

言 演

光弾性消光に関する基本法則

(昭和六年十月三十一日應用力學聯合大會に於て)

會 員 工 學 士 久 野 重 一 郎

The Law of Photo-elastic Extinction

By Juichiro Kuno, C. E., Member.

内 容 梗 概

光弾性現象に關し實驗的に次の基本法則を出し、

$$Sd = Kn$$

此處で S = 主應力差, d = 試験片の厚さ, n = 消光次數, K = 消光係數

此の法則が, isochromatic lines の單色光撮影から應力量を見出すことに對して, 實用價値あることを述べたのである。

目 次

第 一 章	緒 言	1
第 二 章	一軸應力の下に於ける光弾性消光	2
第 一 節	光弾性消光法則	2
第 二 節	荷重消光量圖	3
第 三 節	消光係數の數値	4
第 三 章	前記法則の二軸應力状態への擴張	5
第 一 節	累加法則による擴張	5
第 二 節	一直徑の兩端にて壓縮さるゝ圓筒楔子の解法及び實驗	6
第 三 節	相對する二邊に於て壓縮せらるゝ厚き矩形板の解法及び實驗	7
第 四 章	結 論	7

第 一 章 緒 言

二軸的に歪を受けた透明弾性體の面へ垂直に光を投射すると、此の光は、各主軸の方向へ夫々振動する2個の平面偏光に分解せられる。そして自分の振動方向と同じ方向に働く主應力の大きさに従つて、試験片中に於ける夫々の傳播速度が變化し、試験片を通過し終ると兩者間に、波動の相對的遅れ r 或は位相の差 δ が出来る。即ち一般に

$$\left. \begin{aligned} r &= CSd \\ \delta &= 2\pi CSd/\lambda \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

此處で、 S は主應力2個の差、 d は試験片の厚さ、 λ は用ふる單色光の波長、 C は光弾性係數 (photo-elastic constant) である。 C は cm^2/kg といふやうに應力を逆にした次元を

有し、 r 及び λ を \dot{A} で表はす場合には、其の單位は非常に複雑である。夫れと一方では、光弾性學的實驗に於て多數點の r 或は δ を直接測定することが相當困難である爲、今日までに行はれた多くの實驗では、(1) 式で定義されるやうな常數 C を直接は使用せず、何れも間接に其の性質を利用し來つたものである。従つて C は謂はゞ形式的的存在で、甚だしく實用性の稀薄なことを認めねばならない。

更に他方に於ては、多くの實驗から次のことが知られてゐる。即ちセルロイド、ペークライト、或はフェノライトで作つた試験片を單色圓偏光で試験すると、荷重を與へた瞬間に等量線は現はれるが、時間の経過と共に其の位置が移動する。夫れは最初急激に變化し、漸次緩慢になり、數時間或は十數時間後に止む。荷重を除去するときも同様で、光効果が消失し終るまでには長時間を要する。此の現象は應力が弾性限界を超えない範圍に於て起り、従つて永久變形ではなくして、弾性變形の顯現に時間を要することを示すものである。Filon 教授は此の性質を optical creep (光弾性流伸) と命名された。

扱て斯かる流伸の存在する結果、所謂 zero method、即ち比較試験片或は結晶體薄片を用ひて試験片の光効果を打消し、夫れに依つて應力量を測定する方法は、測定値の正確さが一樣でない結果に陥り易いと思はれるのである。何となれば、此の方法で一試験片上の多數の點を觀測するには相當長時間を要し、初めに測る點と終りに測る點とで流伸量に變化あり得るからである。次に普通の等量線撮影法に於てもやはり應力量を誤測する處あるやうに思はれる。夫れは、時間の経過と共に等量線の位置が變るから、どの瞬間の位置が正しいかに就て、錯迷或は誤謬の看過を生じ易いからである。

以上述べたやうに、常數 C が直接使用されてゐないこと及び流伸の爲に應力量誤測の處あることは、現行光弾性學の工學的應用に於ける不備の點であつて (九大工學彙報昭和六年二月號參照)、本編の記述は、之れ等の困難を除かんとする一つの試みである。

第二章 一軸應力の下に於ける光弾性消光

第一節 光弾性消光法則

直交ニコル間を圓偏光になして其處へ試験片を挿入すれば、檢光子を通る光の強さは、

$$I = A^2 \sin^2 \frac{1}{2} \delta \dots \dots \dots (2)$$

A は光の性質による常數、 δ は前記の如く應力に基づく位相差である。此處に

$$\delta = 2n\pi \dots \dots \dots (3)$$

なる場合を假定して見ると、整數の n を有する諸點に於て、(2) 式は $I=0$ となり、光は消されて其の點が黒く見える。試験中に主應差の小さい點や大きい點がある場合には、 δ が 2π

の整数倍を越える場所毎に消光される。而も δ の或る値を有する點が孤立してゐることは稀であるから、此處に恰も contour lines の如き等量線 (isochromatic lines) が現はれ、従つて之れを一次、二次、三次……と言ふやうに呼ぶことが出来る。依つて n を消光次數 (order of extinction) と名づける。

扱て應力量と其の光効果とを連結すべき基本式を、(1) 式の代りに次の如く假定す。

$$\delta = 2\pi Sd/K \dots\dots\dots(4)$$

(1) 式の成立することは既に文獻に依つて支持されてゐるし、又後段述べるやうに著者の行つた實驗は (4) 式を肯定するものであるから、上の假定は結果に於て不穩當ではない。而して (4) 式を (3) 式へ代入せよ。然るときは、

$$Sd = Kn \dots\dots\dots(5)$$

之れに依れば、主應力差と試験片厚さの乗積は消光次數に比例す。此の事實を光弾性消光法則 (law of photo-elastic extinction) と命名し、常數 K を光弾性消光係數 (或は略して消光係數) と名づける。厚さ一様な試験片に於ては

$$S = kn \dots\dots\dots(6)$$

但し $k = K/d$ 、即ち主應力差は消光次數に正比例す。今 S を kg/cm^2 、 d を cm にて表せば、 K は kg/cm 、 k は kg/cm^2 なる單位を夫々有し、之れ等は工學上普通用ひられる單位と形式を同じうするもので、常數 C より遙かに明瞭な概念を與へる。扱て上記法則は、弾性學に於ける Hooke's law に甚だ類似してゐる。後者が彈性變形の測定から應力量の推定に役立つ如く、本法則は、光效果の觀測から應力量を決定することに途を開くものである。

第二節 荷重消光量圖

Babinet 補整計を直交ニコル間へ挿入し、補整計の主面をニコル主面より 45 度傾斜せしめる。此の状態に於ける補整計の消光周期、即ち其の位相差を 2π 變へるために一方の楔を他の楔に對して移動せしむべき距離を a で表はすならば、楔を距離 ω だけ移動せしむことは、

$$\delta = 2\pi x/a \dots\dots\dots(7)$$

なる位相差の變化に對應す。今斷面一様な張力片又は壓縮片を、前記補整計と起偏子の間へ挿入して、試験片の主軸を補整計の主面へ一致せしめ、且つ補整計の叉線下には常に黑線あらしめるやうにする。次に試験片の應力を S だけ變化せしめるとき、楔の移動 ω (之れを假りに消光變位と命名す) を要したとすれば、(4) 式を (7) 式に代入することに依つて、

$$Sad = xK \dots\dots\dots(8)$$

を得。然るに荷重量を P 、試験片の幅を b とすれば、一軸應力の場合には $S = P/bd$ であるから、(8) 式は

$$P = x(Kb/a) \dots\dots\dots(9)$$

種々の荷重階に於ける消光變位を觀測し、 P を縦軸に、 x を横軸にとりて測定値を圖示すれば、此處に荷重消光量圖が出来る。此の圖が直線である範圍に於ては、其の傾角の正切値へ常數 (a/b) を乗すれば、消光係數 K の値が出る。恰も荷重變形圖から彈性係數 E を求める手續と同様である。

第三節 消光係數の數値

荷重を step by step に増加し、其の各階段に於ける消光變位を觀測するといふ方法に従ふときは、各階段間の荷重増分 (load increment) を大にする程、又時間増分 (time increment) を小にする程、測定される K の値が大となり、一定數値の得られないことが認められた。之れ測定中に加はる流伸の影響を示すものである。依つて著者は、荷重を與へるや否や消光變位を読み取り、夫れから直に荷重を除去するといふやうにして一觀測を終へ、次に5分間以上経過せる後別の荷重階に對して同様觀測し、斯様な多數の獨立せる觀測を集めて、一試験片に對する荷重消光量圖を作製し、夫れに依つて荷重増分の如何に關せず一定の K を求めることが出来た。

實際使用した試験機は、ミハエリス式セメント張力試験機を少しく改造したものである(寫眞第一参照)。長期練習の結果、殆んど振動なく荷重を與へ得るやうになり、又荷重を與へて變位を読み取り、更に荷重を除去するまでの一觀測を5秒以内に確實に遂行し得るやうになつた。

フェノライトの張力片11本(第一圖参照)及び壓縮片9本(張力片の兩端を切り棄てた72mmのもの)の試験結果は共に平均

$$K=11.0 \text{ kg/cm}$$

であつた。但し此の實驗は、水銀灯の綠色線 5461 \AA によつて行はれたものである。

荷重を瞬間的に與へる方法に依つて得た K の値を、消光係數の基本値 (primitive value) と名づけ、之れを K_0 で表はすことに規約す。

次に(8)式の左右兩邊は、荷重を一定に保つ限り夫々一定の筈である。然るに右邊の x には流伸が伴ふから、 K は x の變化を打ち消すやうな time effect を受く可きものと考へられる。依つて荷重を與へた瞬間の状態を

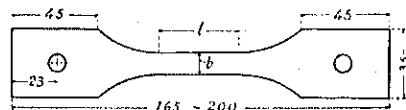
$$S a d = x_0 K_0$$

又夫れから t 分間経過したときの状態を

$$S a d = (x_0 + X) K_t$$

とし、此の兩式から x_0 を消去すれば、

第一圖



No	l	b	d	No	l	b	d
1	70	15.71	8.85	7	35	10.10	4.40
2	-	15.84	7.58	8	-	10.11	5.30
3	-	14.22	9.90	9	-	10.13	4.30
4	-	14.47	9.40	10	-	10.03	5.25
5	-	14.46	8.80	11	-	10.17	5.38
6	-	14.45	7.50	(All dimensions in mm)			

$$K_t = K_0 / (1 + \beta K_0)$$

此處に

$$\beta = X / S \cdot a \cdot d \quad (\text{時間 } t \text{ の函数})$$

著者は、試験片の荷重を一定に保ち、荷重を與へてから最初の 20 分間は 1 分間毎に X を測定し、次の 100 分間は 10 分間毎に X を測定するといふ方法を採用した。そして試験片及び荷重を種々に變更して 60 餘個の實驗を行ひ、次の結果を見出した。

$$K_t = \frac{K_0}{1 + m \cdot t^r \cdot K_0} \dots\dots\dots (10)$$

	$t < 15$ 分	$15 \text{ 分} < t < 120$ 分
m の値	1/300	1/250
r の値	0.96	0.29

次の表は $K_0 = 11.0 \text{ kg/cm}$ として計算した K_t の値である。

$K_1 = 10.6$	$K_2 = 10.5$	$K_5 = 10.3$
$K_{15} = 10.0$	$K_{30} = 9.8$	$K_{120} = 9.4$

法則 $Sd = Kn$ を光弾性試験に利用する場合に於て、荷重を與へてから 1 分間後に撮影した等量線に對しては K_1 を、又 10 分間に撮影した等量線に對しては K_{10} を夫々使用すると云ふやうにするならば、試験片の受ける流伸の影響を完全に除くことが出来る。

フェノライト以外の材料に就て K_0 を測定した結果は次の通りであつた。

硝 子	セルロイド	ベークライト
234.4 kg/cm^2	48.8 kg/cm^2	12.7 kg/cm^2

之れ等の値から判断すれば、光弾性學的實驗の材料としては、フェノライトが最も優秀である。夫れは同一の主應力差範圍に對して、他の材料の場合よりも多數の等量線が現はれるからである。

第三章 前記法則の二軸應力状態への擴張

第一節 累加法則による擴張

著者の行つた實驗に依れば、比例限界を越えない範圍の一軸應力を有する試験片に於ては、應力を 2 倍にすれば、其の光効果も亦 2 倍になることが認められた。即ち應力累加の法則は、光効果に關しても之れを承認して實用上差支を見出さないのである。斯様に一軸應力の下に於て累加法則が認められた場合、二軸應力の下に於て之れが認めらる可きや否やといふに、弾性に關する普通の經驗よりすれば、之れに肯定的解答を與へて差支ないやうに思はれるのである。若し夫れが許されるならば、一軸應力の試験片に就て實驗的に求められた消光法則は、二軸應力の場合にも實用上適用し得らる可きわけである。

著者は更に別の方面より消光法則の一般性を吟味する爲に、次に述べる問題に關して、該

法則を使用して決定した実験値と、弾性學に基づく數理解法との比較を試みる次第である。

第二節 一直徑の兩端にて壓縮せらるゝ圓筒軋子の解法及び實驗

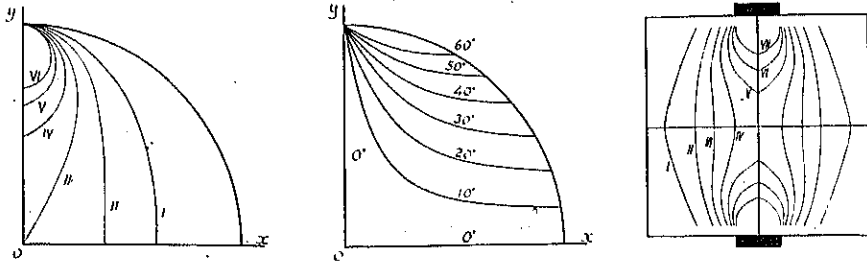
荷重が一點に作用すとの假定から出發すると、該點が特異性を發揮して、無限大の應力を與へ、部分的ではあるが甚だしく事實に違ひ結果を示すものである。

著者は、先づ荷重が直徑の兩端に於てさる微小面積に等布せらるゝものとの假定に立ちて應力解式を求め、夫れより等傾線及び等量線の方程式を誘導した。第二圖は

第二圖

第三圖

第四圖



$$4P/\pi aK=3 \dots\dots\dots(11)$$

なる場合に於ける理論的等量線若干個を示すものである。上式中 P は荷重量、 a は軋子の半徑である。第三圖は理論的に得た等傾線である。

次にフェノライト圓板(直徑 35 mm, 厚さ 6 mm) に就いて寫眞第二に示す装置で光弾性試験を遂行した。荷重 43.7 kg を與へてから 1 分間後に寫眞第三を撮影し、同じく 15 分間後に寫眞第四を撮影した。 $K_1=10.6 \text{ kg/cm}$ とれば、寫眞第三の場合には (11) 式が成立し、前掲の第二圖に比較さるべきことが解る。又寫眞第三と第四とを比ぶれば、同一荷重の下に於て生ずる流伸の影響が如何に大なるかを知ることが出来る。次に寫眞第五及び第六は等傾線の例であつて、第三圖に比較さる可きものである。

高次の等量線は、寫眞第三に示されてゐる通り、周邊より僅か内部の點へ(同心的に)集中する。板の中心から該集中點までの距離を調べて見ると、次表のやうであつた。

算出の方法	中心からの距離を半徑の倍數で表はした値
寫眞乾板上での測定	0.96
荷重が微小面積に等布すとの假定から計算	0.97
ヘルツの一般接觸理論より誘導せる解式から計算	0.98

第三節 相對する二邊に於て壓縮せらるゝ厚き矩形板の解法及び實驗

著者は應力函數から出發して理論的解析を試みたのであるが、先づ應力力が板の全周に於て消滅し、垂直應力は壓縮せらるゝ二邊に於て荷重強度に相等しく、又壓縮せられない他の二

邊に於ては完全に消失すべきことの諸條件を満足する一般的解式を誘導し、次に例として相對する二邊の夫々中央部に於て壓縮性等布荷重を受ける方形板をとり、荷重の幅が板の一邊 a の $1/5$ に等しい場合に就て、應力數値の計算を遂行し、周に平行な對稱線上では應剪力が消滅することを見出した。又

$$P/aK = 2 \dots\dots\dots(12)$$

なる場合に就いて理論的の等量線を計算し第四圖を得た。

次にフェノライトの方形板(各邊 33 mm, 厚さ 6 mm)の中央部 6.6 mm の幅へ總荷重 70 kg を等布的に與へてから、1 分間後に撮影した等量線が寫眞第七である。之れは $K_1=10.6$ kg/em の場合には(12)式が成立し、前の第四圖に比すべきものである。

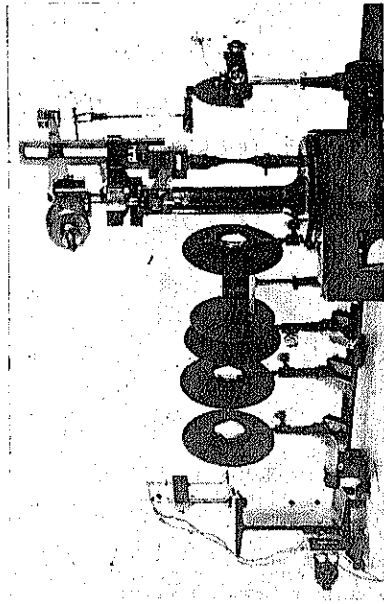
寫眞第八以下は等傾線の例であつて、計算の結果と相當よく一致してゐることが知られた。

第四章 結 論

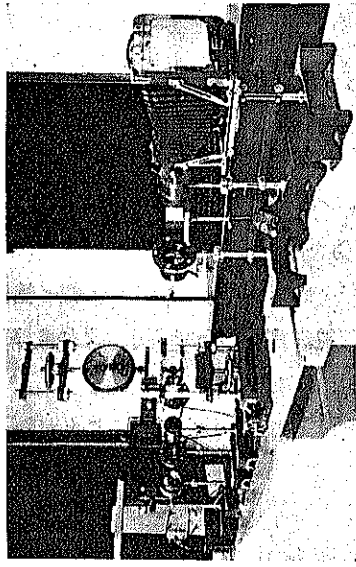
1. 主應力差と試験片厚さとの乗積は、消光次數に比例す。
2. 上記の法則が二軸應力の場合に常に眞なりや否やは、尙ほ相當の研究に待つ可きものと考へられるけれども、本篇第三章の記述は之れに肯定的解答を與ふるに足ると思惟せられる。
3. 上記の法則を使用すれば、光弾性學的實驗に於て、從來存した不便及び看過され來つた流伸の影響を除き得。
4. 水銀灯綠色線に依るフェノライトの消光係數基本値は 11.0 kg/em である。試験片へ荷重を與へてから測定するまでの時間が増すに従つて、其の消光係數値は減少す。

(以 上)

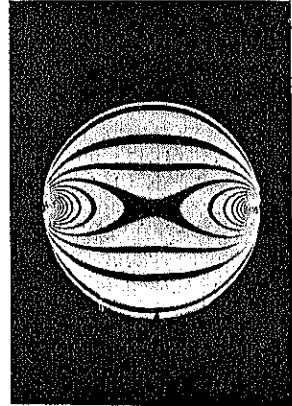
寫真第一



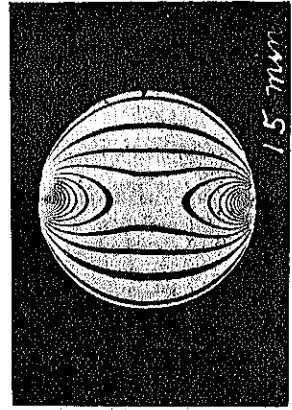
寫真第二



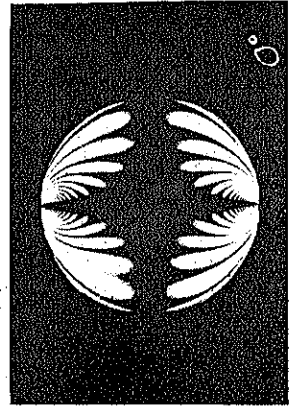
寫真第三



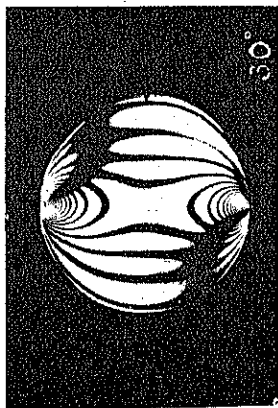
寫真第四



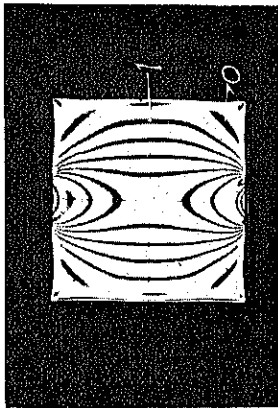
寫真第五



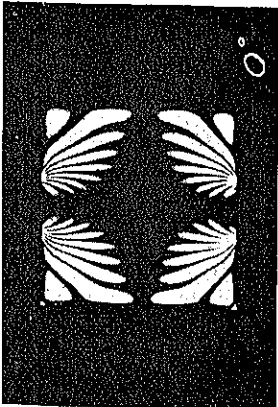
寫真第六



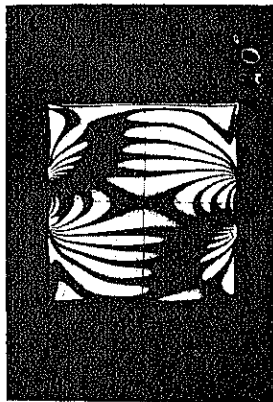
寫真第七



寫真第八



寫真第九



寫真第十

