講　　演

矩形平版の一般的解法並に二三の特殊の場合に對する應用に就て

（昭和六年十月三十一日應用力學聯合大會に於て）

會員　工學士　井　口　鹿　象

General Solution of Rectangular Plate and its Applications to Some Special Cases

By Shikazo Inokuchi, C. E., Member.

內容梗概

本論は，二軸の方向に於ける彎曲剛率が不等なる矩形平版が，其の一側に於て彈性基礎に接し，各種の周邊條件並に荷重に對して最も普遍的に適用し得る如き撓度の式を求め，且つ之れを根據として二三の特殊の場合に對する公式を誘導せるものなり。而して平版の基本公式たる偏微分方程式の解説に當りては，Fourier の級數を適用して複式無限級數として表はし，更に之れを單式無限級數に變形するの方法を採れり。

目　　次

第一章　撓曲方程式

直交せる二軸の方向に於ける彎曲剛率 (flexural rigidity) が不等なる薄き平版 (orthogonally aelotropic thin plate) の撓度が其の厚さに比して大ならざるときは，任意の點 (x, y) に於ける撓度 ζ に關し，次の如き微分方程式が成立すべし。※

※ M. T. Huber: Die Theorie der kreuzweise bewehrten Eisenbeton Platten nebst Anwendungen auf mehrere Bautechnisch wichtige Aufgabe über rechteckige Platten. Der Bauing., 1923 H. 12. u. 13.

$$N_x\frac{\partial^4\zeta}{\partial x^4}+2H\frac{\partial^4\zeta}{\partial x^2\partial y^2}+N_y\frac{\partial^4\zeta}{\partial y^4}=q_{xy} \quad \cdots\cdots(1)$$

但し q_{xy}: 平版の單位面積に作用する外力

$$N_x=\frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1\mu_2-1}EJ_x, \quad (x \text{ 軸の方向の彎曲剛率})$$

$$N_y=\frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1\mu_2-1}EJ_y, \quad (y \text{ 軸の方向の彎曲剛率})$$

$$2H=\frac{N_x}{\mu_2}+\frac{N_y}{\mu_1}+4c, \quad (2c=\text{扭剛率 (torsional rigidity)})$$

μ_1, μ_2: 夫々 x 及び y 軸の方向の Poisson's number

J_x, J_y: 夫々 x 及び y 軸に直角なる斷面の單位幅に對する惰率 (moment of inertia)

E: 彈性率 (modulus of elasticity)

上式中

$$N_x=N_y=H \quad \text{及び} \quad \mu_1=\mu_2=\mu$$

と置けば，普通の等質平版 (isotropic plate) に對する撓曲方程式となること明かなり。

(1) 式の兩邊を N_x にて除すれば次の如く書換へらる。

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^4\zeta}{\partial x^4}+2K'^2\frac{\partial^4\zeta}{\partial x^2\partial y^2}+K^2\frac{\partial^4\zeta}{\partial y^4}=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\lambda^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\lambda'^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\zeta\\
&\qquad=\frac{q_{xy}}{N_x}\\
&\text{但し}\\
&K^2=\frac{N_y}{N_x}=\frac{J_y}{J_x}\\
&K'^2=\frac{H}{N_x}=\frac{1}{2}\left(\frac{K^2}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_2}\right)+\frac{2c}{N_x}\\
&\lambda^2=K'^2+\sqrt{K'^4-K^2}, \quad \lambda'^2=K'^2-\sqrt{K'^4-K^2}
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots(2)$$

荷重 q_{xy} は一般に x 及び y の函數にして，ζ に無關係なるときと然らざるときとあり。例へば，平版の一側が彈性基礎に接し且つ普通假定せらるゝ如く，

$$\left.\begin{aligned}
&q_{xy}=p_{xy}-B\zeta\\
&\text{但し}\\
&p_{xy}:\ \zeta \text{ に無關係なる荷重}\\
&B:\ \text{Bettungsziffer}
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots(3)$$

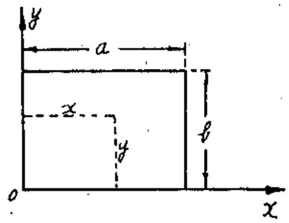
を以て表はさるゝ場合は，(2) 式は次の如く書換ふることを得べし。

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^4\zeta}{\partial x^4}+2K'^2\frac{\partial^4\zeta}{\partial x^2\partial y^2}+K^2\frac{\partial^4\zeta}{\partial y^4}+L^4\zeta=\frac{p_{xy}}{N_x}\\
&\text{但し}\\
&L^4\equiv\frac{B}{N_x}
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots(4)$$

第二章　矩形平版の撓度方程式の假定と其の周邊條件

矩形平版に對する (4) 式の一般解式を求むるため，矩座標軸を第一圖の如く撰び，任意の點に於ける撓度 ζ を次の如き複式無限級數を以て表はすことゝすべし。

第一圖



$$\left.\begin{aligned}&\zeta=\frac{pb^4}{N_x}\sum_m\sum_n A_{mn}X_{mn}Y_{mn}\\ &\text{但し}\\ &m,\ n=1,2,3,4\ldots\infty\\ &p:\text{定數},\quad b:\text{矩形の一邊の長さ}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(5)$$

上式中，X_{mn} 及び Y_{mn} は夫々 x 及び y のみの函數にして，$(X_{mn}Y_{mn})$ が平版の凡ての周邊條件を滿足し，且つ未定係數 A_{mn} は (5) 式が (4) 式を滿足する樣に定むることを得たりとせば，平版の撓度は完全に決定せらるべし。而して平版の周邊條件は二つの自變數 x 及び y に關し一般に四つ宛あるが故に，函數 X_{mn} 及び Y_{mn} は次の如き三次代數式と一三角函數との和を以て表はすことを得べし。

$$\left.\begin{aligned}X_{mn}&=C_{mn}\frac{x^3}{3a^3}-C_{mn}'\left(\frac{x^3}{3a^3}-\frac{x^2}{a^2}\right)+C_{mn}''\frac{x}{a}+C_{mn}'''\\ &\quad+\frac{1}{m\pi}\sin\frac{m\pi}{a}x\\ Y_{mn}&=D_{mn}\frac{y^3}{3b^3}-D_{mn}'\left(\frac{y^3}{3b^3}-\frac{y^2}{b^2}\right)+D_{mn}''\frac{y}{b}+D_{mn}'''\\ &\quad+\frac{1}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{b}y\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(6)$$

係數 C_{mn}，$C_{mn}'\cdots\cdots D_{mn}$，$D_{mn}'\cdots\cdots$ 等は各特殊の周邊條件に依り定めらるゝものにして其の値は運算の結果次の如くなる。

(1)　四邊に於て單純に支承せらるゝ場合

$$\left.\begin{aligned}C_{mn}=C_{mn}'=C_{mn}''=C_{mn}'''=0\\ D_{mn}=D_{mn}'=D_{mn}''=D_{mn}'''=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(7)$$

(2)　一邊 $x=0$ に於て完全に固定せられ，其の他の三邊が單純に支承せらるゝ場合

$$\left.\begin{aligned}&C_{mn}=0,\quad C_{mn}'=\frac{3}{2},\quad C_{mn}''=-1,\quad C_{mn}'''=0\\ &D_{mn}=D_{mn}'=D_{mn}''=D_{mn}'''=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(8)$$

(3)　二邊 $x=0$ 及び $x=a$ に於て完全に固定せられ，其の他の二邊が單純に支承せらるる場合

$$\left.\begin{aligned}&C_{mn}=C_m=-1-2(-1)^m\\ &C_{mn}'=C_m'=2+(-1)^m,\quad C_{mn}''=-1,\quad C_{mn}'''=0\\ &D_{mn}=D_{mn}'=D_{mn}''=D_{mn}'''=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(9)$$

(4) 二邊 $x=0$ 及び $y=0$ に於て完全に固定せられ，其の他の二邊が單純に支承せらるる場合

$$\left.\begin{array}{llll} C_{mn}=0, & C_{mn}'=\dfrac{3}{2}, & C_{mn}''=-1, & C_{mn}'''=0 \\ D_{mn}=0, & D_{mn}'=\dfrac{3}{2}, & D_{mn}''=-1, & D_{mn}'''=0 \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots(10)$$

(5) 三邊 $x=0$, $y=0$ 及び $y=b$ に於て完全に固定せられ，殘りの一邊が單純に支承せらるゝ場合

$$\left.\begin{array}{l} C_{mn}=0, \quad C_{mn}'=\dfrac{3}{2}, \quad C_{mn}''=-1, \quad C_{mn}'''=0 \\ D_{mn}=D_n=-1-2(-1)^n \\ D_{mn}'=D_n'=2+(-1)^n, \quad D_{mn}''=-1, \quad D_{mn}'''=0 \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots(11)$$

(6) 四邊に於て完全に固定せらるゝ場合

$$\left.\begin{array}{l} C_{mn}=C_m=-1-2(-1)^m \\ C_{mn}'=C_m'=2+(-1)^m, \quad C_{mn}''=-1, \quad C_{mn}'''=0 \\ D_{mn}=D_n=-1-2(-1)^n \\ D_{mn}'=D_n'=2+(-1)^n, \quad D_{mn}''=-1, \quad D_{mn}'''=0 \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots(12)$$

上記の各場合は孰れも自由邊を有せず，X_{mn} 及び Y_{mn} 中の各係數は夫々函數 X_{mn} 及び Y_{mn} より各別單獨に求むることを得るものにして，各 C 從つて X_{mn} は m を含むも n を含まず，各 D 從つて Y_{mn} は n を含むも m を含まざる式となる。自由邊を有する矩形平版は之れと趣を異にすること次の如し。

(7) 三邊 $x=0$，$y=0$ 及び $y=b$ に於て單純に支承せられ，殘りの一邊が自由なる場合

$$\left.\begin{array}{l} C_{mn}=-\dfrac{(-1)^m\left(1+\varepsilon\dfrac{m^2\pi^2}{\alpha_n^2}\right)}{\dfrac{2}{\alpha_n^2}(\mu_2-\varepsilon)+\dfrac{2}{3}}, \quad \dfrac{1}{\varepsilon}=\dfrac{1}{\mu_2}+\dfrac{4G}{N_x}, \quad \alpha_n=\dfrac{a}{b}n\pi \\ C_{mn}'=0, \quad C_{mn}''=\left(\dfrac{2\mu_2}{\alpha_n^2}-\dfrac{1}{3}\right)C_{mn}, \quad C_{mn}'''=0 \\ D_{mn}=D_{mn}'=D_{mn}''=D_{mn}'''=0 \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots(13)$$

(8) 二邊 $y=0$ 及び $y=b$ に於て單純に支承せられ，邊 $x=0$ が完全に固定，$x=a$ が自由なる場合

$$\left.\begin{array}{l} C_{mn}=-\dfrac{(-1)^m\left(1-\varepsilon\dfrac{m^2\pi^2}{\alpha_n^2}\right)+\dfrac{3\mu_2}{\alpha_n^2}+\dfrac{1}{2}}{\dfrac{3\varepsilon}{\alpha_n^4}(2\mu_2-\alpha_n^2)+\dfrac{3\mu_2}{\alpha_n^2}+\dfrac{1}{2}} \\ C_{mn}'=\dfrac{3}{2}+\left(\dfrac{3\mu_2}{\alpha_n^2}-\dfrac{1}{2}\right)C_{mn}, \quad C_{mn}''=-1, \quad C_{mn}'''=0 \\ D_{mn}=D_{mn}'=D_{mn}''=D_{mn}'''=0 \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots(14)$$

(9)　二邊 $y=0$ 及び $y=b$ に於て單純に支承せられ，殘りの二邊が自由なる場合

$$\left.\begin{aligned}
C_{mn}&=-\frac{(-1)^m}{2}\left(1+\varepsilon\frac{m^2\pi^2}{\alpha n^2}\right)\left\{1-(-1)^m+\frac{1+(-1)^m}{\frac{1}{3}+\frac{4}{\alpha n^2}(\mu_2-\varepsilon)}\right\}\\
C_{mn}'&=-\frac{(-1)^m}{2}\left(1+\varepsilon\frac{m^2\pi^2}{\alpha n^2}\right)\left\{1-(-1)^m-\frac{1+(-1)^m}{\frac{1}{3}+\frac{4}{\alpha n^2}(\mu_2-\varepsilon)}\right\}\\
C_{mn}&+2C_{mn}'+3C_{mn}''+3C_{mn}'''=\overline{C}_{mn}=\frac{6\mu_2}{\alpha n^2}C_{mn}\\
C_{mn}'''&=\frac{2\mu_2}{\alpha n^2}C_{mn}'\\
D_{mn}&=D_{mn}'=D_{mn}''=D_{mn}'''=0
\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots(15)$$

上記9種の周邊條件以外のものに對しては，撓度を (5) 式及び (6) 式の如く假定して，X_{mn} 及び Y_{mn} の形を定むること能はず。而して之れ等の各場合は孰れも少くとも相對する二邊 ($y=0$ 及び $y=b$) の撓度が零なる場合に包括せらるゝが故に，(6) 式の代りに

$$\left.\begin{aligned}
X_{mn}&=C_{mn}\frac{x^3}{3a^3}-C_{mn}'\left(\frac{x^3}{3a^3}-\frac{x^2}{a^2}\right)+C_{mn}''\frac{x}{a}+C_{mn}'''\\
&\quad+\frac{1}{m\pi}\sin\frac{m\pi}{a}x\\
Y_{mn}&=Y_n=\frac{D_n}{3}\left(\frac{y^3}{b^3}-\frac{y}{b}\right)-\frac{D_n'}{3}\left(\frac{y^3}{b^3}-\frac{3y^2}{b^2}+\frac{2y}{b}\right)\\
&\quad+\frac{1}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{b}y
\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots(16)$$

を以て其の一般式となすことを得べし。

第三章　未定係數 A_{mn} の方程式

前項記載の公式に依り各周邊條件を滿足すべき函數 X_{mn} 及び Y_n の形を定むることを得たるが故に，(16) 式が (4) 式を滿足するための未定係數 A_{mn} を見出せば，所要の解式を得べし。今

$$p_{xy}=pf(x,y),\qquad p=\text{定數}$$

とし，(16) 式を (4) 式に代入すれば

$$b^4\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}(X_{mn}''''Y_n+2K'^2X_{mn}''Y_n''+K^2X_{mn}Y_n'''')$$
$$+b^4L^4\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}X_{mn}Y_n=f(x,y)$$

となり，更に

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Phi(m,n)\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y+\sum_{m=1}^{\infty}F_1\left(m,\frac{y}{b}\right)\sin\frac{m\pi}{a}x$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}F_2\left(n,\frac{x}{a}\right)\sin\frac{n\pi}{b}y+F_3\left(\frac{x}{a},\frac{y}{b}\right)=f(x,y)$$

なる形の式を得べし。上式中 F_1, F_2 及び F_3 は夫々 y/b, x/a 及び $(x/a,\ y/b)$ に關する簡單なる代數式なるが故に，Fourier 級數を適用して

$$F_1\left(m,\frac{y}{b}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_1(m,n)\sin\frac{n\pi}{b}y,\quad F_2\left(n,\frac{x}{a}\right)=\sum_{m=1}^{\infty}\varphi_2(m,n)\sin\frac{m\pi}{a}x$$

$$F_3\left(\frac{x}{a},\frac{y}{b}\right)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_3(m,n)\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y$$

の如く展開し，且つ荷重の函數 $f(x,y)$ も

$$f(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}R_{mn}\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y$$

なる Fourier の複式無限級數に展開し得るものとすれば，上式は次の如く書換ふることを得べし。

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\Phi(m,n)+\varphi_1(m,n)+\varphi_2(m,n)+\varphi_3(m,n)\right\}\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}R_{mn}\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y$$

此の式は x, y の如何に拘らず成立するものなるが故に，

$$\Phi(m,n)+\varphi_1(m,n)+\varphi_2(m,n)+\varphi_3(m,n)=R_{mn}$$

此の方法に依り實際の式を當てはめて運算すれば，A_{mn} に關する次の如き一般方程式を得べし。

$$A_{mn}+\frac{4}{m^2\pi^2}\left\{(-1)^m\sum_r C_{rn}\overset{※}{A_{rn}}-\sum_r C_{rn}'A_{rn}\right\}+\frac{4}{n^2\pi^2}\left\{(-1)^n\sum_s D_sA_{ms}\right.$$

$$\left.-\sum_s D_s'A_{ms}\right\}+\frac{16A_{mn}}{m^2n^2\pi^4}-\frac{1}{\pi^4\left(\rho_{mn}+\frac{a^4L^4}{\pi^4}\right)}\Big[4m^2\pi^2\{(-1)^mA_n-A_n'\}$$

$$+\frac{2}{3}(K^2\alpha_n^4+a^4L^4)\{(-1)^m\sum_r\overline{C}_{rn}A_{rn}-3\sum_r C_{rn}'''A_{rn}\}$$

$$+\frac{8a^4L^4}{3n^2\pi^2}\sum_r\sum_s A_{rs}\{(-1)^m\overline{C}_{rs}-3C_{rs}'''\}\{(-1)^nD_s-D_s'\}\Big]$$

$$-\frac{4n^2\pi^2\{(-1)^nB_m-B_m'\}}{\pi^4\left(\rho_{mn}'+\frac{b^4L^4}{K^2\pi^4}\right)}=\frac{a^4}{b^4}\cdot\frac{mn\pi^2R_{mn}}{\pi^4\left(\rho_{mn}+\frac{a^4L^4}{\pi^4}\right)}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(17a)$$

※ $\sum_{m=1}^{\infty}C_{mn}A_{mn}$ は n を含むも m を含まざるものと見做すことを得べし，故に混雜を防ぐため此の場合の m を r を以て表はし，$\sum_{m=1}^{\infty}C_{mn}A_{mn}=\sum_{r=1}^{\infty}C_{rn}A_{rn}$ と書くことゝす。其他 $\sum_s D_sA_{ms}$, $\sum_r\sum_s C_{rs}D_sA_{rs}$ 等も類似の意味の記號とす。

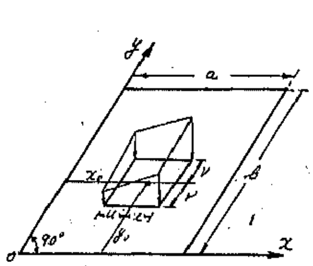
上式中

$$\left.\begin{aligned}
A_n &= \frac{4}{n^2\pi^2}\sum_r\sum_s A_{rs}C_{rs}\{(-1)^n D_s - D_s'\} + \sum_r \overline{C}_{rn}A_{rn} \\
A_n' &= \frac{4}{n^2\pi^2}\sum_r\sum_s A_{rs}C_{rs}'\{(-1)^n D_s - D_s'\} + \sum_r C_{rn}'A_{rn} \\
B_m &= \frac{4}{m^2\pi^2}\sum_r\sum_s A_{rs}D_s\{(-1)^m C_{rs} - C_{rs}'\} + \sum_s \overline{D}_s A_{ms} \\
B_m' &= \frac{4}{m^2\pi^2}\sum_r\sum_s A_{rs}D_s'\{(-1)^m C_{rs} - C_{rs}'\} + \sum_s D_s' A_{ms} \\
\Delta_{mn} &= \sum_r\sum_s A_{rs}\{(-1)^m C_{rs} - C_{rs}'\}\{(-1)^n D_s - D_s'\} \\
\overline{C}_{rn} &= C_{rn} + 2C_{rn}' + 3C_{rn}'' + 3C_{rn}'''
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots(17b)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\rho_{mn} + \frac{a^4L^4}{\pi^4} = m^4 + \frac{2K'^2}{\pi^2}\alpha_n^2 m^2 + \frac{K^2\alpha_n^4}{\pi^4} + \frac{a^4L^4}{\pi^4} \\
&\qquad = \left(m^2 + \lambda_n^2\frac{\alpha_n^2}{\pi^2}\right)\left(m^2 + \lambda_n'^2\frac{\alpha_n^2}{\pi^2}\right), \\
&\alpha_n = \frac{a}{b}n\pi \\
&\text{但し}\quad \lambda_n^2 = K'^2 + \sqrt{K'^4 - \left(K^2 + \frac{b^4L^4}{n^4\pi^4}\right)}, \\
&\qquad\quad \lambda_n'^2 = K'^2 - \sqrt{K'^4 - \left(K^2 + \frac{b^4L^4}{n^4\pi^4}\right)} \\
&\rho_{mn}' + \frac{b^4L^4}{K^2\pi^4} = \frac{b^4}{K^2a^4}\left(\rho_{mn} + \frac{a^4L^4}{\pi^4}\right) = n^4 + \frac{2K'^2\beta_m^2}{K^2\pi^2}n^2 \\
&\qquad + \frac{\beta_m^4}{K^2\pi^4} + \frac{b^4L^4}{K^2\pi^4} = \left(n^2 + \lambda_m^2\frac{\beta_m^2}{\pi^2}\right)\left(n^2 + \lambda_m'^2\frac{\beta_m^2}{\pi^2}\right), \\
&\beta_m = \frac{b}{a}m\pi \\
&\text{但し}\quad \lambda_m^2 = \frac{1}{K^2}\left\{K'^2 + \sqrt{K'^4 - \left(K^2 + \frac{K^2a^4L^4}{m^4\pi^4}\right)}\right\}, \\
&\qquad\quad \lambda_m'^2 = \frac{1}{K^2}\left\{K'^2 - \sqrt{K'^4 - \left(K^2 + \frac{K^2a^4L^4}{m^4\pi^4}\right)}\right\}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots(17c)$$

荷重從つて R_{mn} が與へらるれば，前項記載の各周邊條件の矩形平版に對する A_{mn} の値は公式 (7) 乃至 (15) 式及び (17) 式を適用して算定することを得べし。公式 (17) に示す A_{mn} の方程式は別に W. Ritz 氏の如く最小働の原理を應用するも誘導し得べし。

第　二　圖



第四章　荷重を表はす函數の展開式

普通の矩形平版に於て最も多く遭遇する荷重は，第二圖に示す如き部分的等變荷重の特別の場合と見做し得るもの多し。今荷重の强度 p_{xy} は

$$x_0-u \leqq x \leqq x_0+u \quad \text{及び} \quad y_0-v \leqq y \leqq y_0+v$$

なる範圍に於て

$$p_{xy}=pf(x,y)=p\left(1+\alpha\frac{x}{a}+\beta\frac{y}{b}\right)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}R_{mn}\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y$$

を以て表はさるゝものとすれば,

$$R_{mn}=\frac{4}{ab}\int_{x_0-u}^{x_0+u}\int_{y_0-v}^{y_0+v}f(x,y)\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y\,dx\,dy$$

に依り次の如き公式を得べし。

$$\begin{aligned}R_{mn}=\frac{16}{mn\pi^2}\Big[&\left(1+\alpha\frac{x_0}{a}+\beta\frac{y_0}{b}\right)\sin\frac{m\pi}{a}x_0\sin\frac{m\pi}{a}u\sin\frac{n\pi}{b}y_0\sin\frac{n\pi}{b}v\\&-\frac{\alpha u}{a}\cos\frac{m\pi}{a}x_0\cos\frac{m\pi}{a}u\sin\frac{n\pi}{b}y_0\sin\frac{n\pi}{b}v\\&-\frac{\beta v}{b}\sin\frac{m\pi}{a}x_0\sin\frac{m\pi}{a}u\cos\frac{n\pi}{b}y_0\cos\frac{n\pi}{b}v\\&+\frac{\alpha}{m\pi}\cos\frac{m\pi}{a}x_0\sin\frac{m\pi}{x}u\sin\frac{n\pi}{b}y_0\sin\frac{n\pi}{b}v\\&+\frac{\beta}{n\pi}\sin\frac{m\pi}{a}x_0\sin\frac{m\pi}{a}u\cos\frac{n\pi}{b}y_0\sin\frac{n\pi}{b}v\Big]\quad\cdots\cdots(18)\end{aligned}$$

特別の場合として

$$\frac{x_0}{a}=\frac{u}{a}=\frac{1}{2}, \qquad \frac{y_0}{b}=\frac{v}{b}=\frac{1}{2}$$

即ち平版の全面に等變的に分布せらるゝ荷重に對しては

$$R_{mn}=\frac{4}{mn\pi^2}\left[\{1-(-1)^m\}\{1-(-1)^n\}-\alpha(-1)^m\{1-(-1)^n\}-\beta(-1)^n\{1-(-1)^m\}\right]\quad\cdots\cdots(19)$$

平版の全面に一様に分布せらるゝ荷重に對しては

$$\left.\begin{aligned}&R_{mn}=\frac{16}{mn\pi^2}\\ \text{但し}\quad&m,n=1,3,5,7\ldots\infty\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(20)$$

となる。

第五章　一般撓度方程式

公式 (17) に依り m, n の 1, 2, 3,$\cdots$等に對する A_{mn} の値を算出すれば，任意の點に於ける撓度は

$$\zeta=\frac{pb^4}{N_x}\sum_m\sum_n A_{mn}\left\{C_{mn}\frac{x^3}{3a^3}-C_{mn}'\left(\frac{x^3}{3a^3}-\frac{x^2}{a^2}\right)+C_{mn}''\frac{x}{a}+C_{mn}'''+\frac{1}{m\pi}\sin\frac{m\pi}{a}x\right\}$$

$$\times\left\{\frac{D_n}{3}\left(\frac{y^3}{b^3}-\frac{y}{b}\right)-\frac{D_n'}{3}\left(\frac{y^3}{b^3}-\frac{3y^2}{b^2}+\frac{2y}{b}\right)+\frac{1}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{b}y\right\}\ \ldots\ldots(21)$$

に依りて計算することを得べし。上式中 x/a 及び y/b に關する各代數式を Fourier の級數に展開すれば，ζ は別に次の如く表はさる。

$$\zeta=\frac{pb^4}{N_x}\sum_m\sum_n\frac{\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y}{mn\pi^2}\Big[A_{mn}+\frac{4}{m^2\pi^2}\{(-1)^n\sum_r C_{rn}A_{rn}-\sum_r C_{rn}'A_{rn}\}$$
$$-\frac{2}{3}\{(-1)^m\sum_r\overline{C}_{rn}A_{rn}-3\sum_r C_{rn}'''A_{rn}\}+\frac{4}{n^2\pi^2}\{(-1)^n\sum_s D_sA_{ms}-\sum_s D_s'A_{ms}\}$$
$$+\frac{16A_{mn}}{m^2n^2\pi^4}-\frac{8}{3n^2\pi^2}\sum_s\sum_r A_{rs}\{(-1)^m\overline{C}_{rs}-3C_{rs}'''\}\{(-1)^nD_s-D_s'\}\Big]\ldots(22)$$

之れと (17)a 式とより

$$\zeta=\frac{pb^4}{N_x}\sum_m\sum_n\frac{\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y}{mn\pi^2}\Bigg[\frac{a^4}{b^4}\cdot\frac{mn\pi^2R_{mn}}{\pi^4\left(\rho_{mn}+\frac{a^4L^4}{\pi^4}\right)}+\frac{4m^2\pi^2\{(-1)^mA_n-A_n'\}}{\pi^4\left(\rho_{mn}+\frac{a^4L^4}{\pi^4}\right)}$$
$$+\frac{4n^2\pi^2\{(-1)^nB_m-B_m'\}}{\pi^4\left(\rho_{mn}'+\frac{b^4L^4}{K^2\pi^4}\right)}+\frac{2}{3}\left\{\frac{\lambda_n^2\lambda_n'^2\alpha_n^4}{\pi^4\left(\rho_{mn}+\frac{a^4L^4}{\pi^4}\right)}-1\right\}\Big\{(-1)^m\sum_r\overline{C}_{rn}A_{rn}$$
$$-3\sum_r C_{rn}'''A_{rn}\Big\}+\frac{8}{3n^2\pi^2}\left\{\frac{a^4L^4}{\pi^4\left(\rho_{mn}+\frac{a^4L^4}{\pi^4}\right)}-1\right\}\sum_r\sum_s A_{rs}\{(-1)^m\overline{C}_{rs}$$
$$-3C_{rs}'''\}\{(-1)^nD_s-D_s'\}\Bigg]\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(23)$$

上式［　］中の第二及び第四項に對しては m，第三項に對しては n，第五項に對しては最初 m に付て，次に n に付ての總和を求むれば，運算の結果次の公式を得べし。

$$\zeta=\frac{pb^4}{N_x}\overline{\zeta}=\frac{pb^4}{N_x}(\overline{\zeta}^{(0)}+\overline{\zeta}^{(1)})$$
$$\overline{\zeta}^{(0)}=\frac{a^4}{b^4}\sum_m\sum_n\frac{R_{mn}}{\pi^4\left(\rho_{mn}+\frac{a^4L^4}{\pi^4}\right)}\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y$$
$$\overline{\zeta}^{(1)}=\frac{b^2}{a^2}\sum_n\frac{\sin\frac{n\pi}{b}y}{n^3\pi^3\sqrt{K'^4-\left(K^2+\frac{b^4L^4}{n^4\pi^4}\right)}}\Big[A_n\Big(\frac{\sinh\lambda_n\alpha_n\xi}{\sinh\lambda_n\alpha_n}$$
$$-\frac{\sinh\lambda_n'\alpha_n\xi}{\sinh\lambda_n'\alpha_n}\Big)+A_n'\left\{\frac{\sinh\lambda_n\alpha_n(1-\xi)}{\sinh\lambda_n\alpha_n}-\frac{\sinh\lambda_n'\alpha_n(1-\xi)}{\sinh\lambda_n'\alpha_n}\right\}\Big]$$
$$+\frac{K^2a^2}{b^2}\sum_m\frac{\sin\frac{m\pi}{a}x}{m^3\pi^3\sqrt{K'^4-K^2\left(1+\frac{a^4L^4}{m^4\pi^4}\right)}}\Big[B_m\Big(\frac{\sinh\lambda_m\beta_m\eta}{\sinh\lambda_m\beta_m}$$
$$-\frac{\sinh\lambda_m'\beta_m\eta}{\sinh\lambda_m'\beta_m}\Big)+B_m'\Big\{\frac{\sinh\lambda_m\beta_m(1-\eta)}{\sinh\lambda_m\beta_m}$$

$$
\left.\begin{aligned}
&-\frac{\sinh\lambda_m'\beta_m(1-\eta)}{\sinh\lambda_m'\beta_m}\Big\}\Big]\\
&-\frac{1}{6}\sum_n\frac{\left(K^2+\frac{b^4L^4}{n^4\pi^4}\right)\sin\frac{n\pi}{b}y}{n\pi\sqrt{K'^4-\left(K^2+\frac{b^4L^4}{n^4\pi^4}\right)}}\Big[\Big(\frac{\sinh\lambda_n\alpha_n\xi}{\lambda_n^2\sinh\lambda_n\alpha_n}\\
&-\frac{\sinh\lambda_n'\alpha_n\xi}{\lambda_n'^2\sinh\lambda_n'\alpha_n}\Big)\sum_r\bar{C}_{rn}A_{rn}+3\Big\{\frac{\sinh\lambda_n\alpha_n(1-\xi)}{\lambda_n'^2\sinh\lambda_n\alpha_n}\\
&-\frac{\sinh\lambda_n'\alpha_n(1-\xi)}{\lambda_n'^2\sinh\lambda_n'\alpha_n}\Big\}\sum_r C_{rn}'''A_{rn}\Big]\\
&-\frac{2b^4L^4}{3}\sum_n\frac{\sin\frac{n\pi}{b}y}{n^7\pi^7\sqrt{K'^4-\left(K^2+\frac{b^4L^4}{n^4\pi^4}\right)}}\Big[\Big(\frac{\sinh\lambda_n\alpha_n\xi}{\lambda_n^2\sinh\lambda_n\alpha_n}\\
&-\frac{\sinh\lambda_n'\alpha_n\xi}{\lambda_n'^2\sinh\lambda_n'\alpha_n}\Big)\Big((-1)^n\sum_r\sum_s\bar{C}_{rs}D_sA_{rs}\\
&-\sum_r\sum_s\bar{C}_{rs}D_s'A_{rs}\Big)\\
&+3\Big\{\frac{\sinh\lambda_n\alpha_n(1-\xi)}{\lambda_n^2\sinh\lambda_n\alpha_n}-\frac{\sinh\lambda_n'\alpha_n(1-\xi)}{\lambda_n'^2\sinh\lambda_n'\alpha_n}\Big\}\\
&\times\Big((-1)^n\sum_r\sum_s C_{rs}'''D_sA_{rs}-\sum_r\sum_s C_{rs}'''D_s'A_{rs}\Big)\Big]\\
&-\frac{\frac{2K}{3b^2L^2}}{\cosh bL\sqrt{\frac{2}{K}}-\cos bL\sqrt{\frac{2}{K}}}\Big[\Big\{\sinh\frac{bL}{\sqrt{2K}}(1+\eta)\\
&\times\sin\frac{bL}{\sqrt{2K}}(1+\eta)-\sinh\frac{bL}{\sqrt{2K}}(1-\eta)\sin\frac{bL}{\sqrt{2K}}(1+\eta)\Big\}\\
&\times\Big\{\frac{x}{a}\sum_r\sum_s\bar{C}_{rs}D_sA_{rs}+3\Big(1-\frac{x}{a}\Big)\sum_r\sum_s C_{rs}'''D_sA_{rs}\Big\}\\
&+\Big\{\sinh\frac{bL}{\sqrt{2K}}(2-\eta)\sin\frac{bL}{\sqrt{2K}}\eta-\sinh\frac{bL}{\sqrt{2K}}\eta\\
&\times\sin\frac{bL}{\sqrt{2K}}(2-\eta)\Big\}\times\Big\{\frac{x}{a}\sum_r\sum_s\bar{C}_{rs}D_s'A_{rs}\\
&+3\Big(1-\frac{x}{a}\Big)\sum_r\sum_s C_{rs}'''D_s'A_{rs}\Big\}\Big]
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(24)
$$

但し

$$\xi\equiv\frac{x}{a},\qquad \eta\equiv\frac{y}{b}$$

上記 (21) 乃至 (24) 式は，其の形に於ては彼此同じからざるも，全く同一の式なること明かなり。

自由邊を有せざる平版に對しては

$$C_{rn}'''=C_{rs}'''=0,\qquad \bar{C}_{rn}=\bar{C}_{rs}=0$$

なるが故に，之等を含む項は凡て消去せらるべし。又之等の式中

$$K=K'=1, \quad 從つて \quad \lambda_n=\lambda_n'=1$$

と置けば isotropic plate に對する公式を得べく，

$$L=0$$

とすれば，平版の一側が全然自由なる（即ち彈性基礎の如きものに接觸せざる）場合の公式を與ふべし。

(24) 式より

$$\frac{pb^4}{N_x}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\lambda_n^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\lambda_n'^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\bar{\zeta}^{(0)}=\frac{p}{N_x}\sum_m\sum_n R_{mn}\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y$$
$$-\frac{pb^4L^4}{N_x}\bar{\zeta}^{(0)}$$

$$\therefore \quad \frac{pb^4}{N_x}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\lambda_n^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\lambda_n'^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\bar{\zeta}^{(0)}+\frac{pb^4L^4}{N_x}\bar{\zeta}^{(0)}=\frac{pf(x,y)}{N_x}=\frac{p_{xy}}{N_x}$$

及び

$$\frac{pb^4}{N_x}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\lambda_n^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\lambda_n'^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\bar{\zeta}^{(1)}=0$$

なることを證明することを得べし。故に $\frac{pb^4}{N_x}\bar{\zeta}^{(0)}$ は廣き意味に於ける基本公式 (4) の particular integral, $\frac{pb^4}{N_x}\bar{\zeta}^{(1)}$ は其の complementary function と考ふることを得。

第六章　特殊の場合に對する公式

第一節　四邊に於て單純に支承せらるゝ場合

此の場合は，公式 (7) に依り各 C 及び D は凡て零なるが故に，$\bar{\zeta}$ は單に $\bar{\zeta}^{(0)}$ のみを以て表はさる。即ち

$$\bar{\zeta}=\bar{\zeta}^{(0)}=\frac{a^4}{b^4}\sum_m\sum_n\frac{R_{mn}}{\pi^4\left(\rho_{mn}+\frac{a^4L^4}{\pi^4}\right)}\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y \quad \text{.......................(25)}$$

平版の全面に等布荷重を受け，且つ

$$L=0, \quad K=K'=1 \quad 從つて \quad \lambda_n=\lambda_n'=1$$

なる場合に對しては

$$R_{mn}=\frac{16}{mn\pi^2}, \qquad \rho_{mn}+\frac{b^4L^4}{\pi^4}=\left(m^2+\frac{a^2}{b^2}n^2\right)^2$$

$$\left.\begin{aligned}&\therefore \quad \zeta=\frac{pa^4}{N_x}\sum_m\sum_n\frac{16}{mn\pi^6\left(m^2+\frac{a^2}{b^2}n^2\right)^2}\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y\\&但し\\&m,\ n=1,3,5,7,\ldots\ldots\infty\end{aligned}\right\}\quad \text{........(26a)}$$

此の式に於て，m に關する無限級數の總和を求むれば，

$$\zeta=\frac{4pb^4}{N_x}\sum_n\frac{\sin\frac{n\pi}{b}y}{n^5\pi^5}\Big[1-\frac{1}{1+\cosh\alpha_n}\Big\{2\cosh\frac{\alpha_n}{2}\cosh\alpha_n\left(\frac{1}{2}-\xi\right)$$

$$+\frac{\alpha_n}{2}\left(\xi\sinh\alpha_n(1-\xi)+(1-\xi)\sinh\alpha_n\xi\right)\Big\}\Big]\quad\ldots\ldots(26b)$$

次に $L=0$ なる場合に於て，任意の位置に部分的等布荷重を受る平版に對しては

$$\zeta=\frac{16pa^4}{N_x}\sum_m\sum_n\frac{\sin\frac{m\pi}{a}x_0\sin\frac{m\pi}{a}u\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y_0\sin\frac{n\pi}{b}v\sin\frac{n\pi}{b}y}{mn\pi^6\rho_{mn}}\quad\ldots(27a)$$

isotropic rectangular plate 卽ち上式中

$$\rho_{mn}=\left(m^2+\frac{a^2}{b^2}n^2\right)^2$$

と置きたる式は，初めて Navier 氏の誘導せるものにして※，二軸の方向に於ける彎曲剛率不等なる矩形平版の各種の周邊條件並に荷重に對して適用し得る著者の解法並に其の一般公式 (21) 乃至 (24) 式は，Navier 氏解法並に公式の擴張と見做すことを得べし。

公式 (27a) に於て m に關する無限級數の總和を求むれば，x の値の三つの限界に對して次の如き公式を得べし。

$0\leqq x\leqq x_0-u$ のとき，

$$\zeta=\frac{pb^4}{N_x}\sum_n\frac{H_n(\theta_1)-H_n(\theta_2)-H_n(\theta_3)+H_n(\theta_4)}{n^5\pi^5}\sin\frac{n\pi}{b}y_0\sin\frac{n\pi}{b}v\sin\frac{n\pi}{b}y$$

$x_0-u\leqq x\leqq x_0+u$ のとき，

$$\zeta=\frac{pb^4}{N_x}\sum_n\frac{H_n(\theta_1)+H_n(-\theta_2)-H_n(\theta_3)+H_n(\theta_4)+4}{n^5\pi^5}\sin\frac{n\pi}{b}y_0\sin\frac{n\pi}{b}v\sin\frac{n\pi}{b}y$$

$x_0+u\leqq x\leqq a$ のとき，

$$\zeta=\frac{pb^4}{N_x}\sum_n\frac{H_n(\theta_1)+H_n(-\theta_2)-H_n(\theta_3)-H_n(-\theta_4)}{n^5\pi^5}\sin\frac{n\pi}{b}y_0\sin\frac{n\pi}{b}v\sin\frac{n\pi}{b}y\quad\ldots(27b)$$

但し

$$n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ldots\ldots\ldots\infty$$

$$\theta_1=\frac{x_0}{a}-\frac{u}{a}+\frac{x}{a},\qquad\theta_2=\frac{x_0}{a}-\frac{u}{a}-\frac{x}{a}$$

$$\theta_3=\frac{x_0}{a}+\frac{u}{a}+\frac{x}{a},\qquad\theta_4=\frac{x_0}{a}+\frac{u}{a}-\frac{x}{a}$$

$$H_n(\theta)=-\frac{2}{\lambda_n'^2-\lambda_n^2}\left\{\frac{\sinh\lambda_n\alpha_n(1-\theta)}{\lambda_n^2\sinh\lambda_n\alpha_n}-\frac{\sinh\lambda_n'\alpha_n(1-\theta)}{\lambda_n'^2\sinh\lambda_n'\alpha_n}\right\}$$

$$\lambda_n^2=\lambda^2=K'^2+\sqrt{K'^4-K^2},\qquad\lambda_n'^2=\lambda'^2=K'^2-\sqrt{K'^4-K^2}$$

彈性基礎に接する isotropic plate が，部分的等布荷重を受くる場合に於ては，

※ A. Nádai: Elastische Platten, S. 114—119.

$x_0-u\leqq x\leqq x_0+u$ のとき,

$$\left.\begin{aligned}&\zeta=\frac{p}{N_xL^4}\sum_n\frac{\sin\frac{n\pi}{b}y_0\sin\frac{n\pi}{b}v\sin\frac{n\pi}{b}y}{n\pi\left(1+\frac{n^4\pi^4}{b^4L^4}\right)}\Bigg[4+\\&\frac{\frac{1}{K_nK_n'}\{P_n(\theta_1)+P_n(-\theta_2)-P_n(\theta_3)+P_n(\theta_4)\}+2\{Q_n(\theta_1)+Q_n(-\theta_2)-Q_n(\theta_3)+Q_n(\theta_4)\}}{\cosh 2K_n\alpha_n-\cos 2K_n'\alpha_n}\\&\text{但し}\\&P_n(\theta)=\sinh K_n\alpha_n\theta\sin K_n'\alpha_n(2-\theta)-\sinh K_n\alpha_n(2-\theta)\sin K_n'\alpha_n\theta\\&Q_n(\theta)=\cosh K_n\alpha_n\theta\cos K_n'\alpha_n(2-\theta)-\cosh K_n\alpha_n(2-\theta)\cos K_n'\alpha_n\theta\\&K_n=\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{b^4L^4}{n^4\pi^4}}+1\right)},\quad K_n'=\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{b^4L^4}{n^4\pi^4}}-1\right)}\end{aligned}\right\}\cdots(28)$$

特に平版の全面に等布荷重を受くる場合は

$$\frac{x_0}{a}=\frac{u}{a}=\frac{1}{2},\qquad \frac{y_0}{b}=\frac{v}{b}=\frac{1}{2}$$

なるが故に，公式 (28) は次の如くなるべし。

$$\left.\begin{aligned}&\zeta=\frac{4p}{N_xL^4}\sum_n\frac{\sin\frac{n\pi}{b}y}{n\pi\left(1+\frac{n^4\pi^4}{b^4L^4}\right)}\left(1-\frac{\frac{1}{2K_nK_n'}\varDelta_{n\xi}+\varDelta_{n\xi}'}{\cosh K_n\alpha_n+\cos K_n'\alpha_n}\right)\\&\text{但し}\\&\varDelta_{n\xi}=\sinh K_n\alpha_n(1-\xi)\sin K_n'\alpha_n\xi+\sinh K_n\alpha_n\xi\sin K_n'\alpha_n(1-\xi)\\&\varDelta_{n\xi}'=\cosh K_n\alpha_n(1-\xi)\cos K_n'\alpha_n\xi+\cosh K_n\alpha_n\xi\cos K_n'\alpha_n(1-\xi)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(29)$$

滿載等布荷重を受くる單桁が，其の一側に於て彈性基礎に接する場合の公式は，(29) 式を適當に變形して次の如くなるべし。

$$\zeta=\frac{p}{NL^4}\left\{1-\frac{\cosh\frac{aL}{\sqrt{2}}(1-\xi)\cos\frac{aL}{\sqrt{2}}\xi+\cosh\frac{aL}{\sqrt{2}}\xi\cos\frac{aL}{\sqrt{2}}(1-\xi)}{\cosh\frac{aL}{\sqrt{2}}+\cos\frac{aL}{\sqrt{2}}}\right\}\cdots\cdots\cdots(30)$$

但し N は桁に對する彎曲剛率を EJ 示すものとす。

第二節　四邊に於て固定せらるゝ矩形平版が其の全面に等布荷重を受くる場合

此の場合に於ては，m, n の偶數値に對する R_{mn} は凡て零となるが故に，各式の m, n は奇數 1, 3, 5……のみを採らざるべからず。從つて公式 (12) より

$$C_m=C_m'=1,\qquad \overline{C}_m=C_m'''=0$$
$$D_n=D_n'=1$$
$$\therefore\quad A_n=A_n',\quad B_m=B_m',\quad \varDelta_{mn}=4\sum_r\sum_s A_{rs}$$

故に $L=0$ なる場合に對しては，$\varDelta_{mn}$ の方程式は次の如くなる。

$$A_{mn}-\frac{8}{m^2\pi^2}\sum_r A_{rn}-\frac{8}{n^2\pi^2}\sum_s A_{ms}+\frac{64}{m^2n^2\pi^4}\sum_r\sum_s A_{rs}$$
$$+\frac{8m^2\pi^2}{\pi^4\rho_{mn}}A_n+\frac{8n^2\pi^2}{\pi^4\rho_{mn}}B_m=\frac{a^4}{b^4}\cdot\frac{16}{\pi^4\rho_{mn}}\quad\cdots\cdots(31)$$

上式中，m, n, r, s 等は凡て奇數 $1, 3, 5\cdots\cdots\infty$ を表はすものにして，兩邊の m, n を夫々 r, s と見做し，各別に $\sum_{r=1}^{\infty}$ 及び $\sum_{s=1}^{\infty}$ を求むれば，運算の結果次の方程式を得べし。

$$\left.\begin{aligned}
&A_n\left(\lambda\tanh\frac{\lambda\alpha_n}{2}-\lambda'\tanh\frac{\lambda'\alpha_n}{2}\right)+\frac{4K^2a^2}{b^2}\alpha_n^3(\lambda^2-\lambda'^2)\sum_r\frac{B_r}{\pi^4\rho_{rn}}\\
&=-\frac{2a^2}{b^2n^2\pi^2}\left(\frac{1}{\lambda}\tanh\frac{\lambda\alpha_n}{2}-\frac{1}{\lambda'}\tanh\frac{\lambda'\alpha_n}{2}\right)\\
&B_m\left(\frac{1}{\lambda}\tanh\frac{\beta_m}{2\lambda}-\frac{1}{\lambda'}\tanh\frac{\beta_m}{2\lambda'}\right)\\
&\quad+\frac{4a^2}{b^2}\beta_m^3\left(\frac{1}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda'^2}\right)\sum_s\frac{A_s}{\pi^4\rho_{ms}}\\
&=-\frac{2a^2}{K^2b^2m^2\pi^2}\left(\lambda\tanh\frac{\beta_m}{2\lambda}-\lambda'\tanh\frac{\beta_m}{2\lambda'}\right)\\
&\text{但し}\\
&\lambda^2=K'^2+\sqrt{K'^4-K^2},\qquad \lambda'^2=K'^2-\sqrt{K'^4-K^2}
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(32)$$

上記第一式の B_r の代りに第二式の B_m の m を r と見做したるものを代入して，$\sum_r\frac{B_r}{\pi^4\rho_{rn}}$ の項を消去すれば，運算の結果次の關係を得べし。

$$\left.\begin{aligned}
&A_n=L_n+\sum_s K_{ns}A_s\\
&L_n=-\frac{2a^2}{b^2}\cdot\frac{\lambda^2-\lambda'^2}{\lambda\tanh\frac{\lambda\alpha_n}{b^2}-\lambda'\tanh\frac{\lambda'\alpha_n}{2}}\\
&\qquad\times\left\{\frac{\lambda^2-\lambda'^2}{n^3\pi^3\left(\frac{1}{\lambda}\tanh\frac{\lambda\alpha_n}{2}-\frac{1}{\lambda'}\tanh\frac{\lambda'\alpha_n}{2}\right)}\right.\\
&\qquad\left.-\frac{4a^5}{b^5}n^3\pi^3\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\lambda\tanh\frac{\beta_r}{2\pi}-\lambda'\tanh\frac{\beta_r}{2\lambda'}}{r^2\pi^6\rho_{rn}\left(\frac{1}{\lambda}\tanh\frac{\beta_r}{2\lambda}-\frac{1}{\lambda'}\tanh\frac{\beta_r}{2\lambda'}\right)}\right\}\\
&K_{ns}=-\frac{16K^2a^4}{b^4}\cdot\frac{n^3\pi^3(\lambda^2-\lambda'^2)^2}{\lambda\tanh\frac{\lambda\alpha_n}{2}-\lambda'\tanh\frac{\lambda'\alpha_n}{2}}\\
&\qquad\times\sum_{r=1}^{\infty}\frac{r^3\pi^3}{\pi^8\rho_{rs}\rho_{rn}\left(\frac{1}{\lambda}\tanh\frac{\beta_r}{2\lambda}-\frac{1}{\lambda'}\tanh\frac{\beta_r}{2\lambda'}\right)}
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(33)$$

上記第一式中の s は $\sum$ に附隨せる一記號に過ぎざるを以て，之れを s_1, s_2, $s_3\cdots\cdots$（但し孰れも $1, 3, 5\cdots\cdots$ を表はすものとす）とするも支障なし。故に同式の A_s の代りに n を s_1, s を s_2 と見做したるものを代入すれば，

$$
\begin{aligned}
A_n &= L_n+\sum_{s} K_{ns} A_s \\
&= L_n+\sum_{s_1} K_{ns_1}\Big(L_{s_1}+\sum_{s_2} K_{s_1s_2} A_{s_2}\Big) \\
&= L_n+\sum_{s_1} K_{ns_1} L_{s_1}+\sum_{s_1} K_{ns_1}\sum_{s_2} K_{s_1s_2} A_{s_2}
\end{aligned}
$$

但し上式右邊の第三項は $\sum\limits_{s_1} K_{ns_1}$ と $\sum\limits_{s_2} K_{s_1s_2} A_{s_2}$ との積の謂に非ずして，s_1 に關する二つの函數 K_{ns_1} と $\sum\limits_{s_2} K_{s_1s_2} A_{s_2}$（$K_{s_1s_2} A_{s_2}$ を s_2 に付て總和を求めたる $\sum\limits_{s_2} K_{s_1s_2} A_{s_2}$ は單に s_1 の函數と見做すことを得るが故に）との積に對する $\sum\limits_{s_1}$ を意味するものとす。

更に上式右邊第三項の A_{s_2} の代りに，最初の式の n を s_2 と見做したるものを代入し逐次同様の演算を續行すれば，A_n は次の如き無限級數を以て表はさるべし。

$$
\left.
\begin{aligned}
A_n = L_n &+ \sum_{s_1} K_{ns_1} L_{s_1} + \sum_{s_1} K_{ns_1} \sum_{s_2} K_{s_1s_2} L_{s_2} \\
&+ \sum_{s_1} K_{ns_1} \sum_{s_2} K_{s_1s_2} \sum_{s_3} K_{s_2s_3} L_{s_3} \\
&+ \sum_{s_1} K_{ns_1} \sum_{s_2} K_{s_1s_2} \sum_{s_3} K_{s_2s_3} \sum_{s_4} K_{s_3s_4} L_{s_4} + \cdots\cdots\cdots \\
&+ \sum_{s_1} K_{ns_1} \sum_{s_2} K_{s_1s_2} \sum_{s_3} K_{s_2s_3} \sum_{s_4} K_{s_3s_4} \sum_{s_5} \cdots \sum_{s_6} \cdots \sum_{s_t} K_{s_{t-1}s_t} L_{s_t} \\
&+ \sum_{s_1} K_{ns_1} \sum_{s_2} K_{s_1s_2} \sum_{s_3} K_{s_2s_3} \sum_{s_4} K_{s_3s_4} \cdots\cdots \sum_{s_{t+1}} K_{s_t s_{t+1}} A_{s_{t+1}} \\
&+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
\right\} \quad \cdots\cdots(34)
$$

此の式は A_n を既知函數を以て展開せるものにして，任意の n に關して一つの收斂級數なり。

少くとも相對する二邊が單純に支承せらるゝ場合の各係數は，凡て既知函數の有限項の式として表はすことを得るも（此の場合に於ては Levy's method に依るも容易に解くことを得べし），少くとも相隣る二邊が固定せらるゝ平版に對する各係數は荷重の如何に關せず必ず (32) 式の如き方程式を以て表はされ（$A_n \neq A_n'$，$B_m \neq B_m'$ のときは四つの方程式となること明かなり），其の一は適當なる消去法に依り常に (33) 式の第一式と同形のものとなるが故に，(34) 式は斯くの如き係數の數字的計算に適用せらるゝ一般式と考ふることを得べし。

公式 (34) に依りて任意の n に對する A_n の値を算出すれば，A_n の n を s と見做したるものを (32) 式の A_s の代りに代入して B_m の値を計算することを得べし。

斯くして A_n 及び B_m の値を求むれば，任意の點に於ける撓度は次式に依りて計算せらる。

$$
\left.
\begin{aligned}
\zeta &= \frac{pb^4}{N_x}\bar{\zeta} = \frac{pb^4}{N_x}\left(\bar{\zeta}^{(0)}+\bar{\zeta}^{(1)}\right) \\
\bar{\zeta}^{(0)} &= \frac{16pa^4}{N_x}\sum_m\sum_n \frac{1}{mn\pi^6\rho_{mn}} \sin\frac{m\pi}{a}x \sin\frac{n\pi}{b}y, \\
\rho_{mn} &= \left(m^2+\frac{\lambda^2\alpha n^2}{\pi^2}\right)\left(m^2+\frac{\lambda'^2\alpha n^2}{\pi^2}\right)
\end{aligned}
\right|
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&= \frac{2}{\sqrt{K'^4-K^2}}\sum_n \frac{\sin\frac{n\pi}{b}y}{n^5\pi^5}\left\{\frac{\sinh\lambda\alpha_n\xi+\sinh\lambda\alpha_n(1-\xi)}{\lambda^2\sinh\lambda\alpha_n}\right.\\
&\quad\left.-\frac{\sinh\lambda'\alpha_n\xi+\sinh\lambda'\alpha_n(1-\xi)}{\lambda'^2\sinh\lambda'\alpha_n}\right\}+\frac{1}{24K^2}\left(\frac{y^4}{b^4}-\frac{2y^3}{b^3}+\frac{y}{b}\right)\\
\zeta^{(1)} &= \frac{b^2}{a^2\sqrt{K'^4-K^2}}\sum_n \frac{A_n\sin\frac{n\pi}{b}y}{n^3\pi^3}\left\{\frac{\sinh\lambda\alpha_n\xi+\sinh\lambda\alpha_n(1-\xi)}{\sinh\lambda\alpha_n}\right.\\
&\quad\left.-\frac{\sinh\lambda'\alpha_n\xi+\sinh\lambda'\alpha_n(1-\xi)}{\sinh\lambda'\alpha_n}\right\}\\
&\quad-\frac{a^2K^2}{b^2\sqrt{K'^4-K^2}}\sum_m \frac{B_m\sin\frac{m\pi}{a}x}{m^3\pi^3}\left\{\frac{\sinh\frac{\beta_m}{\lambda}\eta+\sinh\frac{\beta_m}{\lambda}(1-\eta)}{\sinh\frac{\beta_m}{\lambda}}\right.\\
&\quad\left.-\frac{\sinh\frac{\beta_m}{\lambda'}\eta+\sinh\frac{\beta_m}{\lambda'}(1-\eta)}{\sinh\frac{\beta_m}{\lambda'}}\right\}
\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots(35)
$$

之れ二軸の方向に於ける彎曲剛率が不等なる矩形平版が，四邊に於て固定せられ，其の全面に等布荷重を受くる場合の撓度の式なり。

前述の如く，各場合に對する撓度 ζ の式を誘導することを得たりとせば，任意の點に於ける彎曲力率，剪裁力等は

$$
M_x=-N_x\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x_2}+\frac{1}{\mu_2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right),\qquad M_y=-N_y\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}+\frac{1}{\mu_1}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right)
$$

$$
V_x=-N_x\left\{\frac{\partial^3\zeta}{\partial x^3}+\left(\frac{1}{\mu_2}+\frac{2c}{M_x}\right)\frac{\partial^3\zeta}{\partial x\partial y^2}\right\},\qquad V_y=-N_y\left\{\frac{\partial^3\zeta}{\partial y^3}+\left(\frac{1}{\mu_1}+\frac{2c}{N_y}\right)\frac{\partial^3\zeta}{\partial x^2\partial y}\right\}
$$

に依りて計算することを得べし。

第七章　扭剛率の影響

$\mu_1=\mu_2=\mu$ なる場合は，扭剛率は一般に

$$
2c=2GJ'=\frac{E\mu}{\mu+1}J'
$$

を以て表はさるべし。J' は J_x と J_y との或る中間の値にして，H. Marcus 氏は鐵筋コンクリート床版に對しては

$$
J'=\frac{1}{2}(J_x+J_y)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(a)
$$

從つて

$$
2c=\frac{E\mu}{2(\mu+1)}(J_x+J_y),\qquad K'^2=\frac{1}{2}(1+K^2)
$$

とし，※又は

※ H. Marcus: Die Theorie der elastische Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung biegsamer Platten, S. 105.

$$J'=\frac{J_xJ_y}{J_x+J_y} \qquad \cdots\cdots (a)'$$

として，$\mu=\infty$ なる場合は practically には

$$2c=EJ'=E\frac{J_xJ_y}{J_x+J_y}$$

$$J_x\frac{\partial^4\zeta}{\partial x^4}+\frac{2J_xJ_y}{J_x+J_y}\frac{\partial^4\zeta}{\partial x^2\partial y^2}+J_y\frac{\partial^4\zeta}{\partial y^4}=\frac{p}{E}$$

或は

$$\frac{\partial^4\zeta}{\partial x^4}+\frac{2K^2}{1+K^2}\frac{\partial^4\zeta}{\partial x^2\partial y^2}+K^2\frac{\partial^4\zeta}{\partial y^4}=\frac{p}{EJ_x}$$

となすことを得とせり(※1)。

又 M. T. Huber 氏は，Marcus 氏の (a) の假定を過大となし，

$$J'=\sqrt{J_xJ_y} \qquad \cdots\cdots (b)$$

を推奬し，且つ應力大ならざる間は practically には

$$J'=\frac{h^3}{12}$$

即ちコンクリートの應張力を認むるも鐵筋の效力を無視し，コンクリートの first crack 後は

$$J'=0, \qquad K'^2=\frac{1}{2\mu}(1+K^2)$$

即ち扭剛率は全然無視すべきものとせり。(※2)

著者は Marcus 氏の假定 (a) 式に 1 より大ならざる係數 j を乘じ

$$J'=\frac{j}{2}(J_x+J_y) \qquad \cdots\cdots (c)$$

從つて

$$2c=\frac{j}{2}(1+K^2)\left(1-\frac{1}{\mu}\right)N_x$$

$$K'^2=\frac{1+K^2}{2}\left\{\frac{1}{\mu}+j\left(1-\frac{1}{\mu}\right)\right\}$$

とし，四邊に於て支承せらるゝ矩形平版が，其の全面に等布荷重を受くる場合の撓度及び力率の係數 $\bar{\zeta}$, $\overline{M}$ 等が，j の種々の値に對して如何に增減するかを知らむがため，著者の公式を用ひて計算したるに次の如き結果を得たり。

但し表中，$\bar{\zeta}$, $\overline{M}_x$ 及び $\overline{M}_y$ は矩形の中心點に於ける

撓度 $\quad \zeta=\frac{pb^4}{N_x}\bar{\zeta}$

x 軸に直角なる斷面に生ずる彎曲力率 $\quad M_x=pb^2\overline{M}_x$

(※1) Die Grundlagen der Querschnittsbemessung kreuzweise bewehrter Platten, Der Bauing 1926, Heft 30 u. 31.

(※2) Der Bauing, 1923, H. 12 u. 13. 及び同誌 1925, H. 30 等參照

y 軸に直角なる斷面に生ずる彎曲力率 $M_y=pb^2\overline{M}_y$

に對するものにして，$\overline{M}_{xy}$ は一偶 ($x=0$, $y=0$) に生ずる

扭力率　$M_{xy}=pb^2\overline{M}_{xy}$

に對するものとす。

第一の場合： 矩形の兩邊の比$=\dfrac{a}{b}=1$ にして，$\sqrt{\dfrac{J_y}{J_x}}=K=1$ なるとき ($\mu=6$ とす)。

j	K'^2	$\overline{\zeta}$	$\overline{M}_x=\overline{M}_y$	$-\overline{M}_{xy}$
0.00	0.16667	0.00699	0.0767	0.0687
0.25	0.37500	0.00594	0.0642	0.0546
0.50	0.58333	0.00514	0.0552	0.0477
0.75	0.79166	0.00453	0.0484	0.0425
1.00	1.00000	0.00406	0.0430	0.0388

之れに依りて見るに，$\overline{\zeta}$，$\overline{M}_x$ 及び $-\overline{M}_{xy}$ の値は j の增加と共に減少し，$j=0$ と $j=1$ との間の減少率は，$\overline{\zeta}$ に在りては 42%，$\overline{M}_x$ に在りては 44%，$-\overline{M}_{xy}$ に在りては 43% なり。

第二の場合： 矩形の兩邊の比$=\dfrac{a}{b}=\dfrac{2}{3}$，$\sqrt{\dfrac{J_y}{J_x}}=K=\dfrac{2}{3}$ なるとき ($\mu=6$ とす)。

j	K'^2	$\overline{\zeta}$	$\overline{M}_x$	$\overline{M}_y$	$-\overline{M}_{xy}$
0.00	0.12037	0.00263	0.0599	0.0124	0.0293
0.25	0.27083	0.00237	0.0538	0.0113	0.0263
0.50	0.42130	0.00215	0.0488	0.0103	0.0239
0.75	0.57176	0.00197	0.0446	0.0095	0.0220
1.00	0.72222	0.00182	0.0411	0.0088	0.0203

此の場合に於ては，$j=0$ と $j=1$ との間に於ける各係數の減少率は，$\overline{\zeta}$ に在りては約 30%．$\overline{M}_x$，$\overline{M}_y$，$-\overline{M}_{xy}$ に在りては夫々 32, 30 及び 31% なるを見るべし。

K^2 の値はコンクリートの應張力を無視せる場合と，之れを認むる場合とは可なりの差異を生ずるものにして，實地の計算に際しての J_x，J_y，從つて K^2 の採り方及び J'，從つて扭剛率を幾何の程度まで認むるが妥當なるかは，主として實驗的研究に俟つべき興味ある問題とす。

本講演後次の質疑應答ありたり。

○土木學會々員　山口君　(問) フーリエ級數を用ひると convergency が何時でも問題になる。double series になると實際には何の位までの項數を取つたらよろしいか。

○井口君　(答) 項數は infinite に取つてやつて居るが，計算の時には初めの 3 項とか 5 項とかを取つて居る。

double series では deflection に於ては 3 項で澤山であるし，moment, shear, reaction は澤山の differentiation を行ふ故に convergency が悪くなる，double series では 5 項位と

つてゐる。single series に直すと convergency が早くなる共の時には term 數は更に少くてよい。實際の數學上の理論は別として，實際の計算ではさうやつて居る。

○山口君 （問）reaction の計算の時に harmonic series になることがあるが，term を何れまで取つてよいか實際の場合如何。

○井口君 （答）私の方法では 4 回 differentiate したものを之れに入れてゐる。

reaction は 3 回の differentiate ですむ。數學的 convergency も證明出來るのではないかと思はれるが，其處までは研究してゐない。

○土木學會々員 鶴岡君 （問）Ritz の式は用ひなかつたか。

○井口君 （答）夫れは全く用ひない，Ritz の方法でやつたのと，私の方法と結果は同じ事で實際あてはめた式が全く同じものになつて來る。私の方法に於ては異つても結果に於ては少しも變りはない。

（以 上）