

上端に水平力を受くる杭の解法

(Giulio Krall, Sui pali infissi in terreni elastici e soggetti a forze normali all'asse,
Annali dei Lavori Pubblici, Roma, LXX, N. 5, Maggio 1932.)

地中に打込まれたる杭の上端に水平の方向に力が作用する場合、其地盤に弾性を假定すれば、之を弾性床上の桁の理論を用ひて解くことが出来る。即ち

- H = 杭の上端 ($x=0$) に作用する水平力,
- $p(x)$ = 杭の上端より x なる距離に於て杭に作用する反力の強度,
- $w(x)$ = 杭の上端より x なる距離に於ける H の方向の杭の変位,
- E = 杭の材料の縦弾性係数,
- J = 杭の横断面の H と直角なる軸の周りの慣性モーメント,
- d = H と直角の方向に測つた杭の幅

とすれば⁽¹⁾、一般に

$$EJ \frac{d^4 w}{dx^4} = p(x)d = -C(x)wd \dots\dots\dots(1)$$

である。但し $C(x)$ は x の函数であつて $p(x) = -C(x)w$ としたものである。上記の微分方程式を邊縁條件に従て解けば、杭の任意の點に於ける剪力及彎曲率も之を直ちに求めることが出来る。著者は之を解くに當つて E, J 及 d は杭の全長に互つて一樣なるものと假定し、且つ杭の長さ L を有限とせず之を無限大と假定した。此假定は勿論杭が充分に長い場合には許容さるべき假定であり、且つ杭の上端に近い部分に對しては大なる影響を與へない。以下其結果を摘録する。但し算式中の λ は $C(x) = C = \text{常數}$ とした場合の

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{4EJ}{Cd}} \dots\dots\dots(2)$$

であつて、 λ は長さの dimension を有し、尙 $\xi, \psi(\xi), \Phi(\xi), \Theta(\xi), \Pi(\xi)$ 及 $\Gamma(\xi)$ は夫々

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{x}{\lambda}, & \Gamma(\xi) &= e^{-\xi}(1 - \sin \xi), \\ \psi(\xi) &= e^{-\xi}(\cos \xi - \sin \xi), & \Phi(\xi) &= e^{-\xi}(\cos \xi + \sin \xi), \\ \Theta(\xi) &= e^{-\xi} \cos \xi, & \Pi(\xi) &= e^{-\xi} \sin \xi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3)$$

で表はされる函数である。

I. 杭の上端は水平方向に移動し得るが、其回轉が不可能なる場合

之は杭頭が基礎構造物の中に埋込まれた様な場合で、邊縁條件としては

$$\left(\frac{dw}{dx} \right)_{x=0} = 0, \quad -EJ \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)_{x=0} = H$$

を考慮しなければならない。

(1) 全長に互つて $C(x) = C = \text{常數}$ なる場合 (第一圖参照)

$$\begin{array}{l} x=0 \qquad \qquad \qquad x=x \\ \text{變位:} \quad w_0 = \frac{H}{C\lambda d}, \quad w(x) = w_0 \Phi(\xi), \end{array}$$

(1) 譯者註。算式中の記號は多少原文と異なるものを採用した。尙原文中の誤植は之を訂正した。

反力強度: $p_0 = \frac{H}{\lambda d}, \quad p(x) = p_0 \bar{\theta}(\xi),$

彎曲率: $M_0 = -\frac{H\lambda}{2}, \quad M(x) = M_0 \psi(\xi),$

$x \cong 0.8\lambda: M(x) = 0,$

$x \cong 1.6\lambda: M(x) = -0.208 M_0 = +0.104 H\lambda.$

(2) $(0 \leq x \leq l: C(x) = 0, x > l: C(x) = C = \text{常數})$ の場合 (第二圖参照)

$x = 0: w_0 = \frac{H}{C\lambda d} (1 + \delta + \delta^2 + \frac{1}{3} \delta^3),$

$x = l: w_l = \frac{H}{C\lambda d} (1 + \delta),$

$x = 0: M_0 = -\frac{H(l + \lambda)}{2} = -Hx_0,$

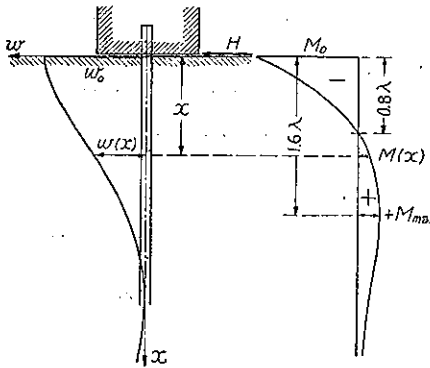
$x \leq l: M(x) = M_0 + Hx,$

$x = l: M_l = +\frac{H(l - \lambda)}{2} = +H(l - x_0),$

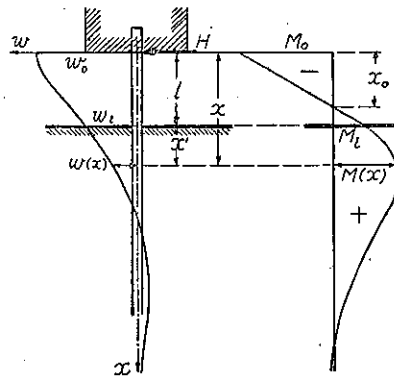
$x \geq l: M(x) = H\lambda \left[\Pi(\xi') + \frac{1 - \delta}{2} \Theta(\xi') \right],$

但し $\delta = \frac{l}{\lambda}, \quad \xi' = \frac{x - l}{\lambda}, \quad x_0 = \frac{l + \lambda}{2}.$

第一圖



第二圖



(3) 上記の場合に於て $0 \leq x \leq l$ の部分に於て $C(x)$ が零でなく任意の函数であり、 $x \geq l$ に於て $C(x) = C = \text{常數}$ なる場合には、杭頭の變位及彎曲率は次の如くなる。

$w_0 = \frac{H}{C\lambda d} \left[1 + \frac{2}{\lambda} \int_0^l \left(1 - \frac{C(x)}{C} \right) \Gamma \left(\frac{2x}{\lambda} \right) dx \right],$

$M_0 = -\frac{H}{2} \left[\lambda + \int_0^l \left(1 - \frac{C(x)}{C} \right) \Theta \left(\frac{2x}{\lambda} \right) dx \right].$

II. 杭の上端の變形が自由であつて、之は水平力 H の他に彎曲率 M_0 が作用する場合
之は屢々起る場合であつて邊縁條件としては

$-EJ \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)_{x=0} = M_0, \quad -EJ \left(\frac{d^3 w}{dx^3} \right)_{x=0} = H$

を考慮しなければならない。水平力 H のみが作用する場合には勿論 $M_0=0$ と置けばよい。

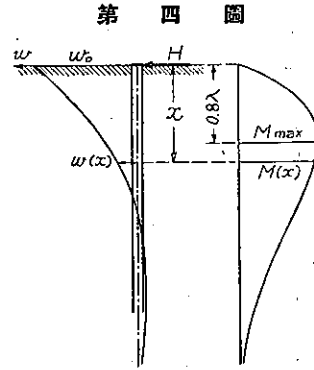
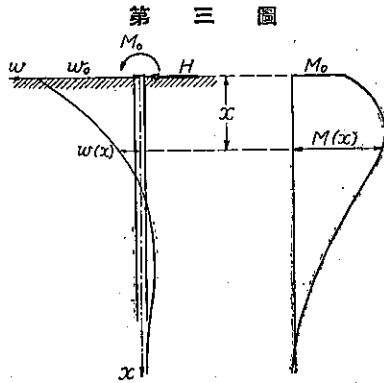
(1) 杭の全長に亘つて $C(x)=C=$ 常數なる場合 (第三圖及第四圖参照)

$$x=0: \quad w_0 = \frac{2}{C\lambda d} \left(H + \frac{M_0}{\lambda} \right), \quad \left(\frac{dw}{dx} \right)_{x=0} = \frac{2H}{C\lambda^2 d} \left(H + \frac{2M_0}{\lambda} \right),$$

$$x=x: \quad w(x) = \frac{2}{C\lambda d} \left[H\theta(\xi) + \frac{M_0}{\lambda} \psi(\xi) \right],$$

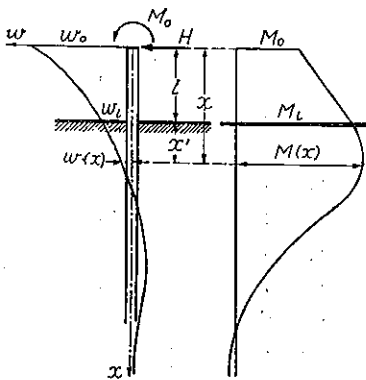
$$M(x) = H\lambda \Pi(\xi) + M_0 \theta(\xi).$$

特に $M_0=0$ の場合には、第四圖に示すが如く $x \cong 0.8\lambda$ に於て $M_{max} = 0.322 H\lambda$ となる。

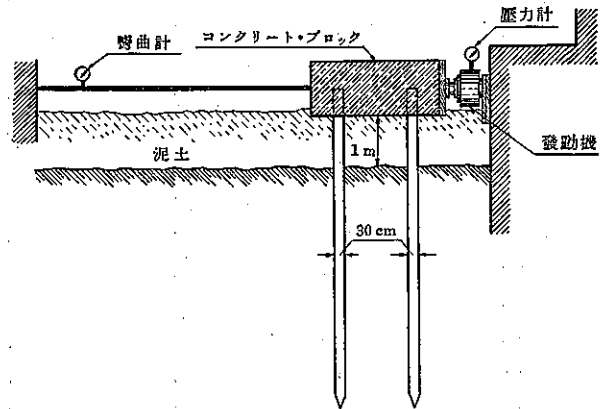


(2) $0 \leq x \leq l: C(x)=0, x \geq l: C(x)=C=$ 常數の場合 (第五圖参照)

第五圖



第六圖



$$x=0: \quad w_0 = \frac{l^2}{3EJ} \left(Hl + \frac{3}{2} M_0 \right) + \frac{2}{C\lambda d} \left[H(1+4\delta) + \frac{M_0}{\lambda} (1+2\delta) \right],$$

$$x=l: \quad w_l = \frac{2}{C\lambda d} \left[H(1+\delta) + \frac{M_0}{\lambda} \right],$$

$$x \geq l: \quad w(x) = \frac{2}{C\lambda d} \left[H\theta(\xi') + \left(\frac{M_0}{\lambda} + H\delta \right) \psi(\xi') \right],$$

$$x \leq l: \quad M(x) = M_0 + Hx,$$

$$x=l: \quad M_l = M_0 + Hl,$$

$$x \geq l: M(x) = H\lambda \Pi(\xi') + (M_0 + Hl)\theta(\xi'),$$

$$\text{但し } \delta = \frac{l}{\lambda}, \quad \xi' = \frac{x-l}{\lambda},$$

尚、著者は第六圖に示す様な装置で C の値を實驗した。實驗は或る工事現場に於て施工され、一邊 30 cm なる正方形断面の鐵筋コンクリート杭を 5 本地中に打込み、泥土層約 1 m を置いて頭部をコンクリート塊中に埋込んだものである。此實驗の結果はコンクリート塊に加へられる水平力と其水平移動とは大略正比例し、

$$l = 1.00 \text{ m}, \quad E = 2 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2, \quad d = 30 \text{ cm}, \quad J = 67500 \text{ cm}^4$$

として、I, (2) の場合の第一式に依つて計算した C の値は $C \cong 3.00 \text{ kg/cm}^3$ である。

尙最後に $\xi = 0.0 \sim 3.0$ に對する $\Phi(\xi)$, $\Psi(\xi)$, $\theta(\xi)$, $\Pi(\xi)$ 及 $\Gamma(\xi)$ の表を掲げる。

| ξ | $\Phi(\xi)$ | $\Psi(\xi)$ | $\theta(\xi)$ | $\Pi(\xi)$ | $\Gamma(\xi)$ |
|-------|-------------|-------------|---------------|------------|---------------|
| 0.0 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.0000 | 1.0000 |
| 0.1 | 0.9907 | 0.8100 | 0.9003 | 0.0903 | 0.8145 |
| 0.2 | 0.9651 | 0.6398 | 0.8024 | 0.1627 | 0.6561 |
| 0.3 | 0.9267 | 0.4888 | 0.7077 | 0.2189 | 0.5220 |
| 0.4 | 0.8784 | 0.3564 | 0.6174 | 0.2610 | 0.4093 |
| 0.5 | 0.8231 | 0.2415 | 0.5323 | 0.2908 | 0.3157 |
| 0.6 | 0.7628 | 0.1431 | 0.4530 | 0.3099 | 0.2389 |
| 0.7 | 0.6997 | 0.0599 | 0.3798 | 0.3199 | 0.1767 |
| 0.8 | 0.6354 | -0.0093 | 0.3131 | 0.3223 | 0.1270 |
| 0.9 | 0.5712 | -0.0657 | 0.2527 | 0.3185 | 0.0881 |
| 1.0 | 0.5083 | -0.1108 | 0.1983 | 0.3096 | 0.0583 |
| 1.1 | 0.4476 | -0.1457 | 0.1510 | 0.2967 | 0.0362 |
| 1.2 | 0.3899 | -0.1716 | 0.1091 | 0.2807 | 0.0205 |
| 1.3 | 0.3355 | -0.1897 | 0.0729 | 0.2626 | 0.0099 |
| 1.4 | 0.2849 | -0.2011 | 0.0419 | 0.2430 | 0.0036 |
| 1.5 | 0.2384 | -0.2068 | 0.0158 | 0.2226 | 0.0001 |
| 1.6 | 0.1959 | -0.2077 | -0.0059 | 0.2018 | 0.0006 |
| 1.7 | 0.1576 | -0.2047 | -0.0235 | 0.1812 | 0.0015 |
| 1.8 | 0.1234 | -0.1985 | -0.0376 | 0.1610 | 0.0043 |
| 1.9 | 0.0932 | -0.1899 | -0.0484 | 0.1415 | 0.0080 |
| 2.0 | 0.0667 | -0.1794 | -0.0563 | 0.1231 | 0.0123 |
| 2.1 | 0.0439 | -0.1675 | -0.0618 | 0.1057 | 0.0168 |
| 2.2 | 0.0244 | -0.1548 | -0.0652 | 0.0896 | 0.0212 |
| 2.3 | 0.0080 | -0.1416 | -0.0668 | 0.0748 | 0.0255 |
| 2.4 | -0.0056 | -0.1282 | -0.0669 | 0.0613 | 0.0294 |
| 2.5 | -0.0166 | -0.1149 | -0.0658 | 0.0491 | 0.0330 |
| 2.6 | -0.0254 | -0.1019 | -0.0636 | 0.0383 | 0.0360 |
| 2.7 | -0.0320 | -0.0893 | -0.0608 | 0.0287 | 0.0385 |
| 2.8 | -0.0369 | -0.0777 | -0.0573 | 0.0204 | 0.0404 |
| 2.9 | -0.0403 | -0.0666 | -0.0534 | 0.0134 | 0.0419 |
| 3.0 | -0.0423 | -0.0563 | -0.0493 | 0.0070 | 0.0428 |

(福田武雄 抄譯)