論說報告

第十九卷第一號　昭和八年一月

鐵筋コンクリート部材の合理的斷面の設計方法に關する研究

會員　工學士　加　藤　順　吉

Rational Design of Reinforced Concrete Section

By Junkichi Katoh, C. E., Member.

內容梗概

本編は對稱軸のある任意の斷面に於て，此斷面が偏心壓力，彎曲，中心壓力等に抵抗する場合の種々な關係を誘導し，次に效率函數なる函數を導入し，此函數と誘導して置いた關係とを使つて，如上の諸場合に於て效率が最大となる樣な關係を求めたものである。

目　次　　頁

記　號

本文に於て用ふる主なる記號次の如し。

A_0：　全斷面積

A_c： 壓應側斷面積　$a_c=\dfrac{A_c}{A_0}$

A_s： 鐵筋全斷面積　$a_s=\dfrac{A_s}{A_0}=p$

$\overline{p}=p$ の許容最大値

A_{sv}： v 層目鐵筋の斷面積　$p_v=\dfrac{A_{sv}}{A_0}$

$\overline{p_v}=p_v$ の許容最大値

$\omega_v=\dfrac{A_{sv}}{A_s}$

A： 等値有效斷面積$=A_c+nA_s$　$a=\dfrac{A}{A_0}=a_c+na_s$

G_c： 中立軸に關するコンクリート有效斷面の一次率　$g_c=\dfrac{G_c}{A_0h}$

G_s： 〃　鐵筋斷面の一次率　$g_s=\dfrac{G_s}{A_0h}$

G： 〃　等値有效斷面の一次率$=G_c+nG_s$　$g=\dfrac{G}{A_0h}=g_c+ng_s$

I_c： 〃　コンクリート有效斷面の二次率　$i_c=\dfrac{I_c}{A_0h^2}$

I_s： 〃　鐵筋斷面の二次率　$i_s=\dfrac{I_s}{A_0h^2}$

I： 〃　等値有效斷面の二次率　$=I_c+nI_s$　$i=\dfrac{I}{A_0h^2}=i_c+ni_s$

$i_{co}A_0h^2$： コンクリート有效斷面の其の重心軸に關する二次率

$i_{so}A_0h^2$： 鐵筋斷面　〃

$i_oA_0h^2$： 等値有效斷面　〃

$\alpha=\dfrac{i_{so}}{p}$

b_0： 斷面の平均幅

b： 斷面内の考ふる層の幅　$\beta=\dfrac{b}{b_0}$

c： コンクリート緣維より定着軸迄の距離　$\gamma=\dfrac{c}{h}$

d_1： 〃　緣維鐵筋 〃　$\delta_1=\dfrac{d_1}{h}$

d_v： 〃　v 層目鐵筋〃　$\delta_v=\dfrac{d_v}{h}$

e： 定着軸より合力作用點迄の距離　$\varepsilon=\dfrac{e}{h}$

h： 斷面の高さ

m： 鐵筋とコンクリートの單價の比

n：　〃　彈性率の比

θ： 鐵筋繼手等に基因する割増係數

ω： 雜價とコンクリートの單價の比　　$\lambda=\dfrac{1}{n}\dfrac{\theta m-1}{1+\omega}$

$\rho_c h$：コンクリート緣維よりコンクリート有效斷面の重心迄の距離

$\rho_s h$：　〃　鐵筋斷面の　〃

ρh：　〃　等値有效斷面の　〃

μ： 鐵筋層の順位

ν：　〃

s： 鐵筋層數

x： コンクリート緣維より中立軸迄の距離　　$\kappa=\dfrac{x}{h}$

κ_b＝平衡中立軸比

$\xi=\kappa-\eta$

y： 中立軸より考ふる層迄の距離　　$\eta=\dfrac{y}{h}$

y_n：　〃　合力作用點迄の距離　　$\eta_n=\dfrac{y_n}{h}$

z： コンクリート緣維より合力作用點迄の距離　　$\zeta=\dfrac{z}{h}$

$\sigma_{s1}, \overline{\sigma_s}$： 鐵筋の緣維應力, 許容應力

$\sigma_c, \overline{\sigma_c}$： コンクリートの〃,　〃

$\mathfrak{N}, \mathfrak{M}$： 合力, 合力率（定着軸に關する）

$\overline{\mathfrak{N}_s}, \overline{\mathfrak{M}_s}$： 鐵筋が許容應力の時の合力, 合力率(定着軸に關する)

$\overline{\mathfrak{N}_c}, \overline{\mathfrak{M}_c}$： コンクリートが　〃　,　〃

$\overline{\mathfrak{N}}, \overline{\mathfrak{M}}$： 許容抵抗力, 許容抵抗力率(定着軸に關する)

X： 效率

X_s： 鐵筋が許容應力の時の效率函數

X_c： コンクリートが許容應力の時の效率函數

χ： 許容抵抗力の時の效率函數

u (54)	v (59)	φ (55)	ψ (60)	パラメーター
$f_{(\zeta)}$ (81)	$f_{(\nu_\mu)}$ (87)	$f_{(\kappa)}$ (91)	P (95)	
y (89)	$w_{(\nu_\mu)}$ (85)	$w_{(\kappa)}$ (90)	Q (95)	
U (121)	V (125)	Φ (122)	Ψ (126)	

斷面の一部に張應力を生ずる場合を狀態 I, 斷面全部に壓應力を生ずる場合を狀態 II とす。狀態 II を特に區別する必要ある時は II なる添字を附するものとす。

第一章　左右對照の斷面

第一節　垂面應力と合力及合力率

1. 垂面應力と合力及合力率の關係

鐵筋コンクリートに於て普通用ふる假定即ち，部材軸方向の歪の直線的變化，彈性率と歪の無關係，コンクリートの張應力の無視等により次の關係ある事は文獻の記す所なり。

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_{cy}=\mathfrak{b}y\\ -\sigma_{s\nu}=n\mathfrak{b}y\end{array}\right\}\quad \text{爰に } \mathfrak{b}\text{：正数} \qquad\text{(ア)}$$

積分して

$$\mathfrak{N}=\mathfrak{b}G \qquad\text{(イ)}$$

$$\mathfrak{N}y_n=\mathfrak{b}I \qquad\text{(ウ)}$$

爰に

$$G\equiv G_c+nG_s\equiv\int_0^{A_c}ydA+n\sum_{\nu=1}^{s}A_{s\nu}(x-d_\nu) \qquad\text{(エ)}$$

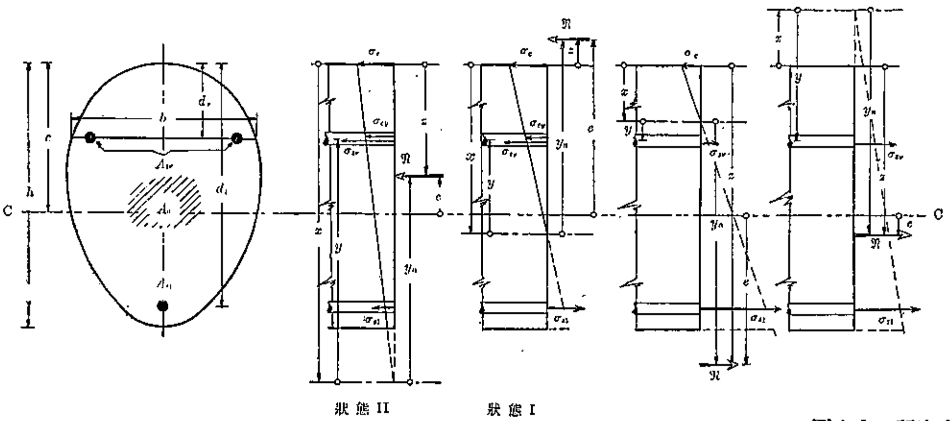
$$I\equiv I_c+nI_s\equiv\int_0^{A_c}y^2dA+n\sum_{\nu=1}^{s}A_{s\nu}(x-d_\nu)^2 \qquad\text{(オ)}$$

とす。（イ）式，（ウ）式より

$$y_n=\frac{I}{G} \qquad\text{(カ)}$$

$$\mathfrak{b}=\frac{\mathfrak{N}}{G}=\frac{\mathfrak{N}y_n}{I} \qquad\text{(キ)}$$

第一圖



$A_{s1}=p_1A_0$　　$c=\gamma h$　　$x=\kappa h$

$A_{s\nu}=p_\nu A_0$　　$d_1=\delta_1 h$　　$y=\eta h$

$A_0=b_0h$　　$d_\nu=\delta_\nu h$　　$y_n=\eta_n h$　　x に限り　$-\ \updownarrow\ +$　其他　$+\ \updownarrow\ -$

$b=\beta b_0$　　$e=\varepsilon h$　　$z=\zeta h$

		壓應力	張應力
コンクリート	σ_{cy}	+	0
鐵筋	$\sigma_{s\nu}$	−	+

を得。又（ア）式より

$$\mathfrak{d}=\frac{-\sigma_{s1}/n}{x-d_1}=\frac{\sigma_c}{x} \quad \cdots\cdots（ク）$$

なるが故に（イ）式より

$$\mathfrak{N}=\frac{-\sigma_{s1}}{n}\frac{G}{x-d_1}=\sigma_c\frac{G}{x} \quad \cdots\cdots（ケ）$$

$$\mathfrak{M}=\frac{-\sigma_{s1}}{n}\frac{G}{x-d_1}e=\sigma_c\frac{G}{x}e \quad \cdots\cdots（コ）$$

$$=\frac{-\sigma_{s1}}{n}\frac{I}{x-d_1}\frac{e}{y_n}=\sigma_c\frac{I}{x}\frac{e}{y_n} \quad \cdots\cdots（サ）$$

爰に　$\mathfrak{M}\equiv\mathfrak{N}e$ ……（シ）

とす。今 C−C 軸を斷面に定着せる軸とすれば圖及（カ）式より

$$z=e-c=y_n-x=\frac{I}{G}-x \quad \cdots\cdots（ス）$$

なる關係あり。

彎　曲

偏心力の特殊の場合と考ふる事を得。即ち

$z\to\pm\infty$，從つて（ス）式より $e\to\pm\infty$，從つて $G\to 0$ の時は

$$\lim_{z\to\pm\infty}\frac{e}{y_n}=1$$

なるが故に（サ）式より

$$\mathfrak{M}=\frac{-\sigma_{s1}}{n}\frac{I}{x-d_1}=\sigma_c\frac{I}{x} \quad \cdots\cdots（セ）$$

中　心　力

偏心力の特殊の場合と考ふる事を得。即ち

$x\to\pm\infty$，從つて $y\to\pm\infty$，從つて $G\to\pm\infty$ の時は

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x-d_1}=1,\qquad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{G}{x}=A$$

なるが故に（ケ）式より

$$\mathfrak{N}=\frac{-\sigma_{s1}}{n}A=\sigma_c A \quad \cdots\cdots（ソ）$$

を得。爰に　$A\equiv A_c+nA_s\equiv\int_0^{A_c}dA+n\sum_{\nu=1}^{s}A_{s\nu}$ ……（タ）

とす。前述により

$$G\left\{\begin{array}{l}=+\infty\\>0\\=0\\<0\\=-\infty\end{array}\right\}\text{に從つて}\left\{\begin{array}{l}\text{中心壓力}\\\text{偏心壓力}\\\text{彎　曲}\\\text{偏心張力}\\\text{中心張力}\end{array}\right\} \quad \cdots\cdots（チ）$$

なる事を示す。

2. 同上關係の變換

今

$$A_{s\nu}\equiv p_\nu A_o \qquad c\equiv\gamma h \qquad x\equiv\kappa h$$

$$b_o\equiv\frac{A_o}{h} \qquad d_1\equiv\delta_1 h \qquad y\equiv\eta h$$

$$b\equiv\beta b_o \qquad d_\nu\equiv\delta_\nu h \qquad y_n\equiv\eta_n h$$

$$e\equiv\varepsilon h \qquad z\equiv\zeta h$$

と置くものとす。尙

$$A_c\equiv\int_0^{A_c}dA\,, \qquad A\equiv A_c+nA_s$$

と定義するものとす。之と（エ）式,（オ）式に定義せる

$$G_c\equiv\int_0^{A_c}y\,dA\,, \qquad I_c\equiv\int_0^{A_c}y^2dA$$

に於て

$$dA=b\,dy=\beta b_o h\,d\eta=A_o\beta\,d\eta$$

積分下端　0，　積分上端　κ

の如く變換する事を得るが故に，A_c，G_c，I_c は

$$\left.\begin{aligned}A_c&=A_o\int_0^\kappa\beta\,d\eta\equiv A_o\,a_c\\G_c&=A_oh\int_0^\kappa\beta\eta\,d\eta\equiv A_oh\,g_c\\I_c&=A_oh^2\int_0^\kappa\beta\eta^2d\eta\equiv A_oh^2i_c\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(1)$$

の如く表す事を得。爰に

$$\left.\begin{aligned}a_c(\kappa)&\equiv\int_0^\kappa\beta(\eta)d\eta\\g_c(\kappa)&\equiv\int_0^\kappa\beta(\eta)\eta\,d\eta\\i_c(\kappa)&\equiv\int_0^\kappa\beta(\eta)\eta^2d\eta\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(2)$$

とす。

特に斷面全部に壓應力を生ずる場合[1]，即ち $1<\kappa$ の時は $A_c=A_o$ なるが故に

---

1)　斷面の一部に張應力を生ずる場合を狀態I，斷面全部が壓應力の場合を狀態 II と稱する事とす。以下 I と II を包轄して論ずる場合多けれ共，特に狀態 II を區別する必要ある時は II なる添字を左下に附する事とす。

$$ {}_{\scriptscriptstyle II}a_c = 1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

なり。

又 A_s, G_s, I_s 等は

$$\left.\begin{aligned} A_s &= \sum_{\nu=1}^{s} A_{s\nu} = A_0 \sum_{\nu=1}^{s} p_\nu \equiv A_0\, a_s \\ G_s &= \sum_{\nu=1}^{s} A_{s\nu}(x-d_\nu) = A_0 h \sum_{\nu=1}^{s} p_\nu(\kappa-\delta_\nu) \equiv A_0\, h g_s \\ I_s &= \sum_{\nu=1}^{s} A_{s\nu}(x-d_\nu)^2 = A_0 h^2 \sum_{\nu=1}^{s} p_\nu(\kappa-\delta_\nu)^2 \equiv A_0\, h^2 i_s \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (4)$$

の如く表す事を得。爰に

$$\left.\begin{aligned} a_s(p_1, \ldots p_s) &\equiv \sum_{\nu=1}^{s} p_\nu \equiv p \\ g_s(\kappa, p_1, \ldots p_s) &\equiv \sum_{\nu=1}^{s} p_\nu(\kappa-\delta_\nu) \\ i_s(\quad\;〃\quad\;) &\equiv \sum_{\nu=1}^{s} p_\nu(\kappa-\delta_\nu)^2 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (5)$$

とす。

従つて A, G, I 等は

$$\left.\begin{aligned} A &= A_c + nA_s = A_0(a_c + na_s) \equiv A_0\, a \\ G &= G_c + nG_s = A_0 h(g_c + ng_s) \equiv A_0 h g \\ I &= I_c + nI_s = A_0 h^2(i_c + ni_s) = A_0 h^2 i \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (6)$$

の如く表す事を得。爰に

$$\left.\begin{aligned} a(\kappa, p_1, \ldots p_s) &\equiv a_c + na_s \\ g(\quad〃\quad) &\equiv g_c + ng_s \\ i(\quad〃\quad) &\equiv i_c + ni_s \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (7)$$

とす。a, g, i 等を夫々面積比, 一次率比, 二次率比と稱し, 一括して面率比と稱する事とす。

以上の關係により

(ス)式より $$\zeta = \varepsilon - \gamma = \eta_n - \kappa = \frac{i}{g} - \kappa \quad \cdots\cdots (8)$$

(ク)式より $$\frac{-\sigma_{s1}/n}{\kappa-\delta_1} = \frac{\sigma_c}{\kappa} \quad \cdots\cdots (9)$$

(ケ)式より $$\mathfrak{N} = A_0 \frac{-\sigma_{s1}}{n} \frac{g}{\kappa-\delta_1} = A_0\, \sigma_c \frac{g}{\kappa} \quad \cdots\cdots (10)$$

(コ)式より $$\mathfrak{M} = A_0 h \frac{-\sigma_{s1}}{n} \frac{g}{\kappa-\delta_1} \varepsilon = A_0\, h\, \sigma_c \frac{g}{\kappa} \varepsilon \quad \cdots\cdots (11)$$

$$= A_0 h \frac{-\sigma_{s1}}{n} \frac{i}{\kappa-\delta_1} \frac{\varepsilon}{\eta_n} = A_0\, h\, \sigma_c \frac{i}{\kappa} \frac{\varepsilon}{\eta_n} \quad \cdots\cdots (12)$$

を得。

彎　曲　　$\zeta \rightarrow \pm\infty$ の時は

(セ)式より $\mathfrak{M}=A_0\,h\dfrac{-\sigma_{s1}}{n}\dfrac{i}{\kappa-\delta_1}=A_0\,h\,\sigma_c\,\dfrac{i}{\kappa}$ ……(13)

中心力 $\kappa\to\pm\infty$ の時は

(ソ)式より $\mathfrak{N}=A_0\dfrac{-\sigma_{s1}}{n}a=A_0\,\sigma_c\,a$ ……(14)

(チ)式より

$$g=g_c+ng_s\left\{\begin{array}{l}=+\infty\\>0\\=0\\<0\\=-\infty\end{array}\right\}\text{に從つて}\left\{\begin{array}{l}\text{中心壓力}\\\text{偏心壓力}\\\text{彎　曲}\\\text{偏心張力}\\\text{中心張力}\end{array}\right\}\quad\cdots\cdots(15)$$

第二節 重心軸比，面率比，平衡中立軸比

1. 重心軸比

壓應側コンクリート緣維より，夫々の斷面の重心迄の距離と高さ h との比を重心軸比と稱する事とす。今

	コンクリート有效斷面	鐵筋斷面	等値有效斷面
重心軸比	ρ_c	ρ_s	ρ

にて表す事とすれば

$$\rho_c=\kappa-\frac{g_c}{a_c}=\frac{\kappa a_c-g_c}{a_c}\quad\cdots\cdots(16)$$

$$\rho_s=\kappa-\frac{g_s}{a_s}=\frac{\kappa a_s-g_s}{a_s}=\frac{\kappa\sum_1^s p_\nu-\sum_1^s p_\nu(\kappa-\delta_\nu)}{\sum_1^s p_\nu}=\frac{\sum_1^s p_\nu\,\delta_\nu}{p}\quad\cdots\cdots(17)$$

$$\rho=\kappa-\frac{g}{a}=\frac{\kappa a-g}{a}=\frac{\kappa a_c-g_c+n(\kappa a_s-g_s)}{a_c+na_s}=\frac{\rho_c\,a_c+n\sum_1^s p_\nu\,\delta_\nu}{a_c+np}\quad\cdots\cdots(18)$$

今

$p_\nu\equiv\omega_\nu\,p$ と置く時は $\sum_{\nu=1}^{s}\omega_\nu=1$

にして，ρ_s，ρ は又次の如くにも表し得。

$$\rho_s=\sum_1^s\omega_\nu\,\delta_\nu\quad\cdots\cdots(17')$$

$$\rho=\frac{\rho_c\,a_c+np\sum_1^s\omega_\nu\,\delta_\nu}{a_c+np}\quad\cdots\cdots(18')$$

特に狀態 II の時は ${}_{\text{II}}a_c=1$ なるが故に

$${}_{\text{II}}\rho=\frac{{}_{\text{II}}\rho_c+n\sum_1^s p_\nu\,\delta_\nu}{1+n\sum_1^s p_\nu}=\frac{{}_{\text{II}}\rho_c+np\sum_1^s\omega_\nu\,\delta_\nu}{1+np}\quad\cdots\cdots(18'')$$

なり。

2. 面率比

面率比の間の關係を求めんとす。今

$$\eta \equiv \kappa - \xi$$

と置く時は

$$\eta = 0 \text{ の時} \quad \xi = \kappa \qquad \text{又} \qquad \frac{d\eta}{d\xi} = -1$$
$$\eta = \kappa \text{ の時} \quad \xi = 0$$

なり。

a_c は (2) 式に定義せる如く

$$a_c(\kappa) = \int_0^\kappa \beta(\eta)d\eta = \int_0^\kappa \beta(\xi)\,d\xi$$

なるが故に

$$\frac{da_c}{d\kappa} = \beta(\kappa)$$

又 g_c は

$$g_c(\kappa) = \int_0^\kappa \beta(\eta)\eta d\eta = \int_0^\kappa \beta(\xi)(\kappa-\xi)d\xi = \kappa\int_0^\kappa \beta(\xi)d\xi - \int_0^\kappa \beta(\xi)\xi d\xi$$

なるが故に

$$\frac{dg_c}{d\kappa} = \int_0^\kappa \beta(\xi)d\xi + \kappa\beta(\kappa) - \beta(\kappa)\kappa = \int_0^\kappa \beta(\xi)d\xi = \int_0^\kappa \beta(\eta)d\eta = a_c$$

又 i_c は

$$i_c(\kappa) = \int_0^\kappa \beta(\eta)\eta^2 d\eta = \int_0^\kappa \beta(\xi)(\kappa-\xi)^2 d\xi$$
$$= \kappa^2\int_0^\kappa \beta(\xi)d\xi - 2\kappa\int_0^\kappa \beta(\xi)\xi d\xi + \int_0^\kappa \beta(\xi)\xi^2 d\xi$$

なるが故に

$$\frac{di_c}{d\kappa} = 2\kappa\int_0^\kappa \beta(\xi)d\xi + \kappa^2\beta(\kappa) - 2\int_0^\kappa \beta(\xi)\xi d\xi - 2\kappa^2\beta(\kappa) + \beta(\kappa)\kappa^2$$
$$= 2\int_0^\kappa \beta(\xi)(\kappa-\xi)d\xi = 2\int_0^\kappa \beta(\eta)\eta d\eta = 2g_c$$

即ち a_c, g_c, i_c の間には次の關係あり。

$$\left.\begin{aligned} \frac{da_c}{d\kappa} &= \beta(\kappa) \\ \frac{dg_c}{d\kappa} &= a_c \\ \frac{di_c}{d\kappa} &= 2g_c \end{aligned}\right\} \text{ 又は } \left\{\begin{aligned} a_c &= \int \beta d\kappa + c_0 \\ g_c &= \int a_c\, d\kappa + c_1 \quad \cdots\cdots\cdots(19) \\ i_c &= 2\int g_c\, d\kappa + c_2 \quad \cdots\cdots\cdots(20) \end{aligned}\right.$$

又 (5)式に定義せる $g_s = \sum_{\nu=1}^{s} p_\nu(\kappa - \delta_\nu)$, $i_s = \sum_{\nu=1}^{s} p_\nu(\kappa-\delta_\nu)^2$ より直ちに次の關係を得。

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial g_s}{\partial \kappa}&=a_s\\ \frac{\partial i_s}{\partial \kappa}&=2g_s\end{aligned}\right\}\ \text{又は}\ \left\{\begin{aligned}g_s&=\int a_s\,d\kappa+c_3 \quad\cdots\cdots(21)\\ i_s&=2\int g_s\,d\kappa+c_4 \quad\cdots\cdots(22)\end{aligned}\right.$$

又(7)式に定義せる $g=g_c+ng_s$, $i=i_c+ni_s$ と (19)～(22) 式より直ちに次の結果を得。

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial \kappa}&=a\\ \frac{\partial i}{\partial \kappa}&=2g\end{aligned}\right\}\ \text{又は}\ \left\{\begin{aligned}g&=\int a\,d\kappa+c_5 \quad\cdots\cdots(23)\\ i&=2\int g\,d\kappa+c_6 \quad\cdots\cdots(24)\end{aligned}\right.$$

又 $\kappa\geqq\eta$ なるが故に

$$\kappa a_c-g_c=\kappa\int_0^\kappa\beta d\eta-\int_0^\kappa\beta\eta d\eta=\int_0^\kappa\beta(\kappa-\eta)d\eta\geqq0$$

$$\kappa g_c-i_c=\kappa\int_0^\kappa\beta\eta d\eta-\int_0^\kappa\beta\eta^2 d\eta=\int_0^\kappa\beta\eta(\kappa-\eta)d\eta\geqq0$$

なり。故に a_c, i_c, g_c の間には次の關係もあり。

$$1\geqq a_c\geqq\frac{g_c}{\kappa}\geqq\frac{i_c}{\kappa^2}\quad\cdots\cdots(25)$$

重心軸比の定義により

$$\int_0^\kappa\beta(\rho_c-\xi)d\xi=0,\qquad \sum_{\nu=1}^{s}p_\nu(\rho_s-\delta_\nu)=0,\qquad \int_0^\kappa\beta(\rho-\xi)d\xi+n\sum_{\nu=1}^{s}p_\nu(\rho-\delta_\nu)=0$$

なるが故に，面率比は又次の如くにも表す事を得。

(16)式より $\quad g_c=(\kappa-\rho_c)a_c \quad\cdots\cdots(26)$

(17)式より $\quad g_s=(\kappa-\rho_s)a_s \quad\cdots\cdots(27)$

(18)式より $\quad g=(\kappa-\rho)a \quad\cdots\cdots(28)$

$$\begin{aligned}i_c&=\int_0^\kappa\beta\eta^2d\eta=\int_0^\kappa\beta(\kappa-\xi)^2d\xi=\int_0^\kappa\beta\left\{(\kappa-\rho_c)+(\rho_c-\xi)\right\}^2d\xi\\ &=(\kappa-\rho_c)^2\int_0^\kappa\beta d\xi+\int_0^\kappa\beta(\rho_c-\xi)^2d\xi\equiv(\kappa-\rho_c)^2a_c+i_{c0}\\ &=(\kappa-\rho_c)g_c+i_{c0}\quad\cdots\cdots(29)\end{aligned}$$

爰に $\quad i_{c0}\equiv\int_0^\kappa\beta(\rho_c-\xi)^2d\xi \quad\cdots\cdots(30)$

とす。

$$\begin{aligned}i_s&\equiv\sum_{\nu=1}^{s}p_\nu(\kappa-\delta_\nu)^2=\sum_1^s p_\nu\left\{(\kappa-\rho_s)+(\rho_s-\delta_\nu)\right\}^2\\ &=(\kappa-\rho_s)^2\sum_1^s p_\nu+\sum_1^s p_\nu(\rho_s-\delta_\nu)^2\equiv(\kappa-\rho_s)^2p+i_{s0}\\ &=(\kappa-\rho_s)g_s+i_{s0}\quad\cdots\cdots(31)\end{aligned}$$

爰に $\quad i_{s0}\equiv\sum_{\nu=1}^{s}p_\nu(\rho_s-\delta_\nu)^2 \quad\cdots\cdots(32)$

とす。

$$i=\int_0^\kappa \beta\eta^2 d\eta+n\sum_1^s p_\nu(\kappa-\delta_\nu)^2$$

$$=\int_0^\kappa \beta\left\{(\kappa-\rho)+(\rho-\xi)\right\}^2 d\xi+n\sum_1^s p_\nu\left\{(\kappa-\rho)+(\rho-\delta_\nu)\right\}^2$$

$$=(\kappa-\rho)^2\int_0^\kappa\beta d\xi+\int_0^\kappa\beta(\rho-\xi)^2d\xi+(\kappa-\rho)^2 n\sum_1^s p_\nu+n\sum_1^s p_\nu(\rho-\delta_\nu)^2$$

$$\equiv(\kappa-\rho)^2 a+i_0=(\kappa-\rho)g+i_0 \qquad\cdots\cdots(33)$$

爰に
$$i_0\equiv\int_0^\kappa\beta(\rho-\xi)^2d\xi+n\sum_{\nu=1}^s p_\nu(\rho-\delta_\nu)^2 \qquad\cdots\cdots(34)$$

とす。

i_{s0} は又次の如くにも表す事を得。 $p_\nu\equiv\omega_\nu p$ と置けば

$$i_{s0}=\sum_{\nu=1}^s\omega_\nu p(\rho_s-\delta_\nu)^2=p\sum_{\nu=1}^s\omega_\nu(\rho_s-\delta_\nu)^2\equiv p\alpha \qquad\cdots\cdots(35)$$

爰に
$$\alpha\equiv\sum_{\nu=1}^s\omega_\nu(\rho_s-\delta_\nu)^2=\sum_{\nu=1}^s\omega_\nu\left(\sum_{\nu=1}^s\omega_\nu\delta_\nu-\delta_\nu\right)^2$$

$$=\sum_{\nu=1}^s\omega_\nu\left\{\left(\sum_{\nu=1}^s\omega_\nu\delta_\nu\right)^2-2\delta_\nu\sum_{\nu=1}^s\omega_\nu\delta_\nu+\delta_\nu^2\right\}$$

$$=\left(\sum_{\nu=1}^s\omega_\nu\delta_\nu\right)^2-2\left(\sum_{\nu=1}^s\omega_\nu\delta_\nu\right)^2+\sum_{\nu=1}^s\omega_\nu\delta_\nu^2$$

$$=\sum_{\nu=1}^s\omega_\nu\delta_\nu^2-\left(\sum_{\nu=1}^s\omega_\nu\delta_\nu\right)^2 \qquad\cdots\cdots(36)$$

3. 平衡中立軸比

今

	コンクリート	鐵 筋
許容應力	$\bar{\sigma}_c$	$\bar{\sigma}_s$

にて表す事とし

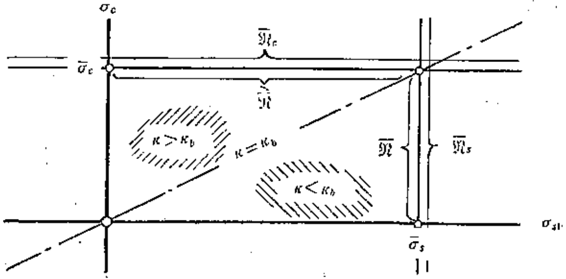
$$\left.\begin{array}{l}\sigma_c=\bar{\sigma}_c\\ \sigma_{s1}=\bar{\sigma}_s\end{array}\right\}\text{ の時}\qquad \kappa=\kappa_b$$

なりとすれば (9) 式より

$$\frac{-\bar{\sigma}_s/n}{\kappa_b-\delta_1}=\frac{\bar{\sigma}_c}{\kappa_b}\qquad \text{即ち}$$

$$\kappa_b=\frac{\delta_1}{1+\dfrac{\bar{\sigma}_s/n}{\bar{\sigma}_c}}\quad\cdots\cdots(37)$$

第 二 圖



第三節 許容抵抗力及許容抵抗力率

今 (10), (11), (12) 式にて與へらる $\mathfrak{M}$ 又は $\mathfrak{M}$ の中

	$\sigma_{s1}=\bar{\sigma}_s$	$\sigma_c=\bar{\sigma}_c$	$\sigma_{s1}=\bar{\sigma}_s$ $\sigma_c \lesseqgtr \bar{\sigma}_c$	$\sigma_{s1} \lesseqgtr \bar{\sigma}_s$ $\sigma_c=\bar{\sigma}_c$	の時の
$\mathfrak{N}$ を	$\overline{\mathfrak{N}}_s$	$\overline{\mathfrak{N}}_c$	$\overline{\mathfrak{N}}$	$\overline{\mathfrak{N}}$	
$\mathfrak{M}$ を	$\overline{\mathfrak{M}}_s$	$\overline{\mathfrak{M}}_c$	$\overline{\mathfrak{M}}$	$\overline{\mathfrak{M}}$	

にて表す事とす。

$\overline{\mathfrak{N}}$ 又は $\overline{\mathfrak{M}}$ を夫々許容抵抗力又は許容抵抗力率と稱する事とす。

然らば (10), (11), (37) 式より

$\kappa<\kappa_b$ の時
$$\overline{\mathfrak{N}}=\overline{\mathfrak{N}}_s=A_0\frac{-\bar{\sigma}_s}{n}\frac{g}{\kappa-\delta_1}=A_0\bar{\sigma}_c\frac{\kappa_b-\delta_1}{\kappa_b}\frac{g}{\kappa-\delta_1} \qquad \text{(38)}$$

$>$
$$\overline{\mathfrak{N}}=\overline{\mathfrak{N}}_c=A_0\,\bar{\sigma}_c\frac{g}{\kappa} \qquad \text{(39)}$$

$<$
$$\overline{\mathfrak{M}}=\overline{\mathfrak{M}}_s=A_0h\frac{-\bar{\sigma}_s}{n}\frac{g}{\kappa-\delta_1}\varepsilon=A_0h\bar{\sigma}_c\frac{\kappa_b-\delta_1}{\kappa_b}\frac{g}{\kappa-\delta_1}\varepsilon \qquad \text{(40)}$$

$$=A_0h\frac{-\bar{\sigma}_s}{n}\frac{i}{\kappa-\delta_1}\frac{\varepsilon}{\eta n}=A_0h\bar{\sigma}_c\frac{\kappa_b-\delta_1}{\kappa_b}\frac{i}{\kappa-\delta_1}\frac{\varepsilon}{\eta n} \qquad \text{(41)}$$

$>$
$$\overline{\mathfrak{M}}=\overline{\mathfrak{M}}_c=A_0h\bar{\sigma}_c\frac{g}{\kappa}\varepsilon=A_0h\bar{\sigma}_c\frac{i}{\kappa}\frac{\varepsilon}{\eta n} \qquad \text{(42)}$$

を得。

第四節　價

單位容積の價を單價と稱する事とす。爰に價とは價額のみならず，部材重量の輕減を目的とする時は重量を，容積減少を目的とする時は容積をも價と稱するものにして，一般に減少せんとする量を價と稱するものとす。

今

	コンクリート	鐵筋
單價	K_c	K_s

にて表し，尙

部材單位長さの價	K
縱鐵筋の繼手等に基因する割增係數	θ
部材單位長さに附隨する價	K_0A_0
（コンクリート及縱鐵筋以外の）	

とする時は

$$K=K_c(A_0-A_s)+\theta K_sA_s+K_0A_0$$

なり。今

$$\frac{K_s}{K_c}\equiv m \qquad \frac{K_0}{K_c}\equiv\omega \qquad \frac{1}{n}\frac{\theta m-1}{1+\omega}\equiv\lambda$$

とする時は

$$K=K_cA_0\left(1-\frac{A_s}{A_0}+\theta\frac{K_sA_s}{K_cA_0}+\frac{K_0}{K_c}\right)$$

$$=K_cA_0(1-p+\theta mp+\omega)$$

$$=K_cA_0(1+\omega)\left(1+\frac{\theta m-1}{1+\omega}p\right)$$

$$=K_cA_0(1+\omega)(1+\lambda np) \quad \cdots\cdots (43)$$

第五節 效 率

今

$$\frac{\overline{\mathfrak{N}}}{K}\equiv X \quad \cdots\cdots (44)$$

にて表す事とす。從つて (40)式より

$$\frac{\overline{\mathfrak{M}}}{K}=Xe \quad \cdots\cdots (45)$$

なり。X を當該斷面の**偏心力に關する效率**，Xe を**力率に關する效率**と稱する事とす。

部材の當該斷面に於ける目的は $|X|$ 又は Xe をして最大ならしむるにある事明なり。

(38)～(43) 式により

$\kappa<\kappa_b$ の時
$$X=\frac{\overline{\mathfrak{N}}_s}{K}=\frac{\bar{\sigma}_c}{(1+\omega)K_c}\frac{\kappa_b-\delta_1}{\kappa_b}\frac{1}{\kappa-\delta_1}\frac{g}{1+\lambda np}\equiv\frac{\bar{\sigma}_c}{(1+\omega)K_c}\chi_s \quad \cdots\cdots (46)$$

$>$
$$X=\frac{\overline{\mathfrak{N}}_c}{K}=\frac{\bar{\sigma}_c}{(1+\omega)K_c}\frac{1}{\kappa}\frac{g}{1+\lambda np}\equiv\frac{\bar{\sigma}_c}{(1+\omega)K_c}\chi_c \quad \cdots\cdots (47)$$

を得。爰に

$$\chi_s(\kappa, p_1, \ldots. p_s)\equiv\frac{\kappa_b-\delta_1}{\kappa_b}\frac{1}{\kappa-\delta_1}\frac{g}{1+\lambda np} \quad \cdots\cdots (48)$$

$$\chi_c(\quad '' \quad)\equiv\frac{1}{\kappa}\frac{g}{1+\lambda np} \quad \cdots\cdots (49)$$

なるものとす。尙

$$\left.\begin{array}{ll} \kappa<\kappa_b \text{ の時} & \chi\equiv\chi_s \\ '' > '' \quad '' & \chi\equiv\chi_c \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots (50)$$

なるものとすれば

$$X=\frac{\bar{\sigma}_c}{(1+\omega)K_c}\chi$$

$$Xe=\frac{\bar{\sigma}_c}{(1+\omega)K_c}\chi e$$

の如く表す事を得。

此式を見るに X は $\bar{\sigma}_c/(1+\omega)K_c$ に正比例す。即ちコンクリートの許容强度に正比例し，コンクリートの單價に逆比例す。即ち純コンクリートの效率の問題となる。純コンクリートの效率に就ては本論の範圍外なるが故に爰には觸れざるものとす。[1)]

材料及工法が一定ならば，$\bar{\sigma}_c/(1+\omega)K_c$ は常數と見做し得るが故に，效率は

偏心力に關し χ

力率に關し χe

に正比例す。

若し e が不變なるが如き拘束をなす時，即ち $e=\varepsilon h=\xi h+\gamma h$ に於て ξ を不變とする時，即ち (8) 式の

1) 拙著コンクリートの配合法

$$\zeta=\frac{i(\kappa, p_1 \ldots . p_s)}{g(\qquad ,, \qquad)}-\kappa$$

に於て右邊を不變とする時は，偏心力及力率に關する效率は倶に χ に正比例す。即ち效率の吟味は χ なる函數の吟味に歸着す。χ を效率函數と稱する事とす。

第六節 函數の變換

(7), (50) 式等に定義せる a, g, i, χ 等は何れも $\kappa, p_1, \ldots . p_s$ の函數なれ共，之等の間には

$$\zeta=\frac{i(\kappa, p_1, \ldots . p_s)}{g(\qquad ,, \qquad)}-\kappa$$

なる關係あるが故に，a, g, i, χ, p_1 等を $\zeta, \kappa, p_2, \ldots . p_s$ の函數に變換せんとす。

1. 拘束條件

(7), (8) 式より

$$\zeta=\frac{i}{g}-\kappa=-\frac{\kappa g-i}{g}=-\frac{\kappa g_c-i_c+n(\kappa g_s-i_s)}{g_c+ng_s} \quad \ldots\ldots(51)$$

(5) 式により $\quad \kappa g_s-i_s=\kappa\sum_{\nu=1}^{s}p_\nu(\kappa-\delta_\nu)-\sum_{\nu=1}^{s}p_\nu(\kappa-\delta_\nu)^2=\sum_{\nu=1}^{s}p_\nu(\kappa-\delta_\nu)\delta_\nu$

なるが故に

$$\zeta=-\frac{\kappa g_c-i_c+n\sum_{\nu=1}^{s}p_\nu(\kappa-\delta_\nu)\delta_\nu}{g_c+n\sum_{\nu=1}^{s}p_\nu(\kappa-\delta_\nu)} \quad \ldots\ldots(51')$$

即ち

$$(\zeta+\kappa)g_c-i_c+n\sum_{\nu=1}^{s}p_\nu(\zeta+\delta_\nu)(\kappa-\delta_\nu)=0 \quad \ldots\ldots(51'')$$

特に狀態 II の時は (3), (26), (29) 式により

$${}_{II}g_c=\kappa-{}_{II}\rho_c, \qquad {}_{II}i_c=(\kappa-{}_{II}\rho_c)^2+{}_{II}i_{co} \qquad \kappa{}_{II}g_c-{}_{II}i_c={}_{II}\rho_c\kappa-({}_{II}\rho_c^2+{}_{II}i_{co})$$

なるが故に (51″) 式より

$$\zeta(\kappa-{}_{II}\rho_c)+{}_{II}\rho_c\kappa-({}_{II}\rho_c^2+{}_{II}i_{co})+\kappa n\sum_{\nu=1}^{s}p_\nu(\zeta+\delta_\nu)-n\sum_{\nu=1}^{s}p_\nu(\zeta+\delta_\nu)\delta_\nu=0$$

即ち

$$\kappa=\frac{{}_{II}\rho_c^2+{}_{II}i_{co}+{}_{II}\rho_c\zeta+n\sum_{\nu=1}^{s}p_\nu(\zeta+\delta_\nu)\delta_\nu}{{}_{II}\rho_c+\zeta+n\sum_{\nu=1}^{s}p_\nu(\zeta+\delta_\nu)} \quad \ldots\ldots(51'')_{II}$$

κ は又別の形式にも表す事を得。(5), (11) 式より

$$\zeta+\rho=\frac{i}{g}-\kappa+\kappa-\frac{g}{a}=\frac{ai-g^2}{ag}$$

然るに (26), (29) 式より $g=(\kappa-\rho)a$, $i=(\kappa-\rho)^2a+i_0$ 從つて $ai-g^2=ai_0$ なるが故に

$$\zeta+\rho=\frac{i_0}{g}=\frac{i_0}{(\kappa-\rho)a}$$

即ち $$\kappa=\rho+\frac{i_0}{(\zeta+\rho)a} \qquad\cdots\cdots(51''')$$

2. 變　　換

p_1:— (51'') 式より

$$\zeta g_c+\kappa g_c-i_c+np_1(\zeta+\delta_1)(\kappa-\delta_1)+n\sum_{\nu=2}^{s}p_\nu(\zeta+\delta_\nu)(\kappa-\delta_\nu)=0$$

即ち

$$np_1=\frac{-1}{(\zeta+\delta_1)(\kappa-\delta_1)}\left\{\zeta g_c+\kappa g_c-i_c+n\sum_{\nu=2}^{s}p_\nu(\zeta+\delta_\nu)(\kappa-\delta_\nu)\right\} \qquad\cdots\cdots(52)$$

g:— (7), (52) 式より

$$g=g_c+ng_s=g_c+n\sum_{\nu=1}^{s}p_\nu(\kappa-\delta_\nu)=g_c+np_1(\kappa-\delta_1)+n\sum_{\nu=2}^{s}p_\nu(\kappa-\delta_\nu)$$

$$=g_c+n\sum_{\nu=2}^{s}p_\nu(\kappa-\delta_\nu)-\frac{\zeta g_c+\kappa g_c-i_c+n\sum_{\nu=2}^{s}p_\nu(\zeta+\delta_\nu)(\kappa-\delta_\nu)}{\zeta+\delta_1}$$

$$=\frac{\delta_1 g_c-\left\{\kappa g_c-i_c-n\sum_{\nu=2}^{s}p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)(\kappa-\delta_\nu)\right\}}{\zeta+\delta_1}$$

$$\equiv\frac{\delta_1 g_c-u}{\zeta+\delta_1}\equiv\frac{\varphi}{\zeta+\delta_1} \qquad\cdots\cdots(53)$$

爰に $$u(\kappa,p_2,\ \ldots\ p_s)\equiv\kappa g_c-i_c-n\sum_{\nu=2}^{s}p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)(\kappa-\delta_\nu) \qquad\cdots\cdots(54)$$

$$\varphi(\qquad''\qquad)\equiv\delta_1 g_c-u \qquad\cdots\cdots(55)$$

i:— (8), (53) 式より

$$i=(\zeta+\kappa)g=\frac{\zeta+\kappa}{\zeta+\delta_1}\varphi \qquad\cdots\cdots(56)$$

a:— (7), (52) 式より

$$a=a_c+na_s=a_c+n\sum_{\nu=2}^{s}p_\nu+np_1$$

$$=a_c+n\sum_{\nu=2}^{s}p_\nu-\frac{\zeta g_c+\kappa g_c-i_c+n\sum_{\nu=2}^{s}p_\nu(\zeta+\delta_\nu)(\kappa-\delta_\nu)}{(\zeta+\delta_1)(\kappa-\delta_1)}$$

$$=\frac{1}{(\zeta+\delta_1)(\kappa-\delta_1)}\Big[(\zeta+\delta_1)(\kappa-\delta_1)a_c-\left\{(\zeta+\delta_1)+(\kappa-\delta_1)\right\}g_c+i_c$$
$$+(\zeta+\delta_1)(\kappa-\delta_1)n\sum_{\nu=2}^{s}p_\nu-n\sum_{\nu=2}^{s}p_\nu\left\{(\zeta+\delta_1)-(\delta_1-\delta_\nu)\right\}(\kappa-\delta_\nu)\Big]$$

$$=\frac{1}{(\zeta+\delta_1)(\kappa-\delta_1)}\Big[-(\kappa-\delta_1)g_c+i_c+n\sum_{\nu=2}^{s}p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)(\kappa-\delta_\nu)$$
$$+(\zeta+\delta_1)\left\{(\kappa-\delta_1)a_c-g_c-n\sum_{\nu=2}^{s}p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)\right\}\Big]$$

然るに (54), (55) 式により括弧の中の前項は φ, (60) 式により後項は $-(\zeta+\delta_1)\dfrac{\partial\varphi}{\partial\kappa}$ なるが故に

$$a=\frac{1}{(\zeta+\delta_1)(\kappa-\delta_1)}\left\{\varphi-(\zeta+\delta_1)\frac{\partial\varphi}{\partial\kappa}\right\} \quad\cdots\cdots(57)$$

$1+\lambda np$:— (7), (52) 式より

$$\begin{aligned}1+\lambda np&=1+\lambda n\sum_{\nu=2}^{s}p_\nu+\lambda np_1\\&=1+\lambda n\sum_{\nu=2}^{s}p_\nu-\lambda\frac{\zeta g_c+\kappa g_c-i_c+n\sum_{\nu=2}^{s}p_\nu(\zeta+\delta_\nu)(\kappa-\delta_\nu)}{(\zeta+\delta_1)(\kappa-\delta_1)}\\&=\frac{1}{(\zeta+\delta_1)(\kappa-\delta_1)}\Big[(\zeta+\delta_1)(\kappa-\delta_1)-\lambda(\zeta+\kappa)g_c+\lambda i_c\\&\qquad+\lambda n\sum_{\nu=2}^{s}p_\nu\Big\{(\kappa-\delta_1)(\zeta+\delta_1)-(\kappa-\delta_\nu)(\zeta+\delta_\nu)\Big\}\Big]\end{aligned}$$

然るに

$$\begin{aligned}(\kappa-\delta_1)(\zeta+\delta_1)-(\kappa-\delta_\nu)(\zeta+\delta_\nu)&=(\kappa-\delta_1)(\zeta+\delta_\nu+\delta_1-\delta_\nu)-(\kappa-\delta_\nu)(\zeta+\delta_\nu)\\&=(\delta_1-\delta_\nu)\{(\kappa-\delta_\nu)-(\zeta+\delta_1)\}\end{aligned}$$

なるが故に

$$\begin{aligned}1+\lambda np&=\frac{1}{(\zeta+\delta_1)(\kappa-\delta_1)}\Big[(\zeta+\delta_1)(\kappa-\delta_1)-\lambda(\zeta+\kappa)g_c+\lambda i_c\\&\qquad+\lambda n\sum_{\nu=2}^{s}p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)\Big\{(\kappa-\delta_\nu)-(\zeta+\delta_1)\Big\}\Big]\\&=\frac{1}{(\zeta+\delta_1)(\kappa-\delta_1)}\Big[-\lambda\zeta g_c-\lambda\Big\{\kappa g_c-i_c-n\sum_{\nu=2}^{s}p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)(\kappa-\delta_\nu)\Big\}\\&\qquad-(\zeta+\delta_1)\Big\{-(\kappa-\delta_1)+\lambda n\sum_{\nu=2}^{s}p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)\Big\}\Big]\\&\equiv-\frac{\{\lambda(\zeta g_c+u)+(\zeta+\delta_1)v\}}{(\zeta+\delta_1)(\kappa-\delta_1)}\equiv\frac{-\psi}{(\zeta+\delta_1)(\kappa-\delta_1)}\end{aligned} \quad\cdots\cdots(58)$$

爰に

$$v(\kappa,p_2,\ldots\ldots p_s)\equiv-(\kappa-\delta_1)+\lambda n\sum_{\nu=2}^{s}p_\nu(\delta_1-\delta_\nu) \quad\cdots\cdots(59)$$

$$\begin{aligned}\psi(\zeta,\kappa,p_2,\ldots\ldots p_s)&\equiv\lambda(\zeta g_c+u)+(\zeta+\delta_1)v\\&=\lambda\{(\zeta+\delta_1)g_c-(\delta_1g_c-u)\}+(\zeta+\delta_1)v\\&=(\zeta+\delta_1)(\lambda g_c+v)-\lambda\varphi\end{aligned} \quad\cdots\cdots(60)$$

χ_s,χ_c:— (48), (49), (53), (58) 式より

$$\chi_s(\zeta,\kappa,p_2,\ldots\ldots p_s)=\frac{\kappa_b-\delta_1}{\kappa_b}\,\frac{1}{\kappa-\delta_1}\,\frac{g}{1+\lambda np}=-\frac{\kappa_b-\delta_1}{\kappa_b}\,\frac{\varphi}{\psi} \quad\cdots\cdots(61)$$

$$\chi_c(\quad〃\quad)=\frac{1}{\kappa}\,\frac{g}{1+\lambda np}=-\frac{\kappa-\delta_1}{\kappa}\,\frac{\varphi}{\psi} \quad\cdots\cdots(62)$$

$\mathfrak{N},\mathfrak{M}$:— (8), (10), (11), (53) 式より

$$\mathfrak{N}=A_0\frac{-\sigma_{s1}}{n}\,\frac{\varphi}{\kappa-\delta_1}\,\frac{1}{\zeta+\delta_1}=A_0\sigma_c\frac{\varphi}{\kappa}\,\frac{1}{\zeta+\delta_1} \quad\cdots\cdots(63)$$

$$\mathfrak{M}=A_0h\frac{-\sigma_{s1}}{n}\frac{\varphi}{\kappa-\delta_1}\frac{\zeta+\gamma}{\zeta+\delta_1}=A_0h\sigma_c\frac{\varphi}{\kappa}\frac{\zeta+\gamma}{\zeta+\delta_1}\quad\cdots\cdots(64)$$

を得。

3. 函數の關係

以上數節に記せる諸函數の主なる關係を一括すれば次の如し。

$$\left.\begin{aligned}a_c(\kappa)&=\int_0^\kappa\beta d\eta\\ g_c(\kappa)&=\int_0^\kappa\beta\eta d\eta\\ i_c(\kappa)&=\int_0^\kappa\beta\eta^2 d\eta\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(2)$$

$$u(\kappa,p_2,\ldots.p_s)=\kappa g_c-i_c-n\sum_2^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)(\kappa-\delta_\nu)\quad\cdots\cdots(54)$$

$$v(\quad〃\quad)=-(\kappa-\delta_1)+\lambda n\sum_2^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)\quad\cdots\cdots(59)$$

$$\varphi(\quad〃\quad)=\delta_1 g_c-u=-(\kappa-\delta_1)g_c+i_c+n\sum_{\nu=2}^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)(\kappa-\delta_\nu)\quad\cdots\cdots(55)$$

$$\lambda u+\delta_1 v=-\delta_1(\kappa-\delta_1)+\lambda\left\{\kappa g_c-i_c-n\sum_{\nu=2}^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)(\kappa-\delta_1-\delta_\nu)\right\}\quad\cdots\cdots(65)$$

$$\lambda g_c+v=-(\kappa-\delta_1)+\lambda\left\{g_c+n\sum_{\nu=2}^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)\right\}\quad\cdots\cdots(66)$$

$$\psi(\zeta,\kappa,p_2,\ldots.p_s)=(\zeta+\delta_1)(\lambda g_c+v)-\lambda\varphi\quad\cdots\cdots(60)$$

$$\chi_s(\quad〃\quad)=-\frac{\kappa_b-\delta_1}{\kappa_b}\frac{\varphi}{\psi}\quad\cdots\cdots(61)$$

$$\chi_c(\quad〃\quad)=-\frac{\kappa-\delta_1}{\kappa}\frac{\varphi}{\psi}\quad\cdots\cdots(62)$$

$$\frac{dg_c}{d\kappa}=a_c\quad\cdots\cdots(19)$$

$$\frac{di_c}{d\kappa}=2g_c\quad\cdots\cdots(20)$$

以上の關係より次の關係を得。

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial p_\mu}&=-n(\delta_1-\delta_\mu)(\kappa-\delta_\mu),\qquad \mu=2,3,\ldots.s\\ \frac{\partial v}{\partial p_\mu}&=\lambda n(\delta_1-\delta_\mu)\\ \frac{\partial u}{\partial\kappa}&=\kappa a_c-g_c-n\sum_{\nu=2}^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)\\ \frac{\partial v}{\partial\kappa}&=-1\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(67)$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}=\lambda g_c+v=-(\kappa-\delta_1)+\lambda\left\{g_c+n\sum_{\nu=2}^{s}p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)\right\}\\
&\frac{\partial\varphi}{\partial p_\mu}=-\frac{\partial u}{\partial p_\mu}=n(\delta_1-\delta_\mu)(\kappa-\delta_\mu)\\
&\frac{\partial\psi}{\partial p_\mu}=\lambda\frac{\partial u}{\partial p_\mu}+(\zeta+\delta_1)\frac{\partial v}{\partial p_\mu}=\lambda n(\delta_1-\delta_\mu)\left\{(\zeta+\delta_1)-(\kappa-\delta_\mu)\right\}\\
&\frac{\partial\varphi}{\partial\kappa}=\delta_1 a_c-\frac{\partial u}{\partial\kappa}=\delta_1 a_c-\kappa a_c+g_c+n\sum_{\nu=2}^{s}p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)\\
&\qquad\qquad=(\delta_1-\rho_c)a_c+n\sum_{\nu=2}^{s}p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)>0\\
&\frac{\partial\psi}{\partial\kappa}=(\zeta+\delta_1)(\lambda a_c-1)-\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial\kappa}=(\zeta+\delta_1)(\lambda a_c-1)-\lambda\left(\delta_1 a_c-\frac{\partial u}{\partial\kappa}\right)
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(68)
$$

$$\frac{\partial\chi_s}{\partial\zeta}=\frac{\kappa_b-\delta_1}{\kappa_b}\,\frac{\varphi}{\psi^2}\,\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\cdots\cdots(69)$$

$$\frac{\partial\chi_c}{\partial\zeta}=\frac{\kappa-\delta_1}{\kappa}\,\frac{\varphi}{\psi^2}\,\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\cdots\cdots(70)$$

$$\frac{\partial\chi_s}{\partial p_\mu}=-\frac{\kappa_b-\delta_1}{\kappa_b}\,\frac{1}{\psi^2}\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial p_\mu}-\varphi\frac{\partial\psi}{\partial p_\mu}\right)\cdots\cdots(71)$$

$$\frac{\partial\chi_c}{\partial p_\mu}=-\frac{\kappa-\delta_1}{\kappa}\,\frac{1}{\psi^2}\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial p_\mu}-\varphi\frac{\partial\psi}{\partial p_\mu}\right)\cdots\cdots(72)$$

$$\frac{\partial\chi_s}{\partial\kappa}=\frac{1}{\kappa_b{}^2\psi^2}\left\{-\kappa_b(\kappa_b-\delta_1)\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial\kappa}-\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\kappa}\right)\right\}\cdots\cdots(73)$$

$$\frac{\partial\chi_c}{\partial\kappa}=\frac{1}{\kappa^2\psi^2}\left\{-\kappa(\kappa-\delta_1)\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial\kappa}-\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\kappa}\right)-\delta_1\varphi\psi\right\}\cdots\cdots(74)$$

第七節 變　　域

1. 限　　定

問題を簡單にする爲に極めて稀なる場合を除外する事とす。卽ち次の場合のみに限定する事とす。

i) 偏心壓力，彎曲，又は中心壓力

ii) 最下端の鐵筋 A_{s1} は全等値斷面の重心より少しく下位にあり。

i) の限定と (53), (15) 式より

$$g=\frac{\varphi}{\zeta+\delta_1}\geqq 0\cdots\cdots(75)$$

i) の限定より

$$\delta_1>{}_n\rho\qquad 卽ち\qquad \zeta+\delta_1>\zeta+{}_n\rho$$

然るに (51''') 式により $\zeta+{}_n\rho={}_n i_0/g$, (34) 式により ${}_n i_0>0$, (75) 式により $g>0$ なるが故に

$$\zeta+\delta_1>\zeta+{}_n\rho=\frac{{}_n i_0}{g}>0$$

なり。從つて (75) 式により

$$\varphi>0\cdots\cdots(76)$$

なり。

2. p_ν $(\nu=1, 2, \ldots. s)$

挿入し得べき鐵筋量は一定限度を超過する能はざるが故に，p_ν の變域は無制限なる能はず。p_ν の上端を $\overline{p_\nu}$ にて表すものとすれば

$$0 \leqq p_\nu \lesseqgtr \overline{p_\nu} \quad \cdots\cdots(77)$$

ならざる可かず。

3. ζ

(52), (55),式により

$$\frac{\partial(np_1)}{\partial\zeta}=-\frac{g_c+n\sum_2^s p_\nu(\kappa-\delta_\nu)}{(\zeta+\delta_1)(\kappa-\delta_1)}+\frac{\zeta g_c+\kappa g_c-i_c+n\sum_2^s p_\nu(\zeta+\delta_\nu)(\kappa-\delta_\nu)}{(\zeta+\delta_1)^2(\kappa-\delta_1)}$$

$$=\frac{1}{(\zeta+\delta_1)^2(\kappa-\delta_1)}\left\{-\delta_1 g_c+\kappa g_c-i_c-n\sum_2^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)(\kappa-\delta_\nu)\right\}$$

$$=\frac{-\varphi}{(\zeta+\delta_1)^2(\kappa-\delta_1)}$$

なり。(76) 式により $\varphi>0$ なるが故に，上式は $\kappa\lesseqgtr\delta_1$ に從つて p_1 は單調に増加又は減少する事を示す。

(77) 式により $0\leqq p_1\lesseqgtr\overline{p}_1$ なるべきが故に，ζ の變域は $p_1=0$ なる場合と $p_1=\overline{p}_1$ なる場合との間にありて，且つ (75) 式の $g\geqq 0$ なる條件を滿足せざる可らず。

ζ の變域の上端を $\overline{\zeta}$，下端を $\underline{\zeta}$ にて表す時は

$$\underline{\zeta} \leqq \zeta \lesseqgtr \overline{\zeta}$$

なるべき事勿論にして，尙 $\underline{\zeta}$, $\overline{\zeta}$ は前述により

$$\left.\begin{array}{lll} & \kappa<\delta_1 \text{ の時} & \delta_1<\kappa \text{ の時} \\ \overline{\zeta} & \zeta_{(p_1=\overline{p}_1)} \text{ 又は} \infty & \zeta_{(p_1=0)} \\ \underline{\zeta} & \zeta_{(p_1=0)} & \zeta_{(p_1=\overline{p}_1)} \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots(78)$$

ならざる可らず。爰に $\zeta_{(p_1=0)}$, $\zeta_{(p_1=\overline{p}_1)}$ は (51′) 式により

$$\left.\begin{aligned} \zeta_{(p_1=0)}&=-\frac{\kappa g_c-i_c+n\sum_2^s p_\nu(\kappa-\delta_\nu)\delta_\nu}{g_c+n\sum_2^s p_\nu(\kappa-\delta_\nu)} \\ \zeta_{(p_1=\overline{p}_1)}&=-\frac{\kappa g_c-i_c+n\overline{p}_1(\kappa-\delta_1)\delta_1+n\sum_2^s p_\nu(\kappa-\delta_\nu)\delta_\nu}{g_c+n\overline{p}_1(\kappa-\delta_1)+n\sum_2^s p_\nu(\kappa-\delta_\nu)} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(79)$$

$\kappa=\delta_1$ の時は $\zeta_{(p_1=0)}=\zeta_{(p_1=\overline{p})}$ となり，ζ は一意的に定まる。

$\kappa=\delta_1$ の時の ζ を $\zeta_{(\kappa=\delta_1)}$ にて表せば (51′) 式により

$$\zeta_{(\kappa=\delta_1)}=-\frac{\delta_1 g_c(\delta_1)-i_c(\delta_1)+n\sum_{\nu=2}^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)\delta_\nu}{g_c(\delta_1)+n\sum_{\nu=2}^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)} \quad \cdots\cdots(80)$$

なり。

第八節　效率函數

各變數 ζ, p_μ $(\mu=2,3,\ldots. s)$, κ 等の變化による效率函數の變化を吟味し，效率函數をして最大ならしむべき關係を求めんとす。

1.　ζ と效率函數

(69), (70) 式卽ち

$$\frac{\partial X_s}{\partial\zeta}=\frac{\kappa_b-\delta_1}{\kappa_b}\frac{\varphi}{\psi^2}\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}$$

$$\frac{\partial X_c}{\partial\zeta}=\frac{\kappa-\delta_1}{\kappa}\frac{\varphi}{\psi^2}\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}$$

に於て，先づ $\partial\psi/\partial\zeta$ を吟味せんとす。

(1)　$\dfrac{\partial\psi}{\partial\zeta}$

(68) 式より

$$\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}=\lambda g_c+v=-(\kappa-\delta_1)+\lambda\left\{g_c+n\sum_2^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)\right\}$$

なるが故に

1) $\kappa<\delta_1$ の時

$$\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}>0$$

2) $\delta_1<\kappa$ の時

$$f_{(\zeta)}\equiv\frac{\kappa-\delta_1}{g_c+n\sum_2^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)}\quad\cdots\cdots(81)$$

と置く時は

$$\lambda\gtrless f_{(\zeta)}\ \text{に從つて}\ \frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\gtrless0$$

なり。故に今 $f_{(\zeta)}$ の評價をなさんとす。

(2)　$f_{(\zeta)}$

(81) 式を見るに $f_{(\zeta)}$ は p_ν の增加に伴ひ減少する事明なり。又

$$\frac{\partial f_{(\zeta)}}{\partial\kappa}=\frac{1}{g_c+n\sum_2^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)}-\frac{\kappa-\delta_1}{\left\{g_c+n\sum_2^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)\right\}^2}a_c$$

$$=\frac{1}{\left\{g_c+n\sum_2^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)\right\}^2}\left\{-(\kappa-\delta_1)a_c+g_c+n\sum_2^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)\right\}$$

(68) 式により

$$=\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial\kappa}}{\left\{g_c+n\sum_2^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)\right\}^2}>0$$

なるが故に $f_{(\zeta)}$ は κ と倶に單調に增加する事を知る。從つて $f_{(\zeta)}$ の最大値は $\kappa\to\infty$ の時にして，此時は (14) 式

により

$$\lim_{\kappa\to\infty}\frac{\pi g_c}{\kappa}=1$$

なるが故に

$$\lim_{\kappa\to\infty}f(\zeta)=\lim_{\kappa\to\infty}\frac{1-\dfrac{\delta_1}{\kappa}}{\dfrac{\pi g_c}{\kappa}+\dfrac{1}{\kappa}n\sum_{2}^{s}p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)}=1$$

なり。故に

$$f(\zeta)\leqq 1$$

なり。

(3) $\dfrac{\partial\chi_s}{\partial\zeta}$, $\dfrac{\partial\chi_c}{\partial\zeta}$:—

1) $\kappa<\delta_1$ の時

$\dfrac{\partial\psi}{\partial\zeta}>0$ なるが故に (69), (70)式により

$$\frac{\partial\chi_s}{\partial\zeta}<0,\quad \frac{\partial\chi_c}{\partial\zeta}<0 \qquad\cdots\cdots(82)$$

なり。

2) $\delta_1<\kappa$ の時

$\lambda\gtreqless f(\zeta)$ に從つて $\dfrac{\partial\psi}{\partial\zeta}\gtreqless 0$ なるが故に (70) 式により

$$\left.\begin{array}{ll}\lambda>1 \text{ ならば常に} & \dfrac{\partial\chi_c}{\partial\zeta}>0\\ \lambda<1 \text{ の場合には } \lambda\gtreqless f(\zeta) \text{ に從つて} & \dfrac{\partial\chi_c}{\partial\zeta}\gtreqless 0\end{array}\right\}\qquad\cdots\cdots(83)$$

なり。

2. p_μ と效率函數 $(\mu=2, 3, \ldots.s)$—

(71), (72) 式卽ち

$$\frac{\partial\chi_s}{\partial p_\mu}=-\frac{\kappa_b-\delta_1}{\kappa_b}\frac{1}{\psi^2}\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial p_\mu}-\varphi\frac{\partial\psi}{\partial p_\mu}\right)$$

$$\frac{\partial\chi_c}{\partial p_\mu}=-\frac{\kappa-\delta_1}{\kappa}\frac{1}{\psi^2}\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial p_\mu}-\varphi\frac{\partial\psi}{\partial p_\mu}\right)$$

に於て (68), (55), (60) 式により

$$\begin{aligned}\psi\frac{\partial\varphi}{\partial p_\mu}-\varphi\frac{\partial\psi}{\partial p_\mu}&=-n(\delta_1-\delta_\mu)\left\{-(\kappa-\delta_\mu)\psi-\lambda(\kappa-\delta_\mu)\varphi+\lambda(\zeta+\delta_1)\varphi\right\}\\&=-n(\delta_1-\delta_\mu)(\zeta+\delta_1)\{-(\kappa-\delta_\mu)(\lambda g_c+v)+\lambda\varphi\}\\&=-n(\delta_1-\delta_\mu)(\zeta+\delta_1)\Big[(\kappa-\delta_1)'\kappa-\delta_\mu)\\&\qquad-\lambda\Big\{(\kappa-\delta_\mu)(g_c+n\sum_{2}^{s}p_\nu(\delta_1-\delta_\mu))-\varphi\Big\}\Big]\end{aligned}$$

$$\equiv -n(\delta_1-\delta_\mu)(\zeta+\delta_1)\{(\kappa-\delta_1)(\kappa-\delta_\mu)-\lambda w_{(p_\mu)}\} \quad \cdots\cdots(84)$$

爰に

$$w_{(p_\mu)}\equiv(\kappa-\delta_\mu)\left\{g_c+n\sum_2^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)\right\}-\varphi \quad \cdots\cdots(85)$$

$$=(\kappa-\delta_\mu)\left\{g_c+n\sum_2^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)\right\}+(\kappa-\delta_1)g_c-i_c-n\sum_2^s d_\nu(\delta_1-\delta_\nu)(\kappa-\delta_\nu)$$

$$=(2\kappa-\delta_1-\delta_\mu)g_c-i_c-n\sum_2^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)(\delta_\mu-\delta_\nu) \quad \cdots\cdots(85')$$

なり。

先づ $w_{(p_\mu)}$ を吟味せんとす。

(1). $w_{(p_\mu)}$

I. $\kappa>\delta_\mu$ の時

定義により $\delta_1-\delta_\nu>0$, (76) 式により $\varphi>0$, 從つて (85) 式より

$$w_{(p_\mu)}<0$$

II. $1<\kappa$ の時

(26), (29) 式より ${}_{\text{II}}g_c=\kappa-{}_{\text{II}}\rho_c$, ${}_{\text{II}}i_c=(\kappa-{}_{\text{II}}\rho_c)^2+{}_{\text{II}}i_{co}$ なるが故に之を (85′) 式に代入すれば

$$w_{(p_\mu)}=(\kappa-{}_{\text{II}}\rho_c)(\kappa+{}_{\text{II}}\rho_c-\delta_1-\delta_\mu)-{}_{\text{II}}i_{co}-n\sum_{\nu=2}^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)(\delta_\mu-\delta_\nu)$$

なるが故に κ が充分大なる時は

$$w_{(p_\mu)}>0$$

なり。

又 (85′) 式より

$$\frac{dw_{(p_\mu)}}{d\kappa}=2g_c+(2\kappa-\delta_1-\delta_\mu)a_c+2g_c=(2\kappa-\delta_1-\delta_\mu)a_c$$

なるが故に

$$\kappa\gtreqless\frac{\delta_1+\delta_\mu}{2} \text{ に從つて } \frac{dw_{(p_\mu)}}{d\kappa}\gtreqless 0$$

なり。而して $\frac{1}{2}(\delta_1+\delta_\mu)<1$ なるが故に κ が $0<\kappa<1$ の間に於て $w_{(p_\mu)}$ は減少より増加に轉向する事を知る。

即ち $w_{(p_\mu)}$ は, κが小なる間は負, κ が $\frac{1}{2}(\delta_1+\delta_\mu)$ を超ゆるに從つて増大し, κ が充分大なる時は正の値をとる函數なり。

(2) $\dfrac{\partial\chi}{\partial p_\mu}$

(84) 式に於て, 定義により $\delta_1-\delta_\mu>0$, (75) 式により $\zeta+\delta_1>0$ なるが故に, (71), (72), (84) 式により

$$\left.\begin{array}{lll} 1)\ \kappa-\delta_1<0 \text{ の時} & (\kappa-\delta_1)(\kappa-\delta_\mu)-\lambda w_{(p_\mu)} & \lesseqgtr 0 \\ 2)\ \ \ 〃\ > & 〃 & \gtreqless 0 \end{array}\right\} \text{ に從つて } \frac{\partial\chi}{\partial p_\mu}\gtreqless 0$$

即ち

$$\left.\begin{array}{lll} 1)\ \kappa<\delta_1 \text{ の時} & \lambda w_{(p_\mu)}\gtreqless(\kappa-\delta_1)(\kappa-\delta_\mu) \\ 2)\ 〃\ > \ \ 〃 & \ \ \ \ \lesseqgtr \ \ \ 〃 \end{array}\right\} \text{ に從つて } \frac{\partial\chi}{\partial p_\mu}\gtreqless 0 \quad \cdots\cdots(86)$$

なり。今

$$\frac{(\kappa-\delta_1)(\kappa-\delta_\mu)}{w_{(p_\mu)}}\equiv f_{(p_\mu)}$$

と置く時は (86) 式により

	(a) $w_{(p_\mu)}<0$ の間	(b) $w_{(p_\mu)}>0$ の間
1) $\kappa<\delta_1$ の時	$\lambda\lesseqgtr f_{(p_\mu)}$	$\lambda\gtreqless f_{(p_\mu)}$
2) $\delta_1<\kappa$ の時	$\lambda\gtreqless f_{(p_\mu)}$	$\lambda\lesseqgtr f_{(p_\mu)}$

に從つて $\dfrac{\partial\chi}{\partial p_\mu}\gtrless 0$ ....(86′)

なり。更に吟味を進むるに

1). $\kappa<\delta_1$ の時

i) $\kappa<\delta_\mu$ ならば $\kappa<\delta_1$, 從つて $(\kappa-\delta_1)(\kappa_\mu-\delta)>0$, 而して $w_{(p_\mu)}$ の吟味に於て證明せる通り $w_{(p_\mu)}<0$ なるが故に

$$f_{(p_\mu)}=\frac{(\kappa-\delta_1)(\kappa-\delta_\mu)}{w_{(p_\mu)}}<0$$

然るに $\lambda>0$ なるが故に 1), (a) の上記號は成立する事なし。

ii). $\delta_\mu<\kappa<\delta_1$ ならば $(\kappa-\delta_1)(\kappa-\delta_\mu)<0$ なるが故に $w_{(p_\mu)}>0$ の間は $f_{(p_\mu)}<0$, 從つて 1), (b) の下記號は成立する事なし。

2), $\delta_1<\kappa$ の時

$(\kappa-\delta_1)(\kappa-\delta_\mu)>0$ なるが故に $w_{(p_\mu)}<0$ の間は $f_{(p_\mu)}<0$, 從つて 2), (a) の下記號は成立する事なし。

以上吟味せる事を一括すれば次の如し。

	1) $\kappa<\delta_1$ の時		2) $\delta_1<\kappa$ の時
	i) $\kappa<\delta_\mu$	ii) $\delta_\mu<\kappa<\delta_1$	
(a) $w_{(p_\mu)}<0$ の間	$\lambda\underset{\not>}{\leqq}$[1] $f_{(p_\mu)}$	$\lambda\lesseqgtr f_{(p_\mu)}$	$\lambda\underset{\not<}{\geqq} f_{(p_\mu)}$
(b) $w_{(p_\mu)}>0$ の間	——	$\lambda\underset{\not<}{\geqq} f_{(p_\mu)}$	$\lambda\lesseqgtr f_{(p_\mu)}$

に從つて $\dfrac{\partial\chi}{\partial p_\mu}\gtrless 0$ ....(86″)

なり。次に $f_{(p_\mu)}$ を吟味せんとす。

(3) $f_{(p_\mu)}$

$$f_{(p_\mu)}\equiv\frac{(\kappa-\delta_1)(\kappa-\delta_\mu)}{w_{(p_\mu)}}\equiv\frac{(\kappa-\delta_1)(\kappa-\delta_\mu)}{(2\kappa-\delta_1-\delta_\mu g_c)-i_c-n\sum_2^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)(\delta_\mu-\delta_\nu)} \quad\text{..............(87)}$$

に於て

$\kappa=\delta_\mu$ 及 $\kappa=\delta_1$	の時は	$f_{(p_\mu)}=0$
$w_{(p_\mu)}=0$	の時は	$f_{(p_\mu)}=\infty$

なり。又 (26) 式により

$$\lim_{\kappa\to\infty}\frac{\nu g_c}{\kappa}=1,\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{ni_c}{\kappa^2}=1$$

1). $\not<$ 又は $\not>$ は成立する事なき事を意味す。

なるが故に

$$\lim_{\kappa\to\infty} f(p_\mu)=\lim_{\kappa\to\infty}\frac{\left(1-\frac{\delta_1}{\kappa}\right)\left(1-\frac{\delta_\mu}{\kappa}\right)}{\left\{2-\frac{1}{\kappa}(\delta_1+\delta_\mu)\right\}\frac{vg_c}{\kappa}-\frac{vi_c}{\kappa^2}-\frac{1}{\kappa^2}n\sum_2^s p_\nu(\delta_1-\delta_\mu)(\delta_\mu-\delta_\nu)}=1$$

なり。又

$$\frac{\partial f(p_\mu)}{\partial\kappa}=\frac{2\kappa-\delta_1-\delta_\mu}{w(p_\mu)}-\frac{(\kappa-\delta_1)(\kappa-\delta_\mu)}{w(p_\mu)^2}(2\kappa-\delta_1-\delta_\mu)a_c$$

$$=\frac{2\kappa-\delta_1-\delta_\mu}{w(p_\mu)^2}\left\{w(\ \mu)-(\kappa-\delta_1)(\kappa-\delta_\mu)a_c\right\}$$

なるが故に

$$\kappa=\frac{1}{2}(\delta_1+\delta_\mu)$$

及 $w(p_\mu)=(\kappa-\delta_1)(\kappa-\delta_\mu)a_c$, 即ち $\frac{1}{a_c}=f(p_\mu)$

の時に $f(p_\mu)$ の極大又は極小あり。

3. κ と效率函數

(73), (74) 式即ち

$$\frac{\partial\chi_s}{\partial\kappa}=\frac{1}{\kappa b^2\psi^2}\left\{-\kappa\iota(\kappa b-\delta_1)\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial\kappa}-\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\kappa}\right)\right\}$$

$$\frac{\partial\chi_c}{\partial\kappa}=\frac{1}{\kappa^2\psi^2}\left\{-\kappa(\kappa-\delta_1)\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial\kappa}-\varphi\frac{\partial\psi}{\delta\kappa}\right)-\delta_1\varphi\psi\right\}$$

に於て (60), (68) 式により

$$\psi\frac{\partial\psi}{\partial\kappa}-\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\kappa}=(\zeta+\delta_1)(\lambda g_c+v)\frac{\partial\varphi}{\partial\kappa}-\lambda\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\kappa}-(\zeta+\delta_1)(\lambda a_c-1)\varphi+\lambda\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\kappa}$$

$$=(\zeta+\delta_1)\left\{(\lambda g_c+v)\frac{\partial\varphi}{\partial\kappa}+(1-\lambda a_c)\varphi\right\}$$

$$\equiv(\zeta+\delta_1)y \qquad\cdots\cdots(88)$$

爰に $y\equiv(\lambda g_c+v)\frac{\partial\varphi}{\partial\kappa}+(1-\lambda a_c)\varphi$

(55), (68) 式より $=(\lambda g_c+v)\left(\delta_1 a_c-\frac{\partial u}{\partial\kappa}\right)+(1-\lambda a_c)(\delta_1 g_c-u)$

$$=a_c(\lambda u+\delta_1 v)-(\lambda g_c+v)\frac{\partial u}{\partial\kappa}+\varphi \qquad\cdots\cdots(89)$$

とす。先づ y の吟味をなさんとす。

(1) y

(65) 式より

$$a_c(\lambda u+\delta_1 v)=-\delta_1(\kappa-\delta_1)a_c+\lambda\kappa a_c g_c-\lambda a_c i_c$$

$$+\lambda\delta_1 a_c n\sum_2^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)-\lambda a_c n\sum_2^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)(\kappa-\delta_\nu)$$

(66), (67) 式より

$$(\lambda g_c+v)\frac{\partial u}{\partial \kappa}=\left\{\lambda g_c-(\kappa-\delta_1)+\lambda n\sum_2^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)\right\}\left\{\kappa a_c-g_c-n\sum_2^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)\right\}$$

(55) 式より

$$\varphi=\delta_1 g_c-\kappa g_c+i_c+n\sum_2^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)(\kappa-\delta_\nu)$$

之等の關係を (89) 式に代入し，整理すれば

$$y=\left[(\kappa-\delta_1)^2a_c-2(\kappa-\delta_1)g_c+i_c+n\sum_2^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)^2\right]$$
$$+\lambda\left[-a_ci_c+g_c^2+n\sum_2^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)\left\{(\delta_1+\delta_\nu-2\kappa)a_c+2g_c\right\}+\left\{n\sum_2^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)\right\}^2\right]\dots\dots(89')$$

なり。

(89′) 式に於て $(-a_ci_c+g_c^2)$ なる項を見るに，$\kappa=0$ の時は此項は零なる事明なり。又

$$\frac{d}{d\kappa}\left(-a_ci_c+g_c^2\right)=-\beta(\kappa)i_c-2a_cg_c+2g_ca_c=-\beta(\kappa)i_c<0$$

なるが故に，常に

$$-a_ci_c+g_c^2<0$$

なり。今 $\kappa<\kappa_b$ なる場合に限定して y の吟味を進めんとす。

$\kappa<\kappa_b$ の時：—

(89′) 式に於て $(\delta_1+\delta_\nu-2\kappa)$ なる項を見るに

$$\delta_1+\delta_\nu-2\kappa>\delta_1-2\kappa_b=2\left(\frac{1}{2}\delta_1-\kappa_b\right)$$

なり。

然るに (37) 式により $\frac{\bar{\sigma}_s/n}{\bar{\sigma}_c}\geqq 2$ ならば $\kappa_b\leqq\frac{1}{3}\delta_1$ なるが故に

$$\delta_1+\delta_\nu-2\kappa>2\left(\frac{1}{2}\delta_1-\kappa_b\right)>2\left(\frac{1}{3}\delta_1-\kappa_b\right)>0$$

なり。即ち (89′) 式に於て p_ν を含む項は凡て正なる事を知る。故に今 (89′) 式に於て p_ν を含まざる項のみを取り出し $w_{(\kappa)}$ とすれば，即ち

$$w_{(\kappa)}\equiv(\kappa-\delta_1)^2a_c-2(\kappa-\delta_1)g_c+i_c-\lambda(a_ci_c-g_c^2)\dots\dots(90)$$

とすれば，若し $w_{(\kappa)}>0$ ならば $y>0$ なり。故に $w_{(\kappa)}$ の吟味をなさんとす。今

$$f_{(\kappa)}\equiv\frac{(\kappa-\delta_1)^2a_c-2(\kappa-\delta_1)g_c+i_c}{a_ci_c-g_c^2}\dots\dots(91)$$

とすれば，前に證明せる通り $a_ci_c-g_c^2>0$ なるが故に (90) 式により

$$\lambda\lesseqgtr f_{(\kappa)} \text{ に從つて } w_{(\kappa)}\gtreqless 0$$

なり。即ち $w_{(\kappa)}$ の吟味は $f_{(\kappa)}$ の評價に歸着す。

故に $f_{(\kappa)}$ の評價をなさんとす。

$$\frac{df_{(\kappa)}}{d\kappa}=\frac{1}{a_ci_c-g_c^2}\left\{2(\kappa-\delta_1)a_c+(\kappa-\delta_1)^2\beta-2g_c-2(\kappa-\delta_1)a_c+2g_c\right\}$$

$$-\frac{1}{(a_ci_c-g_c^2)^2}\left\{(\kappa-\delta_1)^2a_c-2(\kappa-\delta_1)g_c+i_c\right\}\beta i_c$$

$$=\frac{\beta}{(a_ci_c-g_c^2)^2}\left\{-(\kappa-\delta_1)^2g_c^2+2(\kappa-\delta_1)g_ci_c-i_c^2\right\}<0$$

なるが故に $f_{(\kappa)}$ は κ の增加に從ひ減少す。又 $f_{(\kappa)}$ は β の增加に從つて減少する事明なり。從つて $f_{(\kappa)}$ の最小値は κ 及 β が最大値をとる時なり。κ の最大値は κ_b, 又 $0<\eta<\kappa_b$ の間の $\beta(\eta)$ の最大値を $\bar{\beta}$ とする時は，上述の事により

$$f_{(\kappa)}>\frac{(\kappa_b-\delta_1)^2\int_0^{\kappa_b}\bar{\beta}d\eta-2(\kappa_b-\delta_1)\int_0^{\kappa_b}\bar{\beta}\eta d\eta+\int_0^{\kappa_b}\bar{\beta}\eta^2d\eta}{\left(\int_0^{\kappa_b}\bar{\beta}d\eta\right)\left(\int_0^{\kappa_b}\bar{\beta}\eta^2d\eta\right)-\left(\int_0^{\kappa_b}\bar{\beta}\eta d\eta\right)^2}$$

$$=\frac{1}{\bar{\beta}}\frac{(\kappa_b-\delta_1)^2\kappa_b-(\kappa_b-\delta_1)\kappa_b^2+\frac{1}{3}\kappa_b^3}{\frac{1}{3}\kappa_b^4-\frac{1}{4}\kappa_b^4}$$

$$=\frac{12}{\bar{\beta}\kappa_b}\left\{\left(1-\frac{\delta_1}{\kappa_b}\right)^2-\left(1-\frac{\delta_1}{\kappa_b}\right)+\frac{1}{3}\right\}=\frac{12}{\bar{\beta}\kappa_b}\left\{\left(\frac{\delta_1}{\kappa_b}\right)^2-\frac{\delta_1}{\kappa_b}+\frac{1}{3}\right\}$$

なり。然るに (37) 式により $\dfrac{\bar{\sigma}_s/n}{\bar{\sigma}_c}\geqq 2$ ならば $\delta_1/\kappa_b\geqq 3$ なるが故に上式の右邊は，$\bar{\beta}$ が著しく大なる場合の外は，大なる値をとる。從つて λ が著しく大ならざる限り

$\lambda<f_{(\kappa)}$, 從つて $w_{(\kappa)}>0$, 從つて $y>0$

なり。

(2) $\dfrac{\partial X_s}{\partial\kappa}$

上述の如く $\kappa<\kappa_b$ の時は，$\bar{\beta}$ 及 λ が著しく大ならざる限り $y>0$ なるが故に (73) 式により

$$\frac{\partial X_s}{\partial\kappa}>0 \quad\cdots\cdots\cdots(92)$$

なり。

(3) $\dfrac{\partial X_c}{\partial\kappa}$

I. $\kappa<1$

i). κ が充分小なる時

(74) 式卽ち

$$\frac{\partial X_c}{\partial\kappa}=\frac{1}{\kappa\psi^2}\left[-\left\{\kappa(\kappa-\delta_1)\frac{\delta\varphi}{\delta\kappa}+\delta_1\varphi\right\}\psi+\kappa(\kappa-\delta_1)\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\kappa}\right]$$

に於て，(68) 式より

$$\frac{\partial\psi}{\partial\kappa}=(\zeta+\delta_1)(\lambda a_c-1)-\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial\kappa}$$

なり。然るに (75) 式により $\zeta+\delta_1>0$, (68) 式により $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\kappa}>0$ なるが故に，若し $\lambda a_c-1<0$ 卽ち $\lambda>1/a_c$ なら

ば $\frac{\partial\psi}{\partial\kappa}<0$, 從つて

$$\kappa(\kappa-\delta_1)\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\kappa}>0$$

なり。又 (55), (68) 式により

$$\kappa(\kappa-\delta_1)\frac{\partial\varphi}{\partial\kappa}+\delta_1\varphi=\kappa(\kappa-\delta_1)\left\{\delta_1 a_c-\kappa a_c+g_c+n\sum_2^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)\right\}$$

$$+\delta_1\left\{-(\kappa-\delta_1)g_c+i_c+n\sum_2^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)(\kappa-\delta_\nu)\right\}$$

$$=-(\kappa-\delta_1)^2(\kappa a_c-g_c)+\delta_1 i_c+n\sum_2^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)(\kappa^2-\delta_1\delta_\nu)$$

なるが故に κ が充分小なる時は

$$\kappa(\kappa-\delta_1)\frac{\partial\varphi}{\partial\kappa}+\delta_1\varphi<0$$

從つて, κ が充分小なる時は

$$\frac{\partial\chi_c}{\partial\kappa}>0 \quad\cdots\cdots(93)$$

なり。

ii). $\kappa=\kappa_b$ の時。

此時は (61), (62) 式により

$$\chi_s=\chi_c$$

なれ共, (73), (74) 式により

$$\left(\frac{\partial\chi_s}{\partial\kappa}\right)_{\kappa=\kappa_b}=\frac{1}{\psi^2_{\kappa=\kappa_b}}\left(\frac{\delta_1}{\kappa_b}-1\right)\left\{\psi_{\kappa=\kappa_b}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\kappa}\right)_{\kappa=\kappa_b}-\varphi_{\kappa=\kappa_b}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\kappa}\right)_{\kappa=\kappa_b}\right\}$$

$$\left(\frac{\partial\chi_c}{\partial\kappa}\right)_{\kappa=\kappa_b}=\frac{1}{\psi^2_{\kappa=\kappa_b}}\left[\left(\frac{\delta_1}{\kappa_b}-1\right)\left\{\psi_{\kappa=\kappa_b}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\kappa}\right)_{\kappa=\kappa_b}-\varphi_{\kappa=\kappa_b}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\kappa}\right)_{\kappa=\kappa_b}\right\}-\frac{\delta_1}{\kappa_b^2}\varphi_{\kappa=\kappa_b}\psi_{\kappa=\kappa_b}\right]$$

にして, $\varphi_{\kappa=\kappa_b}>0$, $\psi_{\kappa=\kappa_b}>0$ なるが故に

$$\left(\frac{\partial\chi_s}{\partial\kappa}\right)_{\kappa=\kappa_b}>\left(\frac{\partial\chi_c}{\partial\kappa}\right)_{\kappa=\kappa_b}$$

なり。

iii). χ_c の極大

i) に述べたるが如く κ が充分小なる時は $\frac{\partial\chi_c}{\partial\kappa}>0$ なり。然るに iv) に述ぶるが如く $\kappa=\delta_1$ の時は $\frac{\partial\chi_c}{\partial\kappa}<0$ なり。

故に κ が $0<\kappa<\delta_1$ の間に於て χ_c の極大存在せざる可らず。

即ち (88), (60) 式により

$$\frac{\partial\chi_c}{\partial\kappa}=\frac{1}{\kappa^2\psi^2}\Big[-\kappa(\kappa-\delta_1)(\zeta+\delta_1)y-\delta_1\varphi\{(\zeta+\delta_1)(\lambda g_c+v)-\lambda\varphi\}\Big]=0$$

ならざる可らず。即ち

$$\frac{\zeta+\delta_1}{\delta_1}=\frac{\lambda\varphi^2}{\kappa(\kappa-\delta_1)y+\delta_1(\lambda g_c+v)\varphi} \quad \cdots\cdots(94)$$

を滿足する κ が χ_c の極大を與ふ。

iv) $\kappa=\delta_1$ の時

$\kappa=\delta_1$ の時の g_c, i_c, v, φ 等を夫々 $g_c(\delta_1)$, $i_c(\delta_1)$, $v_{\kappa=\delta_1}$, $\varphi_{\kappa=\delta_1}$ にて表す事とす。然らば

(66)式より
$$\lambda g_c(\delta_1)+v_{\kappa=\delta_1}=\lambda\left\{g_c(\delta_1)+n\sum_2^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)\right\}$$

(54)式より
$$\varphi_{\kappa=\delta_1}=i_c(\delta_1)+n\sum_2^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)^2$$

(80)式より
$$\zeta_{(\kappa=\delta_1)}+\delta_1=-\frac{\delta_1 g_c(\delta_1)-i_c(\delta_1)+n\sum_2^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)\delta_\nu}{g_c(\delta_1)+n\sum_2^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)}+\delta_1$$

$$=\frac{i_c(\delta_1)+n\sum_2^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)^2}{g_c(\delta_1)+n\sum_2^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)}$$

$$=\frac{\varphi_{\kappa=\delta_1}}{g_c(\delta_1)+n\sum_2^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)}$$

を得。

故に, $\kappa=\delta_1$, $\zeta=\zeta_{(\kappa=\delta_1)}$ の時の ψ は, (60) 式により

$$\lambda(\zeta_{(\kappa=\delta_1)}+\delta_1)\{g_c(\delta_1)+n\sum_2^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)\}-\lambda\varphi_{\kappa=\delta_1}=0$$

なり。從つて (62) 式の

$$\chi_c=-\frac{\kappa-\delta_1}{\kappa}\frac{\varphi}{\psi}$$

に於て $\kappa=\delta_1$, $\zeta=\zeta_{(\kappa=\delta_1)}$ の時の χ_c は

$$-\frac{0}{\delta_1}\frac{\varphi_{\kappa=\delta_1}}{0}$$

にして不定なり。

次に iii) に述べたる $\kappa=\delta_1$ の時 $\dfrac{\partial\chi_c}{\partial\kappa}<0$ なる事を證明せんとす。

今 $\kappa=\delta_1$ にして, ζ が任意の値をとる時の ψ を $\psi_{\kappa=\delta_1}$ にて表す時は (60) 式より

$$\psi_{\kappa=\delta_1}=\lambda\left[(\zeta+\delta_1)\{g_c(\delta_1)+n\sum_2^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)\}-\varphi_{\kappa=\delta_1}\right]$$

なり。$\zeta=\zeta_{(\kappa=\delta_1)}$ の時は $\psi_{\kappa=\delta_1}=0$ なる事は前述の如し。然れども $\zeta\neq\zeta_{(\kappa=\delta_1)}$ の時は $\psi_{\kappa=\delta_1}$ は一般に有限の値を有す。從つて

$$\frac{\partial\chi_c}{\partial\kappa}=\frac{1}{\kappa^2\psi^2}\left\{-\kappa(\kappa-\delta_1)\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial\kappa}-\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\kappa}\right)-\delta_1\varphi\psi\right\}$$

に於て（$\kappa=\delta_1$, $\zeta=\zeta_{(\kappa=\delta_1)}$）なる特異點を除けば，一般に

$$\left(\frac{\partial\chi_c}{\partial\kappa}\right)_{\kappa=\delta_1}=-\frac{1}{\delta_1}\,\frac{\varphi_{\kappa=\delta_1}}{\psi_{\kappa=\delta_1}}$$

なり。

$\frac{\partial\chi_c}{\partial\kappa}<0$ なる事を證明するには (78) 式により $\zeta>\zeta_{(\kappa=\delta_1)}$ なる場合のみを考ふれば足る。從つて

$$\zeta+\delta_1>\zeta_{(\kappa=\delta_1)}+\delta_1$$

故に

$$\psi_{\kappa=\delta_1}>\lambda\left[(\zeta_{(\kappa=\delta_1)}+\delta_1)\left\{g_c(\delta_1)+n\sum_2^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)\right\}-\varphi_{\kappa=\delta_1}\right]=0$$

(76) 式により $\varphi_{\kappa=\delta_1}>0$ なるが故に

$$\left(\frac{\partial\chi_c}{\partial\kappa}\right)_{\kappa=\delta_1}=-\frac{1}{\delta_1}\,\frac{\varphi_{\kappa=\delta_1}}{\psi_{\kappa=\delta_1}}<0$$

なり。

II. $1<\kappa$

此時は $a_c=1$, $g_c=\kappa-{}_{II}\rho_c$, $i_c=(\kappa-{}_{II}\rho_c)^2+{}_{II}i_{c0}$

なるが故に，(89′) 式に於て

$$\begin{aligned}(\kappa-\delta_1)^2a_c-2(\kappa-\delta_1)\,g_c+i_c&=(\kappa-\delta_1)^2-2(\kappa-\delta_1)(\kappa-{}_{II}\rho_c)+(\kappa-{}_{II}\rho_c)^2+{}_{II}i_{c0}\\&=(\delta_1-{}_{II}\rho_c)^2+{}_{II}i_{c0}\end{aligned}$$

$$-a_ci_c+g_c^2=-(\kappa-{}_{II}\rho_c)^2-{}_{II}i_{c0}+(\kappa-{}_{II}\rho_c)^2=-{}_{II}i_{c0}$$

$$\begin{aligned}n\sum_2^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)\{(\delta_1+\delta_\nu-2\kappa)a_c+2g_c\}&=n\sum_2^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)\{\delta_1+\delta_\nu-2\kappa+2(\kappa-{}_{II}\rho_c)\}\\&=n\sum_2^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)\{2(\delta_1-{}_{II}\rho_c)-(\delta_1-\delta_\nu)\}\\&=2(\delta_1-{}_{II}\rho_c)n\sum_2^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)-n\sum_2^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)^2\end{aligned}$$

なり。從つて

$$\begin{aligned}&-a_ci_c+g_c^2+n\sum_2^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)\left\{(\delta_1+\delta_\nu-2\kappa)a_c+2g_c\right\}+\left\{n\sum_2^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)\right\}^2\\&=-{}_{II}i_{c0}+2(\delta_1-{}_{II}\rho_c)n\sum_2^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)-n\sum_2^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)^2\\&\quad+\left\{n\sum_2^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)\right\}^2+(\delta_1-{}_{II}\rho_c)^2-(\delta_1-{}_{II}\rho_c)^2\\&=-\left\{(\delta_1-{}_{II}\rho_c)^2+{}_{II}i_{c0}+n\sum_2^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)^2\right\}+\left\{(\delta_1-{}_{II}\rho_c)+n\sum_2^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)\right\}^2\end{aligned}$$

なり。今

$$\left.\begin{aligned}&(\delta_1-{}_{\mathrm{II}}\rho_c)^2+{}_{\mathrm{II}}i_{co}+n\sum_2^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)^2\equiv P\\&\delta_1-{}_{\mathrm{II}}\rho_c+n\sum_2^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)\equiv Q\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(95)$$

とすれば，(89′) 式に上の關係を代入し

$$y=P-\lambda(P-Q^2)\quad\cdots\cdots(96)$$

なり。

又 (55) 式より

$$\varphi=-(\kappa-\delta_1)(\kappa-{}_{\mathrm{II}}\rho_c)+(\kappa-{}_{\mathrm{II}}\rho_c)^2+{}_{\mathrm{II}}i_{co}+n\sum_2^s p_\nu\left\{(\kappa-\delta_1)+(\delta_1-\delta_\nu)\right\}(\delta_1-\delta_\nu)$$

$$=\left\{(\kappa-\delta_1)+(\delta_1-{}_{\mathrm{II}}\rho_c)\right\}(\delta_1-{}_{\mathrm{II}}\rho_c)+{}_{\mathrm{II}}i_{co}+(\kappa-\delta_1)n\sum_2^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)+n\sum_2^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)^2$$

$$=(\delta_1-{}_{\mathrm{II}}\rho_c)^2+{}_{\mathrm{II}}i_{co}+n\sum_2^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)^2+(\kappa-\delta_1)\left\{(\delta_1-{}_{\mathrm{II}}\rho_c)+n\sum_2^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)\right\}$$

$$=P+(\kappa-\delta_1)Q\quad\cdots\cdots(97)$$

又 (66) 式に於て

$$\lambda g_c+v=-(\kappa-\delta_1)+\lambda\left\{\kappa-\delta_1+\delta_1-{}_{\mathrm{II}}\rho_c+n\sum_2^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)\right\}$$

$$=(\lambda-1)(\kappa-\delta_1)+\lambda Q$$

なるが故に (60) 式より

$$\psi=(\zeta+\delta_1)\{(\lambda-1)(\kappa-\delta_1)+\lambda Q\}-\lambda\{P+(\kappa-\delta_1)Q\}\quad\cdots\cdots(98)$$

從つて (74), (88) 式により

$$-\kappa(\kappa-\delta_1)\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial\kappa}-\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\kappa}\right)-\delta_1\varphi\psi$$

$$=-\kappa(\kappa-\delta_1)(\zeta+\delta_1)\{P-\lambda(P-Q^2)\}-\delta_1\varphi\left[(\zeta+\delta_1)\{(\lambda-1)(\kappa-\delta_1)+\lambda Q\}-\lambda\varphi\right]$$

$$=\left[\lambda(\zeta+\delta_1)\{\kappa(\kappa-\delta_1)(P-Q^2)-\delta_1\varphi(\kappa-\delta_1+Q)\}+\delta_1\varphi^2\right]-(\zeta+\delta_1)(\kappa-\delta_1)(\kappa P-\delta_1\varphi)$$

然るに

$$\kappa(\kappa-\delta_1)(P-Q^2)-\delta_1\varphi(\kappa-\delta_1+Q)=\kappa(\kappa-\delta_1)(P-Q^2)-\delta_1(\kappa-\delta_1+Q)\{P+Q(\kappa-\delta_1)\}$$

$$=(\kappa-\delta_1)^2(P-\delta_1Q)-(\kappa^2-\delta_1^2)Q^2-\delta_1PQ$$

$$\kappa P-\delta_1\varphi=\kappa P-\delta_1\{P+Q(\kappa-\delta_1)\}=(\kappa-\delta_1)(P-\delta_1Q)$$

なるが故に

$$-\kappa(\kappa-\delta_1)\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial\kappa}-\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\kappa}\right)-\delta_1\varphi\psi$$

$$=\lambda\left[(\zeta+\delta_1)\{(\kappa-\delta_1)^2(P-\delta_1Q)-(\kappa^2-\delta_1^2)Q^2-\delta_1PQ\}+\delta_1\{P+(\kappa-\delta_1)Q\}^2\right]$$

$$-(\zeta+\delta_1)(\kappa-\delta_1)^2(P-\delta_1Q)\leqq 0$$

に從つて $\dfrac{\partial X_c}{\partial\kappa}\leqq 0$ $\cdots\cdots(99)$

なり。

特に $y<0$ なる時，即ち (96) 式より $P<\lambda(P-Q^2)$ なる時は

$$-\kappa(\kappa-\delta_1)\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial\kappa}-\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\kappa}\right)-\delta_1\varphi\psi=-\kappa(\kappa-\delta_1)(\zeta+\delta_1^2)y-\delta_1\varphi\psi$$

に於て，前項及後項何れも正なるが故に常に

$$\frac{\partial\chi_c}{\partial\kappa}>0 \qquad\qquad (100)$$

なり。

第九節　彎　曲

第一節に述べたる通り，彎曲は偏心壓力の特殊の場合，即ち

$$\zeta\to\infty$$

の極限の場合と考ふる事を得るが故に次の結果を得。

(60), (61) 式により

$$e\chi_s=\lim_{\zeta\to\infty}\varepsilon h\frac{\delta_1-\kappa_b}{\kappa_b}\frac{\varphi}{(\zeta+\delta_1)(\lambda g_c+v)-\lambda\varphi}$$

$$=\lim_{\zeta\to\infty}h\frac{\delta_1-\kappa_b}{\kappa_b}\frac{\varphi}{\frac{1}{\zeta}(\zeta+\delta_1)(\lambda g_c+v)-\frac{1}{\zeta}\lambda\varphi}$$

$$=h\frac{\delta_1-\kappa_b}{\kappa_b}\frac{\varphi}{\lambda g_c+v} \qquad\qquad (101)$$

$$e\chi_c=h\frac{\delta_1-\kappa}{\kappa}\frac{\varphi}{\lambda g_c+v} \qquad\qquad (102)$$

(52)式により

$$np_1=\lim_{\zeta\to\infty}\frac{g_c+\frac{1}{\zeta}(\kappa g_c-i_c)+n\sum^{s}p_\nu\left(1+\frac{\delta_\nu}{\zeta}\right)(\kappa-\delta_\nu)}{\left(1+\frac{\delta_1}{\zeta}\right)(\delta_1-\kappa)}$$

$$=\frac{g_c+n\sum_2^{s}p_\nu(\kappa-\delta_\nu)}{\delta_1-\kappa} \qquad\qquad (103)$$

(64)式により

$$\mathfrak{M}=A_0h\frac{\sigma_{s1}}{n}\frac{\varphi}{\delta_1-\kappa}=A_0h\sigma_c\frac{\varphi}{\kappa} \qquad\qquad (104)$$

1. p_μ と效率函數

(86'')式の條件は ζ に無關係なるが故に，彎曲の場合にも適用し得べし。但し彎曲の場合には常に $\kappa<\delta_1$ なるが故に (86'')式の 1) なる場合にのみにて足る。即ち

		i) $\kappa<\delta_\mu$	ii) $\delta_\mu<\kappa<\delta_1$
(a)	$w_{(p_\mu)}<0$ の間	$\lambda\leqq f_{(p_\mu)}$	$\lambda\leqq f_{(p_\mu)}$

(b)　$w_{(p_\mu)}>0$ の間　——　$\lambda \gtreqless f_{(p_\mu)}$

に從つて $\dfrac{\partial(eX)}{\partial p_\mu} \gtreqless 0$ ……(105)

なり。

2. κ と效率函數

(1) $\dfrac{\partial(eX_s)}{\partial\kappa}$

(88)式により，(92)式は彎曲の場合にも成立する事明なり。即ち $\bar{\beta}$ 及 λ が著しく大ならざる限り

$$\frac{\partial(eX_s)}{\partial\kappa}>0 \quad\cdots\cdots(106)$$

なり。

(2) $\dfrac{\partial(eX_c)}{\partial\kappa}$

第八節 3. のi), ii), iii) に述べたる事は，$\zeta+\delta_1\to\infty$ と考ふる事により，彎曲の場合にも成立する事明なり。但し X_c の極大を與ふる關係式 (94) 式に於て，$\zeta+\delta_1\to\infty$ なるが故に同式右邊の分母は零ならざる可らず。即ち eX_c の極大を與ふべき關係式は

$$\kappa(\kappa-\delta_1)y+\delta_1(\lambda g_c+v)\varphi=0$$

にして，之に (66), (89) 式の關係を適用すれば

$$-\kappa(\delta_1-\kappa)\Big[\Big\{(\delta_1-\kappa)+\lambda\{g_c+n\sum_2^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)\}\Big\}\frac{\partial\varphi}{\partial\kappa}+(1-\lambda a_c)\varphi\Big]$$

$$+\delta_1\Big\{(\delta_1-\kappa)+\lambda\Big(g_c+n\sum_2^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)\Big)\Big\}\varphi=0$$

即ち，之を整理して

$$\lambda=\frac{(\delta_1-\kappa)^2\left(\kappa\dfrac{\partial\varphi}{\partial\kappa}-\varphi\right)}{\kappa(\delta_1-\kappa)a_c\varphi+\left\{g_c+n\sum_2^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)\right\}\left\{\delta_1\varphi-\kappa(\delta_1-\kappa)\dfrac{\partial\varphi}{\partial\kappa}\right\}} \quad\cdots\cdots(107)$$

を得。此關係を滿足する κ が X_c の極大を與ふ。

第十節　中心壓力

第一節に述べたる通り，偏心壓力の特殊の場合，即ち

$$\kappa\to\infty$$

の極限の場合と考ふる事を得るが故に次の結果を得。

(3), (26), (29) 式により

$${}_{\text{II}}g_c=\kappa-{}_{\text{II}}\rho_c\,,\qquad \kappa\,{}_{\text{II}}g_c-{}_{\text{II}}i_c={}_{\text{II}}\rho_c\kappa-({}_{\text{II}}\rho_c^{\,2}+{}_{\text{II}}i_{co})$$

なるが故に (55), (60), (62), (66) 式により

$$X_c=\lim_{\kappa\to\infty}\frac{\kappa-\delta_1}{\kappa}\,\frac{\varphi}{\psi}$$

$$=\lim_{\kappa\to\infty}-\frac{\kappa-\delta_1}{\kappa}\,\frac{\delta_1\,{}_{\text{II}}g_c-(\kappa\,{}_{\text{II}}g_c-{}_{\text{II}}i_c)+n\sum_2^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)(\kappa-\delta_\nu)}{(\zeta+\delta_1)\Big[-(\kappa-\delta_1)+\lambda\Big\{{}_{\text{II}}g_c+n\sum_2^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)\Big\}\Big]-\lambda\Big[\delta_1\,{}_{\text{II}}g_c-(\kappa\,{}_{\text{II}}g_c-{}_{\text{II}}i_c)+n\sum_2^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)(\kappa-\delta_\nu)\Big]}$$

$$=\lim_{\kappa\to\infty}-\left(1-\frac{\delta_1}{\kappa}\right)\frac{\delta_1\left(1-\frac{{}_{\text{II}}\rho_c}{\kappa}\right)-{}_{\text{II}}\rho_c+\frac{{}_{\text{II}}\rho_c{}^2+{}_{\text{II}}i_{c0}}{\kappa}+n\sum_2^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)\left(1-\frac{\delta_\nu}{\kappa}\right)}{\left\{\begin{array}{l}(\zeta+\delta_1)\Big[-\left(1-\frac{\delta_1}{\kappa}\right)+\lambda\Big\{1-\frac{{}_{\text{II}}\rho_c}{\kappa}+\frac{1}{\kappa}n\sum_2^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)\Big\}\Big]-\lambda\Big[\delta_1\left(1-\frac{{}_{\text{II}}\rho_c}{\kappa}\right)\\ \qquad -\frac{{}_{\text{II}}\rho_c}{\kappa}+\frac{{}_{\text{II}}\rho_c{}^2+{}_{\text{II}}i_{c0}}{\kappa}+n\sum_2^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)\left(1-\frac{\delta_\nu}{\kappa}\right)\Big]\end{array}\right\}}$$

$$=\frac{\delta_1-{}_{\text{II}}\rho_c+n\sum_2^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)}{(\zeta+\delta_1)(1-\lambda)+\lambda\Big\{\delta_1-\ \rho_c+n\sum_2^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)\Big\}}\quad\cdots\cdots(108)$$

(52) 式により

$$np_1=\lim_{\kappa\to\infty}\frac{-1}{(\zeta+\delta_1)(\kappa-\delta_1)}\Big\{\zeta(\kappa-{}_{\text{II}}\rho_c)+{}_{\text{II}}\rho_c\kappa-({}_{\text{II}}\rho_c{}^2+{}_{\text{II}}i_{c0})+n\sum_2^s p_\nu(\zeta+\delta_\nu)(\kappa-\delta_\nu)\Big\}$$

$$=\lim_{\kappa\to\infty}\frac{-1}{(\zeta+\delta_1)}\Big\{\zeta\left(1-\frac{{}_{\text{II}}\rho_c}{\kappa}\right)+{}_{\text{II}}\rho_c-\frac{{}_{\text{II}}\rho_c{}^2+{}_{\text{II}}i_{c0}}{\kappa}+n\sum_2^s p_\nu(\zeta+\delta_\nu)\left(1-\frac{\delta_\nu}{\kappa}\right)\Big\}$$

$$=-\frac{\zeta+{}_{\text{II}}\rho_c+n\sum_2^s p_\nu(\zeta+\delta_\nu)}{\zeta+\delta_1}\quad\cdots\cdots(109)$$

又 (57), (55), (68) 式により

$$a=\lim_{\kappa\to\infty}\frac{\varphi-(\zeta+\delta_1)\frac{\partial\varphi}{\partial\kappa}}{(\zeta+\delta_1)(\kappa-\delta_1)}$$

$$=\lim_{\kappa\to\infty}\frac{1}{(\zeta+\delta_1)}\Big[\left(1-\frac{{}_{\text{II}}\rho_c}{\kappa}\right)\left(\delta_1-{}_{\text{II}}\rho_c\right)+\frac{{}_{\text{II}}i_{c0}}{\kappa}+n\sum_2^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)\left(1-\frac{\delta_\nu}{\kappa}\right)$$

$$+\frac{1}{\kappa}(\zeta+\delta_1)\Big\{-(\delta_1-{}_{\text{II}}\rho_c)-n\sum_2^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)\Big\}\Big]$$

$$=\frac{\delta_1-{}_{\text{II}}\rho_c+n\sum_2^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)}{\zeta+\delta_1}$$

なるが故に (14) 式より

$$\mathfrak{N}=A_0\frac{-\sigma_{s1}}{n}\,\frac{\delta_1-{}_{\text{II}}\rho_c+n\sum_2^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)}{\zeta+\delta_1}=A_0\sigma_c\frac{\delta_1-{}_{\text{II}}\rho_c+n\sum_2^s p_\nu(\delta_1-\delta_\nu)}{\zeta+\delta_1}\quad\cdots\cdots(110)$$

1. ζ と效率函數

第八節 **1**. の (**2**) に述べたるが如く

$$\lim_{\kappa\to\infty}f(\zeta)=1$$

なるが故に (83) 式により

$$\lambda \gtrless 1 \text{ に從つて } \frac{\partial \chi_c}{\partial \zeta} \gtrless 0 \qquad \text{(111)}$$

なり。

2. p_μ **と效率函數** ($\mu=2, 3, \ldots s$)

第八節 2 の (3) に述べたるが如く

$$\lim_{\kappa \to \infty} f_{(p_\mu)} = 1$$

なるが故に (86″) 式により

$$\lambda \lessgtr 1 \text{ に從つて } \frac{\partial \chi_c}{\partial p_\mu} \gtrless 0 \qquad \text{(112)}$$

以上の代りに次の如くにも表す事を得。第一節に述べたる事により

$$\lim_{\kappa \to \infty} \frac{g}{\kappa} = a = 1 + np$$

なるが故に (49) 式により

$$\chi_c = \lim_{\kappa \to \infty} \frac{1}{\kappa} \frac{g}{1+\lambda np} = \frac{1+np}{1+\lambda np} \qquad \text{(113)}$$

(14) 式により

$$\mathfrak{N} = A_0 \frac{{}_{II}\sigma_{s1}}{n}(1+np) = A_0 \sigma_c (1+np) \qquad \text{(114)}$$

(113) 式より

$$\lambda \lessgtr 1 \text{ に從つて } \frac{d\chi_c}{dp} \gtrless 0. \qquad \text{(115)}$$

第 二 章　左右及上下對稱の斷面

第 一 節　函數の變換

上下對稱なるが故に (17′), (18″) 式より

$$\left.\begin{aligned}
&\rho_s = {}_{II}\rho_c = {}_{II}\rho = \frac{1}{2} \\
&\text{從つて} \\
&\text{(36) 式より} \quad \alpha = \sum_{\nu=1}^{s} \omega_\nu \left(\frac{1}{2} - \delta_\nu\right)^2 < \sum_{\nu=1}^{s} \omega_\nu \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \\
&\text{(27) 式より} \quad g_s = p\left(\kappa - \frac{1}{2}\right) \\
&\text{(31), (35) 式より} \quad i_s = p\alpha + p\left(\kappa - \frac{1}{2}\right)^2 = p\left\{\alpha + \left(\kappa - \frac{1}{2}\right)^2\right\} \\
&\text{從つて} \quad \kappa g_s - i_s = p\left\{\frac{1}{2}\left(\kappa - \frac{1}{2}\right) - \alpha\right\} \\
&\text{(26) 式より} \quad {}_{II}g_c = \kappa - \frac{1}{2}
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(116)}$$

(29) 式より $\quad {}_{\rm II}i_c=\left(\kappa-\dfrac{1}{2}\right)^2+{}_{\rm II}i_{co}$

從つて $\quad \kappa_{\rm II}g_c-{}_{\rm II}i_c=\dfrac{1}{2}\left(\kappa-\dfrac{1}{2}\right)-{}_{\rm II}i_{co}$

(2), (30), 式より $\quad \kappa=\dfrac{1}{2}$ の時 $\quad a_c=\dfrac{1}{2},\ i_c=\dfrac{1}{2}\,{}_{\rm II}i_{co}$

(26), (30) 式より $\quad \kappa=1$ の時 $\quad g_c=\dfrac{1}{2},\ i_c=\dfrac{1}{4}+{}_{\rm II}i_{co}$

等の關係あり。

1. 拘束條件

(51), (116) 式より

$$\zeta=-\frac{\kappa g_c-i_c+np\left\{\dfrac{1}{2}\left(\kappa-\dfrac{1}{2}\right)-\alpha\right\}}{g_c+np\left(\kappa-\dfrac{1}{2}\right)} \quad\cdots\cdots(117)$$

又は兩邊に $\dfrac{1}{2}$ を加へ

$$\zeta+\frac{1}{2}=\frac{-\left(\kappa-\dfrac{1}{2}\right)g_c+i_c+\alpha np}{g_c+np\left(\kappa-\dfrac{1}{2}\right)} \quad\cdots\cdots(117')$$

又は

$$(\zeta+\kappa)g_c-i_c+np\left\{\left(\zeta+\frac{1}{2}\right)\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)-\alpha\right\}=0 \quad\cdots\cdots(117'')$$

特に狀態 II の時は, (116) の關係を (117') に適用し

$$\zeta+\frac{1}{2}=\frac{{}_{\rm II}i_{co}+\alpha np}{\left(\kappa-\dfrac{1}{2}\right)(1+np)} \quad\cdots\cdots(118)$$

2. 變 換

p :— (117'') 式より

$$np=\frac{(\zeta+\kappa)g_c-i_c}{\alpha-\left(\zeta+\dfrac{1}{2}\right)\left(\kappa-\dfrac{1}{2}\right)} \quad\cdots\cdots(119)$$

g :— (7), (116), (119) 式より

$$g=g_c+ng_s=g_c+\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)\frac{\left\{\left(\zeta+\dfrac{1}{2}\right)+\left(\kappa-\dfrac{1}{2}\right)\right\}g_c-i_c}{\alpha-\left(\zeta+\dfrac{1}{2}\right)\left(\kappa-\dfrac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{\alpha g_c-\left(\kappa-\dfrac{1}{2}\right)\left\{-\left(\kappa-\dfrac{1}{2}\right)g_c+i_c\right\}}{\alpha-\left(\zeta+\dfrac{1}{2}\right)\left(\kappa-\dfrac{1}{2}\right)}$$

$$\equiv\frac{\alpha g_c-\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)U}{\alpha-\left(\zeta+\frac{1}{2}\right)\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)}\equiv\frac{\Phi}{\alpha-\left(\zeta+\frac{1}{2}\right)\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)} \quad\cdots\cdots(120)$$

爰に
$$U(\kappa)\equiv-\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)g_c+i_c \quad\cdots\cdots(121)$$

$$\Phi(\kappa)\equiv\alpha g_c-\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)U \quad\cdots\cdots(122)$$

i:— (8), (120) 式より

$$i=(\zeta+\kappa)g=\frac{\zeta+\kappa}{\alpha-\left(\zeta+\frac{1}{2}\right)\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)}\Phi \quad\cdots\cdots(123)$$

$1+\lambda np$:— (119) 式より

$$1+\lambda np=1+\lambda\frac{\left\{\left(\zeta+\frac{1}{2}\right)+\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)\right\}g_c-i_c}{\alpha-\left(\zeta+\frac{1}{2}\right)\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{\alpha-\lambda\left\{-\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)g_c+i_c\right\}+\left(\zeta+\frac{1}{2}\right)\left\{-\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)+\lambda g_c\right\}}{\alpha-\left(\zeta+\frac{1}{2}\right)\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)}$$

$$\equiv\frac{\alpha-\lambda U+\left(\zeta+\frac{1}{2}\right)V}{\alpha-\left(\zeta+\frac{1}{2}\right)\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)}\equiv\frac{\Psi}{\alpha-\left(\zeta+\frac{1}{2}\right)\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)} \quad\cdots\cdots(124)$$

爰に
$$V(\kappa)\equiv-\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)+\lambda g_c \quad\cdots\cdots(125)$$

$$\Psi(\zeta,\kappa)\equiv\alpha-\lambda U+\left(\zeta+\frac{1}{2}\right)V \quad\cdots\cdots(126)$$

χ_s, χ_c:— (48), (49), (120), (124) 式より

$$\chi_s(\zeta,\kappa)=\frac{\kappa_b-\delta_1}{\kappa_b}\frac{1}{\kappa-\delta_1}\frac{g}{1+\lambda np}=\frac{\kappa_b-\delta_1}{\kappa_b}\frac{1}{\kappa-\delta_1}\frac{\Phi}{\Psi} \quad\cdots\cdots(127)$$

$$\chi_c(\zeta,\kappa)=\frac{1}{\kappa}\frac{g}{1+\lambda np}=\frac{1}{\kappa}\frac{\Phi}{\Psi} \quad\cdots\cdots(128)$$

$\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}$:— (8), (10), (11), (120) 式より

$$\mathfrak{N}=A_o\frac{-\sigma_{s1}}{n}\frac{\Phi}{\kappa-\delta_1}\frac{1}{\alpha-\left(\zeta+\frac{1}{2}\right)\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)}=A_o\sigma_c\frac{\Phi}{\kappa}\frac{1}{\alpha-\left(\zeta+\frac{1}{2}\right)\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)} \quad\cdots\cdots(129)$$

$$\mathfrak{M}=A_oh\frac{-\sigma_{s1}}{n}\frac{\Phi}{\kappa-\delta_1}\frac{\zeta+\gamma}{\alpha-\left(\zeta+\frac{1}{2}\right)\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)}=A_oh\,\sigma_c\frac{\Phi}{\kappa}\frac{\zeta+\gamma}{\alpha-\left(\zeta+\frac{1}{2}\right)\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)}$$
$$\cdots\cdots(130)$$

特に狀態 II の時は, $\Phi=(\alpha-{}_{s}i_{co})\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)$ なるが故に

$$\mathfrak{N}=A_0\sigma_c\frac{(\alpha-{}_{\mathrm{II}}i_{c0})\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)}{\kappa}\frac{1}{\alpha-\left(\zeta+\frac{1}{2}\right)\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)} \quad\cdots\cdots(129)_{\mathrm{II}}$$

$$\mathfrak{M}=A_0h\sigma_c\frac{(\alpha-{}_{\mathrm{II}}i_{c0})\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)}{\kappa}\frac{\zeta+\gamma}{\alpha-\left(\zeta+\frac{1}{2}\right)\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)} \quad\cdots\cdots(130)_{\mathrm{II}}$$

3. 函數の關係

以上主なる函數の關係を一括すれば次の如し。

$$U(\kappa)=-\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)g_c+i_c \quad\cdots\cdots(121)$$

$$V(\kappa)=-\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)+\lambda g_c \quad\cdots\cdots(125)$$

$$\Phi(\kappa)=\alpha g_c-\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)U=\left\{\alpha+\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)^2\right\}g_c-\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)i_c \quad\cdots\cdots(122)$$

$$\Psi(\zeta,\kappa)=\alpha-\lambda U+\left(\zeta+\frac{1}{2}\right)V=\alpha+\lambda\left\{(\zeta+\kappa)g_c-i_c\right\}-\left(\zeta+\frac{1}{2}\right)\left(\kappa-\frac{1}{2}\right) \quad\cdots\cdots(126)$$

$$\chi_s(\zeta,\kappa)=\frac{\kappa_b-\delta_1}{\kappa_b}\frac{1}{\kappa-\delta_1}\frac{\Phi}{\Psi} \quad\cdots\cdots(127)$$

$$\chi_c(\zeta,\kappa)=\frac{1}{\kappa}\frac{\Phi}{\Psi} \quad\cdots\cdots(128)$$

以上の關係及 (19), (20) 式により次の關係を得。

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dU}{d\kappa}=-\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)a_c+g_c\\
&\frac{dV}{d\kappa}=\lambda a_c-1\\
&\frac{\partial\Psi}{\partial\zeta}=V=-\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)+\lambda g_c\\
&\frac{d\Phi}{d\kappa}=\alpha a_c-U-\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)\frac{dU}{d\kappa}=\left\{\alpha+\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)^2\right\}a_c-i_c\\
&\frac{\partial\Psi}{\partial\kappa}=-\lambda\frac{dU}{d\kappa}+\left(\zeta+\frac{1}{2}\right)\frac{dV}{d\kappa}=\lambda\left\{\left(\zeta+\kappa\right)a_c-g_c\right\}-\left(\zeta+\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(131)$$

$$\frac{\partial\chi_s}{\partial\zeta}=-\frac{\kappa_b-\delta_1}{\kappa_b}\frac{1}{\kappa-\delta_1}\frac{\Phi}{\Psi^2}V \quad\cdots\cdots(132)$$

$$\frac{\partial\chi_c}{\partial\zeta}=-\frac{1}{\kappa}\frac{\Phi}{\Psi^2}V \quad\cdots\cdots(133)$$

$$\frac{\partial\chi_s}{\partial\kappa}=\frac{\kappa_b-\delta_1}{\kappa_b}\frac{1}{(\kappa-\delta_1)^2\Psi^2}\left\{(\kappa-\delta_1)\left(\Psi\frac{\partial\Phi}{\partial\kappa}-\Phi\frac{\partial\Psi}{\partial\kappa}\right)-\Phi\Psi\right\} \quad\cdots\cdots(134)$$

$$\frac{\partial\chi_c}{\partial\kappa}=\frac{1}{\kappa^2\Psi^2}\left\{\kappa\left(\Psi\frac{\partial\Phi}{\partial\kappa}-\Phi\frac{\partial\Psi}{\partial\kappa}\right)-\Phi\Psi\right\} \quad\cdots\cdots(135)$$

特に，狀態 II の時は以上の關係に (116) 式の關係を適用する事により次の關係を得。

$$U={}_{\mathrm{II}}i_{c0} \quad\cdots\cdots(121)_{\mathrm{II}}$$

$$V=(\lambda-1)\left(\kappa-\frac{1}{2}\right) \quad\cdots\cdots(125)_{\mathrm{II}}$$

$$\Phi=(\alpha-{}_{\mathrm{II}}i_{c0})\left(\kappa-\frac{1}{2}\right) \quad\cdots\cdots(122)_{\mathrm{II}}$$

$$\Psi=\alpha-\lambda_{\mathrm{II}}i_{co}+(\lambda-1)\left(\zeta+\frac{1}{2}\right)\left(\kappa-\frac{1}{2}\right) \quad \cdots\cdots(126)_{\mathrm{II}}$$

$$\chi_c=\frac{1}{\kappa}\frac{(\alpha-{}_{\mathrm{II}}i_{co})\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)}{\alpha-\lambda_{\mathrm{II}}i_{co}+(\lambda-1)\left(\zeta+\frac{1}{2}\right)\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)} \quad \cdots\cdots(128)_{\mathrm{II}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dU}{d\kappa}=0, \qquad \dfrac{dV}{d\kappa}=\lambda-1 \\ \dfrac{\partial\Psi}{\partial\zeta}=(\lambda-1)\left(\kappa-\dfrac{1}{2}\right) \\ \dfrac{d\Phi}{d\kappa}=\alpha-{}_{\mathrm{II}}i_{co}, \qquad \dfrac{\partial\Psi}{\partial\kappa}=(\lambda-1)\left(\zeta+\dfrac{1}{2}\right) \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots(131)_{\mathrm{II}}$$

第二節 變 域

1. 限 定

第一章第七節 1. の限定の如く偏心壓力, 彎曲又は中心壓力のみに限定する事とすれば

$$\zeta+\frac{1}{2}\leqq 0 \quad \cdots\cdots(136)$$

なる事明なり。

2. p

(77)式と同樣に

$$0\leqq p\gtreqless \overline{p} \quad \cdots\cdots(137)$$

ならざる可らず。

3. ζ

(119), (120) 式により

$$\frac{\partial(np)}{\partial\zeta}=\frac{g_c}{\alpha-\left(\zeta+\frac{1}{2}\right)\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)}+\frac{(\zeta+\kappa)g_c-i_c}{\left\{\alpha-\left(\zeta+\frac{1}{2}\right)\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)\right\}^2}\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{\left\{\alpha-\left(\zeta+\frac{1}{2}\right)\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)\right\}^2}\left[\alpha g_c-\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)\left\{-\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)g_c+i_c\right\}\right]$$

$$=\frac{\Phi}{\left\{\alpha-\left(\zeta+\frac{1}{2}\right)\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)\right\}^2}$$

なり。故に $\Phi\gtreqless 0$ に從つて p は單調に增加又は減少す。

今 Φ を吟味せんとす。

a_c, g_c, i_c 等は

	a_c	g_c	i_c
$\kappa=\frac{1}{2}$ の時	$\frac{1}{2}$	g_c	$\frac{1}{2}{}_{\mathrm{II}}i_{co}$
$\kappa=1$ の時	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}+{}_{\mathrm{II}}i_{co}$

なるが故に (122), (131) 式即ち

$$\Phi=\alpha g_c+\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)^2 g_c-\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)i_c$$

$$\frac{d\Phi}{d\kappa}=\alpha a_c+\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)^2 a_c-i_c$$

に適用すれば

	Φ	$\dfrac{d\Phi}{d\kappa}$
$\kappa=\dfrac{1}{2}$ の時	αg_c	$\dfrac{1}{2}(\alpha-{}_Bi_{co})$
$\kappa=1$ の時	$\dfrac{1}{2}(\alpha-{}_Bi_{co})$	$\alpha-{}_Bi_{co}$

なり。今

$$\alpha+\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)\frac{i_c}{g_c}\equiv w \quad 即ち \quad \Phi\equiv g_c w$$

と置けば

$$\frac{dw}{d\kappa}=2\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)-\frac{i_c}{g_c}-\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2g_c}{g_c}-\frac{i_c}{g_c^2}a_c\right)$$

$$=\frac{i_c}{g_c^2}\left\{\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)a_c-g_c\right\}=\frac{a_c i_c}{g_c^2}\left(\rho_c-\frac{1}{2}\right)<0$$

なるが故に, w は κ の増加に從ひ單調に減少する函數なる事を知る。又

$$\frac{d\Phi}{d\kappa}=\frac{d}{d\kappa}(g_c w)=a_c w+g_c\frac{dw}{d\kappa}=a_c w+g_c\frac{a_c i_c}{g_c^2}\left(\rho_c-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{a_c}{g_c}\left\{g_c w+i_c\left(\rho_c-\frac{1}{2}\right)\right\}=\frac{a_c}{g_c}\left\{\Phi+\left(\rho_c-\frac{1}{2}\right)i_c\right\}$$

なるが故に, 若し $\Phi<0$ ならば, $\dfrac{d\Phi}{d\kappa}<0$, 即ち Φ は κ の増加に從つて單調に減少する函數なる事を知る。

(1)　$\kappa<1$

1)　$\kappa<\dfrac{1}{2}$ の時

(122) 式により

$$\Phi>0$$

なり。又 (25) 式により　$\kappa^2>\dfrac{i_c}{a_c}$　なるが故に, (131) 式に於て

$$\frac{d\Phi}{d\kappa}=\left\{\alpha+\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{i_c}{a_c}\right\}a_c>\left\{\alpha+\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)^2-\kappa^2\right\}a_c=\left(\alpha+\frac{1}{4}-\kappa\right)a_c$$

なり。從つて

$$\kappa<\alpha+\frac{1}{4} \quad ならば \quad 常に\frac{d\Phi}{d\kappa}>0 \quad \text{.........(138)}$$

なり。

2)　$\dfrac{1}{2}<\kappa<1$ の時

前述の如く w は單調に減少する函數にして，且つ

$$\begin{array}{lll} \kappa & \frac{1}{2} & 1 \\ w & \alpha & \alpha - {}_{\text{II}}i_{co} \end{array}$$

なるが故に，κ が $\frac{1}{2}<\kappa<1$ の間に於ては

$$\alpha > w > \alpha - {}_{\text{II}}i_{co},\ \text{從つて}\ \alpha g_c > g_c w = \Phi > g_c(\alpha - {}_{\text{II}}i_{co})$$

なり。故に

i) $\alpha > {}_{\text{II}}i_{co}$ の場合

$$\Phi > 0$$

なり。

ii) $\alpha < {}_{\text{II}}i_{co}$ の場合

$\kappa=1$ の時は $\Phi=\frac{1}{2}(\alpha-{}_{\text{II}}i_{co})<0$ なるが故に，κ が $\frac{1}{2}<\kappa<1$ の間に於て，Φ は正より負に轉ず。$\Phi<0$ ならば Φ は單調に減少する事は前述の通りなるが故に，Φ が正より負に轉ずるが如き κ の値は唯一つに限る事を知る。

(2)　$1<\kappa$

$$\Phi=(\alpha-{}_{\text{II}}i_{co})\left(\kappa-\frac{1}{2}\right),\qquad \frac{d\Phi}{d\kappa}=\alpha-{}_{\text{II}}i_{co}$$

なるが故に

$$\alpha \gtreqless {}_{\text{II}}i_{co}\ \text{に從つて}\ \Phi \gtreqless 0,\qquad \frac{d\Phi}{d\kappa}\gtreqless 0$$

なり。

以上吟味せる事を總括すれば

$$\left.\begin{array}{l} \alpha > {}_{\text{II}}i_{co}\ \text{の場合には常に}\ \Phi>0 \\ \alpha < {}_{\text{II}}i_{co}\ \text{の場合には}\ \frac{1}{2}<\kappa<1\ \text{の間に於て}\ \Phi\ \text{は正より負に轉ず。} \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(139)$$

前述の如く，p は ζ の單調函數なるが故に ζ の變域は $p=0$ なる場合と，$p=\bar{p}$ なる場合との間にありて，且つ (75) 式の $g\geqq 0$ なる條件を滿足せざる可らず。

ζ の變域の上端を $\bar{\zeta}$，下端を $\underline{\zeta}$ にて表す時は

$$\underline{\zeta} \leqq \zeta \leqq \bar{\zeta}$$

なる可き事勿論にして，尚 $\bar{\zeta}$，$\underline{\zeta}$ は前述により

$$\left.\begin{array}{c|c|cc|c} & \text{i) } \alpha > {}_{\text{II}}i_{co}\ \text{の場合} & \multicolumn{3}{c}{\text{ii) } \alpha < {}_{\text{II}}i_{co}\ \text{の場合}} \\ & & \kappa<\frac{1}{2} & \multicolumn{2}{c}{\frac{1}{2}<\kappa} \\ & & & \Phi>0\ \text{の間} & \Phi<0\ \text{の間} \\ \bar{\zeta} & \zeta_{(p=\bar{p})} & \zeta_{(p=\bar{p})} & \zeta_{(p=\bar{p})} & \zeta_{(p=0)} \\ \underline{\zeta} & \zeta_{(p=0)} & \zeta_{(p=0)} & \zeta_{(p=0)} & \zeta_{(p=\bar{p})} \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots(140)$$

ならざる可らず。爰に $\zeta_{(p=0)}$，$\zeta_{(p=\bar{p})}$ は (117) 式により

$$\left.\begin{aligned}\zeta_{(p=0)}&=-\frac{\kappa g_c-i_c}{g_c}\\ \zeta_{(p=\bar{p})}&=-\frac{\kappa g_c-i_c+n\bar{p}\left\{\frac{1}{2}\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)-\alpha\right\}}{g_c+n\bar{p}\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(141)$$

第三節 效率函數

變數 ζ, κ の變化による效率函數の變化を吟味し，效率函數をして最大ならしむべき關係を求めんとす。

1. ζ と效率函數

(132), (133) 式即ち

$$\frac{\partial\chi_s}{\partial\zeta}=-\frac{\kappa_b-\delta_1}{\kappa_b}\frac{1}{\kappa-\delta_1}\frac{\Phi}{\Psi^2}V$$

$$\frac{\partial\chi_c}{\partial\zeta}=-\frac{1}{\kappa}\frac{\Phi}{\Psi^2}V$$

に於て，先づ V を吟味せんとす。

(1) V

(125) 式より

$$V=-\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)+\lambda g_c$$

なるが故に

1) $\kappa<\frac{1}{2}$ の時

$$V>0$$

2) $\frac{1}{2}>\kappa$ の時

$$\lambda\gtrless\frac{\kappa-\frac{1}{2}}{g_c} \text{ に從つて } V\gtrless 0$$

なり。

然るに $\frac{\kappa-\frac{1}{2}}{g_c}$ は κ と倶に增加し，其最大値は 1 なるが故に

$\lambda>1$ ならば常に $V>0$

$\lambda<1$ ならば $\lambda\gtrless\frac{\kappa-\frac{1}{2}}{g_c}$ に從つて $V\gtrless 0$

(2) $\frac{\partial\chi_s}{\partial\zeta}$, $\frac{\partial\chi_c}{\partial\zeta}$:—

1) $\kappa<\frac{1}{2}$ の時

$V>0$ なるが故に

$$\frac{\partial\chi_s}{\partial\zeta}<0$$

$$\frac{\partial\chi_c}{\partial\zeta}<0$$

なり。

2) $\frac{1}{2}<\kappa$ の時

i) $\alpha>{}_{II}i_{co}$ の場合

(139) 式により $\Phi>0$ なるが故に, (133) 式により

$$V\lesseqgtr 0 \text{ に從つて } \frac{\partial\chi_c}{\partial\kappa}\gtreqless 0$$

なり。卽ち

$$\lambda>1 \text{ ならば常に } \qquad \frac{\partial\chi_c}{\partial\zeta}<0$$

$$\lambda<1 \text{ ならば } \lambda\lesseqgtr\frac{\kappa-\frac{1}{2}}{g_c} \text{ に從つて } \frac{\partial\chi_c}{\partial\zeta}\gtreqless 0$$

なり。

ii) $\alpha<{}_{II}i_{co}$ の場合

$\Phi>0$ なる間は i) の條件と同樣なり

$$\Phi<0 \text{ なる間は } V\gtreqless 0, \text{ 卽ち } \lambda\gtreqless\frac{\kappa-\frac{1}{2}}{g_c} \text{ に從つて } \frac{\partial\chi_c}{\partial\zeta}\gtreqless 0$$

なり。

以上吟味せる事を一括すれば次の如し。

$\kappa<\frac{1}{2}$ の時

$\frac{1}{2}<\kappa$ の時

i) $\alpha>{}_{II}i_{co}$ の場合

ii) $\alpha<{}_{II}i_{co}$ の場合

$\Phi>0$ の間

$\Phi<0$ の間

$$\frac{\partial\chi}{\partial\zeta}<0 \qquad \lambda\lesseqgtr\frac{\kappa-\frac{1}{2}}{g_c} \text{ に從つて } \frac{\partial\chi}{\partial\zeta}\gtreqless 0 \qquad \lambda\lesseqgtr\frac{\kappa-\frac{1}{2}}{g_c} \text{ に從つて } \frac{\partial\chi}{\partial\zeta}\gtreqless 0 \qquad \lambda\gtreqless\frac{\kappa-\frac{1}{2}}{g_c} \text{ に從つて } \frac{\partial\chi}{\partial\zeta}\gtreqless 0 \quad \cdots\cdots(142)$$

2. κ と効率函數

(1) $\frac{\partial\chi_s}{\partial\kappa}$

(127) 式卽ち

$$\chi_s=\frac{\delta_1-\kappa_b}{\kappa_b}\frac{1}{\delta_1-\kappa}\frac{\Phi}{\Psi}$$

に於て, $\frac{1}{\delta_1-\kappa}$ は κ と倶に増加し, 又 (138) 式により $0<\kappa<\alpha+\frac{1}{4}$ ならば Φ は κ と倶に増加し, 又 (131) 式により $\kappa<\frac{1}{2}$, 且つ $\lambda\alpha_c-1<0$ 卽ち $\lambda<1/\alpha_c$ ならば $\frac{\partial\Psi}{\partial\kappa}<0$ 卽ち Ψ は κ と倶に減少す。

卽ち少くとも上記の制限内に於ては χ_s は κ と倶に増加す。卽ち

$$\frac{\partial X_s}{\partial \kappa}>0 \quad \cdots\cdots (143)$$

(2) $\dfrac{\partial X_c}{\partial \kappa}$

1) $\kappa<1$

i) κ が充分小なる時

(135) 式卽ち

$$\frac{\partial X_c}{\partial \kappa}=\frac{1}{\kappa^2\Psi^2}\left\{\left(\kappa\frac{\partial \Phi}{\partial \kappa}-\Phi\right)\Psi-\kappa\Phi\frac{\partial \Psi}{\partial \kappa}\right\}$$

に於て, $\kappa<\dfrac{1}{2}$ 且つ $\lambda<1/\alpha_c$ ならば (131) 式により $\dfrac{\partial \Psi}{\partial \kappa}<0$ なり。又 $\Phi>0$ なるが故に $\Psi>0$ なり。

今 $\left(\kappa\dfrac{\partial \Phi}{\partial \kappa}-\Phi\right)$ なる項を見るに

$$\frac{d}{d\kappa}\left(\kappa\frac{\partial \Phi}{\partial \kappa}-\Phi\right)=\frac{d\Phi}{d\kappa}+\kappa\frac{d^2\Phi}{d\kappa^2}-\frac{d\Phi}{d\kappa}=\kappa\frac{d^2\Phi}{d\kappa^2}$$

なり。然るに (131) 式により $\left(\dfrac{d\Phi}{d\kappa}\right)_{\kappa=0}=0$ なるが故に κ が小なる間は $\dfrac{d^2\Phi}{d\kappa^2}>0$ ならざる可らず。卽ち

$$\frac{d}{d\kappa}\left(\kappa\frac{\partial \Phi}{\partial \kappa}-\Phi\right)>0$$

ならざる可らず。然るに (122), (131) 式により $\left(\kappa\dfrac{\partial \Phi}{\partial \kappa}-\Phi\right)_{\kappa=0}=0$ なるが故に

$$\kappa\frac{\partial \Phi}{\partial \kappa}-\Phi>0$$

なり。

卽ち (135) 式の括弧の中は正なるが故に,

$$\frac{\partial X_c}{\partial \kappa}>0 \quad \cdots\cdots (144)$$

なり。

ii) $\kappa=\kappa_b$ の時

此時は (127), (128) 式により

$$X_s=X_c$$

なれ共, (134), (135) 式により

$$\left(\frac{\partial X_s}{\partial \kappa}\right)_{\kappa=\kappa_b}=-\frac{1}{\kappa_b\Psi^2_{\kappa=\kappa_b}}\left[\left\{\Psi_{\kappa=\kappa_b}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \kappa}\right)_{\kappa=\kappa_b}-\Phi_{\kappa=\kappa_b}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \kappa}\right)_{\kappa=\kappa_b}\right\}+\frac{1}{\delta_1-\kappa_b}\Phi_{\kappa=\kappa_b}\Psi_{\kappa=\kappa_b}\right]$$

$$\left(\frac{\partial X_c}{\partial \kappa}\right)_{\kappa=\kappa_b}=\frac{1}{\kappa_b\Psi^2_{\kappa=\kappa_b}}\left[\left\{\Psi_{\kappa=\kappa_b}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \kappa}\right)_{\kappa=\kappa_b}-\Phi_{\kappa=\kappa_b}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \kappa}\right)_{\kappa=\kappa_b}\right\}-\frac{1}{\kappa_b}\Phi_{\kappa=\kappa_b}\Psi_{\kappa=\kappa_b}\right]$$

にして $\Phi_{\kappa=\kappa_b}>0$, $\Psi_{\kappa=\kappa_b}>0$ なるが故に

$$\left(\frac{\partial X_s}{\partial \kappa}\right)_{\kappa=\kappa_b}>\left(\frac{\partial X_c}{\partial \kappa}\right)_{\kappa=\kappa_b}$$

iii) X_c の極大

i) に述べたるが如く κ が充分小なる時は $\dfrac{\partial X_c}{\partial \kappa}>0$ なり。然るに II に述ぶるが如く $\kappa=1$ の時は $\dfrac{\partial X_c}{\partial \kappa}<0$ なる場合あり。從つて此場合には κ が $0<\kappa<1$ の間に於て X_c の極大存在せざる可らず。故に (135) 式により

$$\kappa\left(\Psi\frac{\partial\Phi}{\partial\kappa}-\Phi\frac{\partial\Psi}{\partial\kappa}\right)-\Phi\Psi=0$$

ならざる可らず。(122), (126), (131) 式により

$$\Psi\frac{\partial\Phi}{\partial\kappa}=\left\{\alpha-\lambda U+\left(\zeta+\frac{1}{2}\right)V\right\}\left\{\alpha a_c-U-\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)\frac{dU}{d\kappa}\right\}$$

$$\Phi\frac{\partial\Psi}{\partial\kappa}=\Phi\left\{-\lambda\frac{dU}{d\kappa}+\left(\zeta+\frac{1}{2}\right)\frac{dV}{d\kappa}\right\}$$

$$\Phi\Psi=\Phi\left\{\alpha-\lambda U+\left(\zeta+\frac{1}{2}\right)V\right\}$$

なるが故に，之等を上式に代入し整理すれば

$$\zeta+\frac{1}{2}=\frac{\alpha\kappa V\dfrac{dU}{d\kappa}-(\alpha-\lambda U)\left\{\dfrac{1}{2}U-\alpha(\kappa a_c-g_c)\right\}}{\kappa\left\{\Phi\dfrac{dV}{d\kappa}+\left(\kappa-\dfrac{1}{2}\right)V\dfrac{dU}{d\kappa}\right\}+V\left\{\dfrac{1}{2}U-\alpha(\kappa a_c-g_c)\right\}}\cdots\cdots(145)$$

を得。此關係を滿足する κ が χ_c の極大を與ふ。

2) $1<\kappa$

(135), $(122)_{\rm II}$, $(126)_{\rm II}$, $(131)_{\rm II}$ 式により

$$\frac{\partial\chi_c}{\partial\kappa}=\frac{1}{\kappa^2\Psi^2}\Bigg[\kappa\left\{\alpha-\lambda{}_{\rm II}i_{co}+(\lambda-1)\left(\zeta+\frac{1}{2}\right)\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)\right\}(\alpha-{}_{\rm II}i_{co})$$

$$-\kappa(\alpha-{}_{\rm II}i_{co})\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)(\lambda-1)\left(\zeta+\frac{1}{2}\right)$$

$$-(\alpha-{}_{\rm II}i_{co})\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)\left\{\alpha-\lambda{}_{\rm II}i_{co}+(\lambda-1)\left(\zeta+\frac{1}{2}\right)\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)\right\}\Bigg]$$

$$=\frac{{}_{\rm II}i_{co}}{\kappa^2\Psi^2}\left(\frac{\alpha}{{}_{\rm II}i_{co}}-1\right)\left\{-(\lambda-1)\left(\zeta+\frac{1}{2}\right)\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{{}_{\rm II}i_{co}}{2}\left(\frac{\alpha}{{}_{\rm II}i_{co}}-\lambda\right)\right\}$$

なり。

i) $\alpha>{}_{\rm II}i_{co}$ の場合 $\left(\text{即ち}\ \dfrac{\alpha}{{}_{\rm II}i_{co}}-1>0\ \text{の場合}\right)$

(1) $\lambda<1<\dfrac{\alpha}{{}_{\rm II}i_{co}}$ の場合

$-(\lambda-1)>0,\ \dfrac{\alpha}{{}_{\rm II}i_{co}}-\lambda>0$ なるが故に

$$\frac{\partial\chi_c}{\partial\kappa}>0$$

(2), $1<\lambda<\dfrac{\alpha}{{}_{\rm II}i_{co}}$ の場合

$-(\lambda-1)<0,\ \dfrac{\alpha}{{}_{\rm II}i_{co}}-\lambda>0$ なるが故に

$$-(\lambda-1)\left(\zeta+\frac{1}{2}\right)\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{{}_{\rm II}i_{co}}{2}\left(\frac{\alpha}{{}_{\rm II}i_{co}}-\lambda\right)\gtrless0\ \text{に從つて}\ \frac{\partial\chi_c}{\partial\kappa}\gtrless0$$

即ち

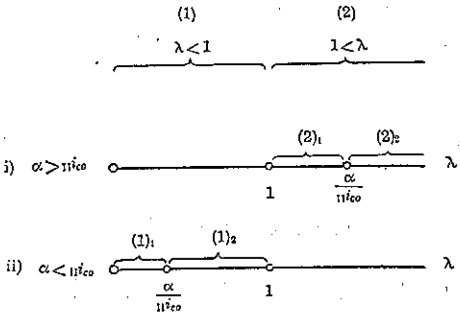
$$\frac{\frac{{}_{n}i_{co}}{2}\left(\frac{\alpha}{{}_{n}i_{co}}-\lambda\right)}{(\lambda-1)\left(\zeta+\frac{1}{2}\right)}\gtrless\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)^2 \text{ に從つて } \frac{\partial \chi_c}{\partial \kappa}\gtrless 0$$

$(2)_2$　$1<\frac{\alpha}{{}_{n}i_{co}}<\lambda$ の場合

$-(\lambda-1)<0,\ \frac{\alpha}{{}_{n}i_{co}}-\lambda<0$ なるが故に

$$\frac{\partial \chi_c}{\partial \kappa}<0$$

第　三　圖



ii)　$\alpha<{}_{n}i_{co}$ の場合 $\left(\text{卽ち } \frac{\alpha}{{}_{n}i_{co}}-1<0 \text{ の場合}\right)$

$(1)_1$　$\lambda<\frac{\alpha}{{}_{n}i_{co}}<1$ の場合

$-(\lambda-1)>0,\ \frac{\alpha}{{}_{n}i_{co}}-\lambda>0$ なるが故に

$$\frac{\partial \chi_c}{\partial \kappa}<0$$

$(1)_2$　$\frac{\alpha}{{}_{n}i_{co}}<\lambda<1$ の場合

$-(\lambda-1)>0,\ \frac{\alpha}{{}_{n}i_{co}}-\lambda<0$ なるが故に

$$\frac{\frac{{}_{n}i_{co}}{2}\left(\frac{\alpha}{{}_{n}i_{co}}-\lambda\right)}{(\lambda-1)\left(\zeta+\frac{1}{2}\right)}\gtrless\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)^2 \text{ に從つて } \frac{\partial \chi_c}{\partial \kappa}\gtrless 0$$

(2)　$\frac{\alpha}{{}_{n}i_{co}}<1<\lambda$ の場合

$-(\lambda-1)<0,\ \frac{\alpha}{{}_{n}i_{co}}-\lambda<0$ なるが故に $\frac{\partial \chi_c}{\partial \kappa}>0$ なり。

iii)　$\alpha={}_{n}i_{co}$ の場合

此場合には (118) 式より

$$\zeta+\frac{1}{2}=\frac{{}_{n}i_{co}}{\kappa-\frac{1}{2}} \qquad \text{(146)}$$

を得。卽ち κ は ζ の函數にして，p とは無關係なり。

(146) 式より　$\kappa=\kappa-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{{}_{n}i_{co}}{\zeta+\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}=\frac{{}_{n}i_{co}+\frac{1}{2}\left(\zeta+\frac{1}{2}\right)}{\zeta+\frac{1}{2}}$

(116) 式より　$g=g_c+ng_s=\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)(1+np)$

(146) 式より　$=\frac{{}_{n}i_{co}}{\zeta+\frac{1}{2}}(1+np)$

(8) 式より　$\varepsilon=\zeta+\gamma=\left(\zeta+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)$

(146) 式より　$=\dfrac{{}_n i_{co}}{\kappa-\frac{1}{2}}-\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)$

なるが故に

(49) 式より
$$\chi_c=\frac{1}{\kappa}\frac{g}{1+\lambda np}=\frac{\kappa-\frac{1}{2}}{\kappa}\frac{1+np}{1+\lambda np}=\frac{{}_n i_{co}}{{}_n i_{co}+\frac{1}{2}\left(\zeta+\frac{1}{2}\right)}\frac{1+np}{1+\lambda np}\quad\cdots\cdots(147)$$

(10) 式より
$$\mathfrak{N}=A_0\sigma_c\frac{\kappa-\frac{1}{2}}{\kappa}(1+np)=A_0\sigma_c\frac{{}_n i_{co}}{{}_n i_{co}+\frac{1}{2}\left(\zeta+\frac{1}{2}\right)}(1+np)\quad\cdots\cdots(148)$$

(11) 式より
$$\mathfrak{M}=A_0h\sigma_c\frac{{}_n i_{co}-\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)}{\kappa}(1+np)=A_0h\sigma_c\frac{{}_n i_{co}(\zeta+\gamma)}{{}_n i_{co}+\frac{1}{2}\left(\zeta+\frac{1}{2}\right)}(1+np)\quad(149)$$

を得。

(147) 式を見るに $\dfrac{\partial\chi_c}{\partial\kappa}>0$ なる事明なり。

又 p に關しては，恰も中心壓力の場合卽ち (113) 式と同樣にして

$$\lambda\lessgtr 1 \text{ に從つて } \frac{\partial\chi_s}{\partial p}\gtrless 0\quad\cdots\cdots(150)$$

なり。

以上吟味せる事を一括すれば次の如し。

	(1) $\lambda<1$		(2) $1<\lambda$	
i) $1<\dfrac{\alpha}{{}_n i_{co}}$	$\lambda<1<\dfrac{\alpha}{{}_n i_{co}}$		$1<\lambda<\dfrac{\alpha}{{}_n i_{co}}$	$1<\dfrac{\alpha}{{}_n i_{co}}<\lambda$
	$\dfrac{\partial\chi_c}{\partial\kappa}>0$		$\dfrac{\frac{{}_n i_{co}}{2}\left(\frac{\alpha}{{}_n i_{co}}-\lambda\right)}{(\lambda-1)\left(\zeta+\frac{1}{2}\right)}\gtrless\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)^2$ に從つて $\dfrac{\partial\chi_c}{\partial\kappa}\gtrless 0$	$\dfrac{\partial\chi_c}{\partial\kappa}<0$
ii) $\dfrac{\alpha}{{}_n i_{co}}<1$	$\lambda<\dfrac{\alpha}{{}_n i_{co}}<1$	$\dfrac{\alpha}{{}_n i_{co}}<\lambda<1$	$\dfrac{\alpha}{{}_n i_{co}}<1<\lambda$	
	$\dfrac{\partial\chi_c}{\partial\kappa}<0$	$\dfrac{\frac{{}_n i_{co}}{2}\left(\frac{\alpha}{{}_n i_{io}}-\lambda\right)}{(\lambda-1)\left(\zeta+\frac{1}{2}\right)}\gtrless\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)^2$ に從つて $\dfrac{\partial\chi_c}{\partial\kappa}\gtrless 0$	$\dfrac{\partial\chi_c}{\partial\kappa}>0$	
iii) $\dfrac{\alpha}{{}_n i_{co}}=1$	$\dfrac{\partial\chi_c}{\partial\kappa}>0$			

$\cdots\cdots(151)$

第四節　彎　　曲

第一節に述べたる通り，彎曲は偏心壓力の特殊の場合，即ち

$$\zeta \to \infty$$

の極限の場合と考ふる事を得るが故に次の結果を得。

(126)～(128) 式により

$$eX_s = \lim_{\zeta\to\infty} \varepsilon h \frac{\delta_1-\kappa_b}{\kappa_b}\frac{1}{\delta_1-\kappa}\frac{\Phi}{\alpha-\lambda U+\left(\zeta+\frac{1}{2}\right)V}$$

$$= \lim_{\zeta\to\infty} h \frac{\delta_1-\kappa_b}{\kappa_b}\frac{1}{\delta_1-\kappa}\frac{\Phi}{\frac{1}{\zeta}(\alpha-\lambda U)+\frac{1}{\zeta}\left(\zeta+\frac{1}{2}\right)V}$$

$$= h \frac{\delta_1-\kappa_b}{\kappa_b}\frac{1}{\delta_1-\kappa}\frac{\Phi}{V} \quad \cdots\cdots (152)$$

$$eX_c = h\frac{1}{\kappa}\frac{\Phi}{V} \quad \cdots\cdots (153)$$

(119) 式により

$$np = \lim_{\zeta\to\infty}\frac{\left(1+\frac{\zeta}{\kappa}\right)g_c-\frac{i_c}{\zeta}}{\frac{\alpha}{\zeta}+\left(1+\frac{1}{2\zeta}\right)\left(\frac{1}{2}-\kappa\right)} = \frac{g_c}{\frac{1}{2}-\kappa} \quad \cdots\cdots (154)$$

(130) 式により

$$\mathfrak{M} = A_0 h\frac{\sigma_{s1}}{n}\frac{\Phi}{(\delta_1-\kappa)\left(\frac{1}{2}-\kappa\right)} = A_0 h\sigma_c\frac{\Phi}{\kappa\left(\frac{1}{2}-\kappa\right)} \quad \cdots\cdots (155)$$

なり。

(154) 式に於て $g_c>0$ なるが故に，常に $\kappa<\frac{1}{2}$ なるべき事明なり。

尙嚴密なる條件を求むるに (154) 式により p は κ の增加に從つて單調に增加する函數なる事明なるが故に

$$n\overline{p} = \frac{g_c(\kappa)}{\frac{1}{2}-\kappa}$$

なる關係を滿足する κ を $\kappa_{(p=\overline{p})}$ とすれば，

$$0 \leqq \kappa \lesseqgtr \kappa_{(p=\overline{p})} \quad \cdots\cdots (156)$$

ならざる可らず。

κ と效率函數

(1) $\dfrac{d(eX_s)}{d\kappa}$

前節 **2.** の (1) に述べたる (143) 式の關係は $\zeta\to\infty$ と考ふる事により，彎曲の場合にも成立す。即ち少くも $\kappa<\alpha+\frac{1}{4}$ にして且つ $\lambda<1/\alpha_c$ ならば

$$\frac{d(eX_s)}{d\kappa}>0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(157)$$

なり。

(2) $\dfrac{d(eX_c)}{d\kappa}$

前節 2 の (2) の i) 及 ii) に述べたる關係は $\zeta\to\infty$ と考ふる事により彎曲の場合にも成立す。

次に χ_c の極大の存在を吟味せんとす。(153) 式より

$$\frac{d(eX_c)}{d\kappa}=\frac{h}{\kappa^2V^2}\left\{\kappa\left(V\frac{d\Phi}{d\kappa}-\Phi\frac{dV}{d\kappa}\right)-\Phi\Psi\right\}$$

なり。然るに (122), (125), (131) 式により

$$V_{\kappa=\frac{1}{2}}=\lambda g_c,\qquad \left(\frac{dV}{d\kappa}\right)_{\kappa=\frac{1}{2}}=\lambda a_c-1=\frac{1}{2}\lambda-1$$

$$\Phi_{\kappa=\frac{1}{2}}=\alpha g_c,\qquad \left(\frac{d\Phi}{d\kappa}\right)_{\kappa=\frac{1}{2}}=\alpha a_c-i_c=\frac{1}{2}(\alpha-{}_{n}i_{co})$$

なるにより

$$\left(\frac{d(eX_c)}{d\kappa}\right)_{\kappa=\frac{1}{2}}=\frac{h}{\left(\frac{1}{2}\lambda g_c\right)^2}\left[\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\lambda(\alpha-{}_{n}i_{co})\,g_c-\left(\frac{1}{2}\lambda-1\right)\alpha g_c\right\}-\lambda\alpha g_c^2\right]$$

$$=\frac{h}{\left(\frac{1}{2}\lambda\right)^2 g_c}\left[\frac{1}{2}\left(\alpha-\frac{1}{2}\lambda\,{}_{n}i_{co}\right)-\lambda\alpha g_c\right]$$

なり。故に，若し

$$\frac{1}{2}\left(\alpha-\frac{1}{2}\lambda\,{}_{n}i_{co}\right)-\lambda\alpha g_c<0 \text{ ならば，即ち}$$

$$\lambda>\frac{\frac{1}{2}\alpha}{\frac{1}{4}\,{}_{n}i_{co}+\alpha g_c\left(\frac{1}{2}\right)}\quad\text{ならば}\quad\left(\frac{d(eX_c)}{d\kappa}\right)_{\kappa=\frac{1}{2}}<0$$

なり。此關係を滿足する場合には，κ が $0<\kappa<\kappa_{(p=\bar{p})}$ の間に於て (eX_c) の極大存在する事あり。

(eX_c) の極大存在する場合には，(145) 式に於て $\zeta+\frac{1}{2}\to\infty$ と考ふる事により

$$\kappa\left\{\Phi\frac{dV}{d\kappa}+\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)V\frac{dU}{d\kappa}\right\}+V\left\{\frac{1}{2}U-\alpha(\kappa a_c-g_c)\right\}=0$$

即ち (125), (131) 式により

$$\kappa\left[\Phi(\lambda a_c-1)+\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)\left\{-\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)+\lambda g_c\right\}\frac{dU}{d\kappa}\right]$$
$$+\left\{-\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)+\lambda g_c\right\}\left\{\frac{1}{2}U-\alpha(\kappa a_c-g_c)\right\}=0$$

ならざる可らず。整理して

$$\lambda=\frac{\kappa\left\{\Phi+\left(\frac{1}{2}-\kappa\right)^2\frac{dU}{d\kappa}\right\}-\left(\frac{1}{2}-\kappa\right)\left\{\frac{1}{2}U-\alpha(\kappa a_c-g_c)\right\}}{\kappa\left\{a_c\Phi-\left(\frac{1}{2}-\kappa\right)g_c\frac{dU}{d\kappa}\right\}+g_c\left\{\frac{1}{2}U-\alpha(\kappa a_c-g_c)\right\}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(158)$$

を得。上式を滿足する κ が (eX_c) の極大を與ふ。　　（以　上）