

論 說 報 告

第十九卷第二號 昭和八年二月

弾性地盤上に置かれたる版の近似計算法

(二次元の場合)

准員 工 學 士 松 村 孫 治

Approximate Solution of Slabs on Elastic Foundation

(Two Dimensional Problem)

By Magodi Matumura, C.E., Assoc. Member.

内 容 梗 概

本文は弾性體と等しき力學的性質を有する基礎地盤上に設置せる版に関する研究にして、版が無限の廣りを有し荷重分布が一方に一樣なる二次元の場合に就て版に作用する地盤の反力、版の纖維應力を求めたものである。

I. に於ては基礎地盤も版も弾性體として正式の計算法を述べ、夫等の數値計算の非常に煩雜なる事を明かにし、II. に於ては適當なる假定の下に一種の近似計算法を案出した。この近似計算法は(1) 版には所謂 beam theory が適用し得る、(2) 版の撓度は基礎地盤表面の垂直變位に等しと云ふ二假定に基き、本文に於て比較せし範圍内に於ては兩計算法の差異は大體 10% 以下にして 5% を超ゆる場合は僅少なるを以て、近似計算法の精度は基礎地盤の弾性率が版の夫れの $1/10$ 以下なる場合には實用上の目的には充分なる事を確め、更に彈床地盤とせる計算と比較し、弾性地盤の場合と本質的の差異ある事を示し、弾性地盤に彈床地盤の理論を適用するは全然誤りなる事を明かにしたものである。(著者)

緒 言

閘門の基礎版、道路の鋪裝版、建築物の基礎版等、地盤により直接支持さるゝ版を設計するには地盤の反力、版の應力等を求める必要がある、然るに基礎工學の現状にありては是等の値を求める正確なる計算法なく、縱に反力分布曲線を適當に假定するか又は地盤が彈床地盤(基礎版に作用する地盤の反力の大きはその點の版の沈下に比例すと假定する)であるとして夫等の値を計算し得るに過ぎない。然し普通の地盤に上記の力學的性質の存在せざるは後節に述ぶる如く、載荷試験により容易に證明する事が出來又少くとも地盤が弾性體と力學的性質の等しき場合には版に作用する地盤の反力の版の其點の沈下に比例せざる事實は理論的に明かにされてゐる。

彈床地盤の力學的性質は一樣の強さを有する無限に多くの彈條より構成せる地盤と等しく、然も彈條相互間には何等の連結もなく各自は他と獨立して自由に變形し得る性質あるを以て一つの彈條に載荷する場合は其彈條のみ沈下し他の彈條には少しの沈下も生ぜず、換言すれば載荷點のみに沈下が生じ他の場所は少しも沈下せず。然るに普通の地盤に載荷する場合は地盤の沈下はその載荷點のみに生ぜず、周圍の地盤も亦沈下するを以て彈床地盤と力學的性質の等しからざるは明かである。従て普通の地盤に彈床地盤の理論を其儘適用するは少くとも理論上は不合理である。液體に於ては反力即ち浮力はその深さに比例するを以て湖面に張れる氷版、水上に浮べる構造物には彈床地盤として反力を求める事が出来る。而して杭打基礎に於て比較的密に杭が存在する時は近似的に彈床地

盤が成立する如く考へらるゝも上層の地盤が極めて軟弱にて杭に作用する荷重が全部下層地盤に傳達し然も下層地盤が非常に堅硬にて沈下が杭自身のみ弾性變形によりて生ずる如き場合に限られ、荷重が杭の摩擦抵抗により周囲の地盤に傳達さるゝ場合及下層地盤が杭と共に沈下する場合には彈床地盤として計算するの不合理なるは明かである。

上述の如く一般の地盤に彈床假定の成立せざるは理論的に明かなる故に地盤を彈性體と假定し版に及ぼす地盤の反力、版中の應力等を研究する必要がある。我々の使用する鋼鐵、コンクリート等は決して完全なる彈性體にあらざるも應力計算を行ふには彈性體の如く考ふるを常とする、固より普通の地盤を構成する物體は鋼鐵やコンクリートと同じ精度に於て彈性體と見做し得ざるも、鐵骨、鐵筋コンクリート構造物の應力計算と同じ精度を基礎構造物に要求するは到底不可能である故に實在地盤の或るものに對し弾性地盤として求めたる結果を適用するも實用上の立場よりすれば許さるべきである、少くとも理論上にも實驗上にも何等の根據も有せずして唯反力分布曲線を假定し、又は彈床地盤の理論を適用するに比較すれば一步を進めたる方法と云ふ事が出来る。

本文は彈性體の地盤上に設置したる版が荷重を受けたる時荷重の分布状態、版と地盤との彈性係數の差異、版の厚さ、荷重分布の廣さ等の地盤の反力及版の應力に及ぼす影響に就て研究したるものにして、最も簡單なる二次元の而も床版が無限の擴りを有する場合を普通の彈性體の計算法に從て取扱ひ、反力の大きさ、版の下部の纖維應力 (extreme fiber stress) を求めたものに過ぎない。後節に示す如く此算法は可成り煩雜であるが、未着手の問題なるが故に茲に數値計算を行ひ、力學的性質の大體の傾向を知るに努めたるがその範圍は實用上充分なる程度には差しない、よつて合理的と思惟さるゝ假定の下に一の計算法を案出した。此計算法も決して簡單なるものにあらざるも反力、應力等は簡單なる數値積分及既知の函數により示さるゝを以て正確なる方法に比較すれば著しく簡單であり且つ本文にて取扱つた範圍にては誤差は極めて小にて實用上無視し得る程度である。次に版と地盤との境界面の連結状態は場合により著しく異なり一様に定むるは不可能なるを以て、本文に於ては版が地盤上に自由に滑動する場合に就て計算を行つた。最後に本文にて取扱ひし場合に就て彈床地盤として計算し、近似計算より得たる結果と比較し、基礎地盤が彈性體なる場合と、彈床地盤なる場合との比較を行つた。

I. 正確なる計算法

1. 基本公式

弾性地盤上に設置したる基礎版は彈性係數の異なる二層の彈性體が水平面にて重なり合へる場合に相當するを以て直角座標を用ひ普通の彈性體の計算法より容易に求め得る。本文にては途中の計算を省略して其結果のみ記する。

版に作用する地盤の瓦力

地盤の反力を q とすれば

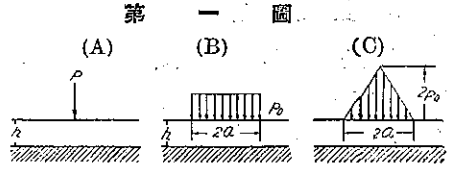
$$q = -\varepsilon_1 \int_0^\infty \frac{\sinh kh + kh \cosh kh}{(\sinh^2 kh + k^2 h^2) + \varepsilon_1 (\sinh kh \cosh kh + kh)} X(k) \cos kax dk \left. \vphantom{\int_0^\infty} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

茲に $X(k) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty p(\alpha) \cos k\alpha d\alpha$

p は版に作用する垂直荷重を示し、 p が既知なる時は $X(k)$ の値を得るを以て(1)式より q を計算し得る。本文に於ては第一圖に示す3荷重に就て計算せしが他の荷重に就ても全く同様求め得る。

以下計算の便宜上上記3荷重を夫々A-荷重, B-荷重, C-荷重と呼び3荷重に共通なる記號は夫々 suffix a, b, c を附して區別する。

q の被積分値の $X(k) \cos kx$ の係数を $f(kh)$ にて示す時 $f(kh)$ は kh が大となると共に限りなく減少し, その極限值を $f_1(kh)$ とする時 q は次の如し。



$$q = -\frac{2\varepsilon_1}{1+\varepsilon_1} \int_0^\infty \frac{(1+\eta)e^{-\eta}}{\eta} X\left(\frac{\eta}{h}\right) \cos \frac{x}{h} \eta d\eta + \int_0^\infty \frac{f(\eta)-f_1(\eta)}{h} X\left(\frac{\eta}{h}\right) \cos \frac{x}{h} \eta d\eta \dots\dots\dots (2)$$

上記3荷重に相當する $X(k)$ の値を求めて(2)式に代入すれば地盤の反力は夫々次の如く求め得らる。

$$\left. \begin{aligned} q_a &= \frac{P}{\pi h} \left[\frac{4\varepsilon_1}{1+\varepsilon_1} \frac{1}{(1+z^2)^2} + \int_0^\infty \{f(\eta)-f_1(\eta)\} \cos z\eta d\eta \right] \\ q_b &= \frac{2p_0}{\pi} \left[\frac{\varepsilon_1}{1+\varepsilon_1} \left\{ \operatorname{tg}^{-1}(b+z) + \operatorname{tg}^{-1}(b-z) + \frac{b+z}{1+(b+z)^2} + \frac{b-z}{1+(b-z)^2} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\infty \frac{f(\eta)-f_1(\eta)}{\eta} \sin b\eta \cos z\eta d\eta \right] \\ q_c &= \frac{4p_0}{\pi} \frac{1}{b} \left[\frac{\varepsilon_1}{1+\varepsilon_1} \left\{ (b+z)\operatorname{tg}^{-1}(b+z) + (b-z)\operatorname{tg}^{-1}(b-z) - 2z\operatorname{tg}^{-1}z \right\} \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\infty \frac{f(\eta)-f_1(\eta)}{\eta^2} (1-\cos b\eta) \cos z\eta d\eta \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

茲に $z = \frac{x}{h}, \quad b = \frac{a}{h}, \quad \varepsilon_1 = \frac{1-\sigma_1^2}{1-\sigma_2^2} \frac{E_2}{E_1}$

h : 版の厚さ, $2a$: 載荷面の幅, E_1 : 版の弾性係数, E_2 : 地盤の弾性係数,
 σ_1 : 版のポアソン比, σ_2 : 地盤のポアソン比

版の下端の縁維應力

版を設計するに當り最も重要なのは版の下端に於ける縁維應力にして f とすれば

$$\left. \begin{aligned} f &= \int_0^\infty (1-kh)e^{-kh} X(k) \cos kx dk + \int_0^\infty g(kh) X(k) e^{-kh} \cos kx dk \\ g(\eta) &= -\frac{\sinh^2\eta + \eta(2\cosh\eta + \sinh\eta) \sinh\eta - \eta^2(1-\eta) - \varepsilon_1 \{ \sinh^2\eta + \eta^2 - \eta(1+\cosh^2\eta) \}}{(\sinh^2\eta - \eta^2) + \varepsilon_1(\sinh\eta \cosh\eta + \eta)} \end{aligned} \right\} \dots\dots (4)$$

b と同様に數値積分を容易ならしめる爲に η が増大する時の $g(\eta)$ の極限值を $g_1(\eta)$ にて示す時上記3荷重に相當する f の値は(1)式より求めたる $X(k)$ を(4)式に代入して次の如く示さる。

$$\left. \begin{aligned} f_a &= \frac{P}{\pi h} \left[\frac{4+2\varepsilon_1}{1+\varepsilon_1} \frac{1-z^2}{(1+z^2)^2} - \frac{2\varepsilon_1}{1+\varepsilon_1} \frac{1}{1+z^2} - \int_0^\infty \{g(\eta)-g_1(\eta)\} e^{-\eta} \cos z\eta d\eta \right] \\ f_b &= \frac{2p_0}{\pi} \left[\frac{2+\varepsilon_1}{1+\varepsilon_1} \left\{ \frac{b+z}{1+(b+z)^2} + \frac{b-z}{1+(b-z)^2} \right\} - \frac{\varepsilon_1}{1+\varepsilon_1} \left\{ \operatorname{tg}^{-1}(b+z) + \operatorname{tg}^{-1}(b-z) \right\} \right. \\ &\quad \left. - \int_0^\infty \frac{g(\eta)-g_1(\eta)}{\eta} \sin b\eta \cos z\eta e^{-\eta} d\eta \right] \\ f_c &= \frac{4p_0}{\pi} \frac{1}{b} \left[\log \frac{\{1+(b+z)^2\} \{1+(b-z)^2\}}{(1+z)^2} - \frac{\varepsilon_1}{1+\varepsilon_1} \left\{ (b+z)\operatorname{tg}^{-1}(b+z) + (b-z)\operatorname{tg}^{-1}(b-z) \right\} \right. \\ &\quad \left. - 2z\operatorname{tg}^{-1}z \right] - \int_0^\infty \frac{g(\eta)-g_1(\eta)}{\eta^2} (1-\cos b\eta) \cos z\eta e^{-\eta} d\eta \end{aligned} \right\} \dots\dots (5)$$

2. 数値計算

前節に於て A, B, C の 3 荷重による地盤の反力, 床版の下端の縦維應力の式を求めたるが, 本節に於ては載荷面積, 版の厚さ, 版及地盤の力學的性質, 荷重分布等の反力及縦維應力に及ぼす影響の大體の傾向を調べ, 併せて近似計算と比較する爲に數値計算を行はんとす。(3)式, (5)式はいづれも複雑なる積分式を有し一般には數値積分によるにあらざればその値を求め得ざる故に勢ひ數値計算には多大の手數と時間とを必要とす, 従て本文に於ては比較的狭き範圍に就きて計算を行ひしに過ぎぬが後節に著者の求めたる近似計算は可成り廣き範圍に 互り計算を行ひ且つその値は正確なる算法によるものと可成りよく一致し, 誤差は實用上無視し得る程度である。

數値計算を行ふに先立ち地盤の反力, 縦維應力を與ふる諸式の著しき特質に就て述べれば

1) 版の厚さ h , 載荷面積を示す項 a , 反力又は應力の位置を示す x は集中荷重の場合を除きいづれも單獨にて式中に存在せず $a/h, x/h$ の形にて含まる λ を以て(集中荷重の場合も $P/\pi h$ の係数はいづれも $a/h, x/h$ のみを含む)計算は $a/h, x/h$ を變數と考へ a, x, h を夫々變數とする必要はない。

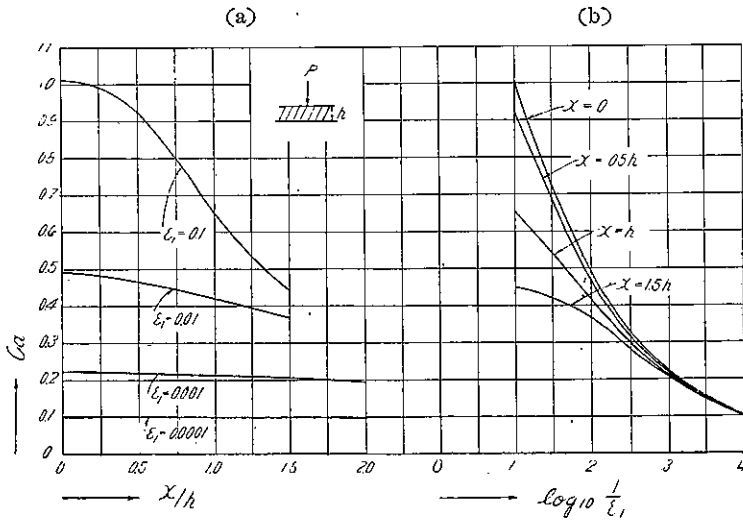
2) 版及地盤の力學的性質を示すに最も重要な弾性係數 E_1, E_2 はいづれも單獨にて式中に入らず E_2/E_1 の形にて存するを以て影響比較的小なるポアソン比を無視する時は版と地盤との弾性係數の比のみ考慮すれば足る。

本文の計算方法は數値積分を必要とする項はいづれも被積分中に含まれる圓函數を η に就て展開し $a/h, x/h$ を變數とする無限級數の形とし, 各係數を數値積分により豫め求めたるを以て級數の項數により, $x/h, a/h$ の變化する範圍が制限を受け, 爲に充分なる範圍に互り計算する事は不可能であつた。 ϵ_1 は 0.1, 0.01, 0.001 (特に反力に對しては 0.0001 を加ふ)に就き計算せしが, 其他の ϵ_1 に對する値も是等計算値より推定し得る。

地盤の反力

(3)式に於て $q_a = \frac{P}{\pi h} C_a, q_b = p_0 C_b, q_c = p_0 C_c$ とする時係數 C_a, C_b, C_c は荷重には無關係なるを以て, 豫め是等の値を計算する時は容易に反力を求め得。第二圖は集中荷重の作用する場合即ち C_a の値を示す。

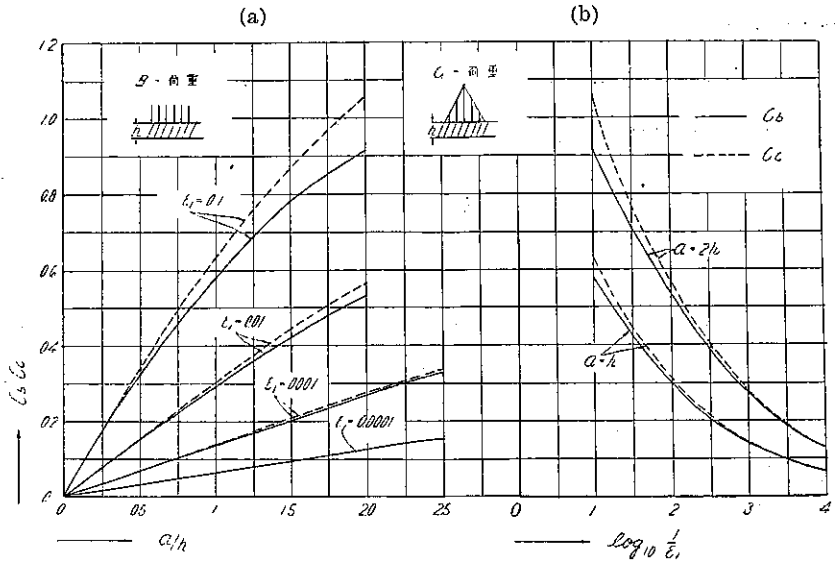
第二圖 C_a の値 $[q_a = \frac{P}{\pi h} C_a]$



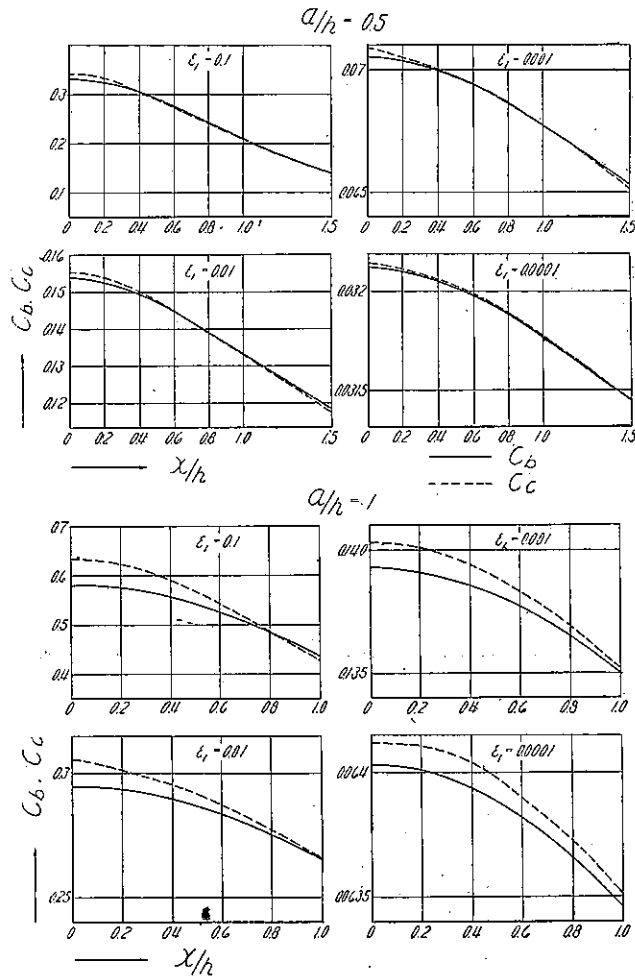
第三圖は B-荷重, C-荷重による原點の反力の値を示す。

第四圖は $a/h=1, a/h=0.5$ に於ける B-荷重, C-荷重による反力分布状態を示す。

第三圖 $x=0$ に於ける C_b, C_c の値 [$q_0=p_0C_b, q_c=p_0C_c$]



第四圖 C_b, C_c の値



版の下端に作用する縁維應力

(5)式に於て $f_a = \frac{P}{\pi h} F_a$, $f_b = p_0 F_b$, $f_c = p_0 F_c$ とする時は F_a, F_b, F_c は荷重に無関係なる係数を示す。第

五圖は集中荷重の作用する場合即ち F_a の値を示す。

第六圖は B-荷重, C-荷重による原点の縁維應力を示す。

第七圖は $a/h=1$, $a/h=0.5$ に於ける B-荷重, C-荷重による縁維應力の分布を示す。

結 言

上記の計算より地盤の反力, 版の縁維應力に及ぼす弾性係数, ポアソン比, 荷重分布, 版の厚さ等の影響を推定し得る。

a) 弾性係数及ポアソン比

版及地盤の E, σ は前述の如くいづれも單獨にて式中に存在せず,

$$\epsilon_1 = (1 - \sigma_1^2) E_2 / (1 - \sigma_2^2) E_1$$

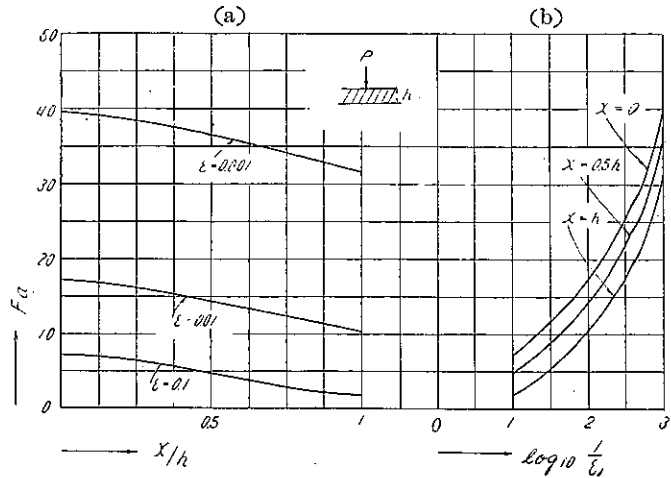
の形にて含まるる ϵ_1 の及ぼす影響を知れば足る, 然るにポアソン比は一般に 0.5 より小にして且つ $(1 - \sigma^2)$ の形にて存在する, 今兩極端の場合とし $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 0.5$ 及 $\sigma_1 = 0.5$, $\sigma_2 = 0$ の値を夫々 $\epsilon_1', \epsilon_1''$ とすれば $\epsilon_1' / \epsilon_1'' = 1.8$ にして $\sigma_1 = \sigma_2$ なる時は $\epsilon_1 = E_2 / E_1$ となり, 従て實用上ポアソン比は餘り重要視する必要なく $\epsilon_1 = E_2 / E_1$ ととりて差支へ無きが如し。地盤の反力 q は第二圖, 第三圖に示す如く ϵ_1 が小となると共に減少すれどその分布は ϵ_1 が小となると共に著しく廣き範圍に及び, 載荷點より遠ざか

るも其大きさは餘り減少せず。今原点に集中荷重 P が作用する場合 $x=0, x=1.5h$ の 2 點の地盤反力の比を求めれば次の如し。

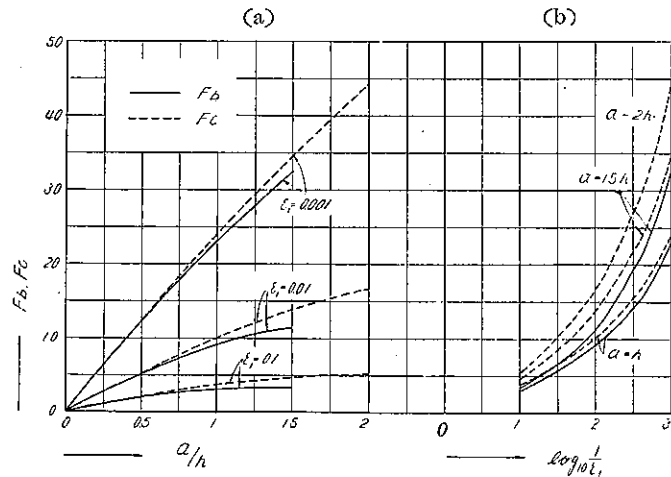
ϵ_1	0.1	0.01	0.001	0.0001
$\frac{(q_a)_{x=0}}{(q_a)_{x=1.5h}}$	2.48	1.33	1.09	1.02

ϵ_1 が減少すると共に 1 に近づき $\epsilon_1 = 0.0001$ に於ては殆んど 1 に等し。而して是等の關係は後節の近似計算

第五圖 F_a の値 $[f_a = \frac{P}{\pi h} F_a]$



第六圖 $x=0$ に於ける F_b, F_c の値 $[f_b = p_0 F_b, f_c = p_0 F_c]$



に依る時は一層明かに示し得る。版の縁維應力は之に反し ϵ_1 が小なると共に増大するもその分布状態に及ぼす影響は餘り明かならず。

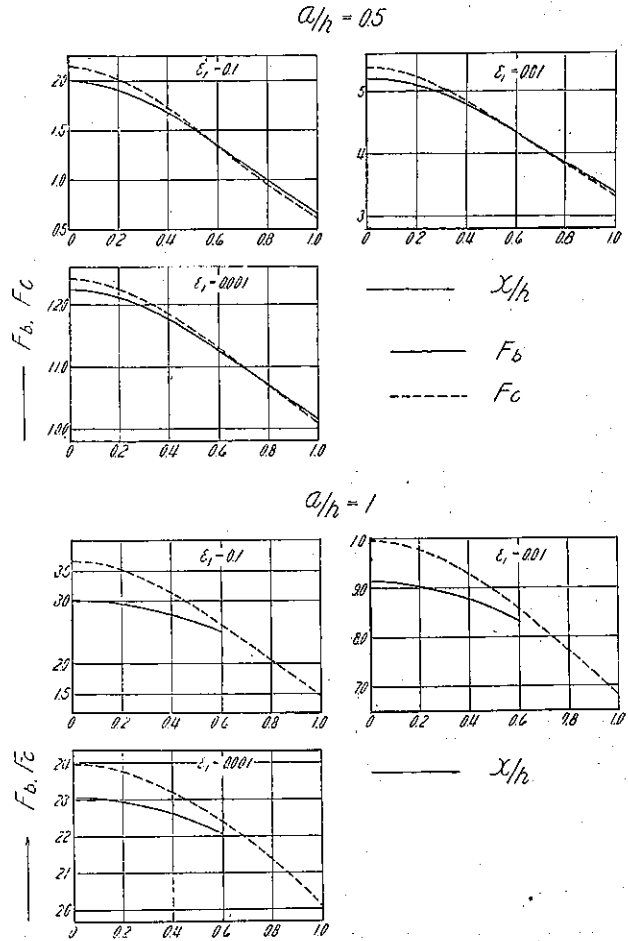
b) 載荷荷重の幅及版の厚さ

前述の如く是等は a/h の形にて式中含まれ(集中荷重の場合を除く)従て a/h の影響を知れば足る。本節に計算せし範圍に於ては反力 q , 縁維應力 f はいづれも a/h の増加すると共に増加し, 其増加の割合は ϵ_1 及 a/h に關係し a/h の小なる程その値は大なり。 ϵ_1 に就ては少くとも a/h の小なる範圍に於ては, 増加率は q に就ては ϵ_1 の大なる程大に, f に就ては之と反對の傾向あり, 是等の關係も近似計算による時は一層明瞭に知る事を得る。

c) 荷重分布

B-荷重, C-荷重は 全荷重の相等しく従て兩荷重の比較より荷重分布による影響の大體の傾向を知り得る。今原點に於ける地盤の反力, 縁維應力を比較するにいづれも C-荷重の方大にして $\{(C\text{-荷重}-B\text{-荷重}) \div B\text{-荷重}\}$ を百分率にて示す時第一表の如し。

第七圖 F_a, F_b の値



第一表 (C-荷重-B-荷重) ÷ B-荷重 (%)

		反 力				縁 維 應 力				
		0.5	1	1.5	2.0	a/h	0.5	1	1.5	
ϵ_1	0.1	3	9	12	16	ϵ_1	0.1	7	21	37
	0.01	1	3	4	7		0.01	3	9	15
	0.001	0	1	1	2		0.001	1	4	6
	0.0001	0	0	0	1					

上表に示す如く兩者の差の比は ϵ_1 の大なる程, a/h の大なる程大に, $\epsilon_1, a/h$ の小なる場合には上記 2 荷重に就ては荷重分布の影響を無視して差支へ無し。

II. 近似計算法

3. 近似計算法に就て

I. に於て弾性體により直接支持さるゝ版に作用する地盤の反力, 版に生ずる應力等を版が無限の擴りを有する二

次元の場合に對して求めたるが、其計算に多大の手數と時間とを要するを以て之に代るべき近似計算が必要である。一般に版を支持する地盤の彈性係数は版に比し著しく小にして、例へば版が鐵筋コンクリートより作らるゝ時コンクリートの彈性係数は凡そ $2 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ にて地盤が赤土などより成るとすれば其値は $10^2 \sim 10^3 \text{ kg/cm}^2$ である故に E_2/E_1 は凡そ $10^{-2} \sim 10^{-3}$ である、從て地盤に支持さるゝ基礎版の計算には E_2/E_1 は一般に 0.1 以下なりとして差支へなし。II. に於ては地盤の彈性係数が版の彈性係数の $1/10$ 以下にして且つ地盤上に版が自由に滑動し得る場合に適用する一種の近似計算法を求めたるものにして、 $E_2/E_1 > 0.1$ の場合に於ても多少大なる誤差を許し得るならば本文の計算法を用ひ得らるゝと雖も斯かる場合には本文と異なる假定より新たなる近似計算法を案出するが至當である。

著者の本文にて述べんとする近似計算法は次の二つの假定より成立する。

- (1) 版には桁と同じく plane after plane の假定を適用し得る。
- (2) 版の撓度は地盤表面の垂直變位に等し。

先づ假定(1)に就ては桁、版等の應力計算は殆んど總て此假定の下に行はれ、少くとも我々が彈性體と考へ得る範圍にては實用上差支へ無き事は周知の事實であり又 Kármán氏等の研究によるも少くとも桁に就ては彈性體なる假定の下に正確なる計算を行ひし結果と、普通我々の用ふる此假定の下に行ひし計算の結果との差異は餘り著しからざるを以て、今日に於ては實用上の目的には(1)の假定は妥當なりと信ずる。(2)の假定に就ては今極めて概略的に考ふるに地盤の表面の垂直變位と、版の撓度即ち中立軸の垂直變位との差は地盤表面と中立軸との間に介在する版の部分の垂直の方向の壓縮量と考へ得る、然るに版の彈性係数は地盤よりも著しく大に又版の厚さは一般に小なるを以て上記の部分の壓縮量は無視し得る程度と見做して差支へない。

是等の假定より求めたる近似計算法も決して簡單と云ふを得ざるも、地盤の反力、版の應力等を示す定積分は多く既知の函數にて示され數表を用ひ容易に計算を行ひ得る、式中二、三數値積分を必要とする項が含まるゝもそれ等の計算は非常に簡單にて I. に於ける數値積分に比すれば殆んど問題とするに足りない。かく本文の近似計算法は I. の正確なる方法に比較すれば著しく簡單なるも一般の複雑なる限界條件を有する實在問題に適用する事は至難である。然し後節に示す如く此近似計算の結果は少くとも比較したる範圍に於ては正確なる計算より求めたる結果と極めてよく一致し、實用上正確なる計算の代用とする事を得る。

今版に作用する垂直荷重が x に關して對稱なる場合に就て計算法を簡單に述べる。

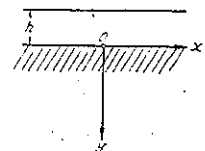
第八圖に示す如く直角座標を用ひ原點を地盤面上に採り、水平の方向に x 軸、鉛直下向に y 軸をとる。

記 號

- M : 彎曲力率
 S : 剪 力
 v_0 : 地盤表面の垂直變位
 w : 床版の撓度
 I : 床版の單位幅の慣性力率

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{6E_2}{(1-\sigma_2^2)E_1}} = 2a_1$$

第 八 圖



地盤表面の垂直變位 v_0 、地盤の版に及ぼす反力 q を求めんが爲に半無限彈性體に適用する解を用ふ。此場合版は地盤面上を自由に滑動し得るを以て應剪力 \widehat{xy} は境界面にては零である、從てかゝる限界條件を満足せしめる時

v_0, q は次式の如し,

$$\left. \begin{aligned} v_0 &= -\frac{2(1-\sigma_s^2)}{E_2} \int_0^\infty \frac{A \cos kx}{k} dk \\ q &= -(\widehat{yy})_{y=0} = -\int_0^\infty A \cos kx dk \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

w を版の撓度とする時は假定(2)式より $w=v_0$ である。且つ假定(1)式より版に beam theory が適用出来る故に w, q 及荷重 p の間には次に示す関係あり。

$$E_1 I \frac{d^4 w}{dx^4} = p - q \dots\dots\dots (7)$$

更に版に作用する彎曲力率, 剪力, 縁維應力は夫々次式の如し。

$$\left. \begin{aligned} M &= -E_1 I \frac{d^2 w}{dx^2} \\ S &= \frac{dM}{dx} \\ f &= \frac{6}{h^2} M \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

荷重 p をフーリエの積分にて示し, (7)式に(6)式及 p の値を代入する時は常數 A の値を求める事が出来, 此の A の値を(6)式, (8)式に代入する時は夫々次の如し。

$$\left. \begin{aligned} w &= \frac{2A}{\pi} \frac{1}{E_1} \int_0^\infty \frac{\cos kx}{k(kh^2 + \alpha^2)} \Gamma(k) dk \\ q &= \frac{2\alpha^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos kx}{kh^2 + \alpha^2} \Gamma(k) dk \\ M &= \frac{2}{\pi} h^3 \int_0^\infty \frac{k \cos kx}{kh^2 + \alpha^2} \Gamma(k) dk \\ S &= -\frac{2}{\pi} h^3 \int_0^\infty \frac{k^2 \sin kx}{kh^2 + \alpha^2} \Gamma(k) dk \\ f &= \frac{12}{\pi} h \int_0^\infty \frac{k \cos kx}{kh^2 + \alpha^2} \Gamma(k) dk \\ \text{茲に} \quad \Gamma(k) &= \int_0^\infty p(\eta) \cos k\eta d\eta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

垂直荷重 $p(\eta)$ が既知なる時は(9)式より夫々の値を計算し得るも本文に於ては **I**, と同様に **A, B, C** 3 荷重に就て計算を行つた。以下 **A**-荷重, **B**-荷重, **C**-荷重に對して夫々 suffix a, b, c を附する。今 **A, B, C** 3 荷重に對する $\Gamma(k)$ を計算する。

$$\Gamma_a(k) = \frac{P}{2}, \quad \Gamma_b(k) = p_0 \frac{\sin ka}{k}, \quad \Gamma_c(k) = \frac{2p_0}{a k^2} (1 - \cos ka) \dots\dots\dots (10)$$

地盤の反力, 版の應力を求むる計算の便宜上必要なる積分を豫め計算すれば次の如し。

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(a_1 z) &= \int_0^\infty \frac{1}{\eta + 2a_1} \sin z\eta d\eta = \cos 2a_1 z \operatorname{Si} 2a_1 z - \sin 2a_1 z \operatorname{Ci} 2a_1 z \\ \psi_1(a_1 z) &= \int_0^\infty \frac{1}{\eta + 2a_1} \cos z\eta d\eta = \cos 2a_1 z \operatorname{Ci} 2a_1 z + \sin 2a_1 z \operatorname{Si} 2a_1 z \\ \varphi_2(a_1 z) &= \int_{a_1}^\infty \frac{\eta - a_1}{(\eta - a_1)^2 + 3a_1^2} \sin z\eta d\eta = \frac{\pi}{2} e^{-\sqrt{3}a_1 z} \cos za_1 \\ &\quad - \frac{1}{2} \sin a_1 z \left\{ e^{-\sqrt{3}a_1 z} \operatorname{Ei}(\sqrt{3} a_1 z) + e^{\sqrt{3}a_1 z} \operatorname{Ei}(-\sqrt{3} a_1 z) \right\} \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(a_1 z) &= \int_{a_1}^{\infty} \frac{\eta - a_1}{(\eta - a_1)^2 + 3a_1^2} \cos z\eta d\eta = -\frac{\pi}{2} e^{-\sqrt{3}a_1 z} \sin za_1 \\ &\quad - \frac{1}{2} \cos a_1 z \left\{ e^{-\sqrt{3}a_1 z} \text{Ei}(\sqrt{3} a_1 z) + e^{\sqrt{3}a_1 z} \text{Ei}(-\sqrt{3} a_1 z) \right\} \\ \varphi_3(a_1 z) &= \int_{a_1}^{\infty} \frac{\sqrt{3} a_1}{(\eta - a_1)^2 + 3a_1^2} \sin z\eta d\eta = \frac{\pi}{2} e^{-\sqrt{3}a_1 z} \sin za_1 \\ &\quad + \frac{1}{2} \cos a_1 z \left\{ e^{-\sqrt{3}a_1 z} \text{Ei}(\sqrt{3} a_1 z) - e^{\sqrt{3}a_1 z} \text{Ei}(-\sqrt{3} a_1 z) \right\} \\ \psi_2(a_1 z) &= \int_{a_1}^{\infty} \frac{\sqrt{3} a_1}{(\eta - a_1)^2 + 3a_1^2} \cos z\eta d\eta = \frac{\pi}{2} e^{-\sqrt{3}a_1 z} \cos za_1 \\ &\quad - \frac{1}{2} \sin a_1 z \left\{ e^{-\sqrt{3}a_1 z} \text{Ei}(\sqrt{3} a_1 z) - e^{\sqrt{3}a_1 z} \text{Ei}(-\sqrt{3} a_1 z) \right\} \end{aligned} \quad \dots(11)$$

茲に $\text{Si}x = \int_x^{\infty} \frac{\sin u}{u} du, \quad \text{Ci}x = \int_x^{\infty} \frac{\cos u}{u} du, \quad \text{Ei}x = \int_{-\infty}^x \frac{e^{-u}}{u} du$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\sin b\eta \cos z\eta}{\eta} d\eta &= \frac{\pi}{2} && \text{if } b > z \\ \text{''} &= \frac{\pi}{4} && \text{if } b = z \\ \text{''} &= 0 && \text{if } b < z \\ \int_0^{\infty} \frac{(1 - \cos b\eta)}{\eta^2} \cos z\eta d\eta &= \frac{\pi}{2}(b - z) && \text{if } b > z \\ \text{''} &= 0 && \text{if } b < z \\ \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos b\eta}{\eta} \cos z\eta d\eta &= \frac{1}{2} \log \frac{b^2 - z^2}{z^2} && \text{if } b > z \\ \text{''} &= \frac{1}{2} \log \frac{z^2 - b^2}{z^2} && \text{if } b < z \end{aligned}$$

b, z は總て正とす。

4. 地盤の反力の計算

地盤の反力 q は (10) 式の $I(b)$ を (9) 式に代入し (11) 式に示す積分を用ひて容易に求め得らる Δ を以て本文にては單にその結果を示すに止む。

$$\begin{aligned} q_u &= \frac{P}{\pi h} \frac{2}{3} a_1 \left\{ \psi_1(a_1 z) - \psi_2(a_1 z) + \sqrt{3} \psi_3(a_1 z) + \int_0^1 \frac{4 - \eta}{(\eta - 1)^2 + 3} \cos a_1 z \eta d\eta \right\} \\ q_b &= p_0 \left[1 - \frac{1}{3\pi} \varphi_1 \{ a_1 b(1 + \xi) \} - \frac{1}{3\pi} \varphi_1 \{ a_1 b(1 - \xi) \} - \frac{2}{3\pi} \varphi_2 \{ a_1 b(1 + \xi) \} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{3\pi} \varphi_2 \{ a_1 b(1 - \xi) \} - \frac{2}{3\pi} \int_0^1 \frac{(\eta - 1)}{(\eta - 1)^2 + 3} \left\{ \sin a_1 b(1 + \xi)\eta + \sin a_1 b(1 - \xi)\eta \right\} d\eta \right] \quad |\xi| < 1 \\ &= \frac{p_0}{3\pi} \left[\varphi_1 \{ a_1 b(\xi - 1) \} - \varphi_1 \{ a_1 b(1 + \xi) \} + 2\varphi_2 \{ a_1 b(\xi - 1) \} - 2\varphi_2 \{ a_1 b(1 + \xi) \} \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 \frac{2(\eta - 1)}{(\eta - 1)^2 + 3} \left\{ \sin a_1 b(\xi - 1)\eta - \sin a_1 b(1 + \xi)\eta \right\} d\eta \right] \quad |\xi| > 1 \\ q_c &= \frac{4p_0}{\pi} \frac{1}{a_1 b} \left[\frac{\pi}{2} a_1 b(1 - \xi) + \frac{1}{6} \psi_1(a_1 b \xi) - \frac{1}{6} \psi_1(a_1 b \xi) - \frac{\sqrt{3}}{6} \psi_3(a_1 b \xi) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{12} \psi_1 \{ a_1 b(1 + \xi) \} - \frac{1}{12} \psi_1 \{ a_1 b(1 - \xi) \} + \frac{1}{12} \psi_2 \{ a_1 b(1 + \xi) \} + \frac{1}{12} \psi_2 \{ a_1 b(1 - \xi) \} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sqrt{3}}{12} \psi_3 \{ a_1 b(1 + \xi) \} + \frac{\sqrt{3}}{12} \psi_3 \{ a_1 b(1 - \xi) \} - \frac{1}{6} \int_0^1 \frac{\eta + 2}{(\eta - 1)^2 + 3} (1 - \cos a_1 b \eta) \cos a_1 b \xi \eta d\eta \right] \end{aligned} \quad (12)$$

$|\xi| < 1$

$$= \frac{4p_0}{\pi} \frac{1}{a_1 b} \left[\frac{1}{6} \psi_1(a_1 b \xi) - \frac{1}{6} \psi_2(a_1 b \xi) - \frac{\sqrt{3}}{6} \psi_3(a_1 b \xi) \right. \\ \left. - \frac{1}{12} \psi_1\{a_1 b(1+\xi)\} - \frac{1}{12} \psi_1\{a_1 b(\xi-1)\} + \frac{1}{12} \psi_2\{a_1 b(1+\xi)\} + \frac{1}{12} \psi_2\{a_1 b(\xi-1)\} \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{3}}{12} \psi_3\{a_1 b(1+\xi)\} + \frac{\sqrt{3}}{12} \psi_3\{a_1 b(\xi-1)\} - \frac{1}{6} \int_0^1 \frac{\eta+3}{(\eta-1)^2+3} (1-\cos a_1 b \eta) \cos a_1 b \xi \eta d\eta \right] \quad |\xi| > 1$$

茲に $\xi = \frac{x}{a}, \quad z = \frac{x}{h}, \quad b = \frac{a}{h}$

今 q_a の $\frac{P}{\pi h} \frac{2}{3} a_1$ の係数を C_a' , q_1, q_2 の p_0 の係数を夫々 C_b', C_c' にて示す時(12)式に示す如く C_a' は $a_1 z$ の函数として, C_b', C_c' は $a_1 b$ 及び z の函数として示さる。従て C_a', C_b', C_c' は $a_1 z, a_1 b$ を變數として計算すれば充分にて a_1 の一つの値に對して計算する時は他の a_1 の値に對しても z 又は b を適當に變化して容易に係數の値を求め得るを以て計算は非常に簡單となる。而して $a_1 z$ に就て見るに $a_1 = \frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{6E_2}{(1-\sigma_2^2)E_1}}$ にて版と地盤との力學的性質を示し, $z = x/h$ にて版の厚さに對する反力又は縁維應力を求むる點の相對的位置を示し a_1 の小なる事と z の小なる事とは反力又は縁維應力に等しき影響を及ぼす。 $a_1 b$ に就ても $\xi = x/a$ が一定なる時に $a_1 z$ と全く同様の關係が a_1, b との間が存在する。本節に於ては $a_1 = 0.2$ にとりて計算を行へり。

C_a' の値は第二表, 第九圖に示す。

第二表 C_a' の値 $\left[q_a = \frac{P}{\pi h} \frac{2}{3} a_1 C_a' \right]$

$a_1 z$	0	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.6
C_a'	3.627	3.479	3.184	2.489	1.796	1.230	0.794	0.488	0.114

(12)式より C_a' は $a_1 z$ が等しき場合は相等しきを以て原點の地盤の反力は版の厚さに逆比例し, a_1 又は $\sigma_2 = 0$ とすれば E_2/E_1 の立方根に比例する。換言すれば版の厚さ薄き程地盤の彈性係數大なる程又は版の彈性係數小なる程 q_a は大となる。

計算例

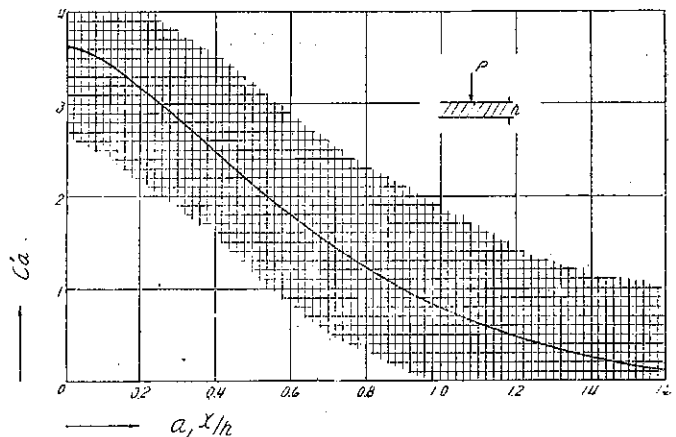
- (a) $E_1 = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2, \quad \sigma_2 = 0,$
- $E_2 = 10^3 \text{ kg/cm}^2, \quad P = 100 \text{ kg},$
- $h = 10 \text{ cm}$

$x = 0, 10 \text{ cm}, 20 \text{ cm}, 50 \text{ cm}, 100 \text{ cm}$ に

於ける地盤反力を求める。先づ a_1 を計算するに $a_1 = 0.07211, \quad \therefore z = 0, 1, 2, 5, 10$ なるを以て $a_1 z = 0, 0.072, 0.144, 0.361, 0.721$ となり第九圖より C_a' の値を求め(12)式より地盤反力 q_a を見出せば次の如し。

$x \text{ (cm)}$	0	10	20	50	100
$q_a \text{ (kg/cm}^2\text{)}$	0.555	0.540	0.514	0.397	0.220

第九圖 C_a' の値 $\left[q_a = \frac{P}{\pi h} \frac{2}{3} a_1 C_a' \right]$



(b) $E_1=10^9\text{kg/cm}^2$, $E_2=10^9\text{kg/cm}^2$, $\sigma_2=0$, $P=100\text{kg}$, $h=20\text{cm}$

$x=0, 10\text{cm}, 20\text{cm}, 50\text{cm}$ に於ける地盤反力を求めるに (a) と同様に $a_1=0.42172$, β かつ $z=0, 0.5, 1.0, 2.5$ なるを以て $a_1z=0, 0.211, 0.422, 1.054$, 従て第九圖より C_u' を求め(12)式より q_u を見出せば次の如し。

x (cm)	0	10	20	50
q_u (kg/cm ²)	1.624	1.406	1.067	0.322

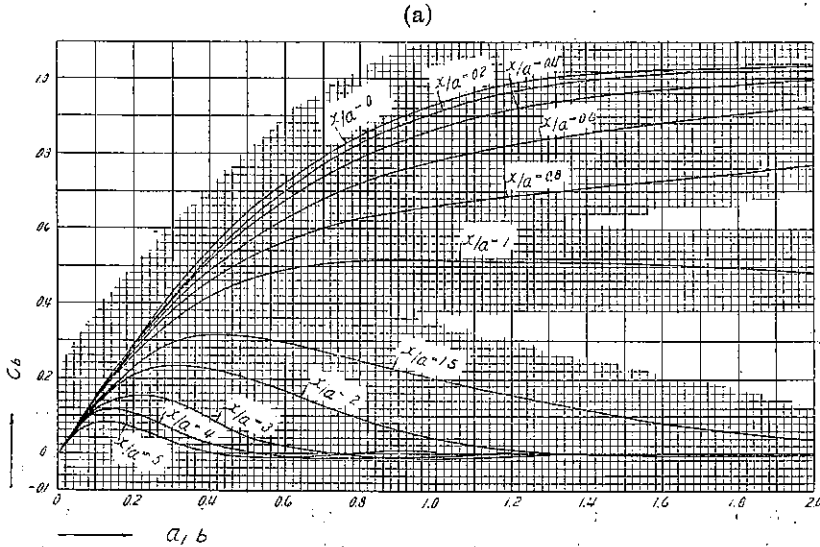
上記 (a), (b) の二例を比較するに (b) は版の厚さ (a) の 3 倍なるに拘らず地盤の反力は却つて (a) の約 3 倍となる。

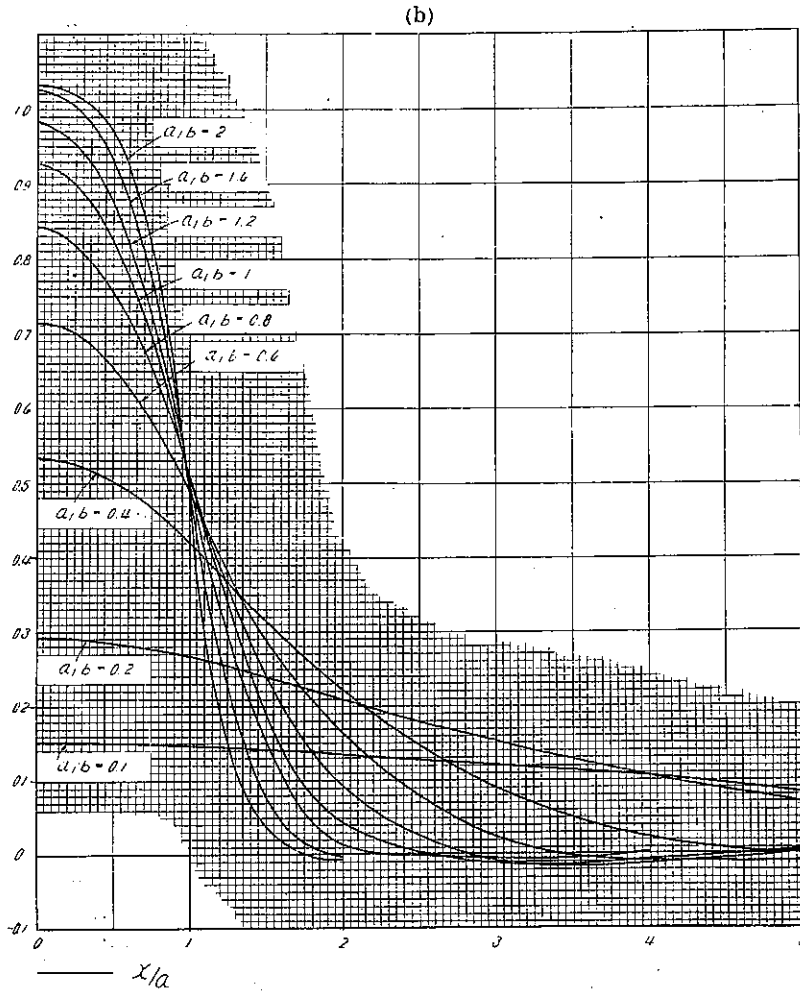
C' は a_1b , $\xi b=x/a$ の函数なるを以て C_b' と同様に $a_1=0.2$ にとり $\xi=0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1, 2, 3, 4, 5$ の場合に就て計算し第三表, 第十圖に示せり。圖中 (a) は a_1b を變數とし (b) は ξ を變數とする場合の C_b' の値を示す。

第三表 C_b' の値 [$q_u=p_0C_b'$]

$\xi \cdot a/b$	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.6	2.0
0	0.1516	0.2976	0.5337	0.7143	0.8420	0.9270	0.9840	1.0253	1.0326
0.2	0.1513	0.2916	0.5206	0.7069	0.8280	0.9106	0.9634	1.0137	1.0253
0.4	0.1507	0.2887	0.5140	0.6763	0.7872	0.8620	0.9155	0.9707	0.9975
0.6	0.1495	0.2834	0.4903	0.6294	0.7200	0.7794	0.8224	0.8679	0.9266
0.8	0.1481	0.2760	0.4617	0.5663	0.6261	0.6620	0.6877	0.7299	0.7692
1.0	0.1463	0.2669	0.4211	0.4922	0.5190	0.5163	0.5115	0.5061	0.4810
1.5	0.1400	0.2393	0.3171	0.2914	0.2465	0.1906	0.1571	0.0809	0.0370
2.0	0.1344	0.2105	0.2235	0.1666	0.0919	0.0428	0.0126	-0.0047	-0.0072
3.0	0.1203	0.1540	0.0924	0.0223	-0.0068	-0.0117	-0.0043	—	—
4.0	0.1049	0.1066	0.0231	-0.0095	-0.0109	-0.0058	+0.0043	—	—
5.0	0.0826	0.0695	0.0005	-0.0097	0.0020	0.0055	—	—	—

第十圖 C_b' の値 [$q_u=p_0C_b'$]





計算例

(a) $E_1=2 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2, E_2=10^3 \text{ kg/cm}^2, \sigma_2=0, p_0=10 \text{ kg/cm}^2, a=20\text{cm}, h=10\text{cm}$

$x=0, 4\text{cm}, 12\text{cm}, 20\text{cm}, 40\text{cm}, 100\text{cm}$ に於ける地盤反力を求める。 $\alpha_1=0.1554$ 而して $b=a/h=2$ なるを以て $\alpha_1 b=0.3108$ となり、第十圖 (a) にて $x/a=0, 0.2, 0.6, 1, 2, 5$ の曲線より上記の $\alpha_1 b$ に相當する C_b' の値を求め(12)式より地盤反力 q_b を見出せば次の如し。

$x(\text{cm})$	0	4	12	20	40	100
$q_b (\text{kg/cm}^2)$	4.40	4.27	4.04	3.62	2.32	0.28

(b) $E_1=2 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2, E_2=10^3 \text{ kg/cm}^2, \sigma_2=0, p_0=10\text{kg/cm}^2, h=10\text{cm}$

$a=10\text{cm}, 20\text{cm}, 50\text{cm}, 100\text{cm}$ に相當する $x=0, x=a$ なる點に於ける地盤反力を求める。 $\alpha_1=0.07211$ なるを以て $a=10\text{cm}, 20\text{cm}, 50\text{cm}, 100\text{cm}$ に対して $b=1, 2, 5, 10$ 従て $\alpha_1 b=0.072, 0.144, 0.361, 0.721$ となり第十圖 (a)より $\xi=0, \xi=1$ の曲線の是等の $\alpha_1 b$ に相當する C_b' を求め(12)式より q_b を計算すれば次の如し。

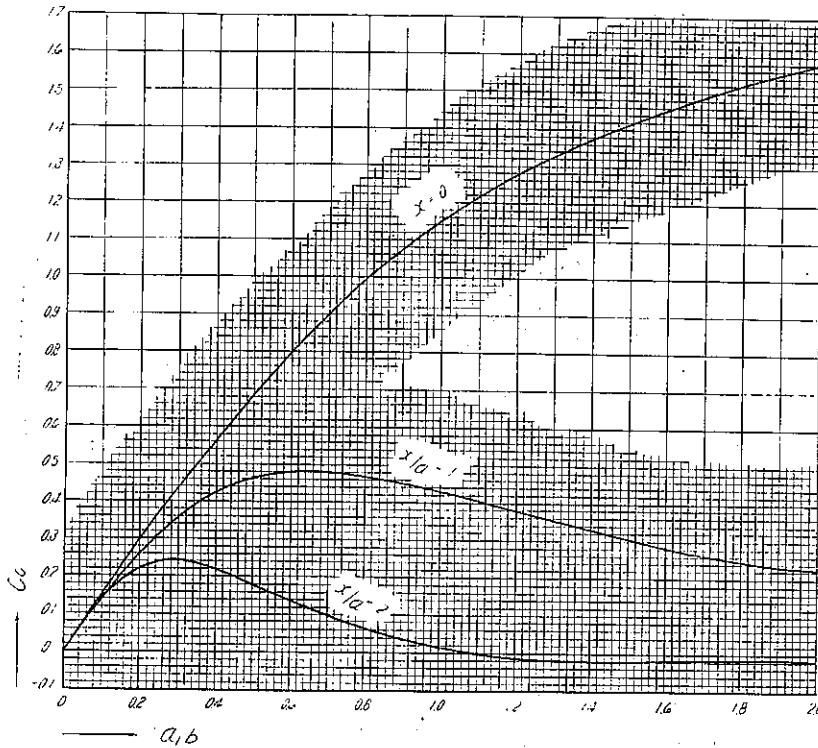
a (cm)		10	20	50	100
q_0 (kg/cm ²)	$x=0$	1.08	2.16	5.01	7.98
	$x=a$	1.00	1.98	3.98	5.08

C_c' の値は $\xi=0, 1, 2, 5$ に就て計算し第四表, 第十一圖に示す。

第四表 C_c' の値 [$q_c=p_0C_c'$]

ξ a, b	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.6	2.0
0	0.1520	0.3000	0.5631	0.7977	0.9990	1.1490	1.2767	1.4396	1.5804
1	0.1390	0.2652	0.4267	0.4790	0.4698	0.4344	0.3834	0.2860	0.2246
2	0.1388	0.2204	0.2170	0.1349	0.0659	0.0168	-0.0082	-0.0172	-0.0133
5	0.0783	0.0647	-0.0027	-0.0079	-0.0037	-0.0010	—	—	—

第十一圖 C_c' の値 [$q_c=p_0C_c'$]



5. 版の應力の計算

版に生ずる應力中最も重要な下端に作用する縁維應力 f は(10)式の $Y(z)$ を(9)式に代入し(11)式の積分を用ひて容易に求め得られ本文にては單にその結果を示すに止む。

$$f_a = \frac{P}{\pi h} \frac{1}{a_1} \left\{ -\psi_1(a_1 z) + \psi_2(a_1 z) + \sqrt{3} \psi_3(a_1 z) + \int_0^1 \frac{\eta+2}{(\eta-1)^2+3} \cos a_1 z \eta d\eta \right\}$$

$$f_b = \frac{p_0}{2\pi} \frac{1}{a_1^2} \left\{ \varphi_1 \{ a_1 b(1+\xi) \} + \varphi_1 \{ a_1 b(1-\xi) \} - \varphi_2 \{ a_1 b(1+\xi) \} - \varphi_2 \{ a_1 b(1-\xi) \} + \sqrt{3} \varphi_3 \{ a_1 b(1+\xi) \} \right.$$

$$\left. + \sqrt{3} \varphi_3 \{ a_1 b(1-\xi) \} - \int_0^1 \frac{\eta-4}{(\eta-1)^2+3} \{ \sin a_1 b(1+\xi) \eta + \sin a_1 b(1-\xi) \eta \} d\eta \right\} \quad |\xi| < 1$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{p_0}{2\pi} \frac{1}{a_1^2} \left[\varphi_1 \{a_1 b(1+\xi)\} - \varphi_1 \{a_1 b(\xi-1)\} - \varphi_2 \{a_1 b(1+\xi)\} + \varphi_2 \{a_1 b(\xi-1)\} + \sqrt{3} \varphi_3 \{a_1 b(1+\xi)\} \right. \\
 &\quad \left. - \sqrt{3} \varphi_3 \{a_1 b(\xi-1)\} - \int_0^1 \frac{\eta-4}{(\eta-1)^2+3} \{ \sin a_1 b(1+\xi)\eta - \sin a_1 b(\xi-1)\eta \} d\eta \right] \quad |\xi| > 1 \quad (13) \\
 f_c &= \frac{3}{\pi} \frac{p_0}{a_1^2} \frac{1}{a_1 b} \left[\frac{1}{2} \log \frac{1-\xi^2}{\xi^2} - \frac{1}{3} \psi_1(a_1 b \xi) + \frac{1}{6} \psi_1 \{a_1 b(1+\xi)\} + \frac{1}{6} \psi_1 \{a_1 b(1-\xi)\} - \frac{2}{3} \psi_2(a_1 b \xi) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{3} \psi_2 \{a_1 b(1+\xi)\} + \frac{1}{3} \psi_2 \{a_1 b(1-\xi)\} - \frac{2}{3} \int_0^1 \frac{\eta-1}{(\eta-1)^2+3} (1 - \cos a_1 b \eta) \cos a_1 b \xi \eta d\eta \right] \quad |\xi| < 1 \\
 &= \frac{3}{\pi} \frac{p_0}{a_1^2} \frac{1}{a_1 b} \left[\frac{1}{2} \log \frac{\xi^2-1}{\xi^2} - \frac{1}{3} \psi_1(a_1 b \xi) + \frac{1}{6} \{a_1 b(1+\xi)\} + \frac{1}{6} \psi_1 \{a_1 b(\xi-1)\} - \frac{2}{3} \psi_2(a_1 b \xi) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{3} \psi_2 \{a_1 b(1+\xi)\} + \frac{1}{3} \psi_2 \{a_1 b(\xi-1)\} - \frac{2}{3} \int_0^1 \frac{\eta-1}{(\eta-1)^2+3} (1 - \cos a_1 b \eta) \cos a_1 b \xi \eta d\eta \right] \quad |\xi| > 1
 \end{aligned}$$

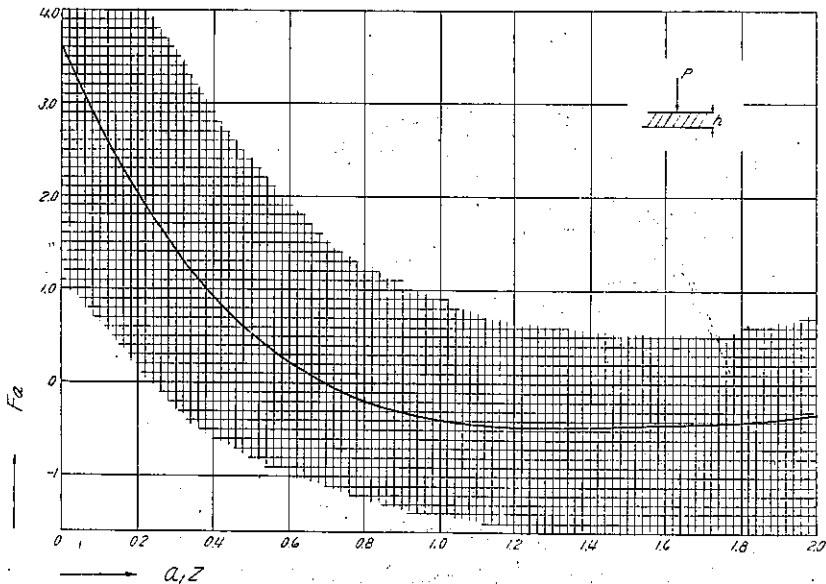
今 f_a の $P/\pi h a_1$ の係数を F_a' , f_b , f_c の $p_0/\pi a_1^2$ の係数を F_b' , F_c' にて示す時は F_a' は $a_1 z$ のみの函数として F_b' , F_c' は $a_1 b$, ξ の函数として示され、地盤反力の係数に就て述べたと全く同じ関係が成立し a_1 の一つの値に就て計算すれば足る。

F_a' の値は第五表、第十二圖に示す。

第五表 F_a' の値 $\left[f_a = \frac{P}{\pi h} \frac{1}{a_1} F_a' \right]$

$a_1 z$	0	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.6	2.0
F_a'	3.627	2.753	2.025	0.919	0.228	-0.181	-0.333	-0.463	-0.447	-0.327

第十二圖 F_a' の値 $\left[f_a = \frac{P}{\pi h} \frac{1}{a_1} F_a' \right]$



(13)式より F_a' は $a_1 z$ が等しき場合は相等しきを以て原點に於ける縦維應力は版の厚さ並に a_1 又は $[E_2/E_1 (\sigma_2=0 \text{ なる場合})]$ の立方根に逆比例する、即ち版の厚さ薄き程、地盤の弾性係数小なる程又は版の弾性係数大なる程 f_a は大となる。

計算例 (q_a と全く同じ場合に就て計算する)

(a) $E_1=2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2, E_2=10^2 \text{ kg/cm}^2, \sigma_2=0, P=100\text{kg}, h=10\text{cm}$

先に求めし如く $x=0, 10\text{cm}, 20\text{cm}, 50\text{cm}, 100\text{cm}$ に相當する $\alpha_1 z$ は夫々 0.072, 0.144, 0.361, 0.721 なるを以て第十二圖より F_a' を求め(13)式より f_a は次の如し。

$x(\text{cm})$	0	10	20	50	100
$f_a(\text{kg/cm}^2)$	160.1	131.7	105.4	47.5	-2.5

(b) $E_1=10^8 \text{ kg/cm}^2, E_2=10^2 \text{ kg/cm}^2, \sigma_2=0, P=100\text{kg}, h=20\text{cm}$

此場合 $\alpha_1 z=0, 0.211, 0.422, 1.054$ 。従て第十二圖より F_a' を求め(13)式より f_a は次の如し。

$x(\text{cm})$	0	10	20	50
$f_a(\text{kg/cm}^2)$	27.4	14.7	6.2	-3.1

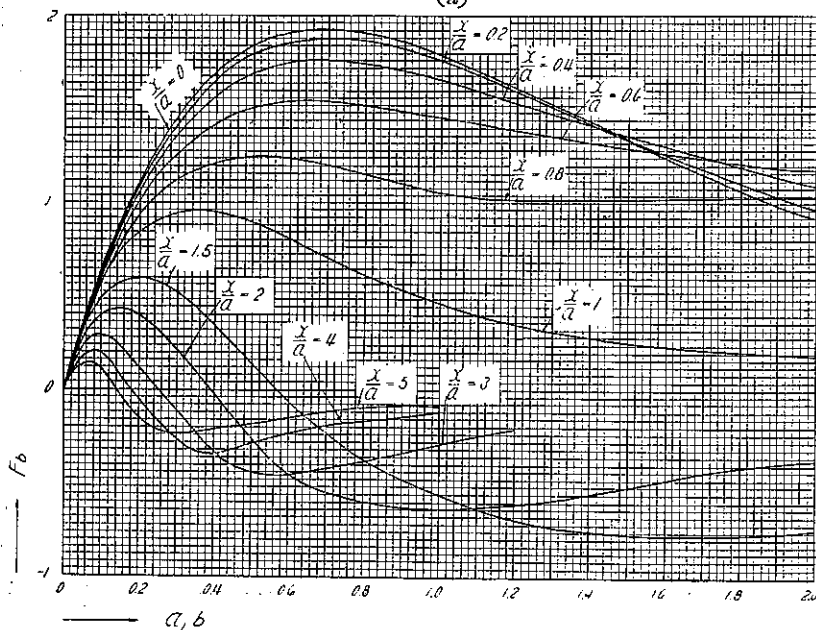
(a), (b) を比較するに (b) に於て $h=10\text{cm}$ とすれば (13) 式に示す如く $(f_a)_{x=0}=54.8$ となり (a) の約 1/3 倍となり地盤反力と反對の結果を示す。

F_b' は $\xi=0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 1.5, 2, 3, 4, 5$ に就て計算し第六表, 第十三圖に示す。

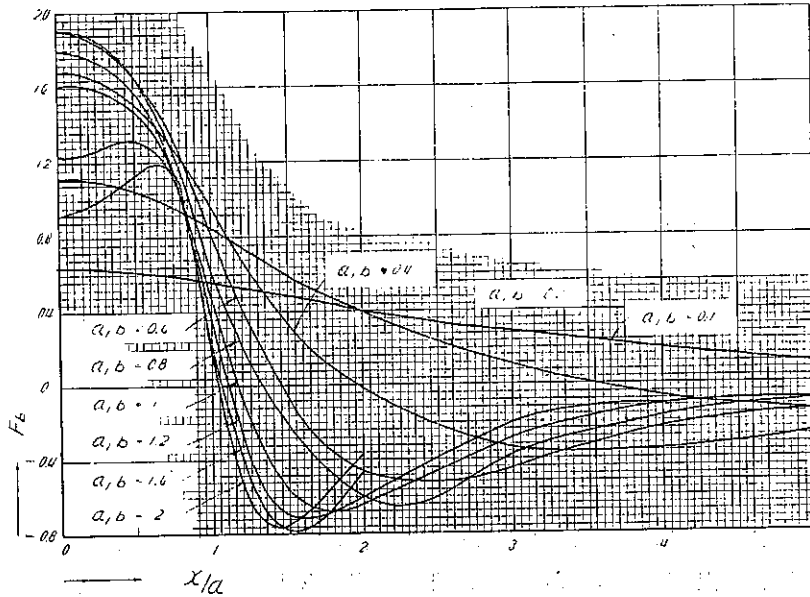
第六表 F_b' の値 $[f_b = \frac{p_0}{\pi \alpha_1^2} F_b']$

ξ	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.6	2.0
0	0.6428	1.1095	1.6874	1.9076	1.9096	1.7895	1.6152	1.2342	0.9262
0.2	0.6333	1.1009	1.6393	1.8589	1.8711	1.7620	1.6002	1.2570	0.9770
0.4	0.6230	1.0698	1.5743	1.7496	1.7482	1.6637	1.5307	1.3032	1.0914
0.6	0.6072	1.0162	1.4305	1.5414	1.5228	1.4608	1.3931	1.2811	1.1836
0.8	0.5843	0.9409	1.2117	1.2335	1.1597	1.0475	1.0247	1.0283	1.0516
1.0	0.5547	0.8437	0.9344	0.8076	0.6171	0.4631	0.3349	0.2387	0.1811
1.5	0.4837	0.5951	0.3400	-0.0628	-0.3808	-0.5563	-0.6945	-0.7733	-0.7406
2.0	0.4083	0.3991	-0.0363	-0.4615	-0.5994	-0.6354	-0.5996	-0.4672	-0.3675
3.0	0.2689	0.1107	-0.3373	-0.4577	-0.3783	-0.2820	-0.2050	—	—
4.0	0.1908	-0.0391	-0.3445	-0.2379	-0.1739	-0.1102	-0.1123	—	—
5.0	0.1101	-0.1468	-0.2622	-0.1470	-0.0889	-0.0834	—	—	—

第十三圖 F_b' の値 $[f_b = \frac{p_0}{\pi \alpha_1^2} F_b']$



(b)



計算例 (q_b と同様の場合に就て行ふ)

(a) $E_1 = 2 \times 10^8 \text{ kg/cm}^2$, $E_2 = 10^8 \text{ kg/cm}^2$, $\sigma_2 = 0$, $p_0 = 10 \text{ kg/cm}^2$, $a = 20 \text{ cm}$, $h = 10 \text{ cm}$

$a_1 b = 0.3108$ となり、第十三圖(a)より F_b' の値を求め(13)式より f_b は次の如し。

$x(\text{cm})$	0	4	12	20	40	100
$f_b(\text{kg/cm}^2)$	196	189	170	125	26	-32

(b) $E_1 = 2 \times 10^8 \text{ kg/cm}^2$, $E_2 = 10^8 \text{ kg/cm}^2$, $\sigma_2 = 0$, $p_0 = 10 \text{ kg/cm}^2$, $h = 10 \text{ cm}$

$a_1 = 0.0721$ なるを以て $a_1 b = 0.072$, 0.144, 0.361, 0.721 となるを以て第十三圖より F_b' を求め f_b は次の如し。

$a(\text{cm})$		10	20	50	100
$f_b(\text{kg/cm}^2)$	$x=0$	296	530	989	1185
	$x=a$	244	444	580	417

地盤の弾性係数が小なると共に縦維應力の値の著しく増大するを知る。

F_c' の値は第七表、第十四圖に示す。

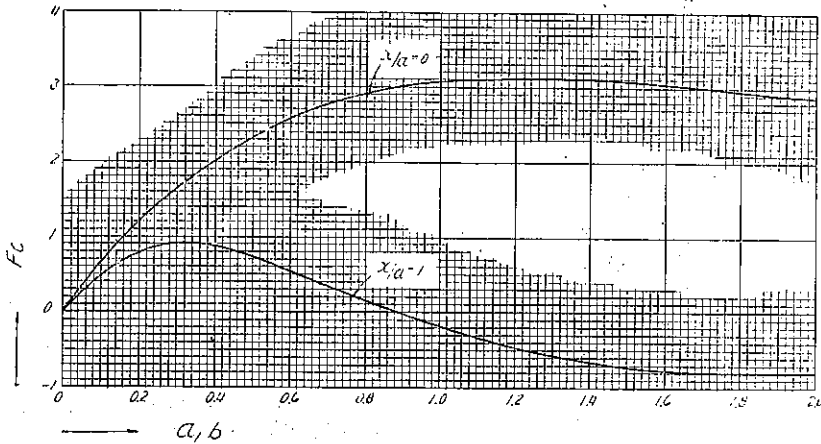
第七表 F_c' の値 $\left[f_c = \frac{p_0}{\pi a_1^2} F_c' \right]$

a/b	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.6	2	
ξ	0	1.211	2.008	2.578	2.895	3.059	3.115	3.043	2.868
	1	0.797	0.888	-0.536	0.149	-0.191	-0.455	-0.772	-0.875

6. 正確なる計算との比較

IIに求めたる近似計算が如何なる程度に信頼し得るかを知り、併せてその適用範囲を定めんが爲に正確なる

第十四圖 F_c' の値 $[f_c = \frac{p_0}{\pi a_1^2} F_c']$



計算より求めたる値と比較せんとす。前述の如く正確なる計算は充分廣き範圍に互り求め得ざりしを以て兩者の比較は勢ひ狭き範圍に制限されたる嫌はあれども比較せし以外の範圍に於ても是等の比較より大體の傾向を推定するは可能である。

版及地盤の力學的性質を示す ϵ_1 と $2a_1$ との間には次式の關係あり

$$a_1 = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{6\epsilon_1}{1-\sigma_1^2}} \dots \dots \dots (14)$$

(14)式より直ちに知る如く地盤のポアソン比には無關係である。今 a_1 が床版のポアソン比 σ_1 より受くる影響を知らんが爲に $\sigma_1=0$ の a_1 を 1 とする時 σ_1 の他の値に相當する a_1 は次の如し。

σ_1	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
a_1	1	1.000	1.013	1.032	1.060	1.100

上表より σ_1 の最大値 0.5 に於ける値は $\sigma_1=0$ の値より 10% 大なるに過ぎず、 $\sigma_1=0.1$ はその値殆んど $\sigma_1=0$ に等し、而して本文に於ける計算は $\sigma_1=0$ 、 $\sigma_1=0.3$ の二つの場合のみに限りしが正確なる計算との比較の目的には充分である。

II. に示す如く近似計算より求めたる地盤の反力、版の縁維應力はいづれも $a_1 z$ 又は $a_1 b, x/a$ の函數にて ($b=a/h, z=x/h$) 示さる、然るに正確なる計算の ϵ_1 が與へらるゝ時は(14)式より a_1 を求め得るを以て $a_1 z$ 又は $a_1 b$ を知り從て II. に求めたる諸圖表より反力又は應力の夫等に相當する係數の値を求め得る。本節にてはかくして求めたる近似計算の係數値と正確なる計算による係數値とを比較し近似の程度を確めんとす。

地盤の反力に就て兩者を比較せる結果を第十五圖(1), (2), (3), (4)に示す。

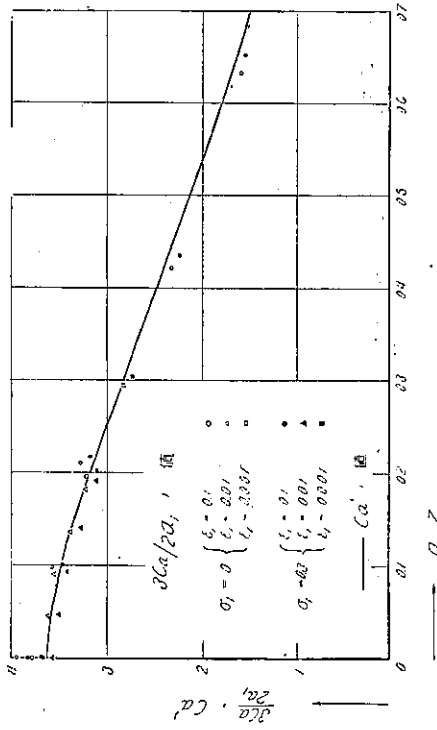
(1)圖は A-荷重, (2), (3)圖は B-荷重, C-荷重による $x=0$ なる點の反力の比較を示し, (4)圖は反力の位置による變化の有様を調べん爲に $a/h=1, a/h=0.5$ の反力分布との比較を示す。

同様に縁維應力の比較を第十六圖(1), (2), (3), (4)に示す。

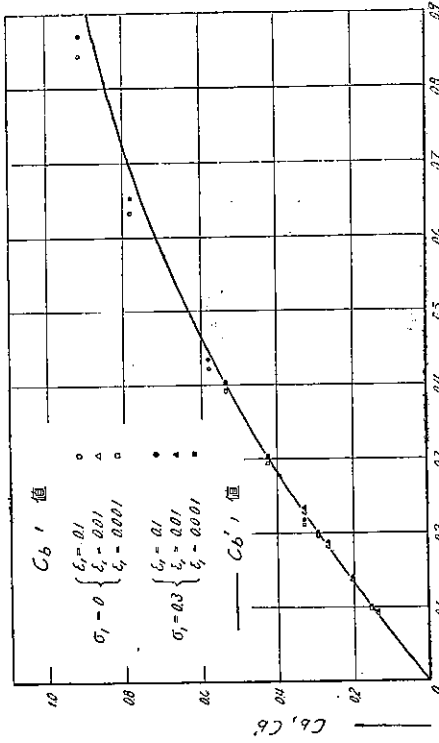
上記の諸圖より近似計算と正確なる計算との間には著しき差異なく、各場合に就て近似計算と正確なる計算との差を求めたるに f_a の一部を除き他の總て 10% 以下にて 5% を超ゆる場合は稀である。又 $\sigma_1=0$ と $\sigma_1=0.3$ との間

第十五圖

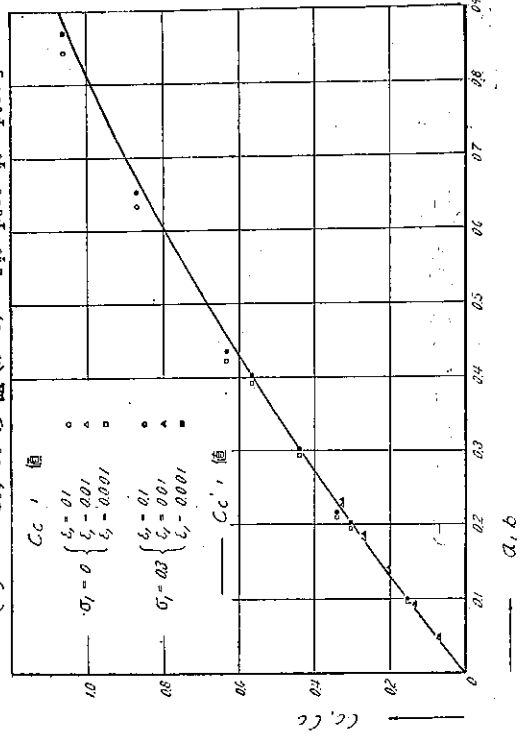
(1) $C_a, \frac{2}{3}a_1, C_a'$ の値 $[q_a = \frac{P}{\pi b} C_a, q_a' = \frac{P}{\pi b} \frac{2}{3}a_1 C_a']$



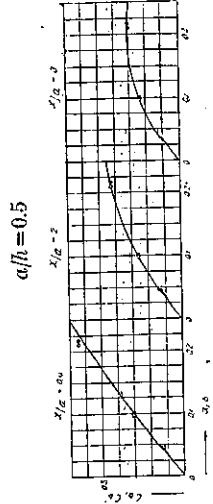
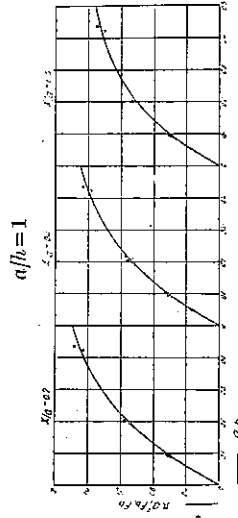
(2) C_b, C_b' の値 $(x=0) [q_b = p_0 C_b, q_b' = P_0 C_b']$



(3) C_c, C_c' の値 $(x=0) [q_c = p_0 C_c, q_c' = p_0 C_c']$

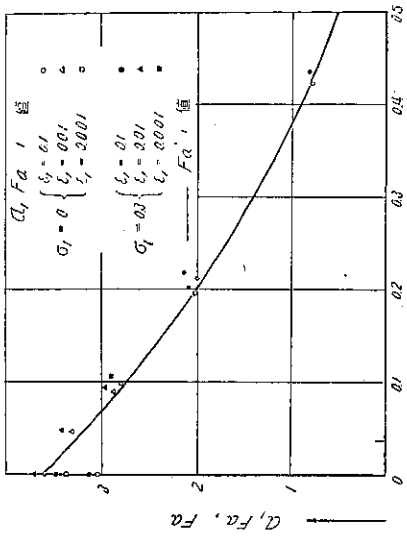


(4) C_b, C_b' の値

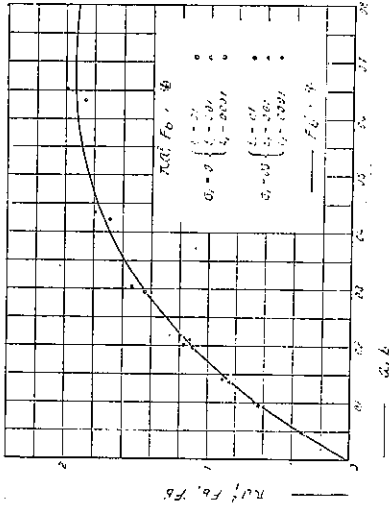


第十六圖

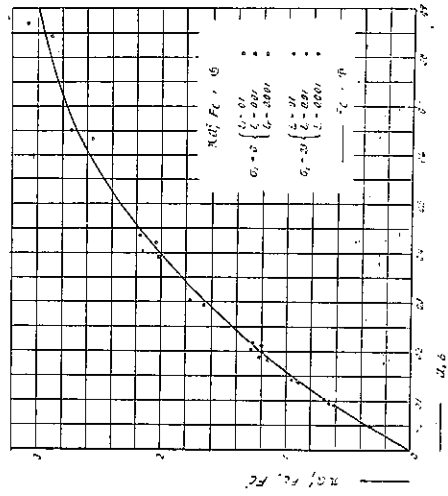
(1) $a_1 F_{c3}, F_c'$ の値 $[f_c = \frac{P}{\pi h} F_{c3}, f_c' = \frac{1}{\pi h} F_c']$



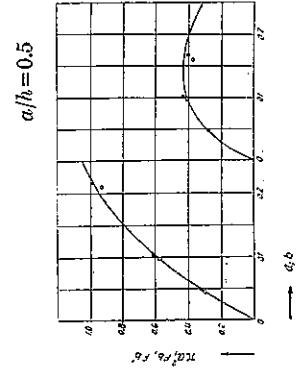
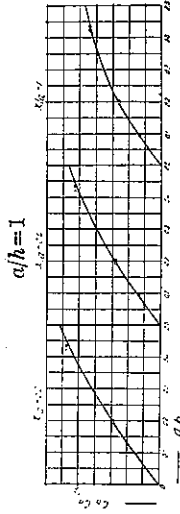
(2) $\pi a_1^2 F_b, F_b'$ の値 $(x=0) [f_b = p_0 F_b, f_b' = \frac{p_0}{\pi a_1^2} F_b']$



(3) $\pi a_1^2 F_c, F_c'$ の値 $(x=0) [f_c = p_0 F_c, f_c' = \frac{p_0}{\pi a_1^2} F_c']$



(4) $\pi a_1^2 F_b, F_b'$ の値



には殆んど差異無きが如し、従て實用上近似計算を用ひて正確なる計算の代用せしむるも差支へ無し。

7. 弾床地盤による計算との比較

緒言に於て基礎地盤の力學的性質が弾性體と相等しき場合には弾床地盤としての計算の適用し得ざる理由を述べたるが、本節に於ては前節にて計算せし二次元の然も床版が無限の擴がりを有する特別の場合に就て是等二つの計算を比較し兩者の差異を示さんとす。前節の正確なる計算と近似計算との比較により II₁ に求めし近似計算は大體 5% 以下の差異なるを以て本節に於ては近似計算による結果と弾床地盤としての計算の結果とを比較する。比較に先立ち弾床地盤上に設置せる版に垂直荷重の作用する時、版に作用する地盤の反力、版に生ずる縁維應力を求める必要あり、是等の計算は比較的簡單なるを以て單に結果のみを記するに止む。

本節にて比較せんとするは二次元の中央に集中荷重 P の作用する場合にて單位幅の版に就て計算すれば足り、従て桁と同様なる取扱ひを爲し得る。版の反力 q 、版の下端の縁維應力 f は夫々次式*の如し。

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{P}{2l} e^{-\xi} (\cos \xi + \sin \xi) \\ f &= \frac{3}{2} \frac{P e^{-\xi} (\cos \xi + \sin \xi) l}{l^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

$$\text{但し} \quad l = \sqrt[4]{\frac{Pl^3}{3C}}, \quad \xi = \frac{x}{l}$$

式中 C : 弾床係数, E_1 : 版の弾性係数, h : 版の厚さ

更に原點に於ける値を夫々 q_0, f_0 とすれば次式の如し。

$$\left. \begin{aligned} q_0 &= \frac{P}{\pi h} \frac{\pi}{2} \sqrt[4]{\frac{3Ch}{E_1}} \\ f_0 &= \frac{P}{\pi h} \frac{3\pi}{2} \sqrt[4]{\frac{E_1}{3Ch}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

近似計算による中央に集中荷重 P の作用する時の地盤反力 q_0 、床版の縁維應力 f_0 は (12)、(13) 式に示され、今原點に於ける値は次の如し。

$$\left. \begin{aligned} (q_0)_{x=0} &= \frac{P}{\pi h} \frac{4\sqrt{3}}{9} \frac{\pi}{2} \sqrt[4]{\frac{6E_2}{(1-\sigma_2^2)E_1}} \\ (f_0)_{x=0} &= \frac{P}{\pi h} \frac{4\pi}{\sqrt{3}} \sqrt[4]{\frac{(1-\sigma_2^2)E_1}{6E_2}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

(15)式、(16)式の $q_0 = (q_0)_{x=0}$ とする時は C, h, E_1 の間に次の關係あり。

$$\frac{4\sqrt{3}}{9} \sqrt[4]{\frac{6E_2}{(1-\sigma_2^2)E_1}} = \sqrt[4]{\frac{3Ch}{E_1}} \dots\dots\dots (17)$$

弾床係数 C は元來基礎地盤の力學的性質にのみ關係すると考へられしが (17) 式に示す所によれば版の厚さ h 、版の弾性係数 E_1 にも關係する事となり、力學的性質が弾性體と相等しき地盤に弾床地盤の理論をその儘適用する時は C を單に地盤の力學的性質にのみ關係するとすれば (17) 式と矛盾する事となる。若し (16) 式の $(q_0)_{x=0}$ と等しき q_0 を與ふる爲には C は地盤の力學的性質、版の厚さ、版の力學的性質、荷重分布の状態並に面積等に關係し各場合に應じて適當に調節する必要あるも如何に調節すべきかは正確なる計算による必要あり、結局その力學的性質

* P. Neményi; Tragwerke auf elastisch nachgiebiger Unterlage, Ztschr. f. angew. Math. und Mech. 1931/Dez. Bd. 11. Heft. 6. S. 451.

が弾性體と相等しき基礎地盤に彈床地盤の理論を適用するは不可能と思惟される。

又 $f_0 = (f_0)_{v=0}$ とする時は次の關係あり。

$$\frac{3\sqrt{3}}{8} \sqrt[3]{\frac{6E_2}{(1-\sigma_2^2)E_1}} = \sqrt[3]{\frac{3Ch}{E_1}} \dots\dots\dots(18)$$

(17)式の C の値を C_0 , (18)式の C の値を C_f とすれば C_0 と C_f との値は異なり $C_0/C_f \doteq 0.2$ となる。