なるに及んで，之の影響が如何なる形に於て顯はれるかを檢討しなければならぬ。靜的狀態に於て抗壓材の彎折荷重を求むるには，或る微小變位に對して，外力に因る仕事が內力に因る仕事より小なる間は(外力の勢力が抗壓材の舊位置に戻らんとする勢力に比して小)抗壓材は安全であるが，外力が次第に增加し，外力に因る仕事が內力に因る仕事と等しくなりたる時，彎折狀態に入るとの考へより導いて行つた。(7) 私は動的狀態にも上記の考へを延長し，外力に因る仕事と內力に因る仕事が等しくなりたる瞬間を以て，彎折狀態に入るとの條件より，强制振動下に於ける抗壓材の彎折荷重を求めて行かうと思ふのである。振動曲線は (29) 式より

$$y=\sum_{i=1}^{\infty}f_i\sin\frac{i\pi x}{l}\sin qt-\sum_{i=1}^{\infty}f_i'\sin\frac{i\pi x}{l}\sin nt\quad\cdots\cdots(31)$$

なる形にては表はされる事を知る。第一項は强制振動を，第二項は自由振動を示すものであつて，

(7) Bleich, Theorie und Berechnung der Eisernen Brücken. S. 134 參照。

$$\left.\begin{aligned} f_i &= \frac{2Ql}{i^2\pi^2}\cdot\frac{\sin\dfrac{i\pi a}{l}}{\dfrac{i^2\pi^2 EJ}{l^2}-P-\dfrac{\rho A l^2 q^2}{i^2\pi^2}} \\ f_i' &= \frac{2Ql}{i^2\pi^2}\cdot\frac{\sin\dfrac{i\pi a}{l}}{\sqrt{\dfrac{i^2\pi^2}{\rho A l^2}\left(\dfrac{i^2\pi^2 EJ}{l^2}-P\right)}\left[\dfrac{i^2\pi^2 EJ}{l^2}-P-\dfrac{\rho A l^2 q^2}{i^2\pi^2}\right]} \\ n_i &= \sqrt{\frac{i^2\pi^2}{\rho A l^2}\left(\frac{i^2\pi^2 EJ}{l^2}-P\right)} \end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(32)$$

自由振動は抵抗のために次第に減衰するを以て，遂には强制振動のみ殘る。故に彎折狀態の振動曲線としては强制振動曲線のみを考へれば可い。且つ彎折荷重を考へる場合には，既に

$$q^2 \cong \frac{i^2\pi^2}{\rho A l^2}\left(\frac{i^2\pi^2 EJ}{l^2}-P\right)$$

なる狀態に立ち至つた時で，斯かる時には强制振動曲線は i 番目

$$y=f_i\sin\frac{i\pi x}{l}\sin qt \quad\cdots\cdots(33)$$

のみを採ればよい。然らば靜的平衡狀態より或る瞬間迄の仕事は，各々次の如く表はさる。

(a) **荷重のなす仕事**

$$\left.\begin{aligned} W_e &= P\cdot\Delta l=\frac{P}{2}\int_0^l\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2dx \\ &= \frac{Pi^2\pi^2}{4l}f_i^2\sin qt \end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(34)$$

(b) **荷重の慣性のなす仕事**

$$\left.\begin{aligned} W_{ei} &= -\frac{1}{2}\frac{P}{g}\int_0^l\left(\frac{\partial\Delta l}{\partial t}\right)^2dx \\ &= -\frac{1}{8}\frac{P}{g}\left[\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2dx\right]^2 \\ &= -\frac{i^4\pi^4q^2P}{32gl^2}f_i^2\sin^2 2qt \end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(35)$$

(c) **內力のなす仕事**

$$\left.\begin{aligned} W_i &= \frac{EJ}{2}\int_0^l\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2dx \\ &= \frac{i^4\pi^4EJ}{4l^3}f_i^2\sin^2 qt \end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(36)$$

(d) **內力の慣性のなす仕事**

$$\left.\begin{aligned} W_{ii} &= \frac{1}{2}\rho A\int_0^l\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2dx \\ &= \frac{1}{4}\rho A l q^2 f_i^2\cos^2 qt \end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(37)$$

故に或瞬間に於ける之等の仕事は，各々 $\dfrac{\partial W_e}{\partial t}dt$, $\dfrac{\partial W_{ei}}{\partial t}dt$, $\dfrac{\partial W_i}{\partial t}dt$, $\dfrac{\partial W_{ii}}{\partial t}dt$ にて與へられ，彎折條件式としては

$$\frac{\partial W_e}{\partial t}dt+\frac{\partial W_{ei}}{\partial t}dt=\frac{\partial W_i}{\partial t}dt+\frac{\partial W_{ii}}{\partial t}dt \quad\cdots\cdots(38)$$

が成り立つ。(34), (35), (36) 及 (37) 式の値を (38) 式に代入すれば

$$\frac{i^2\pi^2P}{l}-\frac{i^4\pi^4}{l^2}\frac{P}{2g}f_i^2\cos 2qt=\frac{i^4\pi^4EJ}{l^3}-\rho Aq^2l \quad\cdots\cdots(39)$$

(39) 式より彎折荷重を求むれば

$$P=\frac{\dfrac{i^2\pi^2EJ}{l^2}-\dfrac{\rho Aq^2l^2}{i^2\pi^2}}{1-\dfrac{i^2\pi^2q^2}{2gl}f_i^2\cos 2qt} \quad\cdots\cdots(40)$$

を得。

(40) 式に於て彎折荷重 P の最小値は

$$\cos 2qt_1=-1 \quad\cdots\cdots(41)$$

なる時に起る。(41) 式を解けば

$$t_1=\frac{2n+1}{4}\pi$$

にして，t_1 は抗壓材の振幅が最大に達せる時に當るので，斯かる時に抗壓材が最初の不安定の狀態に入る事を示すのである。然らば彎折荷重としては

$$P=\frac{\dfrac{i^2\pi^2EJ}{l^2}-\dfrac{\rho Aq^2l^2}{i^2\pi^2}}{1+\dfrac{i^2\pi^2q^2f_i^2}{2gl}} \quad\cdots\cdots(42)$$

$$=\left[\frac{i^2\pi^2EJ}{l^2}-\frac{\rho Aq^2l^2}{i^2\pi^2}\right]\left[1-\frac{i^2\pi^2q^2f_i^2}{2gl}\right]$$

$$=\left[\frac{i^2\pi^2EJ}{l^2}-\frac{\rho Aq^2l^2}{i^2\pi^2}\right]\left[1-\frac{2Q^2q^2l}{i^2\pi^2g}\frac{\sin^2\dfrac{i\pi a}{l}}{\left[\dfrac{i^2\pi^2EJ}{l^2}-P-\dfrac{\rho Al^2q^2}{i^2\pi^2}\right]^2}\right]$$

$$=\left(\frac{i^2\pi^2EJ}{l^2}-\frac{\rho Aq^2l^2}{i^2\pi^2}\right)-\frac{2Q^2q^2l}{i^2\pi^2g}\frac{\left(\dfrac{i^2\pi^2EJ}{l^2}-\dfrac{\rho Al^2q^2}{i^2\pi^2}\right)}{\left[\dfrac{i^2\pi^2EJ}{l^2}-P-\dfrac{\rho Al^2q^2}{i^2\pi^2}\right]^2}\sin^2\frac{i\pi a}{l}$$

之より

$$\left[\frac{i^2\pi^2EJ}{l^2}-P-\frac{\rho Aq^2l^2}{i^2\pi^2}\right]=\frac{2Q^2q^2l}{i^2\pi^2g}\frac{\left[\dfrac{i^2\pi^2EJ}{l^2}-\dfrac{\rho Al^2q^2}{i^2\pi^2}\right]}{\left[\dfrac{i^2\pi^2EJ}{l^2}-P-\dfrac{\rho Al^2q^2}{i^2\pi^2}\right]^2}\sin^2\frac{i\pi a}{l}$$

$$\left[\frac{i^2\pi^2EJ}{l^2}-P-\frac{\rho Aq^2l^2}{i^2\pi^2}\right]^3=\frac{2Q^2q^2l}{i^2\pi^2g}\left[\frac{i^2\pi^2EJ}{l^2}-\frac{\rho Aq^2l^2}{i^2\pi^2}\right]\sin^2\frac{i\pi a}{l}$$

之より強制振動を受けたる抗壓材の彎折荷重は

$$P=\frac{i^2\pi^2EJ}{l^2}-\frac{\rho Al^2q^2}{i^2\pi^2}-\sqrt[3]{\frac{2Q^2q^2l}{i^2\pi^2g}\left[\frac{i^2\pi^2EJ}{l^2}-\frac{\rho Al^2q^2}{i^2\pi^2}\right]} \quad\cdots\cdots(43)$$

にて求めらる。(43) 式を (30) 式と比較するに，(43) 式には新たに最後の項が附加へられたので， 抗壓材が強制

振動を受けたる時の彎折荷重は斯くして Euler の彎折荷重に修正が加へられなければならぬ事を知る。

4. 兩端ヒンヂ，斷面均一なる抗壓材が週期的に變化する等布横力 $p\sin qt$ の作用を受けたる場合の振動曲線及彎折荷重

抗壓材の全長に亘りて $p\sin qt$ なる外力が等布的に作用する場合には，(17) 式中に於けるノルマル座標 φ_i に對應する一般力 Θ_i を決定するには前同樣抗壓材中心線の微小變位 δy_i に對する外力のなす仕事

$$\delta W_i = p\sin qt\,\delta\varphi_i\int_0^l \sin\frac{i\pi x}{l}dx$$

と一般力 Θ_i のなす仕事

$$\delta W_i' = \Theta_i\delta\varphi_i$$

とを等しく置けばよい。之より

$$\left.\begin{aligned}\Theta_i &= p\sin qt\int_0^l \sin\frac{i\pi x}{l}dx\\ &=0 \qquad (i\text{ が偶數の場合})\\ &=\frac{2l}{i\pi}p\sin qt \qquad (i\text{ が奇數の場合})\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(44)$$

(44) 式中に於て i が偶數の場合に一般力がゼロとなる事は，外力が等布的に作用する時は，偶數節の振動は生じない事を示してゐるのである。故に今一般力を

$$\Theta_{(2k+1)} = \frac{2l}{(2k+1)\pi}p\sin qt \cdots\cdots(45)$$

玆に $k=0,\ 1,\ 2,\ldots.$

とすれば，ノルマル座標 $\varphi_{(2k+1)}$ は (21) 式に由り

$$\begin{aligned}\varphi_{(2k+1)} &= \frac{4p}{n_{(2k+1)}(2k+1)\pi\rho A}\int_0^t \sin qt_1 \sin n_{(2k+1)}(t-t_1)dt_1\\ &= \frac{4p}{n_{(2k+1)}(2k+1)\pi\rho A}\,\frac{1}{n^2_{(2k+1)}-q^2}\Big[n_{(2k+1)}\sin qt - q\sin n_{(2k+1)}t\Big]\end{aligned}$$

(18) 式の値を上記の式に代入すれば $\varphi_{(2k+1)}$ は

$$\left.\begin{aligned}\varphi_{(2k+1)} = &\frac{4pl^2}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\frac{1}{\left[\dfrac{(2k+1)^2\pi^2EJ}{l^2}-P-\dfrac{\rho Al^2q^2}{(2k+1)^2\pi^2}\right]}\sin qt\\ &-\frac{4pl^2q}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\frac{1}{\sqrt{\dfrac{(2k+1)^2\pi^2}{\rho Al^2}\left[\dfrac{(2k+1)^2\pi^2EJ}{l^2}-P\right]}\left[\dfrac{(2k+1)^2\pi^2EJ}{l^2}-P-\dfrac{\rho Al^2q^2}{(2k+1)^2\pi^2}\right]}\\ &\times\sin\sqrt{\frac{(2k+1)^2\pi^2}{\rho Al^2}\left[\frac{(2k+1)^2\pi^2EJ}{l^2}-P\right]}\,t\end{aligned}\right\}$$

$$\cdots\cdots(46)$$

によりて與へらる。故に振動曲線は

$$y=\frac{4pl^2}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\frac{\sin\dfrac{(2k+1)\pi x}{l}}{\left[\dfrac{(2k+1)^2\pi^2EJ}{l^2}-P-\dfrac{\rho Al^2q^2}{(2k+1)^2\pi^2}\right]}\sin qt$$

$$
\left.\begin{aligned}
&-\frac{4pl^2q}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\frac{\sin\frac{(2k+1)\pi x}{l}}{\sqrt{\frac{(2k+1)^2\pi^2}{\rho Al^2}\left[\frac{(2k+1)^2\pi^2EJ}{l^2}-P\right]}\left[\frac{(2k+1)^2\pi^2EJ}{l^2}-P-\frac{\rho Al^2q^2}{(2k+1)^2\pi^2}\right]}\\
&\qquad\times\sin\sqrt{\frac{(2k+1)^2\pi^2}{\rho Al^2}\left[\frac{(2k+1)^2\pi^2EJ}{l^2}-P\right]}\,t
\end{aligned}\right\}\quad(47)
$$

にて表はさる。(47) 式中第一項は强制振動を，第二項は自由振動を表はすもので，結局振動曲線は

$$
y=\sum_{k=0}^{\infty}f_{(2k+1)}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{l}\sin qt-\sum_{k=0}^{\infty}f'_{(2k+1)}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{l}\sin n_{(2k+1)}t \quad\ldots\ldots\ldots\ldots(48)
$$

なる形にて表はされる。(48) 式中 $f_{(2k+1)}$, $f'_{(2k+1)}$, $n_{(2k+1)}$ は

$$
\left.\begin{aligned}
f_{(2k+1)}&=\frac{4pl^2}{(2k+1)^3\pi^3}\frac{1}{\left[\frac{(2k+1)^2\pi^2EJ}{l^2}-P-\frac{\rho Al^2q^2}{(2k+1)^2\pi^2}\right]}\\
f'_{(2k+1)}&=\frac{4pl^2}{(2k+1)^3\pi^3}\frac{q}{\sqrt{\frac{(2k+1)^2\pi^2}{\rho Al^2}\left[\frac{(2k+1)^2\pi^2EJ}{l^2}-P\right]}\left[\frac{(2k+1)^2\pi^2EJ}{l^2}-P-\frac{\rho Al^2q^2}{(2k+1)^2\pi^2}\right]}\\
n_{(2k+1)}&=\sqrt{\frac{(2k+1)^2\pi^2}{\rho Al^2}\left[\frac{(2k+1)^2\pi^2EJ}{l^2}-P\right]}
\end{aligned}\right\}\quad(49)
$$

にて與へられるものとす。

此場合の彎折荷重を求むるには，前說と同樣の考へに依り，(42) 式に對應する

$$
P=\left[\frac{(2k+1)^2\pi^2EJ}{l^2}-\frac{\rho Aq^2l^2}{(2k+1)^2\pi^2}\right]\left[1-\frac{(2k+1)^2\pi^2q^2}{2gl}f^2_{(2k+1)}\right]\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(50)
$$

を得。(50) 式中に (49) 式の値を代入すれば

$$
P=\left[\frac{(2k+1)^2\pi^2EJ}{l^2}-\frac{\rho Aq^2l^2}{(2k+1)^2\pi^2}\right]\left[1-\frac{8p^2q^2l^3}{(2k+1)^4\pi^4g}\frac{1}{\left[\frac{(2k+1)^2\pi^2EJ}{l^2}-P-\frac{\rho Al^2q^2}{(2k+1)^2\pi^2}\right]^2}\right]
$$

$$
=\left[\frac{(2k+1)^2\pi^2EJ}{l^2}-\frac{\rho Aq^2l^2}{(2k+1)^2\pi^2}\right]-\frac{8p^2q^2l^3}{(2k+1)^4\pi^4g}\frac{\frac{(2k+1)^2\pi^2EJ}{l^2}-\frac{\rho Aq^2l^2}{(2k+1)^2\pi^2}}{\left[\frac{(2k+1)^2\pi^2EJ}{l^2}-P-\frac{\rho Al^2q^2}{(2k+1)^2\pi^2}\right]^2}
$$

$$
\frac{(2k+1)^2\pi^2EJ}{l^2}-P-\frac{\rho Aq^2l^2}{(2k+1)^2\pi^2}=\frac{8p^2q^2l^3}{(2k+1)^4\pi^4g}\frac{\frac{(2k+1)^2\pi^2EJ}{l^2}-\frac{\rho Aq^2l^2}{(2k+1)^2\pi^2}}{\left[\frac{(2k+1)^2\pi^2EJ}{l^2}-P-\frac{\rho Al^2q^2}{(2k+1)^2\pi^2}\right]^2}
$$

$$
\left[\frac{(2k+1)^2\pi^2EJ}{l^2}-P-\frac{\rho Al^2q^2}{(2k+1)^2\pi^2}\right]^3=\frac{8p^2q^2l^3}{(2k+1)^4\pi^4g}\left[\frac{(2k+1)^2\pi^2EJ}{l^2}-\frac{\rho Aq^2l^2}{(2k+1)^2\pi^2}\right]
$$

之より，週期的に變化する等布橫力を受けたる場合の彎折荷重は

$$
P=\frac{(2k+1)^2\pi^2EJ}{l^2}-\frac{\rho Aq^2l^2}{(2k+1)^2\pi^2}-\sqrt[3]{\frac{8p^2q^2l^3}{(2k+1)^4\pi^4g}\left[\frac{(2k+1)^2\pi^2EJ}{l^2}-\frac{\rho Aq^2l^2}{(2k+1)^2\pi^2}\right]}\quad\ldots\ldots\ldots(51)
$$

なる式にて與へられる。$\frac{(2k+1)^2\pi^2EJ}{l^2}$ は (2k+1) 次の Euler 彎折荷重の式であつて，强制振動の場合には上記の如き修正を要するのである。