

言 寸 言 談

第十九卷第二號 昭和八年二月

THE DERIVATION OF INFLUENCE EQUATIONS OF STATICALLY INDETERMINATE STRUCTURES.

(第十八卷第九號所載)

會 員 庄 野 卷 治

土木學會誌第十八卷第九號所載、御厨氏の影響方程式と云ふ斬新なる應力計算法は見掛よりも實質に於て簡便貴重な方法にして斯界に偉大の貢獻を爲すものと言はねばならぬ。この雄大なる論文を讀了しての感想として題目外ではあるが影響方程式の秩序的解法も亦本法の生命であるから詳説を希望すること、並に其記述が簡明に過ぎ往々肝腎の説明迄も省略されて居ますため之を消化するのに骨の折れたことを筆者は告白せねばなりません。其一例を著者の(1)式及(2)式に就て書いて見ます。

元來應力傾角等の符號は便宜都合好く合理的に約束すればよいので著者が Fig. 1. に於て m_1, m_2, M_1 及 M_2 の各符號を合理的に約束されたのは異議ありません。併し乍ら著者が(1)式及(2)式を誘導すべく引用せる

$$M_c = EI \frac{d^2y}{dx^2} = M_1 + V_1x \dots\dots\dots (a)$$

は著者の約束に當嵌まる公式でないことは説明を要する筈であります。即ち(a)式は m_1 及 m_2 を著者の Fig. 1 に於て AB 直線より夫々 counter-clockwise に測るを正號とせば、 M_1 は counter-clockwise、 M_2 は clockwise、を夫々正號と約束する時に成立する公式であります。故に著者の約束に従へば(a)式解答の結果に於て M_2 の符號を反對にする手数を要することを忘れてはならぬのである。又(a)式は EI を變數とする部材にも適用し得る一般公式であるけれども著者の(1)式及(2)式に照らす時は著者は此際特別に均一斷面、均一材質の部材即ち EI の常數なる場合を論究されて居るのであるが其事を明記してありません。又著者は $x=0$ に於ては $\frac{dy}{dx} = m_1$ 、 $x=l$ に於ては $\frac{dy}{dx} = m_2$ なるを念頭に置き(a)式を積分することに依り(1)式及(2)式を得ると書いてありますが夫れは他に條件式を與へざる限り數學上一般に不可能であります。従て單に(a)式を積分すること以外に如何なる條件を利用するかを書いて貰はぬと實際消化に困るのであります。筆者が辛じて(1)式及(2)式を消化した徑路は次の通りであります。

今 EI を常數と見て(a)式を積分せば

$$EI \frac{dy}{dx} = M_1x + \frac{1}{2} V_1x^2 + \frac{1}{2} C, \quad \text{但し } \frac{1}{2} C \text{ は積分常數}$$

故に $2EI \frac{dy}{dx} = M_1x + (M_1 + V_1x)x + C$

即ち $2EI \frac{dy}{dx} = M_1x + M_2x + C$

$x=0$ にて $\frac{dy}{dx} = m_1$ なるに依り $C = 2EI m_1$

$$x=l \text{ にて } \frac{dy}{dx}=m_2, \quad M_0=M_2 \quad \text{なる故} \quad C=2EI m_2-(M_1+M_2)l$$

$$\text{従て} \quad 2EI m_1=2EI m_2-(M_1+M_2)l$$

$$\therefore M_1+M_2=\frac{2EI}{l}(m_2-m_1)$$

茲に於て著者の符號の約束に従ひ M_2 の符號を反對にして

$$M_1-M_2=\frac{2EI}{l}(m_2-m_1) \dots \dots \dots (b)$$

を得、即ち (a) 式を積分する時は M_1, M_2, m_1, m_2 間に (b) 式の條件式が成立することは判りますが M_1 及 M_2 の各獨立値を求むるには更に他の條件式を必要とす。(b) 式の條件式のみなる時は勝手に M_1 (又は M_2) の値を指定し (b) 式を満足する様 M_2 (又は M_1) を求め得るに依り M_1 及 M_2 の値は無數に存在します。就中面白きは

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= -\frac{2EI}{l} \{ (n+1)m_1 + nm_2 + K \} \\ M_2 &= -\frac{2EI}{l} \{ (n+1)m_2 + nm_1 + K \} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (c)$$

式中 n は適意の正の整数 (零をも含む); K は m_1 及 m_2 に無關係の常數

なる一般公式が常に (b) 式の條件式を満足し著者の (1) 式及 (2) 式は之れに於て $K=0, n=1$ なる特別の場合に該當することである。されども (1) 式と (2) 式が (b) 式を満足すると云ふだけにてこの場合の眞解と見ることは出来ません。茲に於て他の條件を考へて見る。

- (i) M_1 及 M_2 は (b) 式を満足するものであらねばならぬ。
- (ii) M_1 及 M_2 は m_1 並に m_2 の linear function であらねばならぬ。
- (iii) M_1 の m_1 及 m_2 に對する配置は M_2 の m_2 及 m_1 に對する配置と同型であらねばならぬ。

以上 3 箇の條件に適合するは (c) 式以外に有り得ない。更に

- (iv) $m_1=m_2=0$ に於ては $M_1=M_2=0$ であらねばならぬ、故に $K=0$ である。

(v) 最小働の原理より推すと M_1 及 M_2 の絶對値は可及的最小であらねばならぬ。但し同時に m_1 と m_2 の函數たる性質を失ふてはならぬ。故に $n=1$ である。

即ち (c) 式に於て $K=0, n=1$ とせる (1) 式及 (2) 式は此場合の眞解であらねばならぬ。(3) 式及 (4) 式も同様の方法にて解答出来る 見込があるので夫れは鵜呑にしました。勿論著者の解法は以上の如き迂遠なものでないと信じます。貴重な新法を根本的に會得せんと思ふ讀者にして筆者同様に苦しんで居る人も多少はあらうと思ひますから其詳細を御教示願ひます。

影響方程式が著者の例示せる如く多邊形及卵形の輪並に弧桁に應用し得るならば眞に有益にして興味深きことである。筆者はこれに就て討議したいと思ふのであるが、其前に比較的詳細に書かれたる Fixed Arch の記事中華者の注目を惹きし諸點を擧げて見ます。Table 7. 末欄 θ の見出しに於て Devide eq. (3) by x とありますが x なる各區の水平長は必らずしも各部均一に 10 呎に取るを要せざるのみならず、方程式の各項を適意の一定數にて除するも方程式が成立する意味より便宜 10 にて除す。従て總ての x を 10 にて除すのであるから Divide eq. (3) by 10 とするのが合理的の様です。次に Prof. Hudson's Book から著者が引用され居る Data だけでは Table 8. を作るのに Temp. eff. の欄 ± 4752 及 Arch short の欄 $+840$ なる數字の出途が判りません。即ち

相乗じて第三表 M_i 欄の各數値を得、同様に第二表の H_i 欄の係數と同行の乘數との積は第三表 H_i 欄の數値である。 V_i 並に各荷重欄の數値も之に準じて得られます。殊に各荷重欄の數字は表の如く右傾對角線内の各行最右端の數字だけを求めば他は逐次に一欄づゝ左方に移る毎に右端の數字を累加すればよいので至極簡単に出來ます。

第二表 各彎曲率を M_i, H_i, V_i 及荷重にて表はす表

	M_i	H_i	V_i	單位荷重の作用點																
				b	c	d	e	f	g	h	i	j								
$M_1 =$	-1	-12.96	-10																	
$M_2 =$	-1	-20.58	-20	16																
$M_3 =$	-1	-25.92	-30	20	10															
$M_4 =$	-1	-28.13	-40	30	20	10														
$M_5 =$	-1	-29.00	-50	40	30	20	10													
$M_6 =$	-1	-28.03	-60	50	40	30	20	10												
$M_7 =$	-1	-25.92	-70	60	50	40	30	20	10											
$M_8 =$	-1	-20.58	-80	70	60	50	40	30	20	10										
$M_9 =$	-1	-12.96	-90	80	70	60	50	40	30	20	10									
$M_{10} =$	-1	0	-100	90	80	70	60	50	40	30	20	10								

例 荷重 P の作用點 $b, c, d, e, f, g, h, i, j$ 上の M_i, H_i, V_i の値は、
 $M_i = -1 \cdot P$ 、 $H_i = -1 \cdot P \cdot x_i$ 、 $V_i = P$ である。

第四表及第五表も之れに準ずるので別に説明を要しません。第六表は前3表にて求めたる M_i, H_i 及 V_i なる3箇の未知量を有する3箇の聯立方程式を解いて V_i, H_i 及 M_i を求め、猶必要あらば第二表を利用し適當格點の彎曲率を求むる方法を示したものである。

以上の計算に依る時は其結果に自己矛盾が現はれます。即ち此場合は言ふ迄も無く拱頂の左右對稱的位置に於ける彎曲率は左右相反する相應荷重に對し同値であらねばなりません。例へば h 點に單位荷重の作用する M_1, M_9

M_4 等は次々 h と對稱の位置 d 點に單位荷重の作用する M_{20}, M_{18}, M_{16} 等に等しからねばならぬに係はず計算の結果は違ふのである、而して拱頂の M_{10} に至り自己矛盾は消滅します。則ち第六表中の成果表に於て若しも M_i が正しきならば M_{20} は左より順次に $-1.4356, -3.6212, -4.8726, -4.6205, -3.5142, -1.1055, +1.9896$

第三表 方程式(1)より M_i 以外の彎曲率を消去する演算表

行	係數	M_i	H_i	V_i	單位荷重の作用點															
					b	c	d	e	f	g	h	i	j							
M_1	+73.32	-28.93	371.605	-182.8																
M_2	+72.15	-22.25	404.150	-215.6	127.5															
M_3	+71.04	-21.26	545.515	-242.8	423.6	214.6														
M_4	+70.39	-20.39	512.571	-215.6	611.7	407.8	203.9													
M_5	+70.08	-20.08	502.310	-189.8	805.2	602.4	401.6	203.9												
M_6	+70.39	-20.39	573.517	-122.9	1019.5	815.4	611.7	407.8	203.9											
M_7	+71.04	-21.04	532.512	-152.2	1279.6	1073.0	858.4	623.9	422.2	214.6										
M_8	+72.15	-22.15	492.710	-189.8	1622.5	1425.0	1187.5	902.0	712.5	477.1	214.6									
M_9	+73.32	-23.32	371.605	-242.8	2143.4	2025.1	1732.8	1446.5	1157.2	732.2	477.1	214.6								
M_{10}	+74.29	-14.29	0	-1622.9	1462.1	1302.2	1140.2	977.4	677.2	407.8	214.6	102.9								
右端	(i)	-241.71	-454.5328	-12096.0	9231.7	7866.7	6132.2	4221.2	3171.3	2209.1	1504.2	615.1	162.9							
左端	(ii)	-1	-30.00000	-50.00000	402.7392	325.9468	253.9732	121.9612	142.7124	94.3902	53.2732	25.9468	6.7392							

備考 (i) = (ii) + 241.72.

第四表 方程式(2)より M_i 以外の彎曲率を消去する演算表

行	係數	M_i	H_i	V_i	單位荷重の作用點															
					b	c	d	e	f	g	h	i	j							
M_1	+107.34	-1003.6	-12826.260	-10036																
M_2	+1422.0	-1412.0	-29272.992	-28498	14224															
M_3	+1619.8	-1610.5	-40946.536	-48324	32216	16108														
M_4	+1701.0	-1701.4	-47820.382	-68056	51042	34028	17014													
M_5	+1122.5	-1122.5	-50155.500	-86475	69180	51885	38590	17225												
M_6	+1701.4	-1701.9	-41520.372	-102084	85070	68056	51042	34028	17014											
M_7	+1610.8	-1610.8	-46246.536	-112756	96648	80540	64432	48324	32216	16108										
M_8	+1422.0	-1422.2	-29272.992	-113792	99568	85344	71120	56436	42672	28448	14224									
M_9	+1003.6	-1003.6	-12826.260	-90324	80288	70252	60216	50160	40144	30104	20072	10036								
M_{10}	+2093.3	-2093.3	0	-20933	18840	16746	14653	12560	10467	8373	6280	4187	2093.3							
右端	(iii)	-13629.56	-312107.860	-681228	547076	422959	312067	210282	142513	93037	49576	14223	2093.3							
左端	(ii)	-1	-22.50774	-50.00000	4215366	3104374	222778.3	1619468	1026901	609466	291315	124392	2153642							

備考 (ii) = (iii) + 13629.56

第五表 方程式(3)より M_1 以外の彎曲率を消去する演算表

見出し No.	未知数	M_1	H_1	V_1	単位荷重の作用熱							備考								
					b	c	d	e	f	g	h		i	j						
M_1	+ 83.19	- 16.29	- 1068.3490	- 831.9																
M_2	+140.97	- 83.19	- 2201.1626	- 2819.4	1409.7															
M_3	+192.38	- 192.38	- 4890.2996	- 5774.0	3897.6	192.38														
M_4	+292.37	- 292.37	- 6874.1281	- 9774.8	7331.1	4887.4	292.37													
M_5	+391.20	- 391.20	- 8734.8000	- 15060.0	12048.0	5032.0	6024.0	391.20												
M_6	+267.33	- 267.33	- 7519.9929	- 16039.8	13366.5	10693.2	8193.7	5346.6	267.33											
M_7	+451.92	- 451.92	- 11475.0964	- 31599.4	27085.2	22571.0	18056.8	12026.4	5414.2											
M_8	+571.53	- 571.53	- 11762.0879	- 45722.4	40997.1	34291.8	28576.5	22961.2	17145.9	1494.6	571.53									
M_9	+789.76	- 789.76	- 16084.1660	- 70678.4	62790.2	54332.2	47085.6	39237.0	21594.0	23572.8	16084.1660									
M_{10}	+972.21	- 972.21	0	- 47241.0	47241.0	37922.8	32068.7	28340.6	23614.5	19121.3	972.21									
方程式	(iii)	-2525.80	-65310.072	-245788.0	210392.0	176129.2	143275.6	112355.0	84862.5	68244.0	35582.9	12854.9	7797.6							
	(iii)	-1	- 18.52348	-6262618	59.67239	49.95939	4263622	3186369	2278425	1655198	1502211	436414	94182	47241						

備考 (iii) = (iii) ÷ 3525.80

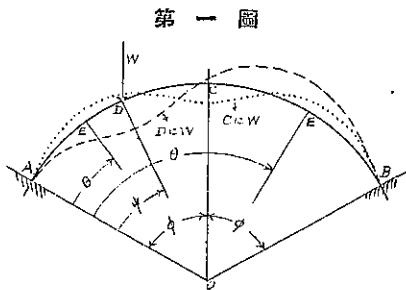
第六表 影響方程式の解法

見出し No.	M_1	H_1	V_1	単位荷重の作用熱							備考		
				b	c	d	e	f	g	h		i	j
(ii)	1	+1878848	+5000000	+4467332	+2554416	+2533758	+1313919	+1272373	+243909	+539208	+259468	+10673920	第三表
(iii)	1	+2230774	+5000000	+4285366	+3104306	+2237813	+1699968	+1246001	+609466	+297815	+107392	+1053672	第四表
(iii)	1	+1852348	+6262618	+5967239	+4995939	+4263622	+3186369	+2278425	+1655208	+1002212	+4399550	+1330866	第五表
A		- 26499.5	+ 1962618	+1659897	+1740971	+1523880	+1272460	+1000052	+741999	+463444	+234022	+4166596	(iii) - (i)
B		- 438976	+ 1962618	+1951873	+1821053	+1765869	+1576501	+1332923	+1046492	+712397	+346158	+1186224	(iii) - (ii)
C		+411931		- 852026	- 150082	- 241385	- 304441	- 326272	- 302443	- 249283	- 150076	- 520278	A - B
		$H_1 =$		- 0166298	- 0364338	- 0537441	- 0739052	- 0922298	- 0739283	- 0587933	- 0369233	- 0166298	C + 211931
D		- 1	+ 7407503	+17170587	+6570942	+5751849	+4920264	+3257139	+2302525	+1271708	+891044	+2513478	A + 226495
E		- 1	+ 447651	+ 445200	+ 231328	+ 402761	+ 355572	+ 303911	+ 238682	+ 162262	+ 078978	+ 0270564	B + 424926
F			+ 6939852	+ 625387	+ 6139614	+ 5348603	+ 4493069	+ 3493228	+ 2561843	+ 1609446	+ 802966	+ 2229214	D - E
		$V_1 =$		+ 0266312	+ 0822177	+ 0769494	+ 0632876	+ 0501911	+ 0369089	+ 0231247	+ 0115371	+ 0032226	F + 6259852
		$M_1 = -1628283H_1 - 50V_1$		+ 4067332	+ 2554416	+ 2533758	+ 1313919	+ 1272373	+ 243909	+ 539208	+ 259468	+ 1067392	(i) 式
		$-1878848H_1 + 50V_1$		+ 237294	+ 694534	+ 1103729	+ 1388574	+ 1488604	+ 1388585	+ 1103700	+ 694506	+ 237292	第二表
		$-50V_1 =$		- 4831529	- 4410735	- 3842970	- 3191930	- 2509555	- 1840445	- 1156235	- 526855	- 161130	
		$M_2 =$		- 526874	- 471733	- 199963	- 110553	- 351422	- 462047	- 487263	- 362119	- 143564	
		$-M_1 =$		+ 900000	+ 800000	+ 700000	+ 620000	+ 500000	+ 400000	+ 300000	+ 200000	+ 100000	
		$-29H_1 =$		+ 526874	+ 471733	+ 199963	+ 110553	+ 351422	+ 462047	+ 487263	+ 362119	+ 143564	
		$-50V_1 =$		+ 266264	+ 1056580	+ 1703579	+ 2143268	+ 2297664	+ 2143263	+ 1703569	+ 1056587	+ 266276	
		$M_3 =$		- 2631560	- 4410735	- 3842970	- 3191930	- 2509555	- 1840445	- 1156235	- 526855	- 161130	
		$M_4 =$		+ 061578	+ 117578	+ 1660072	+ 439215	+ 563313	+ 159209	+ 067063	+ 117563	+ 1661592	
		成果		$H_1 =$	- 016630	- 036434	- 053744	- 073906	- 073906	- 058794	- 036932	- 016630	
				$V_1 =$	+ 026631	+ 082215	+ 076843	+ 063233	+ 050151	+ 036803	+ 023125	+ 011537	
				$M_2 =$	- 526877	- 471733	- 199966	- 110555	- 351422	- 462045	- 487262	- 362117	
				$M_3 =$	- 43625	- 34979	- 38394	- 49441	- 37052	- 14294	+ 20027	+ 08416	
				$M_4 =$	+ 06157	+ 11757	+ 166007	+ 43922	+ 56331	+ 15921	+ 06697	+ 11756	

+4.7173, +5.2687 とならねばならぬのに計算の結果は皆違つて居ます。勿論自己矛盾は大局を左右する程の影響なき場合も多しと雖ども其存在することは確實にして存在理由も明白であります。之を知つて居らぬと計算にまごつき貴重の時間を空費することがあります。以上は筆者が苦しんだ腹癢せに書く許りでなく苟しくも本法を利用する人の心得置くべきものと思ひます。

次に Castigliano 定理を應用する普通解法に移らんとす。元來弧桁に於ては剪力及軸壓力の影響が相當に著しき場合多く、之を無視するは筆者の好まぬ所である。且つ拱の如き單純なる弧桁は變断面或は適意荷重の時でも Castigliano 定理を素直に應用し無理な細工を加へざる近似法が剪力及軸壓力を考慮に入れても簡單且つ迅速に適用出來ますから彎曲率のみを考へながら手数の煩はしき多數の解法は單に面白いと云ふだけで實際的に有害無益と思ふのであります。勿論この種の研究を頭から否定するの無く精密度を失はぬ範圍に於てより善き良法の五現を熱望する次第である。著者の影響方程式論は單純なる桁と複雑なる結構を併せ論究するため便宜彎曲率のみを考慮されたるものと思ひます。従て Castigliano 定理の應用にも特に剪力及軸壓力の影響を無視し、これに依る計算値を假りに眞値と名付けて以て上記著者の方法に依る結果に對照せんとす。

第一圖の如く兩端固定均一断面均一材質の圓弧拱に於て r を中軸の半徑、 ϕ を中心角の半分、 ψ を單一荷重 W の作用點 D の半和徑が左端の半徑と爲す角、 θ を適意 E 點の半徑が左端の半徑と爲す角、 V_1 は左端支臺の垂直反力にして上方に向ふを正號とす。 H_1 は左端支臺の水平反力にして徑間の中央に向ふを正號とす。 M_1 は左端 A に於ける彎曲率にして M_1 及其他各點の彎曲率は總て拱の外輪に張力の維應力を起すを正號とし、内輪に張力の維應力を起すを負號とす。之等符號の約束は Prof. Hudson の約束に合致し普通に採用せらるゝものである。従て著者の結果と對照する際著者の H_1 及 M_1 だけは符號を反對にすべきものなるを注意して置きます。此場合 Castigliano 定理を適用し、 V_1 、 H_1 及 M_1 を未知量とし剪力及軸壓力に對する仕事を特に無視する時は容易に次の結果を得。



第一圖

$$V_1 = \frac{W}{2} \left[1 + \frac{(\phi - \psi) + \{ \cos(\phi - \psi) - 2 \cos \phi \} \sin(\phi - \psi)}{\phi - \sin \phi \cos \phi} \right]$$

$$H_1 = W \times \frac{\{ (2\phi - \psi) \sin(\phi - \psi) + \cos(\phi - \psi) - \cos \phi \} \sin \phi - \frac{\phi}{2} \{ \sin \phi + \sin(\phi - \psi) \}^2}{\phi(\phi + \sin \phi \cos \phi) - 2 \sin^2 \phi}$$

$$M_1 = r \left[V_1 \sin \phi - \frac{\phi - \sin \phi \cos \phi}{2 \sin \phi} H_1 - \frac{\{ \sin \phi + \sin(\phi - \psi) \}^2}{4 \sin \phi} W \right]$$

而して任意 E 點の彎曲率 M は

AD 間 $M = M_1 + H_1 r \{ \cos(\phi - \theta) - \cos \phi \} - V_1 r \{ \sin \phi - \sin(\phi - \theta) \}$

DB 間 $M = M_1 + H_1 r \{ \cos(\phi - \theta) - \cos \phi \} - V_1 r \{ \sin \phi - \sin(\phi - \theta) \} + W r \{ \sin(\phi - \psi) - \sin(\phi - \theta) \}$

B 端の彎曲率 M_{20} は後式に於て $\theta = 2\phi$ として

$$M_{20} = M_1 - 2r V_1 \sin \phi + W r \{ \sin(\phi - \psi) + \sin \phi \}$$

拱頂の彎曲率 M_{10} は荷重が右半に在る時は前式、左半に在る時は後式に於て $\theta = \phi$ とせばよいから

右半に荷重の時 $M_{10} = M_1 + H_1 r(1 - \cos \phi) - V_1 r \sin \phi$

左半に荷重の時 $M_{10} = M_1 + H_1 r(1 - \cos \phi) - V_1 r \sin \phi + W r \sin(\phi - \psi)$

これ等の公式を著者の Fig. 16. の圆弧拱に適用するには

$$r = 57'.60845, \quad W = 1, \quad \phi = 60^\circ 13' 38''.84$$

其他

測點	θ 及 ψ	測點	θ 及 ψ
b	16°14'52.09''	g	70°13'28.90''
c	28 50 23.96	h	80 12 37.29
d	39 54 40.39	i	91 36 48.72
e	50 13 48.78	j	104 12 25.59
f	60 13 38.84		

とすればよいのであります。之等を用ひて計算する時は影響方程式を解くよりも少なき演算の手數で次の第七表を得ます。

又この眞値に對する影響方程式の成果は第六表に符號の改正を施し次の第八表を得ます。

第七表 Castigliano 定理適用の成果

測點	M_1	H_1	V_1	M_{10}	H_{10}
b	+0.96545	+0.33240	+5.0975	-1.5377	+0.6236
c	+0.87311	+0.37265	+4.4866	-3.3296	+1.1388
d	+0.77679	+0.52825	+1.7505	-5.2432	+0.5212
e	+0.63373	+0.74887	-4.9177	-6.5639	+1.6372
f	+0.50009	+0.80137	-3.0964	-5.0522	-3.7506
g	+0.36023	+0.74887	-5.3634	-1.9177	-4.6776
h	+0.23125	+0.59625	-5.2822	+1.7505	+0.5212
i	+0.11635	+0.37265	-3.3296	+4.4866	+1.1388
j	+0.03223	+0.13366	-1.5377	+5.0975	+0.6236
10' 眞値	4.67, 0.1, 9.6, 1.1	-10.1446	-10.1440	-9.516	
4' 眞値	4.6, 0.1, 1.1	+5.8705	-8.0048	-5.1623	
6' 眞値	1.1, 9.6, 1.1	-7.00973	+5.8705	-5.1623	

第八表 影響方程式に依る成果

測點	M_1	H_1	V_1	M_{10}	H_{10}
b	+0.96545	+0.33240	+5.0975	-1.5375	+0.6153
c	+0.87215	+0.37632	+4.7173	-3.4976	+1.1753
d	+0.77549	+0.52879	+1.9396	-5.2596	+0.5571
e	+0.63229	+0.72906	-4.1652	-4.9441	+1.5572
f	+0.50191	+0.79230	-3.3442	-3.7052	-3.6331
g	+0.36009	+0.73906	-4.6265	-1.9289	-4.921
h	+0.23125	+0.58719	-4.8726	+2.0027	+0.6007
i	+0.11537	+0.36432	-3.6212	+4.6416	+1.1756
j	+0.03223	+0.12630	-1.4356	+5.3472	+0.6153
10' 眞値	4.6, 0.1, 9.6, 1.1	-7.1940	-7.1224	-4.0330	
4' 眞値	4.6, 0.1, 1.1	+7.3558	-12.3631	-4.8330	
6' 眞値	1.1, 9.6, 1.1	-12.0641	+7.0519	-4.8331	

試みに M_1 , M_{20} 及 M_{10} に就き第七表の眞値と第八表の數値を比較せんため影響方程式の結果と眞値の差を眞値の百分率にて表はす時は第九表を得ます。表中正號は影響方程式の結果が眞値より大なるを示し、負號は小なるを示す。

本表に現はるゝ如く單位荷重が單一格點に作用する時影響方程式の結果は眞値に比

し M_1 は 2 割 2 分, M_{20} は 1 割 4 分, M_{10} は 1 割 5 分に達する相違の存する所あり。

又總ての格點に同量の荷重が同時に作用する場合影響方程式の結果を利用せば M_1 は 2 割 9 分, M_{20} は 2 割 5 分, M_{10} は 1 割 2 分だけ眞値に比し過小となるのである。この場合著者の解法を適用するの危險は明瞭であります。全體を 10 區に分割する代りに分割數を増す時は各區の弧長と弦が一層接近するから斯くの如き不精密を免かれ得るや否やを考察するに、夫れは殆んど絶望であります。何となれば著者の方法の最大缺陷は區間の長よりも傾角に存し、傾角に起因する差違は分割數を増しても救濟出來ぬからである。

第九表 影響方程式の結果と眞値の差を眞値の百分率にて示す表 (%)

測點	單位荷重の作用點									
	b	c	d	e	f	g	h	i	j	眞値
M_1	+0.5	+5.2	+13.9	-22.6	-11.9	-13.9	-2.8	-5.3	-6.3	-29.1
M_{20}	-11.0	-8.5	-3.1	-7.9	-7.1	+0.8	+4.4	+2.9	+6.6	-25.6
M_{10}	-1.3	+3.2	+15.1	-6.3	-2.0	-6.3	+15.1	+3.2	-1.3	-12.0

第一圖の點線は單一荷重が拱頂に作用する時及 D 點に作用する時の向心撓度を同一縮尺にて擴大記入し撓度弧線が原形と相違する狀況を示せるもので、この相違の著しき場合は概して應力の相違も著大なるは第九表に照合して納得出來ます。多邊形及卵形の輪に單一荷重を加ふる場合も撓度弧線が著しく原形と異なるを想像し得るが故著者の計算法を此種の工作物に適用するは不安に堪へず。之を適用するに先立ち均一断面均一材質の圓形輪の如き眞應力計算の容易なるものに就て眞法と著者の方法を比較して見るが必要と信じます。溫度の變化及構材短縮に依る撓度弧線は原形との相違に無理がなく、殊に圓形輪の如きは全く相似形であるから著者の方法に依るも比較的正しい應力を得るものと推察出來ます。之れ既記固定拱の計算に於て特に之を省略した所以であります。

一般に著者の解法は桁又は結構の變形、即ち撓度の本體を無視し變形後の形狀は原形に相似形であると見做すに歸着します。撓度と云ふものは微細なもの故之を省くと云ふ立前からは一應合理的の様にも聞えますが更に其微細な撓度から還元（積分）して撓度の函數たる應力を求むるに該當するから妄りに撓度從て傾角に修正を加へて正しい應力を求め得ざるは當然であります。更に弧桁に對しては (a) 式が根本的に違ひ從て (1), (2), (3) 及 (4) なる基本公式を其儘適用するのが無理であるから正當の結果を得る筈は有りません。尤も著者の影響方程式は眞式にあらずして近似値を求むる略式であるから以上の如き證立は當らぬことかも知れません。要するに略式なるが故に安全に之を適用し得る範圍に關する御研究を續いて發表下さる様御願致します。