

参 考 資 料

第十九卷第四號 昭和八年四月

内部に集中荷重を有する半平面の應力問題

(Ernst Melan: Der Spannungszustand der durch eine Einzelkraft im Innern beanspruchten Halbscheibe, Zeitschr. f. angewandte Math. und Mech., Bd. 12, Heft 6, 1932.)

直線の邊縁を有し、其片側に無限の領域を有する所謂半平面 (Halbscheibe, half-plane) に於て、其内部に集中荷重が作用する場合の平面應力問題は未だ完全には解かれて居ない⁽¹⁾。本文は此問題の嚴密解を求めたものである。

今第一圖及第二圖に示すが如く、半平面の直線邊縁を $x=0$ なる直線(即ち y 軸)とし、半平面内の任意の一點、例へば $x=a, y=0$ の點に集中荷重が作用するものとする。そして任意の方向に作用する集中荷重に就て考慮する代りに、 X 軸に平行なる力の影響と Y 軸に平行なる力の影響とを別々に考慮すれば充分である。但し之等の力の方向は夫々 X 軸或は Y 軸の負の方向に作用する場合を正とする。

著者は此問題の嚴密解を求めるのに、先づ與へられたる邊縁條件と

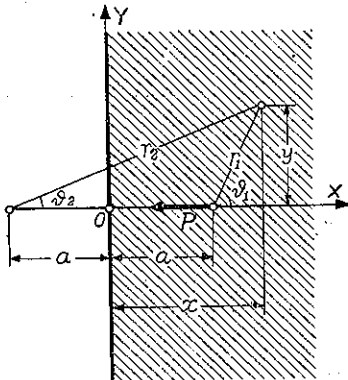
$$\frac{\partial^4 \chi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \chi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \chi}{\partial y^4} = 0 \dots\dots\dots(1)$$

とを満足する Airy の應力函數 χ を求め、之より

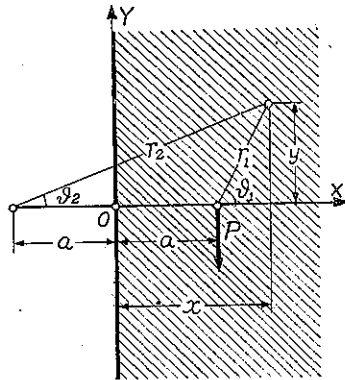
$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}, \quad \tau = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} \dots\dots\dots(2)$$

に依つて應力を決定したものである。其結果は次の如くである。

第 一 圖



第 二 圖



第一圖の場合

$$\chi = \frac{P}{\pi} \left[\frac{1}{2} y(\varphi_1 + \varphi_2) - \frac{m-1}{4m} (x-a) \log \frac{r_1}{r_2} - \frac{m+1}{2m} \frac{ax(a+x)}{r_2^2} \right] \dots\dots\dots(3)$$

⁽¹⁾ 勿論此問題の近似解はある。例へば W. Riedel: Beiträge zur Lösung des ebenen Problems eines elastischen Körpers mittels Airyschen Spannungsfunktion, Z. f. ang. Math. u. Mech., Bd. 7, Heft 3, 1927 の如し。

$$\sigma_x = \frac{P}{\pi} \left[\frac{m+1}{2m} \left\{ \frac{(x-a)^2}{r_1^4} + \frac{(x+a)[(x+a)^2 + 2ax]}{r_2^4} - \frac{8ax(a+x)y^2}{r_2^6} \right\} + \frac{m-1}{4m} \left\{ \frac{x-a}{r_1^2} + \frac{3x+a}{r_2^2} - \frac{4xy^2}{r_2^4} \right\} \right] \dots (4)$$

$$\sigma_y = \frac{P}{\pi} \left[\frac{m+1}{2m} \left\{ \frac{(x-a)y^2}{r_1^4} + \frac{(x+a)(y^2 + 2a^2) - 2ay^2}{r_2^4} + \frac{8ax(a+x)y^2}{r_2^6} \right\} + \frac{m-1}{4m} \left\{ -\frac{x-a}{r_1^2} + \frac{y+3a}{r_2^2} + \frac{4xy^2}{r_2^4} \right\} \right] \dots (5)$$

$$\tau = \frac{Py}{\pi} \left[\frac{m+1}{2m} \left\{ \frac{(x-a)^2}{r_1^4} + \frac{x^2 - 2ax - a^2}{r_2^4} + \frac{8ax(a+x)^2}{r_2^6} \right\} + \frac{m-1}{4m} \left\{ \frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} + \frac{4x(a+x)}{r_2^4} \right\} \right] \dots (6)$$

但し上式に於て m はポアソン比の逆数であり、且つ

$$\vartheta_1 = \operatorname{arctg} \frac{y}{x-a}, \vartheta_2 = \operatorname{arctg} \frac{y}{x+a}, r_1 = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}, r_2 = \sqrt{(x+a)^2 + y^2} \dots (7)$$

である。上式より明かなるが如く、 $x=0$ に於ては $\sigma_x = \tau = 0$ となり、 $r_1/a \rightarrow 0$ の場合にはに第三圖に示すが如く無限平面内に作用する集中荷重の場合となり、(3) 式の應力函数は此場合に對して既に求められて居る解：

$$\chi = \frac{P}{\pi} \left[\frac{1}{2} y \vartheta - \frac{m-1}{4m} (x-a) \log r \right] \dots (8)$$

に一致し、更に $r_1/a \rightarrow \infty$ の場合には第四圖に示すが如く半平面の邊緣に直角に集中荷重が作用する場合となり、(3) 式の應力函数は此場合の解：

$$\chi = \frac{P}{\pi} y \vartheta \dots (9)$$

に一致する。

第二圖の場合

$$\chi = \frac{P}{\pi} \left[-\frac{1}{2} (x-a)(\vartheta_1 + \vartheta_2) - \frac{m-1}{4m} y \log \frac{r_1}{r_2} + \frac{m+1}{2m} \frac{axy}{r_2^2} \right] \dots (10)$$

$$\sigma_x = \frac{Py}{\pi} \left[\frac{m+1}{2m} \left\{ \frac{(x-a)^2}{r_1^4} - \frac{a^2 - x^2 + 6ax}{r_2^4} + \frac{8axy^2}{r_2^6} \right\} - \frac{m-1}{4m} \left\{ \frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} - \frac{4x(a+x)}{r_2^4} \right\} \right] \dots (11)$$

$$\sigma_y = \frac{Py}{\pi} \left[\frac{m+1}{2m} \left\{ \frac{y^2}{r_1^4} + \frac{y^2 + 8ax + 6a^2}{r_2^4} + \frac{8ax(a+x)^2}{r_2^6} \right\} + \frac{m-1}{4m} \left\{ \frac{1}{r_1^2} + \frac{3}{r_2^2} - \frac{4x(a+x)}{r_2^4} \right\} \right] \dots (12)$$

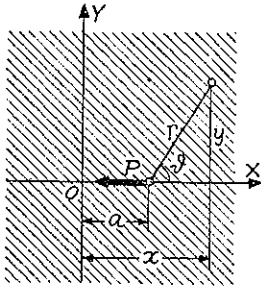
$$\tau = \frac{P}{\pi} \left[\frac{m+1}{2m} \left\{ \frac{(x-a)y^2}{r_1^4} + \frac{(2ax+y^2)(a+x)}{r_2^4} - \frac{8ax(a+x)y^2}{r_2^6} \right\} + \frac{m-1}{4m} \left\{ \frac{x-a}{r_1^2} + \frac{3x+a}{r_2^2} - \frac{4x(x+a)^2}{r_2^4} \right\} \right] \dots (13)$$

此場合に於ても $x=0$ に於ては $\sigma_x = \tau = 0$ であり、 $r_1/a \rightarrow 0$ の場合には第三圖の場合と同様になり、 $r_1/a \rightarrow \infty$ の場合には第五圖に示すが如く、半平面の邊緣に之と平行なる力が作用する場合となり、(10) 式の應力函数は明か

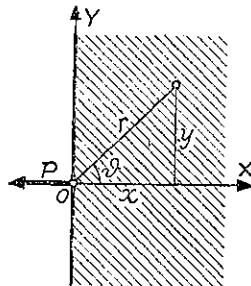
$$\chi = -\frac{P}{\pi} x \vartheta \dots \dots \dots (14)$$

となる。

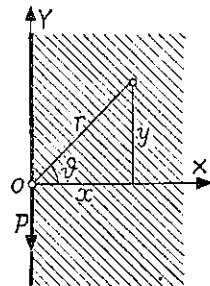
第三圖



第四圖



第五圖



(福田武雄抄譯)

圓錐槽及圓錐穹窿の解法

(E. Lichtenstern : Die biegungsfeste Kegelschale mit linear veränderlicher Wandstärke,)
 Zeitsch. f. angew. Math. und Mech., Bd. 12, Heft 6, 1932.

水槽、油槽、サイロ等の槽底或は建築物の穹窿等に應用される圓錐形の構造物、所謂 conical shell の厚さが一樣なる場合の嚴密解は既に Dubois 等に依つて求められて居る。本文は厚さが等變する場合の conical shell の解法に就て述べたものである。勿論普通の構造力學に於ける諸種の假定、殊にフックの法則、對稱荷重及厚さが他の寸法に比し充分に小であること等の假定が設けられる。

1. 圓錐槽の微分方程式

第一圖に示すが如く比重 γ なる液體が圓錐槽の頂部まで貯へられたるものとする。若し液體の表面が l の方向に測つて圓錐槽の頂部より h だけ上にあるものとすれば、以下すべての算式中に於て l の代りに $l+h$ とすればよい。扱へ上記の液體は任意の一點に於て γz なる壓力度を有するから、槽壁の微盤面積 $dF = dx \cdot x d\psi$ に作用する壓力は

$$dq = \gamma z \cdot dx \cdot x d\psi$$

$$= \gamma (l-x) \cos \alpha_0 \cdot dx \cdot x d\psi \dots \dots \dots (1)$$

となり、之が爲に槽壁には環應力 σ 及其合成力 $T_2 = \sigma \cdot 1 \cdot \delta$ (δ は槽壁の厚さ)、 l の方向の軸力 T_1 、剪力 N 、彎曲率 G_1 及 G_2 を生ずる。此彎曲率のうち G_2 は紙面に垂直なる平面内に作用するものであつて、厚さが一樣なる場合の嚴密解の結果から見れば、此 G_2 の影響は極めて小であるから、本論文に於ては之を無視する。

σ 及其合成力 T_2 と x に於ける槽壁の撓度 y との関係は次の如きものである。

第一圖

