

講演 演

耐壓試験の際に生ずる圓筒形物体内の應力
分布及び其の破壊状態に就て

(昭和六年十月三十一日應用力學聯合大會に於て)

准員 工學士 木 村 二 郎

On the Stress Distribution in the Cylinder
under Compression Test

By Jiro Kimura, C.E., Assoc. Member.

内 容 梗 概

物體の耐壓試験を行ふ時、試験器の壓縮面と試験材の兩端面との間に起る 摩擦を考へた時に、其の物体内に生ずる應力分布を 彈性學に依つて解く事は、夫れが圓筒形なる場合に限り既に Filon に依つて求められてゐる。著者は之れを色々な形の圓筒に就て實際に計算し、夫れが一般に摩擦を考へない時の應力と何程の差異を示すかを見、一方試験材に色々な boundary conditions を與へて其の破壊状態を觀察して物體破壊に關する研究に資せんとしたものである。

目 次

第一章	緒 言	1
第二章	應力の計算	2
第三章	破壊試験	3
第四章	結 論	4

第一章 緒 言

物體を試験器にかけて耐壓試験を行ふとき、此の物體の中には應力の分布が全く一樣なるものと一般に假定して、其の強度とか種々の性質を考察してゐるが、試験器の壓縮面と之れと接する試験體の兩端面との間には相當に大なる摩擦がある爲に、此の試験體の試験器と接する兩端面は横方へ膨脹せんとする事を妨げられる。即ち此の面に膨脹を妨げんとする方向に剪力が作用するのである。此の故に試験體の中に起る應力の分布は全く一樣なるわけにはいかない。

其處で斯ういふ時に、此の試験體の中に如何なる應力分布を生ずるか、又一般に摩擦なしと考へた時と何れ程の差異のあるものかといふ事を理論的に計算し、延いては耐壓試験に表

はるゝ強度と破壊する模様とを調べて見やうとしたのである。

弾性學より理論的に此の問題を解くには、試験器に接する兩端面が全く膨脹せざるものと假定する。此の応力分布は試験體の形により大いに異なるべきにより半徑と長さとの比が1:2 (第一の場合と名付く), 1:1 (第二の場合), 5:2 (第三の場合), 5:1 (第四の場合) なる四つの異なる形に就て應力の値を算出して、之れ等を比較し、且つ實驗によつて其の強度を比較し尙又其の兩端面の boundary conditions を變じて破壊状態の比較をも行つたのである。

第二章 應力の計算

圓筒形物体内の平衡條件より圓筒座標 (x, r, φ) を用ひて應力を解く基礎方程式は、 x 軸が對稱軸となる場合には φ には無關係となり

$$\left(D^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^2 \frac{\partial \xi}{\partial r} = 0, \quad \left(D^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$$

但し $D = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}$, $D^2 = \frac{\partial}{\partial r} D = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}$

ξ : x 方向の變位, ρ : r 方向の變位

此の微分方程式より Filon* によつて解かれた應力式を示せば次の如し。

今

σ_x : x 方向の normal stress,	σ_r : r 方向の normal stress
σ_t : tangential の方向の normal stress,	τ : shear stress
G : rigidity modulus,	$\frac{1}{m}$: Poisson's ratio
a : 試験體の半徑,	c : 試験體の長さの半分
E : Q を含む常數	

とすれば、

$$\begin{aligned} \sigma_r = GE \left\{ - \left[\frac{2\gamma+1}{12} a^4 - \frac{2\gamma}{3} a^2 c^2 + \frac{14}{15} \gamma c^4 \right] + r^2 \left[(1+\gamma) \frac{\alpha^2}{4} - (4\gamma+1) \frac{\alpha^2}{3} \right] \right. \\ \left. + 2x^2 \gamma (2c^2 - a^2) - r^4 \frac{\gamma+2}{12} + r^2 x^2 (4\gamma+1) - 2\gamma x^4 \right. \\ \left. + \frac{16ac^3}{\pi^3} (2\gamma+1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3 I_1(\alpha)} \left\{ \frac{I_1(\rho)}{\rho} - I_0(\rho) \right\} \cos \frac{n\pi x}{c} \right. \\ \left. - \frac{4c^2 a^2 \gamma}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \left[\left\{ (2\gamma+1)\alpha + \frac{4}{\alpha} (8\gamma+1) \right\} I_1(\alpha) - (8\gamma+4) I_0(\alpha) \right] \right. \\ \left. \times \left[\left(\frac{\alpha I_0(\alpha)}{I_1(\alpha)} + 1 \right) I_0(\rho) - \left(\frac{\alpha I_0(\alpha)}{I_1(\alpha)} + \frac{1}{\gamma} \right) \frac{I_1(\rho)}{\rho} - \rho I_1(\rho) \right] \right. \\ \left. \times \frac{1}{\gamma \alpha^2 \{ I_0(\alpha) - I_1(\alpha) \} - I_1(\alpha)} \cos \frac{n\pi x}{c} \right\} \end{aligned}$$

* Filon: Trans. Roy. Soc. A Vol. CXCVIII.

$$\begin{aligned} \sigma_x = & -Q + GE \left\{ - \left[\frac{2\gamma-1}{6} a^4 + \frac{1}{3} a^2 c^2 - \frac{14}{45} (2\gamma+1) c^4 \right] + r^2 \left[\frac{2\gamma-1}{2} a^2 + \frac{2}{3} c^2 \right] \right. \\ & - x^2 \left[\frac{4}{3} (2\gamma+1) c^2 - a^2 \right] - r^4 \frac{2\gamma-1}{4} - 2r^2 x^2 + \frac{2}{3} (2\gamma+1) x^4 + \frac{16ac^3}{\pi^2} (2\gamma+1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \frac{I_0(\rho)}{I_1(\alpha)} \cos \frac{n\pi x}{c} \\ & \left. - \frac{4c^2 a^2 \gamma}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left\{ (2\gamma+1)\alpha + \frac{4}{\alpha} (8\gamma+1) \right\} I_1(\alpha) - (8\gamma+4) I_0(\alpha) \right] \frac{[\rho I_1(\rho) - I_0(\rho) \left(\frac{\alpha I_0'(\alpha)}{I_1(\alpha)} - 2 \right)]}{\gamma c \alpha^2 \{ I_0^2(\alpha) - I_1^2(\alpha) \} - I_1^2(\alpha)} \cos \frac{n\pi x}{c} \right\} \\ \sigma_t = & GE \left\{ - \left(\frac{2\gamma+1}{12} a^4 - \frac{2}{3} \gamma a^2 c^2 + \frac{14}{15} \gamma c^4 \right) + r^2 \left[(8\gamma-1) \frac{a^2}{4} - (4\gamma-1) \frac{c^2}{3} \right] + 2\gamma x^2 (2c^2 - a^2) \right. \\ & - r^4 \frac{5\gamma-2}{12} + r^2 x^2 (4\gamma-1) - 2\gamma x^4 + \frac{16ac^3}{\pi^2} (2\gamma+1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \frac{I_1(\rho)}{\rho I_1(\alpha)} \cos \frac{n\pi x}{c} \\ & - \frac{4c^2 a^2 \gamma}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \left[\left\{ (2\gamma+1)\alpha + \frac{4}{\alpha} (8\gamma+1) \right\} I_1(\alpha) - (8\gamma+4) I_0(\alpha) \right] \\ & \times \left[\frac{I_1(\rho)}{\rho} \left(\frac{\alpha I_0'(\alpha)}{I_1(\alpha)} + \frac{1}{\gamma} \right) - I_0(\rho) \left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right) \right] \\ & \times \left. \frac{1}{[\gamma c \alpha^2 \{ I_0^2(\alpha) - I_1^2(\alpha) \} - I_1^2(\alpha)]} \right] \cos \frac{n\pi x}{c} \\ \tau = & GE \left\{ \left[\frac{4}{3} (2\gamma+1) c^2 - a^2 \right] r x + r^3 x - \frac{4}{3} (2\gamma+1) r x^3 + (2\gamma+1) \frac{16ac^3}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \frac{I_1(\rho)}{I_1(\alpha)} \sin \frac{n\pi x}{c} \right. \\ & \left. - \frac{4c^2 a^2 \gamma}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \left[\left\{ (2\gamma+1)\alpha + \frac{4}{\alpha} (8\gamma+1) \right\} I_1(\alpha) - (8\gamma+4) I_0(\alpha) \right] \frac{[\rho I_0(\rho) - \alpha \frac{I_0'(\alpha)}{I_1(\alpha)} I_1(\rho)]}{\gamma c \alpha^2 \{ I_0^2(\alpha) - I_1^2(\alpha) \} - I_1^2(\alpha)} \sin \frac{n\pi x}{c} \right\} \end{aligned}$$

但し $\gamma = \frac{m}{2(m-1)}$, $\rho = \frac{n\pi r}{c}$, $\alpha = \frac{n\pi a}{c}$

I_0, I_1 : modified Bessel function of the 1st kind.

之れ等の式に数値を入れて計算せる結果を示せば附圖第一(第一の場合), 附圖第二(第二の場合), 附圖第三(第三の場合), 附圖第四(第四の場合)となる。

又以上四つの場合の各對稱面に於ける principal stress の大さ及び方向を圖示すれば附圖第五乃至第八の如し。

第三章 破壊試験

以上の結果と比較觀察せんが爲に neat cement を材料とせる以上各種の長さの試験材(半徑 2.5cm)を作りて實驗せる結果の大要を記せば, 先づ第一に同じ形の數多の試験體を種種の end conditions の下に試験して其の破壊状態を觀察し, end conditions が試験體に與す影響を知らんとしたものであり, 之れに用ふる試験材は全部長さ 10cm のものを用ひた。

Case I. 普通何の束縛をも與へず其のまま壓したもの。

Case II. 兩端面に鉛板を挟んだもの。

Case III. 兩端面にフェルトを挟んだもの。

Case IV. 兩端に幅 1cm の輪を嵌めて其の膨張を許さざるもの。

Case V. 兩端に幅 1cm の輪を嵌め更に中央に幅 2cm の輪を嵌めたもの。

第二には長さの異なる試験體に同じ end condition を與へて其の破壊状態を比較觀察し、長さの差異が應力に齎す影響を知らんとしたものである。

Case VI. 長さ 10cm のものを何等の束縛なく脹したもの。

Case VII. 長さ 4cm のものを同上せるもの。

Case VIII. 長さ 3cm のものを同上せるもの。

Case IX. 長さ 10cm のものを兩端に 1cm の輪を嵌めたもの。

Case X. 長さ 4cm のものを同上せるもの。

其の強度は附圖第九、第十及び第十一の如き結果を示した。又其の破壊状況は寫眞第一より第十二までに之れを示す。但し寫眞第二は實驗に用ひたる輪及び其の締具にして、寫眞第十二は實驗の途中一方の輪が破壊したものである。

第四章 結論

以上出た結果から見て注意すべき事は長い物體では中央部近くでは σ_x が割合に一樣に分布し、兩端面に近い所には非常に大なる差異を生じ、理論上では平均壓力の 2 倍近いものが稜の所に起るが、反對に短い物體では中央部にも頗る大なる差異を生じ、寧ろ兩端面よりも夫れが大きくなつてゐる。又長いものでは兩端面の近くに大なる壓力 σ_z を生じてゐるが、中央部では 2% に足りないものであるとはいへ張力が起つてゐるが、短かいものでは中央部に至るも依然として大なる壓力となつて作用してゐる。 σ_r に就ても大體同様であるが、之れから見て長い形のものでは中央部では tangential 又は radial に裂けんとする傾向を有する事が判る。

實驗の結果はある程度まで之れを證明したものと云へる。長い形のものでは殆んど一律に兩端面に近い所は $45^\circ \sim 60^\circ$ の角度で shear され、中央部は皆縦に裂けてゐるが、短かいものは全部 45° に近い角度で shear されてゐる。

Rös は物體の破壊を Trennungsbruch と Gleitungsbruch と Verschiebungsbruch とに分つて其の原因を材料の物質によるものであつて、第一は brittle なる物質に現はれ、第二は ductile な物質に現はれると言つてゐるが、* 之れ等は單に物質のみによるのではなく試験材の形にもよるものであることが明かになつた。Trennungsbruch の原因は結局上述の結果のみで説明することは出來ないが、此の種の材料に著しいと考へられる initial stress と前述の僅少なる張力とが相援けて此の現象を示したものであるのではないかと考へられる。物體破壊に關する最大剪應力説によれば主應力を σ_1 及び σ_2 とすれば、

* Stodola: Festschrift, S. 515.

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$$

が或る限界値に達すると、其處から破壊が始まる。即ち主應力の差によつて其の破壊を論ずる事が出来るのであるが、此の場合には長い物體では、中央部に於て主應力の一つは頗る大なる壓力であり、一つは小なりと雖も張力である爲に、其の主應力の差が頗る大であるに拘らず、短い物體では何れの部分も其の主應力が三つとも可成り大なる壓力となつて、其の差は割合に小さなものであるが爲に、其の破壊抵抗は比較的大なのであると考へる事が出来る。之れは各試験體の強度の比較によく現はれてゐる。但し Case II は鉛板の面が平でない爲に荷重が等布されなかつた爲に應力の集中を起したが爲か弱かつた。Case III は之れと全く反對に應力が最もよく等布され、従つて物質自身の破壊強度に最も近いものではないかと考へられる。従つて耐壓試験にはフルトの如き物質を兩端面に當て、試験をするのが最も容易に均等にして、信すべき結果を得るのではないかと考へる。

次に此の結果を更に進めて破壊理論から見て形態による試験體の差異が破壊に及ぼす影響を観察して見る。先づ破壊理論中現在に於て或る程度まで妥當なりと考へられてゐる Mohr の最大剪應力説に前に得た結果を當て嵌めて見ると、第一の場合として長い試験體（前述第一例に用ひた直徑 5 糎、長さ約 8 糎の試験體）と、第三の場合として短い試験體（同第三例に用ひた直徑 5 糎、長さ約 2 糎の試験體）との間に著しい差異のある事が判るのであつて、一見明瞭ならしめんが爲に試験體内の各點に於て Mohr の圓を描いて之れを圖示すれば附圖第十二及び第十三となる。之れより見れば共に兩端面の稜は著しく早く破壊して了ふ事は明かであるが、之れは試験體に對しては致命的破壊ではないから、之れを無視すれば長き試験體にあつては中央に近き部分が全體一樣に先づ剪力によつて破壊せられ、兩端面に近き部分は強かる可き事が明かに見られるが、之れに反して短き試験體にあつては周縁に近き部分が先づ剪力によつて破壊せられ、中心部に行くに従つて著しく其の強度を増すべきことが一見して明瞭である。之れを實驗による破壊状態を示した寫眞第六と寫眞第十一と照し合せて考へれば短き試験體にはよく當て嵌る事は肯定出来るが、長き試験體には直ちに首肯出来ないものがある。

そこで長き試験體が Trennungsbruch によつて破壊される事より考へて Mesnager* 等によつて唱へられてゐる説によつて此の現象を説明して見やうと試みたのである。即ち脆い材料内には氣泡又は微瑕等によつて極く微細な空隙のある事は想像出来るが、然らば其の物體に等しく分布された應力 σ を採用せしめた場合に、其の空隙の周縁には應力の集中が起り得るのであるから、其の應力によつて破壊が生ずるのではないかと考へるのである。今此の空隙

* Mesnager: Résistance des matériaux.

を球形なりとすれば、之れに σ なる壓應力が加つた場合に其の周邊に起る應力は、空際球の大きさには無關係であつて附圖第十四の如くなる。但し $1/m$ は Poisson 比である。

今三軸的の場合を考へ $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ なる三つの主應力がある場合には空際の周邊に起る張應力は σ_1 に對しての

$$A \text{ に於て } \frac{3}{2(7-5m)} \left\{ -(9-5m)\sigma_1 + (1+5m)\sigma_2 + (1-5m)\sigma_3 \right\}$$

$$B \text{ に於て } \frac{3}{2(7-5m)} \left\{ (1+5m)\sigma_1 - (9-5m)\sigma_2 + (1-5m)\sigma_3 \right\}$$

$$C \text{ に於て } \frac{3}{2(7-5m)} \left\{ (1-5m)\sigma_1 + (1+5m)\sigma_2 - (9-5m)\sigma_3 \right\}$$

セメント又はモルタルの如き脆き材料で壓力に對するよりも張力に對して著しく弱きものでは破壊は周邊應力の内、張力に支配される事は明かであるから、今 $m=4$ として前出の實例をとつて第一例及び第三例に就て試験体内各部に起る周邊應力を計算し其の中の張力のみを擧ぐれば、

第一の場合

	$r=0$	$r=a/2$		$r=a$
$x=0$	0.648 Q	0.648 Q	radial	0.574 Q radial
$x=c/6$	0.648 Q	0.649 Q	"	0.570 Q "
$x=c/3$	0.634 Q	0.644 Q	"	0.555 Q "
$x=c/2$	0.567 Q	0.601 Q	tangential	0.532 Q "
$x=2c/3$	0.363 Q	0.446 Q	"	0.486 Q tangential
$x=5c/6$	張力を生ぜず	0.063 Q	"	{ 0.317 Q tangential 0.009 Q radial
$x=c$	"	0.056 Q	radial	{ 0.150 Q radial 0.126 Q tangential

第三の場合

	$r=0$	$r=a/2$		$r=a$
$x=0$	張力を生ぜず	0.034 Q	tangential	0.283 Q tangential
$x=c/6$	"	0.016 Q	"	0.276 Q "
$x=c/3$	"	張力を生ぜず		{ 0.254 Q tangential 0.006 Q radial
$x=c/2$	"	"		{ 0.220 Q tangential 0.024 Q radial
$x=2c/3$	"	"		{ 0.176 Q tangential 0.050 Q radial
$x=5c/6$	"	"		{ 0.134 Q tangential 0.084 Q radial
$x=c$	"	"		{ 0.125 Q radial 0.122 Q tangential

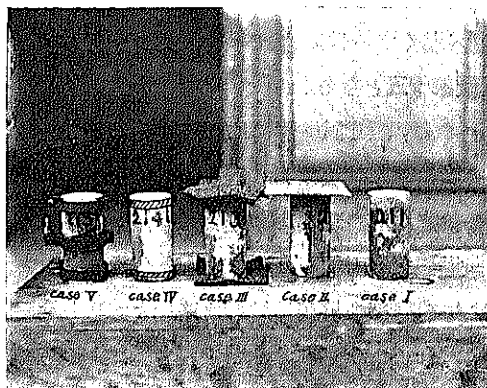
以上は實際空隙の周邊に起る張應力であるが、判り易くする爲に之れを之れ丈の張應力を生ずべき一軸的張力に直して之れを圖示すれば附圖第十五となる。

此の結果を寫眞第六及び第十一と照し合せて考へれば、短き試験體にはあまり大なる周邊張應力を生じないのであるから問題はないが、長き試験體の破壊は此の説による方がより妥當性があり、又説明し易き事が首肯し得るのである。之れ等の現象は兩端面の摩擦によつて生ずる差異である事は勿論であるから、若し短き試験體でも兩端面摩擦を取り除く事が出来れば Trennungsbruch を起すのではないかと思はれる。即ち展延性材料は略最大剪應力説によるが比較的妥當であり、脆弱材料の破壊は寧ろ Mesnager 等による最大張力説によるのが妥當性の多い事は現今に於ける破壊理論で認められてゐると思はれるが、更に材料の物理的或は力學的性質のみならず内部に起つてゐる應力分布状態をも考へなければならぬのではないかと思はれる。

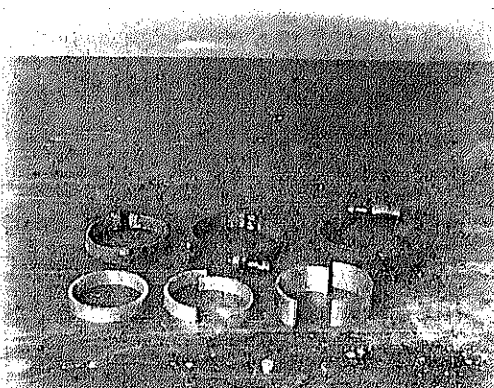
以上の破壊理論に關する議論は之れ丈の材料では勿論未だ斷定出来る程度には達してはゐないのであるが、今後機會あれば更に研究して行きたいと思つてゐる。

(以上)

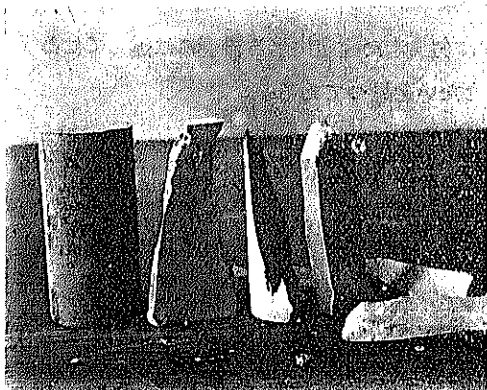
寫真第一



寫真第二

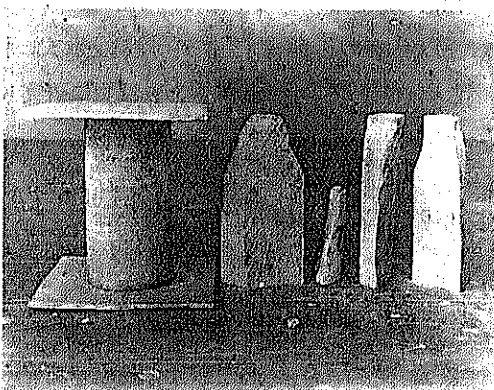


寫真第三



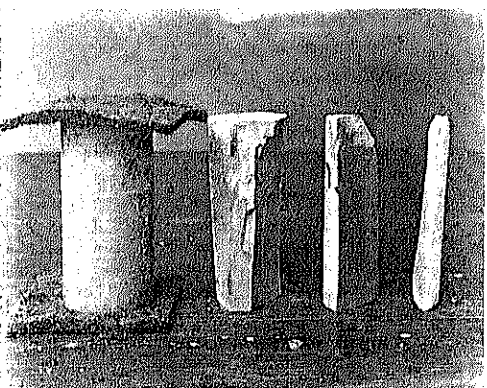
Case I

寫真第四



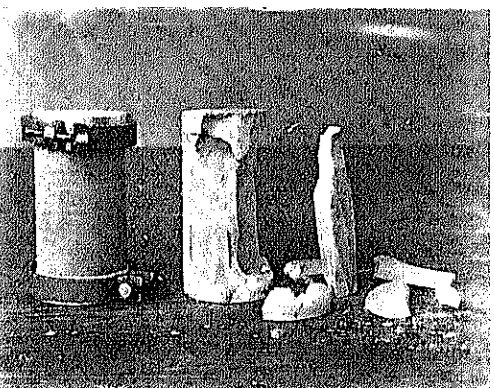
Case II

寫真第五



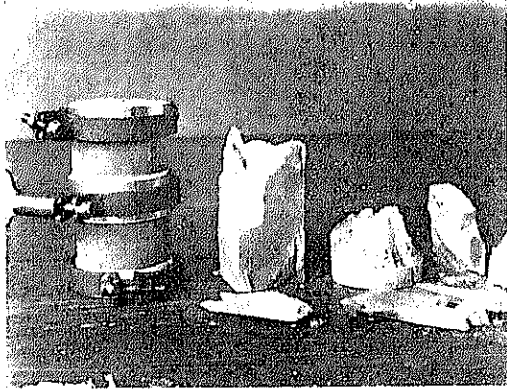
Case III

寫真第六



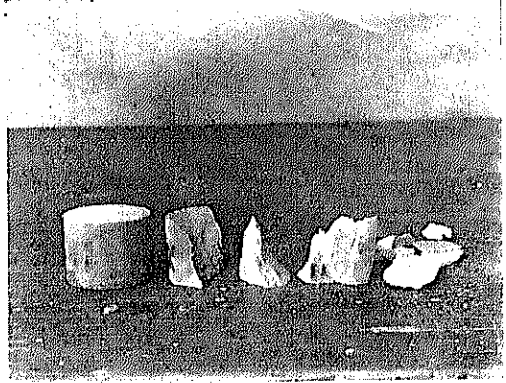
Case IV

寫眞第七



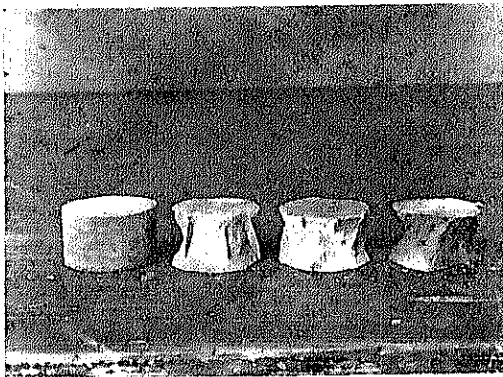
Case V

寫眞第八



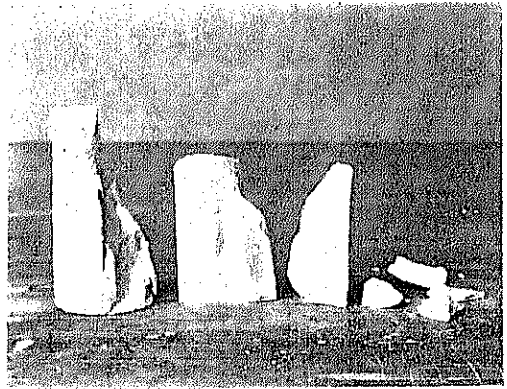
Case VII

寫眞第九

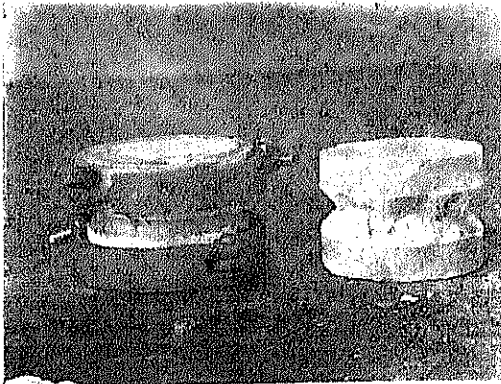


Case VIII

寫眞第十



寫眞第十一

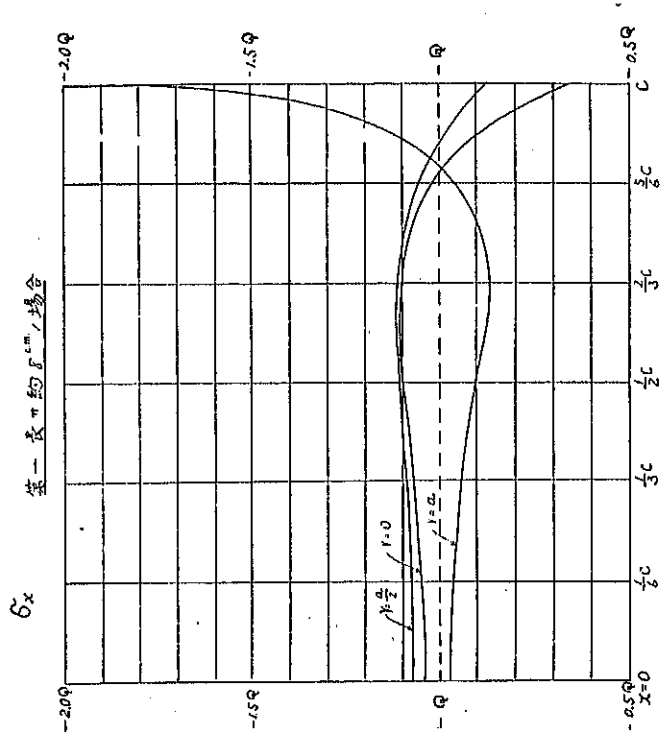


Case X

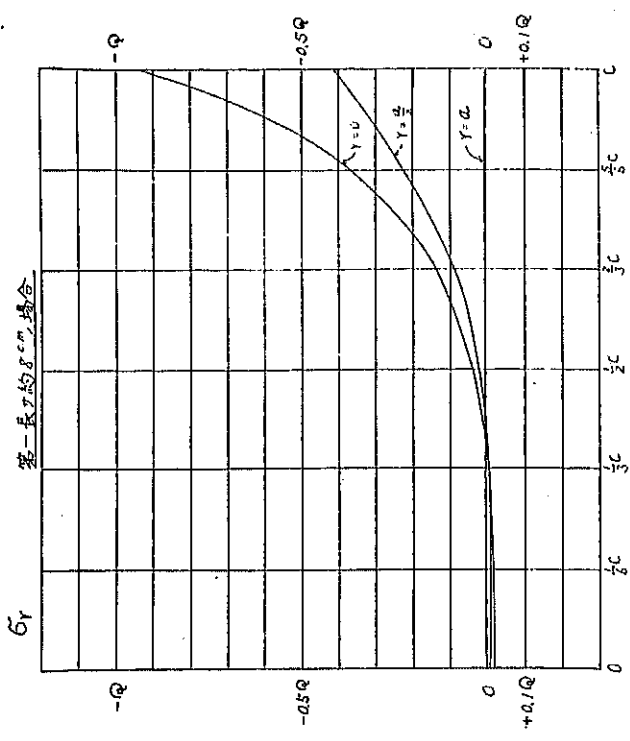
寫眞第十二



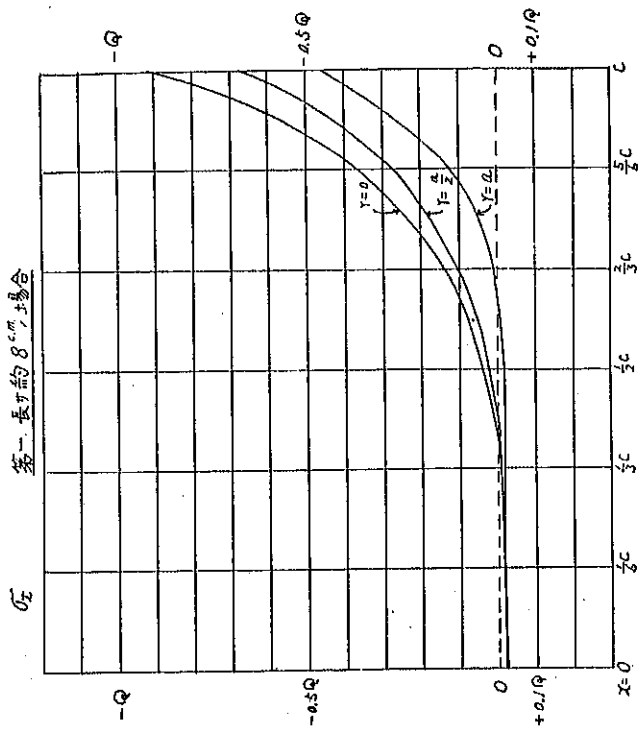
附圖第一 (其一)



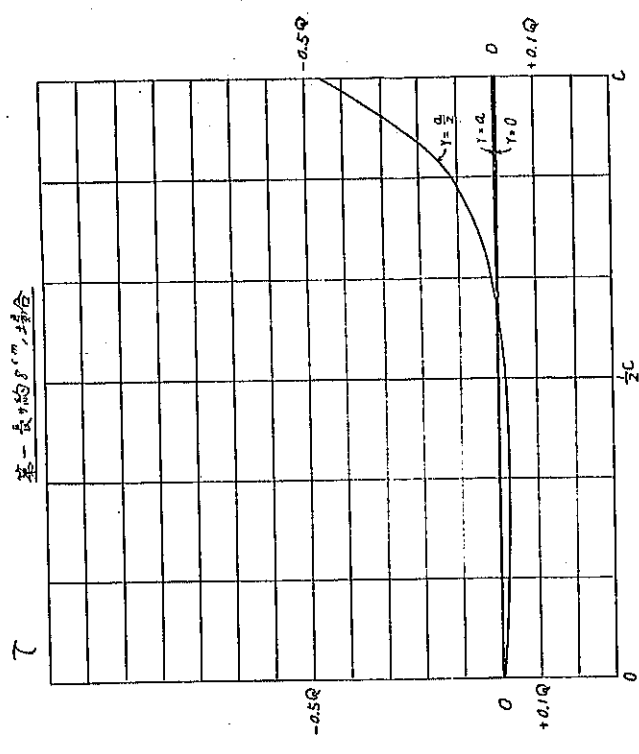
(其二)



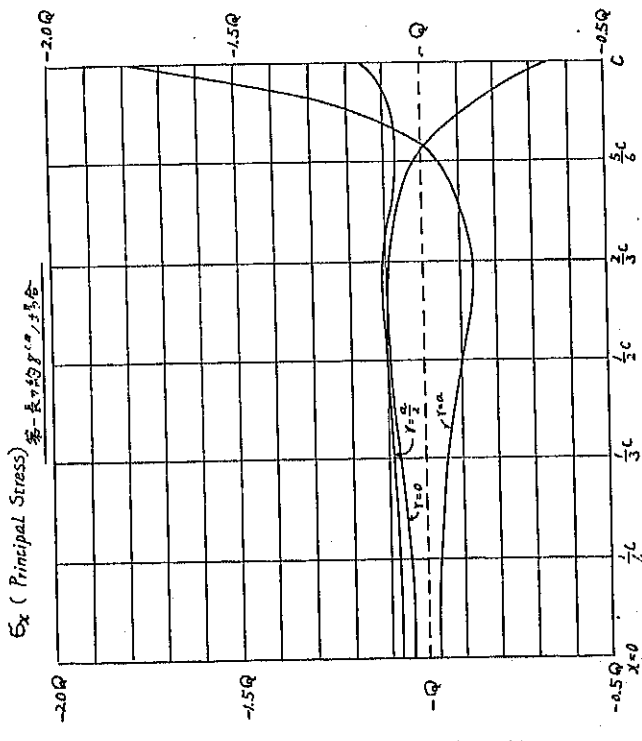
(其三)



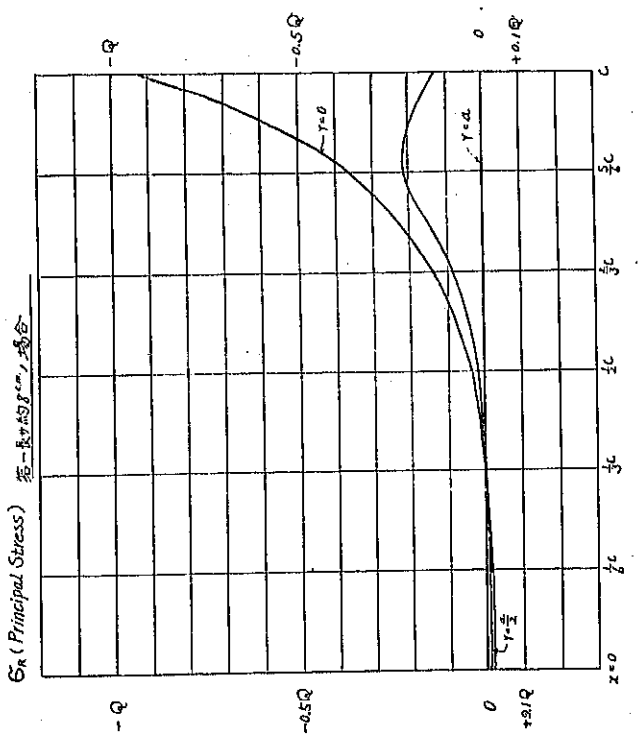
(其四)



(其五)

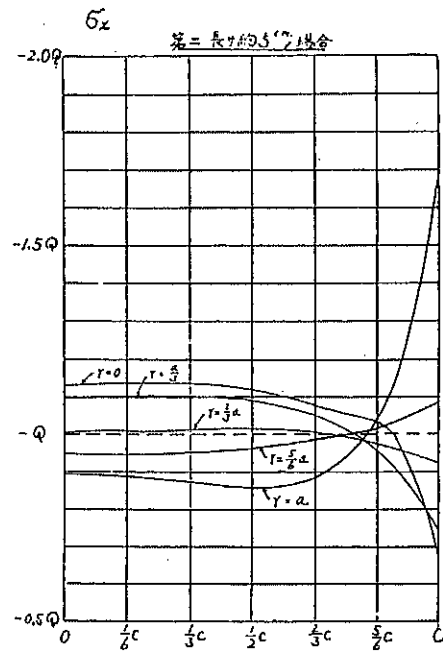


(其六)

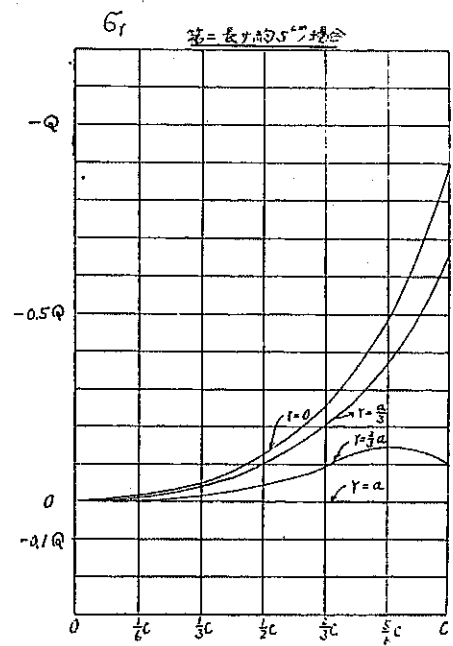


附圖第二

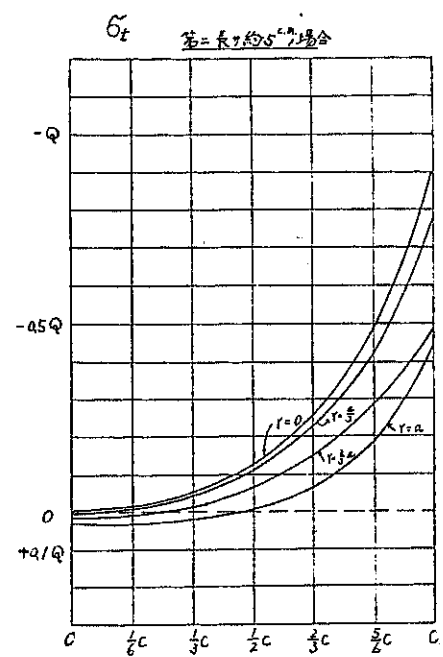
(其 一)



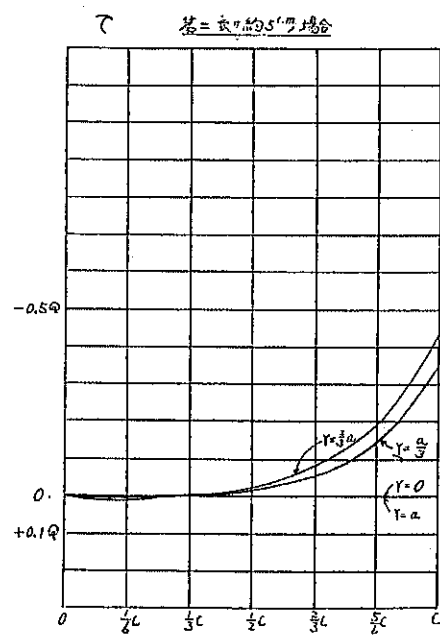
(其 二)



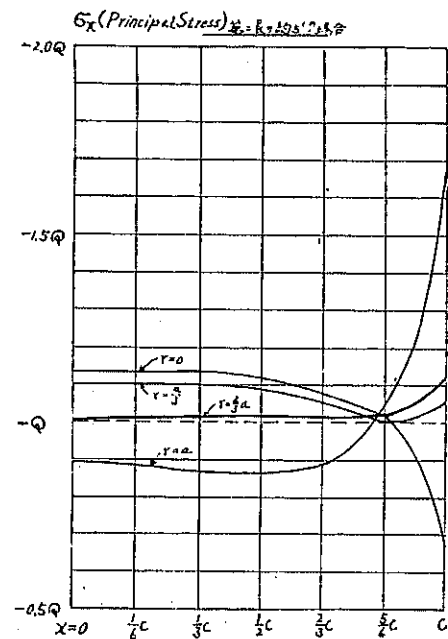
(其 三)



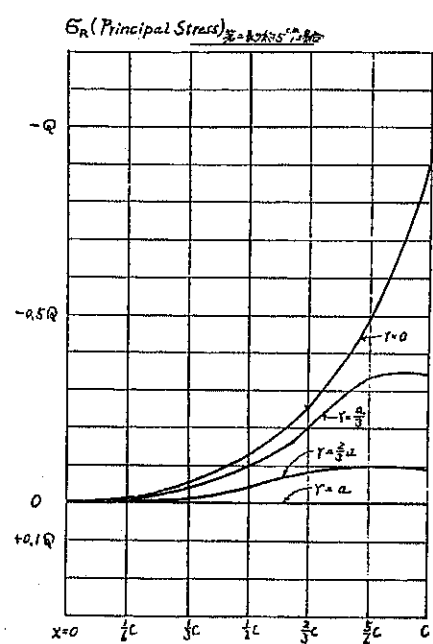
(其 四)



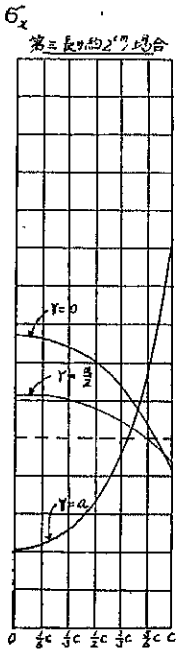
(其 五)



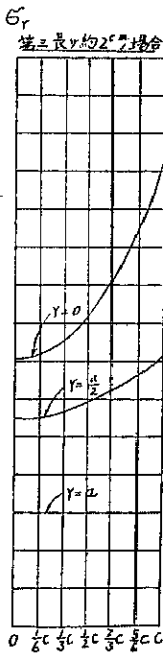
(其 六)



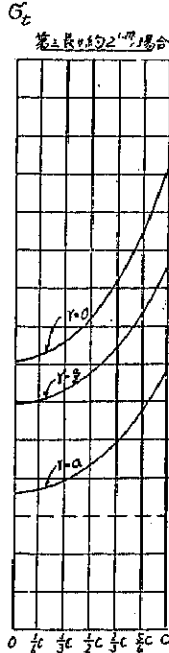
附圖第三
(其一)



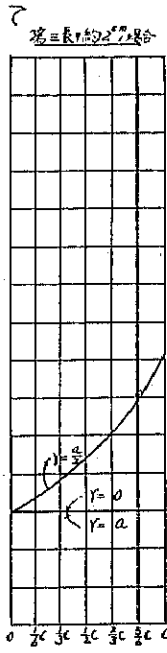
(其二)



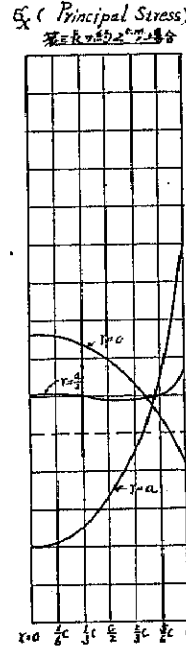
(其三)



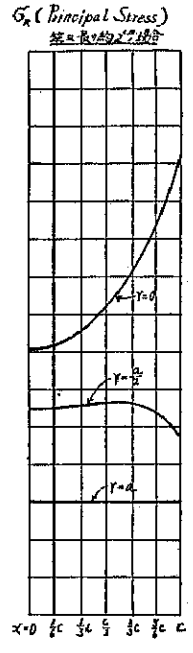
(其四)



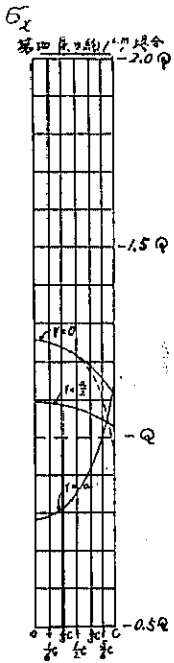
(其五)



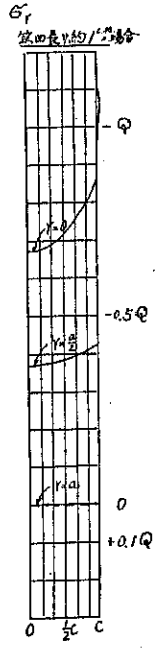
(其六)



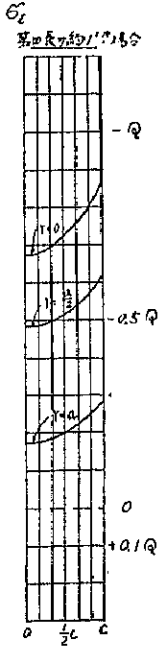
附圖第四
(其一)



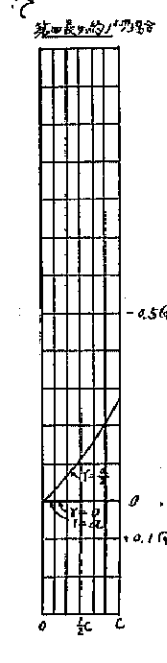
(其二)



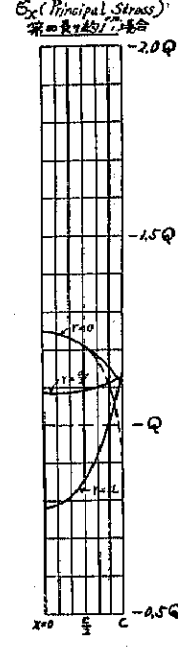
(其三)



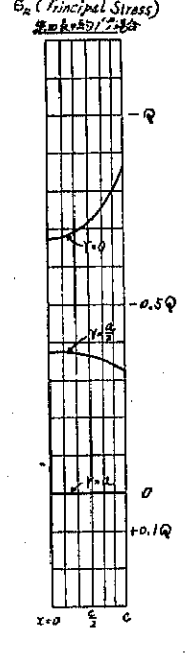
(其四)



(其五)

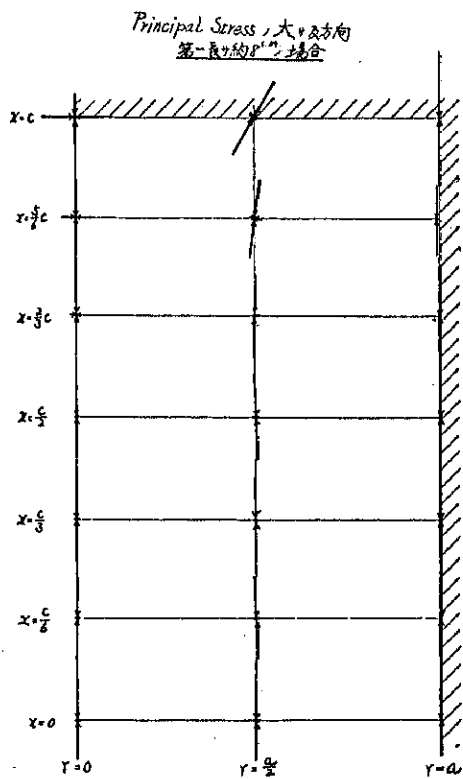


(其六)

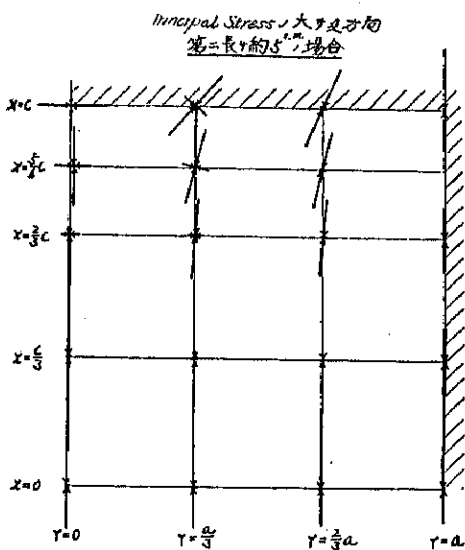


(圖用方格聯合大格繪成附圖)

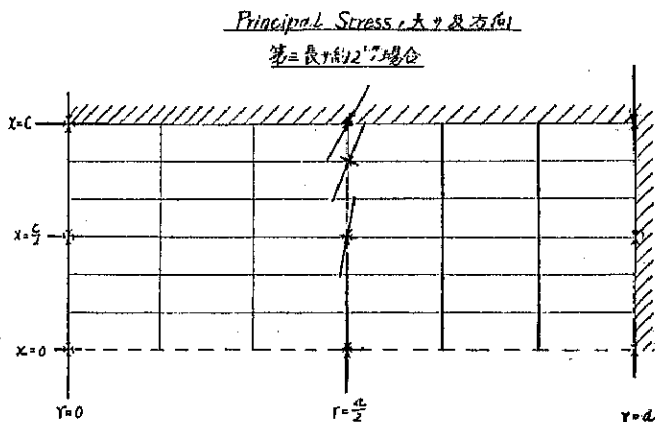
附圖第五



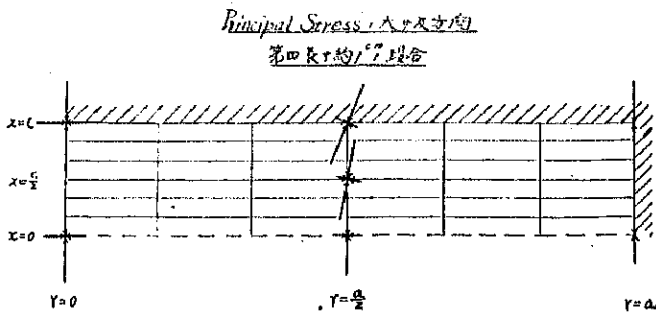
附圖第六



附圖第七

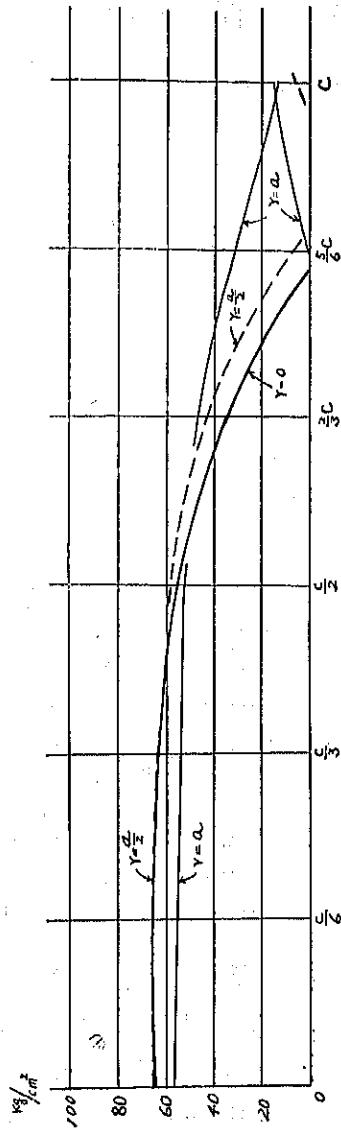


附圖第八



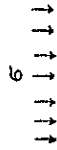
附圖第十五
(其一)

第一ノ場合

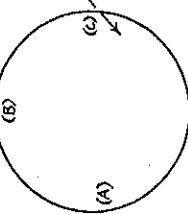


(其二)

第三ノ場合



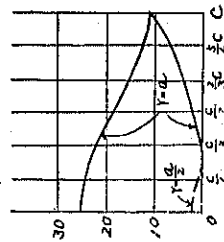
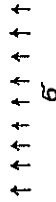
$$\sigma = \frac{3}{2} \frac{1+5m}{r-5m}$$



$$\sigma = \frac{3}{2} \frac{1-5m}{r-5m} \quad \text{at (A)}$$

$$\sigma = \frac{3}{2} \frac{1+5m}{r-5m} \quad \text{at (B)}$$

$\frac{1}{m}$: Poisson's ratio



(選用力學名詞全集圖解附圖)