討　　議

第十八卷第九號　昭和七年九月

軌道下埋設管路縱彎曲に關する近似解法

（第十八卷第三號所載）

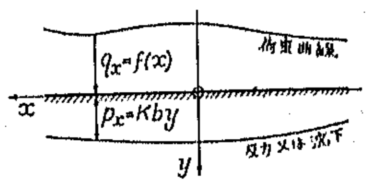
會員　工學士　福　田　武　雄

准員石川時信氏が上記標題のもとに彈性床上の桁の理論を利用して，地下埋設管の長さの方向の彎曲に關する近似的解法を試みられたものを通讀して，筆者は石川氏の考へられた假定及び結論等に二三の疑問を抱かずには居られなかつた。勿論近似解と呼ぶ以上は多少解の嚴密性が失はれてもいゝ筈である。例へば嚴密解を得るに困難な場合に解を收斂無限級數で求め其の最初の數項を採用する場合とか，或は長さの可成り長いものを無限長として取扱ふとかの場合等には近似解の存在の理由が充分にある。また假令嚴密解が求められて居ても夫が實際上計算に不便なる場合には略解として近似解の存在理由がある。然し解法の根柢をなす假定が實際のものと著しい差異があるとか或はまた假定が論理上成立し得ない場合，或は求められた近似解が計算の手數上嚴密解と殆んど大差がない樣な場合には近似解の意義は甚だ稀薄になる。之等のことを考慮に置いて以下失禮を顧みず聊か愚見を述べる次第である。

先づ著者石川氏が地下埋設管に對して彈性床上の桁の理論を適用せんと試みられたことは甚だ面白いことであり且つ適切なことであり，埋設管を全長に亙つて斷面が一樣であり且つ常數のヤング率 E を有する桁と考へられたことも至當である。又埋設管上の荷重分布を三角形と假定せられ，土の沈下係數 K を全長に亙つて一定と假定せられたことも此の場合適切であらう（但し實際に於て之等の假定が假令完全でなくとも充分と認められる範圍に滿足せられるかどうかは甚だ疑問ではあるが）。

之等の假定のもとに著者は先づ單一集中荷重の場合を考慮し，其の結果を分布荷重に利用せられんとしたのであるが，問題を明にせんが爲に任意の分布荷重 $q_x=f(x)$ に對する彈性床上の桁の撓度に對する微分方程式を示せば著者の符號を使用することに依り

第　一　圖



$$EI\frac{d^4y}{dx^4}+Kby=f(x)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

となる，但し b は桁の幅である。單一荷重の場合には荷重作用點を除けば（1）式は

$$EI\frac{d^4y}{dx^4}+Kby=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

即ち著者の（8）式となり，其の一般解は $\beta^4=\dfrac{Kb}{4EI}$ と置くことに依り

$$y=Ae^{\beta x}\cos\beta x+Be^{\beta x}\sin\beta x+Ce^{-\beta x}\cos\beta x+De^{-\beta x}\sin\beta x\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

となり，A, B, C 及び D は邊緣條件に依り決定せらるべき常數である。尙一般の微分方程式（1）の一般解は（1）式の一つの特解に（3）の解を附け加へることに依つて，或はまた（3）式中の常數 A, B, C 及び D を x の函數と考へ所謂ラグランヂの Variation der Konstanten に依つて求め得ることを附記する。

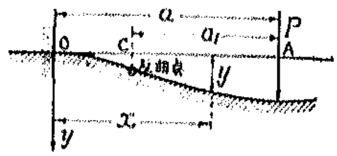
扨て單一荷重の場合に (3) 式中の常數を決定するに際し，著者石川氏は「彈曲線は單一荷重を左方に距ること a なる點に於て遂に水平を爲し，最早沈下せざるものとし，其の點を原點とすれば，次の四つの條件を得」として

$$\left.\begin{array}{llll} \text{i)} & x=0 \text{ なるとき} & & y=0, \\ \text{ii)} & x=0 & 〃 & \dfrac{dy}{dx}=0, \\ \text{iii)} & x=a & 〃 & \dfrac{dy}{dx}=0, \\ \text{iv)} & x=0 & 〃 & \dfrac{d^3y}{dx^3}=0 \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

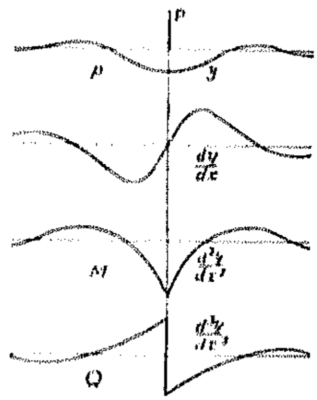
なる四つの條件を揭げられた。今暫く之に就て檢討して見やう。

(1) 括弧中に引用した條件の意義。之は集中荷重 P より左方に a なる距離を原點とし其處に於て同時に $y=0$ 及び $dy/dx=0$ なることを意味し，只第二圖の如く原點 0 に於て桁が完全に固定せられた場合にのみ成立し，其他一般の場合には此の條件は成立不可能である。例へば桁が無限長の場合には 第三圖 に示すが如く原點を荷重作用點にとることにより

第二圖



第三圖



$$\left.\begin{aligned} y&=\frac{P\beta}{2Kb}e^{-\beta x}(\cos\beta x+\sin\beta x), \\ \frac{dy}{dx}&=-\frac{P\beta^2}{Kb}e^{-\beta x}\sin\beta x, \\ \frac{d^2y}{dx^2}&=-\frac{P\beta^3}{Kb}e^{-\beta x}(\cos\beta x-\sin\beta x), \\ \frac{d^3y}{dx^3}&=\frac{2P\beta^4}{Kb}e^{-\beta x}\cos\beta x \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

となつて，x の有限の値では y 及び dy/dx は同時に零となり得ない，ただ $x=\infty$ に於ては上記すべての値が同時に零となる。また桁の長さが $2l$ なる有限長で單位荷重が其の中點に作用する場合には原點を此處にとることに依り

$$y=\frac{P\beta}{2Kb}\left[\frac{\cos 2\beta l-\sin 2\beta l+e^{-\beta l}+2}{\operatorname{Sin} 3\beta l+\sin 2\beta l}\cdot\operatorname{Cos}\beta x\cdot\cos\beta x+e^{-\beta x}(\cos\beta x+\sin\alpha x)\right.$$
$$\left.+\frac{\cos 2\beta l+\sin 2\beta l-e^{-2\beta l}}{\operatorname{Sin} 2\beta l+\sin 2\beta l}\cdot\operatorname{Sin}\beta x\cdot\sin\beta x\right]\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

となる。之等の關係は普通の高等程度の工業教育を受けた人ならば誰でも知つて居る筈であるが念の爲に追記したに過ぎない。要するに括弧中に引用した條件は其の中に矛盾を含まず且つ成立不可能でないとするも，一般的なものでなくまた本問題の樣な場合には可成り實際に遠いものと考へられる。

(2) 括弧中の條件と (4) の條件との關係。著者の言葉に從へば括弧中の條件より直ちに (4) の條件が得られる樣であるが，括弧中の條件は前述の如く單に (4) の中の i) 及び ii) を規定する丈であつて，iii) 及び iv) とは全然無關係である。從つて著者の如く「玆に於て彈曲線は單一荷重を左方に隔ること a なる點に於て遂に水平を

爲し，最早沈下せざるものとし，其點を原點とすれば，次の四つの條件を得」と言ふことは出來ない。然し iii) の條件卽ち $x=a$ に於て $dy/dx=0$ なることは單一荷重の作用點に於て彈曲線が水平を成すことを意味するものであるから，括弧中の條件とは全然無關係に對稱條件より生れるものであつて，夫自身としては穩當な條件である。之に反し iv) の條件卽ち $x=0$ に於て $d^3y/dx^3=0$ なる條件は固定端に於て桁の剪力卽ち固定端に於ける反力が零たるべきことを意味し，括弧中の條件若くは對稱條件の何れよりも出て來ない。之は後述の如く a が或る特定値の場合の外は一般に成立不可能の條件である。

(3) (4) の條件に就て。今括弧中の條件と (4) の條件との不關聯性及び iv) の非現實性を度外視して (4) の條件其のものを考へるに先づ i), ii) 及び iv) の條件より (3) 式中の常數は

$$A=C=0, \qquad D=-B$$

となり，從つて (3) 式より直ちに著者の (14°) 乃至 (17°) 式が生れる。之等の式中には未だ B が殘つて居て，之を殘りの條件卽ち iii) に依つて決定することは出來ない。何となれば (15°) 式に從つて

$$\frac{dy}{dx}=B\beta\left[e^{\beta x}(\cos\beta x+\sin\beta x)-e^{-\beta x}(\cos\beta x-\sin\beta x)\right] \quad \text{.......................(7)}$$

であつて，$x=a$ に於て $dy/dx=0$ とすると

$$e^{\beta a}(\cos\beta a+\sin\beta a)-e^{-\beta a}(\cos\beta a-\sin\beta a)=0 \quad \text{...........................(8)}$$

或は $$e^{2\beta a}(\tan\beta a+1)+\tan\beta a-1=0 \quad \text{..(8a)}$$

となつて，B を決定することは出來ず，たゞ a が任意の値ではいけないことを意味するものである。B の決定は著者の (21) 式の如く單一荷重 P の作用點に於て剪力が $P/2$ に相等しいと言ふ條件に依り決定し得るものであつて，結局 (4) の條件丈では (3) 式中の常數を一意的に決定するに不充分である。

また a の決定方法であるが，著者は (8) 若くは (8a) 式に依らず單に桁の反曲點卽ち $d^2y/dx^2=0$ 或は $M=0$ なる點と荷重 P との距離（第二圖に於て AC 間の距離 a_1）を略 a に等しいと假定し，$(d^2y/dx^2)_{x=a}=0$ なる條件に依り求められ其の結果 $a \fallingdotseq a_1=3\pi/4\beta$
を得られたのであるが，此値は明かに (8) 若くは (8a) 式を滿足しない。たとへ上記の如き a の値を採用しても大した誤差はないにしても，(8) 若くは (8a) 式に依つて a を求めるも著者の如き方法に依つて求めるも其の手數には大した差がないのであるから反曲點卽ち彎曲率の零なる點と固定點とを略々同位置にあると言ふ樣な考へ方は著者の解の嚴密性を徒々薄くするものである。

要するに著者が單一荷重を受ける彈床上の桁の問題に於て (4) の樣な假定を設けられたことは，著者の論文中には全然其の要旨に關する記述がなく甚だ不明瞭であるが筆者の忖度が許されるならば，之は恐らく單一荷重を中點として適當なる長さ $2a$ をとり，問題を此の部分のみに限定せんと試みられたものと推察する。扨て此の假定に依つて今まで解かれなかつた問題を解き得るか，或は嚴密解がある場合でも夫よりも實際上計算に便なる略解を得るのであればよいのであるが此の場合はそうでない。著者の假定に依て得られた (14′) 乃至 (17′) の式と，桁の長さを無限として眞面目に解いて得た前記 (5) の解とを比較すれば却つて後者の方が簡單である。

勿論實際に於て長さが無限なるものは存在しないが，地下埋設管の如き場合には長さを無限とする假定の方が，著者の採用せられた (4) の假定よりずつと實際に近いものと言へやう。

著者は次に單一荷重に對する略解を利用し第二章第三節に於て對稱群集荷重の場合の解を得る方法を示された。卽ち其の方法は對稱群集荷重を單一荷重の集合と考へるのであるが，單一荷重の解が著者の採用せられた假定を

基礎とする限り其解は嚴密性に乏しいものと言へやう。

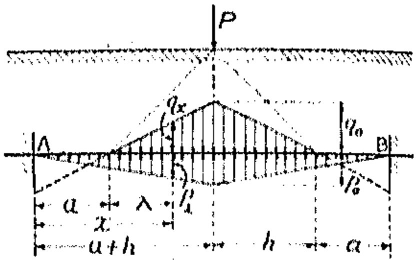
著者は單一荷重より群集荷重に移行する手順を述べられたが，其の記述は甚だ概念的であり且つ著しく複雜である。惟うに簡略な數式を以て示すには余りに其の手順が複雜であつた爲であらう。後に著者が三角形荷重に對する地下埋設管の縱彎曲を取扱はれるに際して著者自身が此の方法に依られなかつたのも宜なる哉である。

扨て著者は地表上にある W なる單一荷重が地下埋設管に

$$q_\lambda = q_0 \frac{\lambda}{h}$$

なる三角形に分布せる對稱群集荷重を作用せしめるものとし（此の假定は此の場合穩當なものである），之に對して地下埋設管の縱彎曲を求むるに第四圖に示すが如く

第四圖



(1) 地下埋設管は A 及 B に於て固定せられる，

(2) 土の反力 p_x は直線的に變化するものと假定し，且つ AB 間の土の反力の總和と上の群集荷重の總和とが相等しいと假定する，即ち

$$p_x = \frac{p_0 x}{a+h}, \quad p_0(a+h) = q_0 h \quad 故に \quad p_x = \frac{q_0 h}{(a+h)^2} x$$

と假定し，

(3) AB 間の距離 $2(a+h)$ を定むるには先づ h は適當に之を假定し，a は (1)，(2) の假定に依り求められた埋設管の沈下量に沈下係數 K と幅 b とを乘じたものの AB 間の總和と埋設管上の荷重の總和と相等しいとすることに依つて求めるものと假定せられた。上記 (1)，(2) の假定に依つて埋設管の撓度に對する微分方程式は

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = q_\lambda - p_x = \frac{q_0}{h}\lambda - \frac{p_0}{a+h}x = q_0\left[\left\{\frac{1}{h} - \frac{h}{(a+h)^2}\right\}x - \frac{a}{h}\right] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

となり，a を決定すべき式は假定 (3) に依れば

$$4a^4 + 10a^3h + 19a^2h^2 + 6ah^3 - 360\frac{EI}{Kb} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

なる四次方程式となる。(9) の式の中には三角函數，双曲線函數若くは指數函數とを含まないから取扱が便利であり，且つ其の解の中にも之等の超越函數を含まないから計算には便利であると言ふものの，a の決定に際しては解析的に解くに困難なる四次方程式の根を求めると言ふ著しい不便がある。之に加ふるに著者の假定の中には無理と矛盾がある。

第一に (1) の假定即ち A 及び B で埋設管が固定されると言ふ假定は此の假定を滿足する樣に特別なる構造が施されない限り一般に實際に遠い假定であつて，寧ろ後述の如く長さを無限長とする方が實際に近いものであらう。若し一歩を讓つて A，B 點に於て固定條件を滿足する樣に特別なる構造が施された場合には固定點に於ては一般に剪力が零とならず從つて反力も零でなくなり，(2) の假定若くは (3) の假定が成立しないことになる。

(2) の假定は首肯出來ない。土の反力は彈性床上の桁にあつては桁の沈下量 y に正比例するものであつて，沈下量 y が定まらなければ p_x は定まらない。然るに著者は之を直線的變化をなすものと假定せられた。即ち p_x は y に正比例すべきものに拘はらず著者は x に正比例するものと考へられた。若し (9) 式より求められた y が x に正比例するならば之でもよいが (9) 式の解の y は x^5 を含む函數であつて從つて (2) の假定と結果とが矛盾するものである。

また此の矛盾を避ける爲に土の反力は必しも y に正比例しないと辯明されるならば，(3) の如く或は著者の (54) 式の如く沈下量に Kb を乘じたものを土の反壓とすることは出來ない。從つて (2) と (3) との間に矛盾があることになる。

以上の假定の矛盾は論外としても玆に一つの重大なる根本的の誤謬がある。それは (9) の微分方程式は

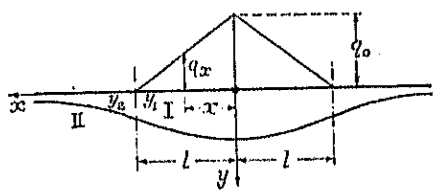
$$EI\frac{d^4y}{dx^4}=q_\lambda-p_x \qquad \text{(9a)}$$

であつて，此式は $a+2h \geqq x \geqq a$ の範圍卽ち三角形荷重の作用して居る部分にのみ成立する式であつて，$a \geqq x \geqq 0$ 若くは $2(a+h) \geqq x \geqq a+2h$ に於ては $q_\lambda=0$ であるから

$$EI\frac{d^4y}{dx^4}=-p_x$$

でなければならない。然るに著者は (9) 卽ち (9a) 式が AB 間全長に亙つて成立するものと假定せられた。言ひ換えれば**第四圖**に於て三角形荷重の兩側に點線で示す樣な上向の荷重があるものとなる。從つて三角形荷重の下に於てのみ成立する (9) 式を AB 全長に亙つて使用せられ，之に依つて更に A, B 點に於ての邊緣條件を考慮したり，また (9) 式を全長に亙つて積分せられた樣な誤謬は，著者の掲げられたる以下すべての結果を誤なるものとするのみならず，理論上看過し得ざる誤謬であり且つ應用力學に對する冒瀆である。著者の取扱はれた此の問題は上記の如き假定及び誤謬に基いて出發するよりも，寧ろ**第五圖**の如く三角形荷重に對する無限長の彈性床上の桁として簡單化しなく解く方がよくはないであらうか。筆者は次に試みて見る。

第 五 圖



今**第5圖**に於て沈下係數 K なる彈性床の上に無限長の幅 b，二次率 I，彈性率 E なる桁があり，之に圖の如く長さ $2l$ の間に對稱三角形荷重が作用するものとする。問題は對稱であるから原點を荷重中央にとり之より左方の部分のみを考へれば充分である。原點より x なる距離に於ける沈下を y，荷重を q_x，土の反力を p_x，但し

$$q_x=\frac{q_0}{l}(l-x), \qquad p_x=Kby$$

である。次に原點より左方を二つの領域に分け $l \geqq x \geqq 0$を I の領域とし此間の y を y_1，$x \geqq l$ の部分を II の領域としその y を y_2 とすれば，直ちに

$$\text{I}: \quad EI\frac{d^4y_1}{dx^4}+p_x=q_x, \qquad \text{II}: \quad EI\frac{d^4y_2}{dx^4}+p_x=0$$

を得，之に上記の q_x 及び p_x の値を代入すると

$$\text{I}: \quad EI\frac{d^4y_1}{dx^4}+Kby_1=\frac{q_0}{l}(l-x) \qquad \text{(11)}$$

$$\text{II}: \quad EI\frac{d^4y_2}{dx^4}+Kby=0 \qquad \text{(12)}$$

となる。(11) 式の特解の一つは

$$y_1=\frac{q_0}{Kbl}(l-x)$$

であるから，(1) 式の場合に述べた樣に (11) 式の一般解は (12) 式の一般解卽ち (3) 式に上記特解を加へたもの

になる。故に (11) 式及び (12) 式の一般解は夫々

$$y_1 = Ae^{\beta x}\cos\beta x + Be^{\beta x}\sin\beta x + Ce^{-\beta x}\cos\beta x + De^{-\beta x}\sin\beta x + \frac{q_0}{Kbl}(l-x) \qquad \text{.............(13)}$$

$$y_2 = A'e^{\beta x}\cos\beta x + B'e^{\beta x}\sin\beta x + C'e^{-\beta x}\cos\beta x + D'e^{-\beta x}\sin\beta x \qquad \text{.............(14)}$$

となる。但し A, A'.... 等は邊緣條件に依り決定さるべき常數であつて β は $\beta^4 = \frac{Kb}{4EI}$ である。

先づ I の領域に就て考へるに原點に於ては彈曲線は水平をなし且つ對稱の關係により剪力は零であるから

$$x=0 \text{ に於て} \qquad \frac{dy_1}{dx}=0, \quad \frac{d^3y_1}{dx^3}=0$$

となるべきに依り

$$A+B-C+D=\frac{q_0}{\beta Kbl}, \quad -A+B+C+D=0$$

となり，之より

$$C=+A-\frac{q_0}{2\beta Kbl}, \quad D=-B+\frac{q_0}{2\beta Kbl}$$

を得，從つて (13) 式は多少の變化の後に

$$y_1 = 2A\,\mathfrak{Cos}\,\beta x\cos\beta x + 2B\,\mathfrak{Sin}\,\beta x\sin\beta x - \frac{q_0e^{-\beta x}}{2\beta Kbl}(\cos\beta x - \sin\beta x) + \frac{q_0}{Kbl}(l-x) \qquad \text{.............(15)}$$

となる。また $x=\infty$ に於ては $y_2=0$ なるべきに依り

$$A'=B'=0$$

即ち

$$y_2 = e^{-\beta x}(C'\cos\beta x + D'\sin\beta x) \qquad \text{.............(16)}$$

となる。(15) 及び (16) 式に殘存せる四つの常數 A, B, C' 及び D' は I, II 領域の境界に於ける連續條件に依り決定することが出來る。即ち此の境界に於て彈曲線は相連續し，彎曲率及び剪力の値も相等しきが故に

$$x=l \text{ に於て} \quad y_1=y_2, \quad \frac{dy_1}{dx}=\frac{dy_2}{dx}, \quad \frac{d^2y_1}{dx^2}=\frac{d^2y_2}{dx^2}, \quad \frac{d^3y_1}{dx^3}=\frac{d^3y_2}{dx^3}$$

でなければならない。此の條件より

$$\left.\begin{aligned}
&A=+\frac{q_0}{\alpha e^{\alpha}Kb}(\cos\alpha-\sin\alpha), \quad B=+\frac{q_0}{\alpha e^{\alpha}Kb}(\cos\alpha+\sin\alpha),\\
&C'=+\frac{q_0}{2\alpha Kb}\left[\mathfrak{Cos}\,\alpha\cos\alpha+\mathfrak{Sin}\,\alpha\sin\alpha-1\right],\\
&D'=-\frac{q_0}{2\alpha Kb}\left[\mathfrak{Cos}\,\alpha\cos\alpha-\mathfrak{Sin}\,\alpha\sin\alpha-1\right]
\end{aligned}\right\} \qquad \text{.............(17)}$$

を得る。但し $\alpha=\beta l$ である。之等を夫々 (15) 及び (16) 式に代入して $\xi=\beta x$ とすると

$$y_1 = +\frac{q_0}{2\alpha Kb}\Big[e^{-\alpha}\{(\cos\alpha-\sin\alpha)\,\mathfrak{Cos}\,\xi\cos\xi + (\cos\alpha+\sin\alpha)\,\mathfrak{Sin}\,\xi\sin\xi\} - e^{-\xi}(\cos\xi-\sin\xi) + 2(\alpha-\xi)\Big], \qquad \text{.............(18)}$$

$$y_2 = +\frac{q_0}{2\alpha Kb}\Big[(\mathfrak{Cos}\,\alpha\cos\alpha+\mathfrak{Sin}\,\alpha\sin\alpha-1)\cos\xi - (\mathfrak{Cos}\,\alpha\cos\alpha-\mathfrak{Sin}\,\alpha\sin\alpha-1)\sin\xi\Big]e^{-\xi} \qquad \text{..(19)}$$

を得る。之即ち第五圖の場合の解であつて，之に依つて任意の點の沈下を計算することが出來る。また彎曲率 M は

$$M=-EI\frac{d^2y}{dx^2}$$

であるから I 及び II の領域に對し夫々

$$M_1=+\frac{q_0}{4\alpha\beta^2}\Big[e^{-\alpha}\{(\cos\alpha-\sin\alpha)\mathfrak{Sin}\,\xi\sin\xi-(\cos\alpha+\sin\alpha)\mathfrak{Cos}\,\xi\cos\xi\}$$

$$+e^{-\xi}(\cos\xi+\sin\xi)\Big]\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(20)$$

$$M_2=-\frac{q_0}{4\alpha\beta^2}\Big[(\mathfrak{Cos}\,\alpha\cos\alpha+\mathfrak{Sin}\,\alpha\sin\alpha-1)\sin\xi+(\mathfrak{Cos}\,\alpha\cos\alpha-\mathfrak{Sin}\,\alpha\sin\alpha-1)\cos\xi\Big]e^{-\xi}\ \ldots(21)$$

となり，之に依つて任意の點の彎曲率を計算することが出來る。之等の式はすべて三角函數，指數函數及び双曲線函數を含んで居るが，之等の函數の表は大抵のポケット・ブックにあり，殊に世界的に令名ある林桂一博士の表[1]には三角函數と双曲線函數との相乘積の値も出て居るから，此の表を用ひれば計算は更に簡單になる。

上記の (18) 及び (20) 式に $\xi=0$ $(x=0)$ とすると荷重中心線に於ける沈下並に彎曲率が求まる。これを y_0 及 M_0 で表せば

$$y_0=\frac{q_0}{2\alpha Kb}\Big[e^{-\alpha}(\cos\alpha-\sin\alpha)-1+2\alpha\Big],\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(22)$$

$$M_0=\frac{q_0}{4\alpha\beta^2}\Big[1-e^{-\alpha}(\cos\alpha+\sin\alpha)\Big]\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(23)$$

となつて，著者の (58) 或は (59) 式に劣らぬ簡單な形となる。上記兩式を使用し著者の第三表及び第四表に與へられた數値に依つて計算を行ひ其の結果と著者の第五表とを比較すると著者の (58) 及び (59) 式に依るものは上記 (22) 若くは (23) 式に依るものより大なる値を與へる。然し之はたとへば土被り 3 呎のときに荷重が 22 呎に亙つて作用すると言ふ様な寧ろ等布荷重に近い場合のことであつて，輾壓機の様に比較的狹い部分に荷重が集る様な場合に兩解法の差が何程になるかはわからない。

尚著者の計算例題中に二三の誤謬を見出した。其の第一は著者が土被 6 呎，管徑 36 吋に對して α を計算される時に第三表に $h=14.17$ 呎 とあるに拘はらず，すべて $h=11.17$ 呎として計算を行はれ，其結果 $\alpha=4.0$ 呎なる値を其儘第五表の計算にも採用せられた。第二は著者の第五表中で土被 3 呎，管徑 36 吋の場合に $M_c=122\,000$ 吋封度，$f=405$ 封度/吋^2 なる値を示され，此の値はまた附圖中にも其の儘出て居るが著者の第三表及び第四表に基き著者の (58) 及び (60) 式に依つて計算すると，上記の値は夫々 $M=144\,000$ 吋封度，$f=470$ 封度/吋^2 となる筈である。

最後に結論中に於て著者は**「其の理論上の根據は充分に嚴格にして**」，「特に (18) 式に於て $x=0$ なる時 $dy/dx=0$ 及び $x=0$ なる時 $d^3y/dx^3=0$ なる二つの條件が同時に成立するために，原點より單一荷重 P_0 までの距離 a が近似的に $3\pi/4\beta$ なる事は本論の如き無限長の埋設物に關する縱彎曲應力を計算する上に**極めて重要にして，且つ嚴格なる事實**たるべし」と述べられて居るが，筆者は之と反對の見解を持して居る。即ち $x=0$ に於て $dy/dx=d^3y/dx^3=0$ なることも，$a=3\pi/4\beta$ なることも余り重要なことではなく，且つ嚴格なる事實でもないと思ふ。

また著者の近似解に依るも，筆者が記述した解に依るも埋設管の縱彎曲に依る應力は普通の鑄鐵管に對しては充分に小なる値ではあるが，然し其縱彎曲に依る結果丈をもつて，「多大の經費と勞力とを掛けて頑丈なる防護工

1) Keiichi Hayashi, Sieben- und mehrstellige Tafeln der Kreis- und Hyperbelfunktionen und deren Produkte sowie der Gammafunktionen, Berlin 1926.

を施す現狀なるは眞に痛恨に堪へず」，「只因襲的に斯くなれるものにして，應用力學の進歩せる今日斯くの如き慣例の現存せるは邦家のため眞に痛恨に堪へず」と慨嘆されるのは少し認識が不足ではないかと思はれる。卽ち理論的計算には種々なる假定，たとへば三角形的荷重分布の假定，荷重分布の長さ及び其の强度に關する假定，均等土質の假定，沈下係數の假定，沈下と反力との正比例の假定，埋設管繼手の影響に關する假定等の種々なるものが含まれて居るが，地下に於ける應力分布とか沈下係數とかは甚だ曖昧なるものであり，また埋設管路全長に亙つて基礎地盤が一樣である場合は殆んど稀であつて，實際に於て上記の種々なる假定が全部充分と認められる程度に滿足せられることは甚だ少い。寧ろ一般には上記の假定が殆んど滿足されないと言つて良い位である。殊に土質が變化して居る樣な所では計算出來ない樣な著しい危險な影響があるであらう。其上悲しい哉日には之等土質に關する力學は未だ搖籃時代にあつて，賴るべきものがない。之等の事を考へれば，單に上記の如く多數の無理と矛盾とを含む任意的假定より出發せる理論的計算の結果のみを以て，しかも縱彎曲に關する結果のみを以て，著者の如く埋設管の防護不用論を結論するは少し早計に失するものではないかと思はれる。

地下埋設管には言ふ迄もなく地表荷重及び土壓等に依り縱彎曲と直角の方向に環（ring）としての應力が生じ，土被り淺く且つ管徑大なる場合には此の環としての應力の方が縱彎曲に依る應力よりも著しく大となり，之に依つて破壞する場合がないとは斷言が出來ない。加之地表荷重の衝擊の影響，土質の變化せる箇所に於ける地震の影響等を考慮すれば益々著者の埋設管防護工不用論の危險なることを感じる。

擱筆するに當り思はず長文を草し且つ妄評を謝し，筆者に不明の點あらば官敎御叱正を希ふ次第である。