

講
演

軌條継目の應力に就て

(昭和六年十一月一日應用力学聯合大會に於て)

會員 工學士 堀 越 一 三

On Stresses in Rail Joint

By Ichizo Horikoshi, C.E., Member.

内容梗概

軌條継目に生ずる應力を計算する一般方法は未だ知られて居ない。此の論文は此の問題を取扱つたもので、計算方法を示すと同時に之れに必要な實驗値を求めて報告せるものである。

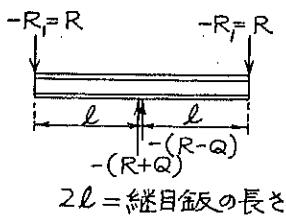
目 次

第一 章	継目鋸に作用する壓力	1
第二 章	軌條壓力、軌條弯曲力率及び剪力	2
第三 章	継目鋸の應力と挿み	3
第四 章	軌條継目の作用	4
第五 章	継目鋸に生ずる應力に就ての實驗	8

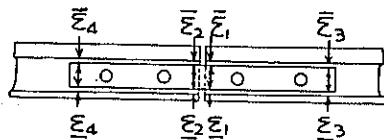
第一 章 繼目鋸に作用する壓力

継目鋸に作用する外力は、軌條頭及び底或はボルトによつて加へられるものである。此の外力は継目の狀態によつて種々になるばかりでなく、軌道及び車輪荷重の一般状態にも至大的關係がある。此の外力の内軌條が 繼目鋸の頭部及び底部に及ぼす壓力が最も重要なもので、継目鋸に生ずる應力は主に之れによつて支配される。此の壓力は軌條と継目鋸との間に遊間があるためと、継目鋸及び軌條の夫々異なる弯曲變形等のために継目鋸の長さの中央附近及び端の附近に集中される。従つて軌條継目が弯曲する時、継目鋸に作用する壓力としては第一圖の様に R , $R+Q$ 及び $R-Q$ の三種を考へることが出来る。 Q は継目を通じて一方の軌條から他方の軌條に傳達される剪力である。継目鋸に作用する壓力及び剪力は軌條の場合と同様に上向のものを正とし、垂直弯曲力率は底に應張力を生ずるものを正とする。継目鋸と軌條の間に見られる壓力の作用面又は壓力中心は継目鋸と軌條の間に有る遊隙によつて種々變る。此の遊隙を継目鋸の端及び中央で測り一般に第二圖の様にする。軌條と継目鋸との間の接觸或は壓力の傳達は皆此の遊隙 ε の測定點附近に於て行はれるものとする。

第一圖



第二圖



第二章 軌條壓力、軌條彎曲力率及び剪力

軌道上にある車輪荷重 W が枕木間隔の中央に来た時、 W に隣接する枕木から順次に數へて各枕木上の軌條壓力を夫々

$$F_{I1}W, F_{I2}W, F_{I3}W, \dots$$

a を枕木中心間隔とする時、各枕木上の軌條彎曲力率を夫々

$$f_{II1}aW, f_{II2}aW, f_{II3}aW, \dots$$

W と夫れに隣接する枕木の間及び順次夫れに續く各枕木間の剪力を夫々

$$F_{III1}W, F_{III2}W, F_{III3}W, \dots$$

とする。

W が枕木の上にある時、 W の下にある枕木から數へて順次各枕木上の軌條壓力、軌條彎曲力率及び各枕木間の剪力を夫々

$$f_{I1}W, f_{I2}W, f_{I3}W, \dots$$

$$f_{II1}aW, f_{II2}aW, f_{II3}aW, \dots$$

$$f_{III1}W, f_{III2}W, f_{III3}W \dots$$

とする。

荷重が任意枕木から αa の距離にある時、枕木 N の上の軌條壓力、軌條彎曲力率及び枕木 N と枕木 $N+1$ との間の剪力を夫々 $\phi_{In}W$, $\phi_{II_n}aW$ 及び $\phi_{III_n}W$ とすれば、

$$\alpha < \frac{1}{2} \text{ の時は } \phi_{In} = f_{In} - 2\alpha(f_{In} - F_{In})$$

$$\alpha > \frac{1}{2} \text{ の時は } \phi_{In} = f_{In+1} - 2(1-\alpha)(f_{In+1} - F_{In})$$

$$\alpha < \frac{1}{2} \text{ の時は } \phi_{II_n} = f_{II_n} - 2\alpha(f_{II_n} - F_{II_n})$$

$$\alpha > \frac{1}{2} \text{ の時は } \phi_{II_n} = f_{II_n+1} - 2(1-\alpha)(f_{II_n+1} - F_{II_n})$$

$$\alpha < \frac{1}{2} \text{ の時は } \phi_{III_n} = f_{III_n} - 2\alpha(f_{III_n} - F_{III_n})$$

$$\alpha > \frac{1}{2} \text{ の時は } \phi_{III_n} = f_{III_n+1} - 2(1-\alpha)(f_{III_n+1} - F_{III_n})$$

とすることが出来る。

又或る枕木上で軌條が切斷され、其の切斷面に轉曲力率 M が作用する時、其の端の枕木から數へて順次各枕木上の軌條壓力及び軌條轉曲力率を夫々

$$f_{11}''M, f_{12}''M, f_{13}''M, \dots$$

$$f_{111}''M, f_{122}''M, f_{133}''M, \dots$$

切斷面に剪力 Q が作用する時順次各枕木上の軌條壓力及び軌條轉曲力率を夫々

$$f_{11}'Q, f_{12}'Q, f_{13}'Q, \dots$$

$$f_{111}'Q, f_{122}'Q, f_{133}'Q, \dots$$

とする。一般に

$$f_{1n}'' = \frac{F_{1n}\{f_{111} + f_{11}\} - f_{11n}F_{1110}}{F_{11}\{f_{111} + f_{11}\} - f_{111}F_{1110}} \frac{1}{a}, \quad f_{11n}'' = \frac{F_{1n}\{f_{111} + f_{11}\} - f_{11n}F_{1110}}{F_{11}\{f_{111} + f_{11}\} - f_{111}F_{1110}}$$

$$f_{11n}' = \frac{F_{1n}f_{111} - f_{11n}F_{111}}{F_{11}\{f_{111} + f_{11}\} - f_{111}F_{1110}}, \quad f_{111n}' = \frac{F_{1n}f_{11} - f_{111}F_{11}}{F_{11}\{f_{111} + f_{11}\} - f_{111}F_{1110}} a$$

の關係がある。

第三章 繼目板の應力と撓み

繼目板には角形、短冊形或は之れ等に類するものがある。第三圖の様に、G を繼目板斷面の重心、X 軸及び Y 軸を繼目板を軌條に取付けた位置に於ける水平軸及び垂直軸、I 軸及び II 軸を斷面主軸、繼目板斷面積を F とし、任意の點 A の位置を XY 座標に對して x, y とし、I, II 座標に對して ξ, η とし

$$J_x = \int_F y^2 dF, \quad J_y = \int_F x^2 dF, \quad J_{xy} = \int_F xy dF$$

$$J_I = \int_F \eta^2 dF, \quad J_{II} = \int_F \xi^2 dF$$

とする。

主軸 I が軸 X に對する偏りを φ とし、繼目板に加はる轉曲力率の軌が主軸 I から θ だけ偏つて居る場合、 ξ, η 或は x, y で示される A 點に於て、應力 σ は

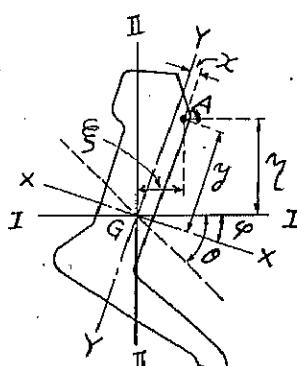
$$\sigma = -M \left(\frac{\eta \cos \theta}{J_I} - \frac{\xi \sin \theta}{J_{II}} \right) = -\frac{M_\theta}{\cos(\varphi + \theta)} \left(\frac{\eta \cos \theta}{J_I} - \frac{\xi \sin \theta}{J_{II}} \right)$$

或は

$$\sigma = -\frac{[y - x \tan(\gamma + \varphi)] \cos(\gamma + \varphi)}{J_x \cos(\gamma + \varphi) - J_{xy} \sin(\gamma + \varphi)} M_\theta$$

茲に $\gamma = \tan^{-1} \left(\frac{J_I}{J_{II}} \tan \theta \right)$

第三圖



である。但し γ は縫目鉄断面の轉曲中立軸が主軸 I となす角で、 M_v は垂直轉曲力率である。又 XY に對する任意の 2 點の座標及び應力を夫々 $x_1 y_1, x_2 y_2, \sigma_1 \sigma_2$ とすれば、

$$\tan(\gamma + \varphi) = \frac{\sigma_1 y_2 - \sigma_2 y_1}{\sigma_1 x_2 - \sigma_2 x_1}$$

の關係がある。従つて實驗的に σ_1 と σ_2 を測定すれば、縫目鉄の $(\gamma + \varphi)$ を知ることが出来る。

次に一つの縫目鉄をとり、長さを $2l$ とし、長さの中央に R 、各端に $R/2$ の垂直荷重が作用するすれば、

$$M_v = \frac{Rl}{2}$$

である。更に水平荷重のために M_l なる横轉曲力率が生じたとする。 M_v と M_l との合成轉曲力率を M とし、主軸 I と θ なる角をなすものとすれば、

$$M_l = -M_v \tan(\varphi + \theta)$$

$$M = M_v \sqrt{1 + \tan^2(\varphi + \theta)} = \frac{Rl}{2} \sec(\varphi + \theta)$$

然る時縫目鉄の垂直撓みを δ_v とすれば、

$$\delta_v = \frac{Rl^3 \sec(\varphi + \theta)}{6E} \left(\frac{\cos \theta \cos \varphi}{J_I} - \frac{\sin \theta \sin \varphi}{J_{II}} \right)$$

である。但し縫目鉄材料の弾性係数を E とした。又縫目鉄が垂直荷重 R を受け、 J_V なる有效斷面物量力率によつて其の撓みが垂直方向のみに起るとすれば、

$$\delta_v = \frac{Rl^3}{6EJ_V}$$

である。従つて

$$J_V = \frac{\cos(\varphi + \theta)}{\frac{\cos \theta \cos \varphi}{J_I} - \frac{\sin \theta \sin \varphi}{J_{II}}}$$

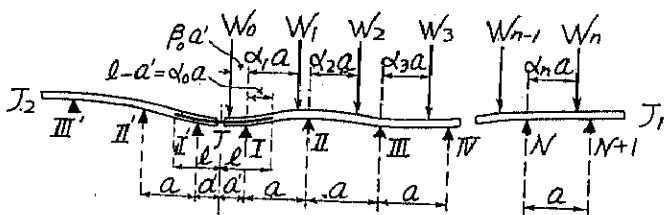
となる。 J_V は垂直撓み δ_v に相當する假想的の斷面物量力率である。

第四章 軌條縫目の作用

先づ第四圖の様に J を縫目とし、荷重 $W_0, W_1, W_2, \dots, W_n$ が JJ₁ の側に作用する場合を考へる。 $W_0, W_1, W_2, \dots, W_n$ は夫々 J_I, I, II, III, III, ..., N (N+1) の間に作用し、枕木 I, II, III, ..., N からの距離を $\beta_0 a', \alpha_1 a, \alpha_2 a, \dots, \alpha_n a$ とする。茲に縫目枕木間隔を $2a'$ 、縫目鉄の長さを $2l$ 、 $l-a'=\alpha_0 a$ 、普通部分の枕木間隔を a とする。然る時には JJ₁ なる部分には $R-Q, R_1, W_0, W_1, W_2, \dots, W_n$ が作用し、JJ₂ なる部分には $(R+Q)$ 及び R_1 が作用し、夫々

各部に於ける軌條壓力, 軌條沈下, 軌條轉曲力率及び剪力が求められる。

第四圖



今 JJ_1 に於て R_1 の作用點の軌條沈下を y_k , 軌條端の沈下を y_e , JJ_2 に於て R_1 の作用點の軌條沈下を y_k' , 軌條端の沈下を y_e' とし, 繼目歛撓みを δ とすれば,

$$\delta = \frac{R l^3}{6 E J_r}$$

である。軌條と繼目歛の作用方法には一般に 12 種ある。先づ過隙 ε と R 及び Q の一般關係を定める。

$R < 0$ で $Q > R < -Q$, 或は $R > 0$ で $Q < R > -Q$ の關係ある場合には,

$$y_e' - \frac{y_k + y_k'}{2} = \varepsilon_a + \delta, \quad y_e - \frac{y_k + y_k'}{2} = \varepsilon_b + \delta$$

$$y_e - y_e' = \varepsilon_c$$

但し

$R > 0$ の時は

$$\varepsilon_a = \frac{2\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4}{2}$$

$$\varepsilon_b = \frac{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_4}{2}$$

$$\varepsilon_c = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$$

$R < 0$ の時は

$$\varepsilon_a = -\frac{2\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4}{2}$$

$$\varepsilon_b = -\frac{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_4}{2}$$

$$\varepsilon_c = -(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$$

である。之れから Q , R 及び ε の關係を求めるとき,

$$Q = \frac{A_v - \varepsilon_c}{B},$$

$$R = \frac{U_v - \left(\varepsilon_a + \frac{\varepsilon_c}{2} \right)}{V}$$

となる。但し

$$A_v = \sum_{r=1}^n \left(\frac{\phi_{1r} - f_{1r}' \phi_{11r} - a f_{11''} \phi_{11r}}{D} - a' N_r \right) W_r - a' L W_1$$

$$- \left(\frac{f_{1r} + \beta_3 a f_{1r}''}{D} + a' N_r - \frac{a' (S - \beta_3) (\beta_3 a')^2}{6 E_0 J_0} \right) W_0$$

$$B = 2 \left(\frac{f_{1r} + a' f_{1r}''}{D} + a' m_r - \frac{a'^3}{3 E_0 J_0} \right)$$

$$\begin{aligned}
 U_v &= \sum_{r=1}^n \left[\frac{(\alpha_0 a)^3 \{ \phi_{Irr} - f_{IIr}' \phi_{IIIr} - a f_{IIr}'' \phi_{IIIr} \}}{6 E_0 J_0} - (a' + \alpha_0 a) N_r \right] \frac{W_r}{2} \\
 &\quad - \left\{ \frac{a^2 (\alpha_0 - \alpha_1)^2}{6 E_0 J_0} + (a' + \alpha_0 a) L \right\} \frac{W_1}{2} \\
 &\quad - \left[\frac{3(\alpha_0 a)^2 \beta_0 a' + (\alpha_0 a)^2 \{ 1 + f_{IIr}' + \beta_0 a' f_{IIr}'' \} - a' (3 - \beta_0) (\beta_0 a')^2}{6 E_0 J_0} + (a' + \alpha_0 a) N_0 \right] \frac{W_0}{2} \\
 V &= \frac{l^3}{6 E J_V} - \frac{3a' (\alpha_0 a)^2 + m_1 (\alpha_0 a)^2 - 2a'^3}{6 E_0 J_0} + m_2 (a' + \alpha_0 a) \\
 m_1 &= \frac{f_{IIr}' - f_{IIr}'' - a' f_{IIr}''' - a' f_{IIr}'''}{a D} - \frac{a (f_{IIr}' + 2a' + a' f_{IIr}''')}{6 E_0 J_0} \\
 m_2 &= \frac{a' f_{IIr}''' - a' f_{IIr}'' + f_{IIr}' - f_{IIr}'' + S_1 - S_2}{a D} + \frac{a \{ 2a' + a' f_{IIr}'' + f_{IIr}' + t_2 + a \alpha_0 (1 - \alpha_0)(2 - \alpha_1) \}}{6 E_0 J_0} \\
 m_3 &= -(1 + f_{IIr}' + a' f_{IIr}''), \quad m_4 = 1 + f_{IIr}' + a' f_{IIr}'' + S_1 \\
 N_0 &= \frac{f_{IIr}' - f_{IIr}'' + \beta_0 a' (f_{IIr}'' - f_{IIr}''')}{a D} - \frac{a \{ 2\beta_0 a' + f_{IIr}'' + \beta_0 a' f_{IIr}''' \}}{6 E_0 J_0} \\
 L &= \frac{a^2 \alpha_1 (1 - \alpha_1)(2 - \alpha_1)}{6 E_0 J_0} \\
 N_r &= \frac{\phi_{Irr-1} - \phi_{Irr} - (f_{IIr}' - f_{IIr}'') \phi_{IIIr} - a (f_{IIr}'' - f_{IIr}''') \phi_{IIIr}}{a D} \\
 &\quad + \frac{a \{ a \phi_{IIIr-1} - f_{IIr}' \phi_{IIIr} - a f_{IIr}'' \phi_{IIIr} \}}{6 E_0 J_0} \\
 S_n &= f_{In} - 2\alpha_0 (f_{Ir} - F_{In-1}) - a f_{In}'' \{ f_{In} - 2\alpha_0 (f_{In} - F_{In}) \} \\
 &\quad - f_{In}'' \{ f_{In} - 2\alpha_0 (f_{In} - F_{In}) \} \\
 t_n &= a \{ f_{In} - 2\alpha_0 (f_{In} - F_{In-1}) \} - a f_{In}'' \{ f_{In} - 2\alpha_0 (f_{in} - F_{in}) \} \\
 &\quad - f_{in}'' \{ f_{in} - 2\alpha_0 (f_{in} - F_{in}) \}
 \end{aligned}$$

である。尚ほ

$$R < 0 \text{ で } Q \leq R < -Q$$

$$R > 0 \text{ で } Q \geq R > -Q$$

$$R < 0 \text{ で } Q > R \geq -Q$$

$$R > 0 \text{ で } Q < R \leq -Q$$

の場合にも夫々 y_e, y_e', y_k, y_k' 及び ε の関係から簡単に A_v, U_v, B, V 及び ε から成立し、 Q 及び R を與へる式が得られる。

更に JJ_2 にも車輪荷重が配列される時には、 JJ_1 に於て求めた A_v, U_v に相當する數値 A_v', U_v' を JJ_2 に就て求め、

$$A_v - A_v' = A_w, \quad U_v + U_v' = U_w$$

とすれば、例へば $R < 0$ で $Q > R < -Q$ 、或は $R > 0$ で $Q < R > -Q$ の時には

$$Q = \frac{(A_v - A_v') - \varepsilon_v}{B} = \frac{A_w - \varepsilon_v}{B}$$

$$R = \frac{(U_v + U_{v'}) - \left(\varepsilon_a + \frac{\varepsilon_c}{2} \right)}{V} = \frac{U_w - \left(\varepsilon_a + \frac{\varepsilon_c}{2} \right)}{V}$$

となる。其の他の場合も同様である。之れ等を一括すると次の表の様になる。

算 式 (A)	(A) に依る計算の結果	更めて使用すべき算式
$R < 0$ $Q > R < -Q$ $\varepsilon_a = -(s_1 - s_2)$ $\varepsilon_a + \frac{\varepsilon_c}{2} = \varepsilon_b - \frac{\varepsilon_c}{2}$ $= \frac{s_1 + s_2 + \bar{s}_3 + \bar{s}_4}{2}$	$Q = \frac{A_w - \varepsilon_a}{B}$	$\varepsilon < 0$ として $R < 0$ を得た場合
< 0 或は $R > 0$ $Q < R < -Q$ $\varepsilon_c = (\bar{s}_1 - \bar{s}_2)$ $\varepsilon_a + \frac{\varepsilon_c}{2} = \varepsilon_b - \frac{\varepsilon_c}{2}$ $= \frac{\bar{s}_1 + \bar{s}_2 + \bar{s}_3 + \bar{s}_4}{2}$	$R = \frac{U_w - \left(\varepsilon_a + \frac{\varepsilon_c}{2} \right)}{V}$	$Q < R < -Q$ なれば $Q > R > -Q$ なれば
> 0 (B) $R < 0$ $Q \leq R < -Q$	$Q = \frac{A_w - (\bar{s}_1 + \bar{s}_2)}{B}$ $R = \frac{U_w - \frac{\bar{s}_1 - \bar{s}_2 - \bar{s}_3 - \bar{s}_4}{2}}{V}$	$\varepsilon > 0$ として $R > 0$ を得た場合
 (C) $R > 0$ $Q \geq R > -Q$	$Q = \frac{A_w + (\bar{s}_1 + \bar{s}_2)}{B}$ $R = \frac{U_w - \frac{s_1 + \bar{s}_2 + \bar{s}_3 + \bar{s}_4}{2}}{V}$	$\varepsilon < 0$ とすれば $R > 0$ $\varepsilon > 0$ とすれば $R < 0$ となる場合
 (D) $R < 0$ $Q > R \geq -Q$	$Q = \frac{A_w + (\bar{s}_1 + \bar{s}_2)}{B}$ $R = \frac{U_w - \frac{s_1 + \bar{s}_2 - \bar{s}_3 - \bar{s}_4}{2}}{V}$	$Q < 0$ とすれば $R < 0$ $R = Q$
 (E) $R > 0$ $Q < R \leq -Q$	$Q = \frac{A_w - (\bar{s}_1 + \bar{s}_2)}{B}$ $R = \frac{U_w - \frac{\bar{s}_1 - \bar{s}_2 + \bar{s}_3 + \bar{s}_4}{2}}{V}$	$Q > 0$ なれば $R > 0$ $R = Q$

(4) によつて Q 及び R を計算した結果が其處に掲げた條件に適合すれば、夫れが求むる値である。縫目の受ける正負の轉曲力率の最大値は多くは之れによつて決定される。(4) による計算の結果が所定の條件を満足しない場合には、(B) 乃至 (E) によつて更めて計算せねばならない。何れの算式も簡単に A_w, U_w, B, V 及び ε から出來て居る。 B 及び V は軌道によつて與へられる定数で、 A_w 及び U_w は荷重の狀態に應じて一定した値を持つものである。

斯くて Q 及び R が求めらるれば縫目釘に加へる壓力、従つて縫目釘の應力も決定され一般に軌條が受ける縫目の影響も算定することが出来る。實際に此の計算を行ふ時には圖式法を用ふるのが最も簡便である。

第五章 縫目釘に生ずる應力に就ての實驗

軌條縫目の作用は軌道の狀態によつて著しく相違する。實驗室内で組立てた軌條縫目及び實際二三の線路に敷設してある縫目の縫目釘の種々の點で應力を測定し、 $(\gamma + \varphi)$, ε 或は縫目の受ける轉曲力率と軌條の受ける轉曲力率との比等を出した。縫目釘の應力はボルトの締付け程度によつて特別の變化をする。ボルト締付け程度はボルトのナットに加へるトルクによつて示した。角形縫目釘でトルクが小で、700~850 厄糸以下の場合には $-(\gamma + \varphi)$ は甚しく大で、30°~40° に達した。トルクを増すと $-(\gamma + \varphi)$ は急に減じ、850~1 000 厄糸以上では殆んど一定と見做してもよい様になる。此の場合の $-(\gamma + \varphi)$ は普通 10°~30° の間にあつた。短冊形縫目釘では $-(\gamma + \varphi) = 0$ と置くことが出来る。軌條と縫目釘との間の遊隙として $\varepsilon_m = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)/2$ を取ると、 ε_m は 0.01~0.03 糸の間にあるものが多かつた。然し小なるものは零で、大なるものは 0.04 糸に達した。縫目の受ける轉曲力率と軌條の受ける轉曲力率との比は正轉曲力率の場合には 0.3~0.7 平均約 0.5 であるが、縫目釘應力は尚軌條應力より甚しく大きい。負轉曲力率の場合には此の比は 0.3~1.65 平均約 1 に達した。従つて之による縫目釘應力は特に大きい。縫目釘頭部に生ずる正負の應力の大さの差が割合に小であるのは之れがためである。

本講演後次の質疑應答ありたり。

○機械學會々員小野君（問）私は同じ様な問題について計算をした關係上申し上げます。

私が假定したのはあなたのと違つて居る。縫目釘と軌條のキツチリあつて居る場合を考えた。實際問題として二つが緩く connect されて居ても、或程度以上力を受けると rigid に結合すると言ふ假定もあながち不當でないと思ふ。

縫目に load がかかると simple に bending moment である即ち

$$\frac{P}{\beta(4+q)}$$

β は elastic な bed と考へて rail の rigidity で決まる、 q は計算からの數であるが、實驗的にも求められる。若し縫目なくて continuous ならば

$$q=0$$

で普通の式

$$\frac{P}{4\beta}$$

となる。若し loose ならば q は無限大になつて式が零になる。茲に別刷がありますから御参考に願ひます。

○堀越君(答) 私も下が一様に support されて居て weld されて居ればキツチリ決まると思ひますが、ガタガタの場合は私の様にしなければならないと思ひます。

(以 上)