

論 說 報 告

土木學會誌 第十八卷第三號 昭和七年三月

軌道下埋設管路縱彎曲に関する近似解法

准員 石 川 時 信

An Approximate Solution of the Longitudinal Bending
of the Supply Mains under Tramway Track

By Tokinobu Ishikawa, Assoc. Member.

内 容 梗 概

本文は地下鐵道、下水、水道管、瓦斯管又は電纜管路の如き地表から餘り深く無い所に設けられた細長い構造物が、地表荷重の影響を受けて其の縦の方向に幾許の彎曲を爲すかに就て近似解法を試み、軌道下埋設管路の縱彎曲に對して其の解法を應用し、其の安全なるを確め、以て軌道法中の或る一節に幾分の補足をなすべきを論ぜしものなり。

目 次

序	1
第一章 概 説	2
第二章 理 論	2
第一節 單一荷重に對する彈曲線	2
第二節 彈曲線の性質	6
第三節 對稱群集荷重の場合	9
第四節 非對稱群集荷重の場合	11
第三章 軌道下埋設管路の防護問題	11
第一節 地表荷重の分布状態	12
第二節 土の反壓	13
第三節 圓管としての應力	15
第四節 管路の彈性係數及び物量力率	15
第五節 沈下係數及び地盤の沈下	17
第六節 計算上使用すべき諸數量	18
第七節 軌道下埋設管路の縱彎曲應力	18
第八節 反曲點	22
第四章 結 論	24

序

地下鐵道、下水、水道管、瓦斯管又は電纜管路の如き地表より餘り深からざる所に設けられ

たる構造物の縦彎曲應力を近似的に計算する事を得ば、其の設計及び工事に資す處大なるを思ひ、單一荷重に對する彈曲線の基本的性質を究明し、群集荷重は單一荷重の集合なりといふ見地より問題を解き、尙ほ進んで實用上使用すべき簡便法を設け、軌道下埋設管路縦彎曲に適用し、以て懸案の軌道下埋設管路の防護問題に就て拙見を公にし、識者の高教を仰ぐ。

第一章 概 説

縦彎曲應力の計算は 1886 年獨人 Winkler 氏が其の著“*Theorie der Brücken*”に述べて以來幾多貴重な研究あれど、筆者は單一荷重に對する彈曲線の基本的性質を究明し、其の性質を演繹して、對稱群集荷重及び非對稱群集荷重の場合をも解き得る事を述べ、Rahmen に定説ある semi fixed (緊定) の理論を有利に併用すれば、問題は尙ほ一層簡潔になるべきを述べし實用上の簡便法に依り、軌道下埋設管路の縦彎曲應力を算出し、尙ほ一節に管路の圓管としての應力を拱理論に依りて解きたる結果を略述し、以て軌道下埋設管路の防護は極めて特例を除く外は不必要なるを確めたる上、該防護に關する軌道法中の或る一節に幾分の補足を爲すべきを論ず。

尙ほ微細に互る點は抽象的に述べたる方便なるため、特に言葉を設けて説明せる箇所あり(第二章第三節参照)。

又計算上の記號は大略次に列擧する如く、

p_x : 原點より x なる距離に於ける土の反壓	
K : 土の沈下係數,	D : 構造物の幅
U, V_0, V_1 , 等: 構造物の撓度,	Q : 剪斷力
M : 彎曲力率,	S : 構造物の斷面係數
f : 彎曲應力,	E : 彈性係數
I : 物量力率,	W : 地表荷重

とす。

其の外の記號は其の都度説明することとし、正負の符號に就ては

- i) 荷重は上向を正、下向を負
- ii) 力率は或る斷面の左側に就て取り右廻りを正、左廻りを負
- iii) 撓度は原位置より昇るを正、下るを負

とす。

第二章 理 論

第一節 單一荷重に對する彈曲線

第一圖に依り、

$$p_x = KDy \dots\dots\dots (1)$$

$$Q = \int p_x dx \dots\dots\dots (2)$$

$$Q = \frac{dM}{dx} \dots\dots\dots (3)$$

$$\therefore \frac{d^2 M}{dx^2} = p_x \dots\dots\dots (4)$$

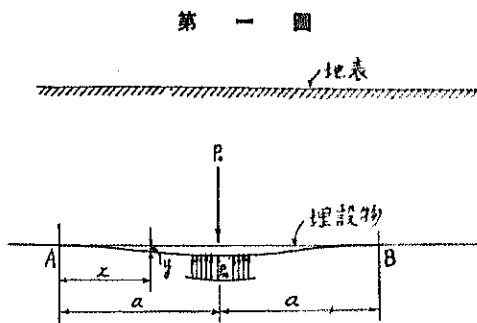
然るに

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \dots\dots\dots (5)$$

$$\therefore \frac{d^3 y}{dx^3} = -\frac{Q}{EI} \dots\dots\dots (6)$$

$$\therefore \frac{d^4 y}{dx^4} = -\frac{p_x}{EI} \dots\dots\dots (7)$$

$$\therefore \frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{KD}{EI} y = 0 \dots\dots\dots (8)$$



第一圖

之れ即ち茲に解かんとする微分方程式にして、結果は Winkler 氏の著にあれども、解法を以下に掲げて次に來る常數決定の際に於ける邊境條件との關係を見易からしむ。而して解中不盡根數 $\sqrt{2}$ を省く爲めに (8) 式を次の形とす。

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + 4\beta^4 y = 0 \dots\dots\dots (9)$$

但し

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{KD}{4EI}} \dots\dots\dots (10)$$

一解を

$$y = e^{mx} \dots\dots\dots (11)$$

とすれば、

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = m^4 e^{mx} \dots\dots\dots (12)$$

故に (9) 式及び (12) 式より

$$m^4 + 4\beta^4 = 0$$

或は

$$(m^2 - 2i\beta^2)(m^2 + 2i\beta^2) = 0$$

$$\therefore \left. \begin{aligned} m &= \beta \pm i\beta \\ m &= -\beta \pm i\beta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

此の m を m_1, m_2, m_3 及び m_4 とすれば、(11) 式は次の四つとなる。

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{m_1 x} = e^{\beta x(1+i)} = e^{\beta x}(\cos \beta x + i \sin \beta x) \\ y_2 &= e^{m_2 x} = e^{\beta x(1-i)} = e^{\beta x}(\cos \beta x - i \sin \beta x) \end{aligned}$$

$$y_3 = e^{m_3 x} = e^{\beta x(-1+i)} = e^{-\beta x}(\cos \beta x + i \sin \beta x)$$

$$y_4 = e^{m_4 x} = e^{\beta x(-1-i)} = e^{-\beta x}(\cos \beta x - i \sin \beta x)$$

備考：上式は Euler の公式に依る。

従つて (9) 式の解は

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + C_4 y_4$$

$$= e^{\beta x} \{ (C_1 + C_2) \cos \beta x + (C_1 - C_2) i \sin \beta x \} + e^{-\beta x} \{ (C_3 + C_4) \cos \beta x + (C_3 - C_4) i \sin \beta x \}$$

但し C_1, C_2, C_3 及び C_4 は常数なり。

或は

$$y = e^{\beta x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x) + e^{-\beta x} (C \cos \beta x + D \sin \beta x) \dots\dots\dots(14)$$

但し A, B, C 及び D は常数なり。

而して常数 A, B, C 及び D を決定するために、(14) 式の第一微分係数より第三微分係数までに邊境条件を入れんとするに、先づ順序として次の様に配列す。

$$\frac{dy}{dx} = \beta e^{\beta x} \{ A(-\sin \beta x + \cos \beta x) + B(\cos \beta x + \sin \beta x) + \beta e^{-\beta x} \{ C(-\sin \beta x - \cos \beta x) + D(\cos \beta x - \sin \beta x) \} \dots\dots\dots(15)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 2\beta^2 \{ e^{\beta x} (-A \sin \beta x + B \cos \beta x) + e^{-\beta x} (C \sin \beta x - D \cos \beta x) \} \dots\dots\dots(16)$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = 2\beta^3 \left[e^{\beta x} \{ A(-\cos \beta x - \sin \beta x) + B(-\sin \beta x + \cos \beta x) \} + e^{-\beta x} \{ C(\cos \beta x - \sin \beta x) + D(\sin \beta x + \cos \beta x) \} \right] \dots\dots\dots(17)$$

茲に於て彈曲線は單一荷重を左方に隔ること a なる點に於て遂に水平を爲し、最早沈下せざるものとし、其の點を原点とすれば、次の四つの條件を得。

i)	$x=0$	なる時	$y=0$	}(18)
ii)	$x=0$	"	$\frac{dy}{dx}=0$		
iii)	$x=a$	"	$\frac{dy}{dx}=0$		
iv)	$x=0$	"	$\frac{d^3 y}{dx^3}=0$		

i), ii) 及び iv) の條件より次の三つの式が得られる。

$A+C=0$	}(19)
$A+B-C+D=0$		
$-A+B+C+D=0$		

此の三つの式が成立するためには、

$A=C=0$	}(19')
$B=\pm D$		

従つて y , dy/dx , d^2y/dx^2 及び d^3y/dx^3 は (14) 式, (15) 式, (16) 式及び (17) 式より次の如くなる。

$$y = B(e^{\beta x} \sin \beta x - e^{-\beta x} \sin \beta x) \dots\dots\dots(14^{\circ})$$

$$\frac{dy}{dx} = B\beta [e^{\beta x}(\cos \beta x + \sin \beta x) - e^{-\beta x}(\cos \beta x - \sin \beta x)] \dots\dots\dots(15^{\circ})$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2B\beta^2(e^{\beta x} \cos \beta x + e^{-\beta x} \cos \beta x) \dots\dots\dots(16^{\circ})$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 2B\beta^3 [e^{\beta x}(-\sin \beta x + \cos \beta x) - e^{-\beta x}(\sin \beta x + \cos \beta x)] \dots\dots\dots(17^{\circ})$$

茲に於て $x=a$ なる時 $dy/dx=0$ なる如き a の値の近似値 a_1 を得るために、反曲點に於ては $M=0$ なる条件を使用することとし、反曲點と單一荷重との距離を Z とすれば、反曲點に於ては $d^2y/dx^2 = 0$ であるから、(16^o) 式より

$$e^{\beta(a_1-Z)} \cos(a_1\beta - Z\beta) + e^{-\beta(a_1-Z)} \cos(a_1\beta - Z\beta) \doteq 0$$

或は

$$\cos a_1\beta \cos Z\beta + \sin a_1\beta \sin Z\beta \doteq 0$$

或は

$$\tan a_1\beta \tan Z\beta \doteq -1$$

故に

$$\left. \begin{aligned} a_1\beta &= \frac{3\pi}{4} \\ Z\beta &= \frac{1}{4}\pi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(19^{\circ})$$

而して茲に得たる a , β の値は $a\beta$ の近似値であるが、 $a\beta$ は略 $3\pi/4$ である事を知りたるを以て、

$$\left. \begin{aligned} \cos \beta a - \sin \beta a &\doteq -2 \sin \beta a \\ e^{\beta a}(-\sin \beta a + \cos \beta a) - e^{-\beta a}(\cos \beta a + \sin \beta a) &\doteq -2e^{\beta a} \sin \beta a \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(20)$$

とする事を得。此の (20) 式に依り、(17^o) 式は

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -4B\beta^3 e^{\beta a} \sin \beta a$$

然るに單一荷重 P_0 の下に於ては、剪力は $P_0/2$ なるを以て、

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -4B\beta^3 e^{\beta a} \sin \beta a = \frac{P_0}{2EI} \dots\dots\dots(21)$$

故に

$$B = -\frac{P_0}{8\beta^3 EI e^{\frac{3}{4}\pi} \sin \frac{3}{4}\pi} \dots\dots\dots(22)$$

此の B の値を y , dy/dx , d^2y/dx^2 及び d^3y/dx^3 の式に代入すれば、(14^o) 式, (15^o) 式, (16^o) 式及び (17^o) 式より次の一組の式が得られる。

$$y = -\frac{P_0}{8\beta^3 EI e^{\frac{3}{4}\pi} \sin \frac{3}{4}\pi} (e^{\beta x} \sin \beta x - e^{-\beta x} \sin \beta x) \dots\dots\dots(14^{\circ})$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P_0}{8\beta^2 EI e^{\frac{3}{4}\pi}} \sin \frac{3}{4}\pi \{ e^{\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x) - e^{-\beta x} (\cos \beta x - \sin \beta x) \} \dots (15')$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{P_0}{4\beta EI e^{\frac{3}{4}\pi}} \sin \frac{3}{4}\pi \{ e^{\beta x} \cos \beta x + e^{-\beta x} \cos \beta x \} \dots (16')$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = +\frac{P_0}{4EI e^{\frac{3}{4}\pi}} \sin \frac{3}{4}\pi \{ e^{\beta x} (-\sin \beta x + \cos \beta x) - e^{-\beta x} (\sin \beta x + \cos \beta x) \} \dots (17')$$

是即ち單一荷重 P_0 に對する彈曲線である。此の一組の式に依りて原點及び單一荷重の直下に於ける撓度、傾角、力率及び剪斷力を求むること第一表の如し。

第一表

	原點即ち $x=0$ なる點	單一荷重の直下即ち $x=a \doteq a_1$ なる點
撓 度 y	0	$-\frac{P_0}{8\beta^2 EI e^{\frac{3}{4}\pi}} (e^{\frac{3}{4}\pi} - e^{-\frac{3}{4}\pi}) \doteq -\frac{P_0}{8\beta^2 EI}$
傾 角 $\frac{dy}{dx}$	0	0
力 率 $EI \frac{d^2y}{dx^2}$	$-\frac{P_0}{2\beta e^{\frac{3}{4}\pi}} \sin \frac{3}{4}\pi$	$\frac{P_0}{4\beta e^{\frac{3}{4}\pi}} (e^{\frac{3}{4}\pi} + e^{-\frac{3}{4}\pi}) \doteq \frac{P_0}{4\beta}$
剪 斷 力 $EI \frac{d^3y}{dx^3}$	0	$\frac{-P_0}{2}$

第一表に依り單一荷重 P_0 に對する彎曲力率及び撓度を求むる計算の一例を示せば、假に $P_0=996$ 封度、 $D=36$ 吋、 $K=71.5$ 封度/吋²/吋、 $E=3\,790\,000$ 封度/吋²、 $I=5\,610$ 吋⁴ なる時は、(10) 式に依り

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{KD}{4EI}} = \sqrt[4]{\frac{71.5 \times 36}{4 \times 3\,790\,000 \times 5\,610}} = 0.0132 \text{ (吋}^{-1}\text{)}$$

又 (19') 式より

$$a_1 = \frac{3\pi}{4\beta} = \frac{3 \times 3.14}{4 \times 0.0132} = 178.0 \text{ (吋)} = a \dots (23)$$

故に單一荷重 P_0 を左方に隔る事 a なる點に於ける力率 M_A 、又 P_0 の下に於ける力率 M_C 、撓度 y_c は第一表に依り

$$M_A = -\frac{P_0}{2\beta e^{\frac{3}{4}\pi}} \sin \frac{3}{4}\pi = -\frac{996}{2 \times 0.0132 \times 10.5 \times 0.707} = -5\,070 \text{ (吋封度)}$$

$$M_C \doteq \frac{P_0}{4\beta} = \frac{996}{4 \times 0.0132} = 18\,900 \text{ (吋封度)}$$

$$y_c = -\frac{P_0}{8\beta^2 EI} = -\frac{996}{8 \times (0.0132)^2 \times 3\,790\,000 \times 5\,610} = -0.00256 \text{ (吋)}$$

となる。

第二節 彈曲線の性質

單一荷重に對する彈曲線の性質を見るに、原點に於ては縦距は零にして、原點及び荷重の下に於ては夫れへの切線は水平であり、且つ彈曲線と原位置線とに依りて包まれたる面積は、

奥行單位長に就て云へば、其の面積に地盤の沈下係数を乗じたるものは單一奥行の單位荷重に等しく、又彈曲線中の或る一定點に反曲點を有し、尙ほ單一荷重の大小に関らず、彈曲線の基線長即ち彎曲する範圍は一定であるといふ複雑なる性質を有す。

茲に於て彈曲線を圖示するならば、圖面共のものは餘り複雑に非ずして割合に簡單である。而して其の大體の性質は、彈曲線は原點と荷重の下とに於て切線は水平であり、且つ其の包圍面積に土の沈下係数を乗じたるものは下向荷重の總和に等しいといふ事である。而して其の大體の性質を同じうする曲線の内には次の(24)式 ii) 及び iii) に掲ぐるものあり、又包圍面積を等しくする直線は(24)式 i) にあり。

$$\left. \begin{aligned} \text{i)} \quad y &= -\frac{P_0 x}{a^2 KD} \\ \text{ii)} \quad y &= -\frac{P_0}{2aKD} (1 - \cos \frac{\pi}{a} x) \\ \text{iii)} \quad y &= -\frac{P_0 \pi}{4aKD} \sin \frac{\pi}{2a} x \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

但し $a = \frac{3\pi}{4\beta}$

然れども全性質に於ては之れ等 i), ii) 及び iii) のものは何れも(14')式のものとは異なる、只計算の都合上彈曲線の縦距と性質とを別々に取扱はんとする場合には、此處に掲ぐる i), ii) 及び iii) の値は使用し得べきものとす。換言すれば剪斷力、力率、傾角又は撓度を積分法に依りて求め、其の積分法中度々の常数を決定するには、彈曲線の性質を利用せんとする時には使用し得べし。故に(24)式を(8)式に代入せば、

$$\left. \begin{aligned} \text{i)} \quad \frac{d^4 y}{dx^4} &= \frac{P_0}{EI a^2} x \\ \text{ii)} \quad \frac{d^4 y}{dx^4} &= \frac{P_0}{2aEI} (1 - \cos \frac{\pi}{a} x) \\ \text{iii)} \quad \frac{d^4 y}{dx^4} &= \frac{P_0 \pi}{4aEI} \sin \frac{\pi}{2a} x \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

(25) 式 i) を積分すれば、

$$\left. \begin{aligned} EI \frac{d^3 y}{dx^3} &= \frac{P_0 x^2}{2a^2} + C_1 & (C_1 = 0) \\ EI \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{P_0 x^3}{6a^2} + C_2 \\ EI \frac{dy}{dx} &= \frac{P_0 x^4}{24a^2} + C_2 x + C_3 & (C_2 = 0) \\ EI y &= \frac{P_0 x^5}{120a^2} + \frac{1}{2} C_2 x^2 + C_4 & (C_4 = 0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

但し C_2 は原點に於ける力率にして、 $x=0$ なる時 $dy/dx=0$ として求められる。即ち

$$C_2 = -\frac{P_0 a}{24} \dots\dots\dots (26^a)$$

(26) 式は一種の彈曲線なるが、式中 a は未定なる故、本曲線と原位置線とに依りて包まれたる面積に土の沈下係數を乗じたるものは、下向荷重 P_0 に等しとして求む。(26') 式を (26) 式に代入し、(26) 式の曲線と原位置線とに依りて包まれたる面積を荷重 P_0 の左半で A_e とすれば、

$$A_e = \int y dx = \frac{1}{EI} \left[\frac{P_0 x^3}{720 a^2} + \frac{1}{2} \left(-\frac{P_0 a}{24} \right) \frac{x^3}{3} \right]_{x=a} = -\frac{P_0 a^4}{180 EI}$$

依つて埋設物の幅を D とし、土の沈下係數を K とすれば、埋設物を沈下せしめし力の總和は土の反壓に等しく、土の反壓の總和は荷重 P_0 に等しかるべきに依り、

$$A_e K D = -\frac{P_0 a^4 K D}{180 EI} = -\frac{1}{2} P_0$$

$$i) \quad a = \sqrt[4]{90} \sqrt{\frac{EI}{KD}} \dots \dots \dots (26')$$

同様な事を (25) 式 ii) 及び iii) に施せば

$$\left. \begin{aligned} ii) \quad a &= \sqrt[4]{57.1} \sqrt{\frac{EI}{KD}} \\ iii) \quad a &= \sqrt[4]{84.8} \sqrt{\frac{EI}{KD}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (26')$$

(26') 式 i), ii) 及び iii) は (25) 式に於ける未定量 a を與ふる式である。今 a の計算の一例を擧ぐれば、 $D=36$ 吋、 $K=71.5$ 封度/吋²/吋、 $E=3\,790\,000$ 封度/吋²、 $I=5\,610$ 吋⁴ なる時は (26') 式 i), ii) 及び iii) より

$$\left. \begin{aligned} i) \quad a &= \sqrt[4]{90} \sqrt{\frac{3\,790\,000 \times 5\,610}{71.5 \times 36}} = 165 \text{ (吋)} \\ ii) \quad a &= \sqrt[4]{57.1} \sqrt{\frac{3\,790\,000 \times 5\,610}{71.5 \times 36}} = 147 \text{ (吋)} \\ iii) \quad a &= \sqrt[4]{84.8} \sqrt{\frac{3\,790\,000 \times 5\,610}{71.5 \times 36}} = 162 \text{ (吋)} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (27)$$

即ち a の値は (24) 式 i), ii) 及び iii) の異なるに依つて多少の相違あれど、大なる相違なし。假に (27) 式 i) の a を以て (26) 式に依る力率及び撓度を計算して見れば、荷重 $P_0 (=996$ 封度) を左方に隔つる事 a なる點に於ける力率を M_a 、荷重 P_0 の下に於ける力率を M_c 、又荷重 P_0 の下に於ける撓度を y_0 とすれば、(26') 式に依り

$$M_a = -\frac{P_0 a}{24} = -\frac{996 \times 165}{24} = -6\,850 \text{ (吋封度)}$$

$$\begin{aligned} M_c &= EI \frac{d^2 y}{dx^2} = \left[\frac{P_0 x^3}{6 a^2} + C_2 \right]_{x=a} = \frac{P_0 a}{6} - \frac{P_0 a}{24} \\ &= \frac{996 \times 165}{6} - 6\,850 = 20\,500 \text{ (吋封度)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{1}{EI} \left[\frac{P_0 x^5}{120 a^2} + \frac{1}{2} C_2 a^2 \right]_{x=a} = \frac{1}{EI} \left[\frac{P_0 a^3}{120} + \frac{1}{2} \left(-\frac{P_0 a}{24} \right) a^2 \right] = \frac{1}{EI} \left[-\frac{1}{80} P_0 a^3 \right] \\ &= \frac{1}{3\,790\,000 \times 5\,610} \left[-\frac{996 \times 165^3}{80} \right] = -0.00263 \text{ (吋)} \end{aligned}$$

同様な事を (25) 式 ii) 及び iii) に施せば、第二表の如し。

第二表

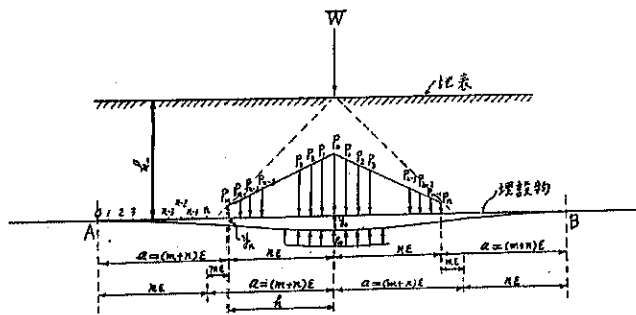
	a (吋)	M_A (吋封度)	M_C (吋封度)	y_c (吋)
i) $\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{P_0x}{a^2EI}$	165	-6850	20500	-0.00261
ii) $\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{P_0}{2aEI}(1 - \cos \frac{\pi}{a}x)$	147	-4780	16020	-0.00156
iii) $\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{P_0\pi}{4aEI} \sin \frac{\pi}{2a}x$	162	-7650	21050	-0.00275
$\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{KD}{EI}y = 0$	178	-5070	18900	-0.00256

第二表最下段のものは本章第一節 (8) 式を (14') 式、(16') 式及び (23) 式に依りて計算せるものなり。第二表を見るに、 a, M_A, M_C, y_c 共に大差がないから、第二表 i), ii), iii) の如き式は實用上使用し得べし。又夫れを演繹して群集荷重に對しても使用し得べし。

第三節 對稱群集荷重の場合

第二圖の如く、茲に p_0 を中心とする $p_0, p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ の如き左右對稱なる一群の荷重ありて、

第二圖



$$p_0 > p_1 > p_2 > p_3 > \dots > p_{n-1} > p_n \dots \dots \dots (28)$$

なる關係にあり、其の各の間隔を ϵ とし、

$$a = (m+n)\epsilon \quad (m=2) \dots \dots \dots (29)$$

とすれば、夫れ等の荷重を受くる細長い構造物の彎曲する範圍は、(19') 式に依り、

$$2(a+n\epsilon) \dots \dots \dots (30)$$

である。然るに (14') 式に依れば、撓度は一般に

$$y = - \frac{P_0}{8\beta^3 EI e^{\frac{3}{4}\pi} \sin \frac{3}{4}\pi} (e^{\beta x} \sin \beta x - e^{-\beta x} \sin \beta x)$$

であるから、今

$$R = - \frac{1}{8\beta^3 EI e^{\frac{3}{4}\pi} \sin \frac{3}{4}\pi} \dots\dots\dots (31)$$

$$f_0 = e^{\beta a} \sin \beta a - e^{-\beta a} \sin \beta a = 7.42 \dots\dots\dots (32)$$

$$f_1 = e^{\beta(a-\varepsilon)} \sin \beta(a-\varepsilon) - e^{-\beta(a-\varepsilon)} \sin \beta(a-\varepsilon)$$

$$f_2 = e^{\beta(a-2\varepsilon)} \sin \beta(a-2\varepsilon) - e^{-\beta(a-2\varepsilon)} \sin \beta(a-2\varepsilon)$$

.....

$$f_{n-2} = e^{\beta\{a-(n-2)\varepsilon\}} \sin \beta\{a-(n-2)\varepsilon\} - e^{-\beta\{a-(n-2)\varepsilon\}} \sin \beta\{a-(n-2)\varepsilon\}$$

$$f_{n-1} = e^{\beta\{a-(n-1)\varepsilon\}} \sin \beta\{a-(n-1)\varepsilon\} - e^{-\beta\{a-(n-1)\varepsilon\}} \sin \beta\{a-(n-1)\varepsilon\}$$

$$f_n = e^{\beta(a-n\varepsilon)} \sin \beta(a-n\varepsilon) - e^{-\beta(a-n\varepsilon)} \sin \beta(a-n\varepsilon)$$

$$f_{n+1} = e^{\beta\{a-(n+1)\varepsilon\}} \sin \beta\{a-(n+1)\varepsilon\} - e^{-\beta\{a-(n+1)\varepsilon\}} \sin \beta\{a-(n+1)\varepsilon\}$$

$$f_{n+2} = e^{\beta\{a-(n+2)\varepsilon\}} \sin \beta\{a-(n+2)\varepsilon\} - e^{-\beta\{a-(n+2)\varepsilon\}} \sin \beta\{a-(n+2)\varepsilon\} = 0 \dots\dots (33)$$

とすれば,

$$a > (a-\varepsilon) > (a-2\varepsilon) > \dots\dots > \{a-(n-2)\varepsilon\} > \{a-(n-1)\varepsilon\} > (a-n\varepsilon) \\ > \{a-(n+1)\varepsilon\} > \{a-(n+2)\varepsilon\}$$

なるを以て,

$$f_0 > f_1 > f_2 > \dots\dots > f_{n-2} > f_{n-1} > f_n > f_{n+1} > f_{n+2} \dots\dots\dots (34)$$

又 $p_0, p_1, p_2, \dots, p_{n-2}, p_{n-1}, p_n$ の爲めに起る p_0, p_1, \dots, p_n の下の撓度を $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ とすれば (14') 式, (31) 式及び (33) 式に依り,

$$y_0 = R(p_0 f_0 + 2p_1 f_1 + 2p_2 f_2 + \dots\dots + 2p_{n-2} f_{n-2} + 2p_{n-1} f_{n-1} + 2p_n f_n)$$

$$y_1 = R\{p_0 f_1 + p_1(f_0 + f_2) + p_2(f_1 + f_3) + \dots\dots + p_{n-2}(f_{n-3} + f_{n-1}) + p_{n-1}(f_{n-2} + f_n) + p_n(f_{n-1} + f_{n+1})\}$$

$$y_2 = R\{p_0 f_2 + p_1(f_1 + f_3) + p_2(f_0 + f_4) + \dots\dots + p_{n-2}(f_{n-4} + f_n) + p_{n-1}(f_{n-3} + f_{n+1}) + p_n(f_{n-2} + f_{n+2})\}$$

.....

$$y_n = R\{p_0 f_n + p_1(f_n + f_{n+1}) + p_2 f_{n-1} + \dots\dots + p_{n-2} f_2 + p_{n-1} f_1 + p_n f_0\}$$

同様にして径間の最左端即ち固定端を 0 點とし、夫れより右方に 1, 2, 3, ..., (n+m) 點を各間隔 ε に取れば、各の點の下に於ける撓度 $Y_0, Y_1, Y_2, \dots, Y_{m+n}$ 等は各々

$$y = f(R, p, f) \dots\dots\dots (35)$$

にて表はされ、

$$y_0 > y_1 > y_2 > \dots\dots > y_{n-2} > y_{n-1} > y_n = Y_{m+n} > \dots\dots > Y_2 > Y_1 > Y_0 \dots (36)$$

なる關係成立し、任意の點の撓度も計算出来るし、且つ其の方法は實際の場合は、 p, f, R, n

及び m 等も容易に與ふる事を得る値なるを以て、餘り繁瑣なものに非らず。然れども之れ等の撓度は第二圖の例で云へば、徑間の最左端即ち固定端より n 番目と $(n+m)$ 番目とに於て急變するを以て、不連続函數にて表はすべきものなりと云はれて居る。依つて今全徑間を通じて一つの連続假想撓度曲線を考へ、其の連続假想撓度曲線と實際の不連続撓度曲線と大部分の性質を同じくせしめんとす。然れども其の假想連続撓度曲線と實際の不連続撓度曲線との間には幾分の相違あるを免れず。而して此の相違は殆んど除き得るものに非らざれども、假想连续撓度曲線を其の選擇に注意し、且つ彈性曲線の性質を忠實に取扱ふ事に依りて、或る程度まで小ならしむる事を得べし。其の一法として筆者が一例を擧げたるものが即ち第三章第七節に述べんとするものである。而して此の方法を此處に假定撓度線の方法と名づけて置いて、後の便とす。此の意味に於て本章第二節 (24) 式に示すものを假定撓度線と名づけ、同じく (25) 式に示すものを假想彈曲線と名づく。

第四節 非對稱群集荷重の場合

非對稱群集荷重に對しても、前節 (35) 式の類は使用される。此の場合は非對稱であるから非對稱群集荷重を對稱部分と集中部分とに分けて兩者を別々に取扱つて (35) 式の類を適用し、計算の結果を相互に加算すれば近似的の値が求まる。

本章第一節より第三節までに述ぶる處は兩端完全固定の場合であるが、地下又は地表にても絶對完全固定は得難く、多くは不完全固定であるから、Rahmen に定説ある semi fixed (緊定) の理論を併用して問題を簡潔にし近似的の値を得るも一法である。

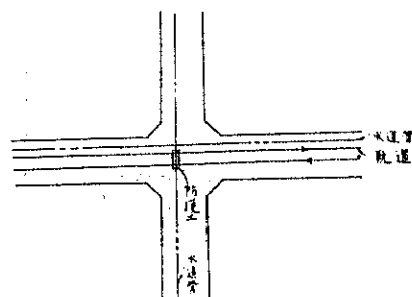
又彈性床の上に横はる桁に對しても假定撓度線の方法を適用して近似的の値を求むる事が出来る。

第三章 軌道下埋設管路の防護問題

大都市の街路下特に軌道下を横斷して設けられたる水道管又は瓦斯管等は法規に従つて頭丈に防護が施してある(第三圖、第四圖及び第五圖参照)。

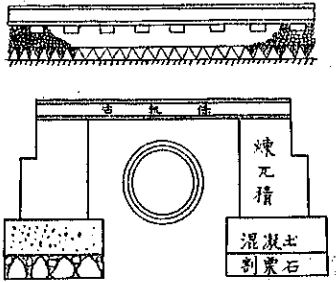
然れども其の防護工が力學的に必要であるか否かと云ふことは、其の管路の圓管としての應力及び桁としての縦の方向の應力を嚴密に計算した上でなければ云へない、而して力學的計算の基準となるものは地表荷重及び其の地下に分布する分布状態である。依つて地表荷重及び其の分布の状態を先に定めて、次に圓管としての應力及び桁としての應力の計算をなし、然る後防護工の必要であ

第三圖 街路交叉點と埋設鐵管

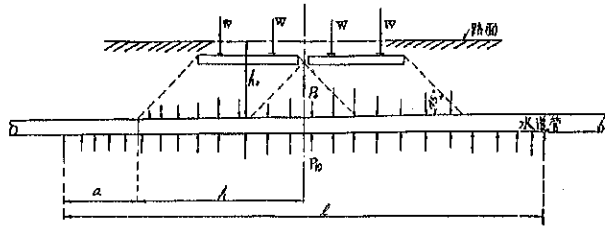


るか否かを判断せんとす。

第四圖 軌道下埋設鐵管防護工圖



第五圖 軌道下埋設鐵管縱斷圖



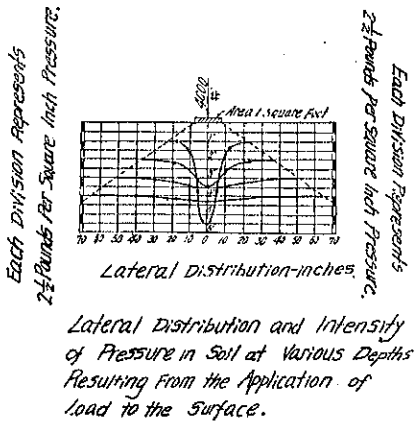
第一節 地表荷重の分布状態

地表荷重は東京市電 30 噸電車の想定荷重に 30% の衝撃を見込みたるものが、本邦道路構造に関する細則に準じて軌條下端より 45 度下向線まで分布するものとし、其の分布荷重の最大値は分布面積の中心に在るものとし、1925 年 U. S. Bureau of Public Road 發行、Engineering and Construction の部 Road & Street の卷、680 頁に Bearing Area and Supporting Value of Soil の題下に掲載せる報告と、Fruhling 氏の式に依るものを比較し計算を基礎として其の大きさを定めたり（第六圖、第七圖、第八圖、第九圖及び第十圖参照）。

之れ等に依ると地表荷重の地下に分布する状態及び壓力度は大體地表から 45 度下向線ま

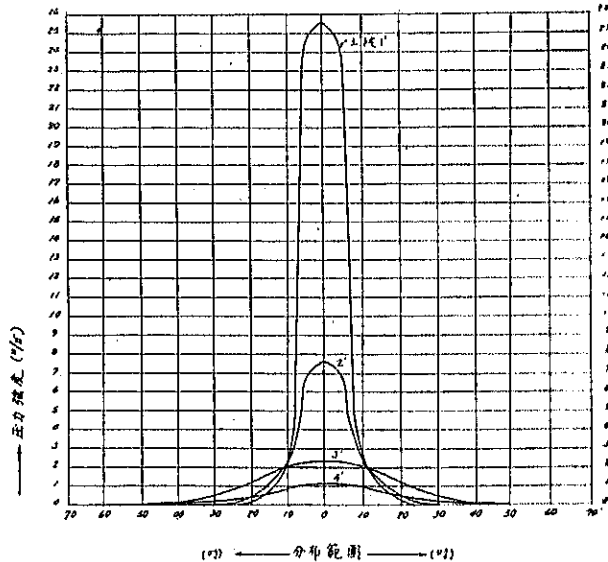
第六圖 地表荷重分布状態圖

1925 年 Bureau of Public Road 掲載に依る

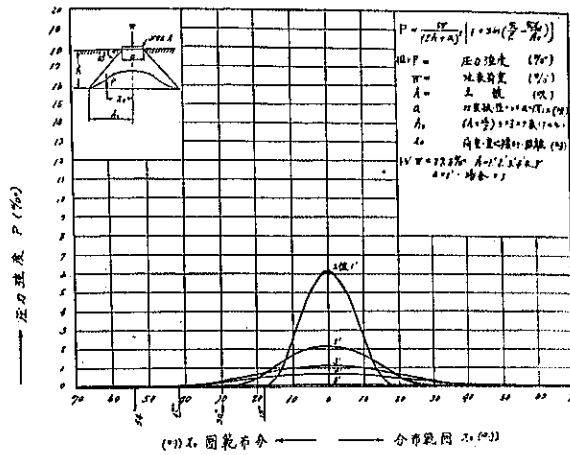


第七圖 地表の荷重の分布状態圖

1925 年 Bureau of Public Road 掲載に依るものを書き替へたるもの

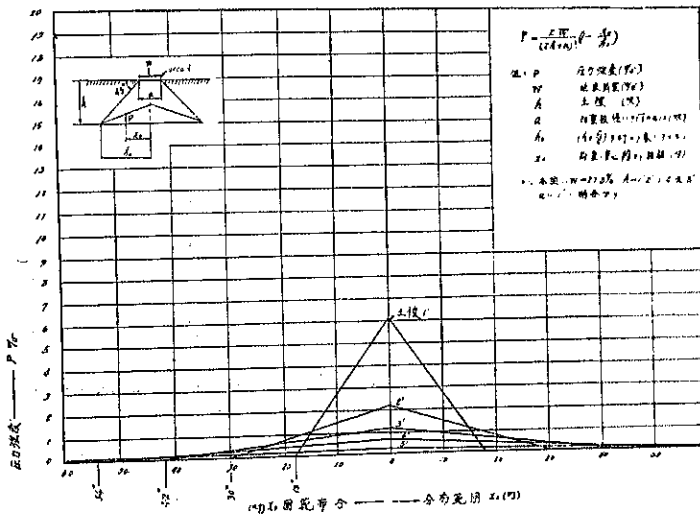


第八圖 地表荷重分布圖



備考：中心に於ては道路構造に関する細則に依る均等強度の2倍とし、sine curve にて漸減するもの。

第九圖 地表荷重分布圖



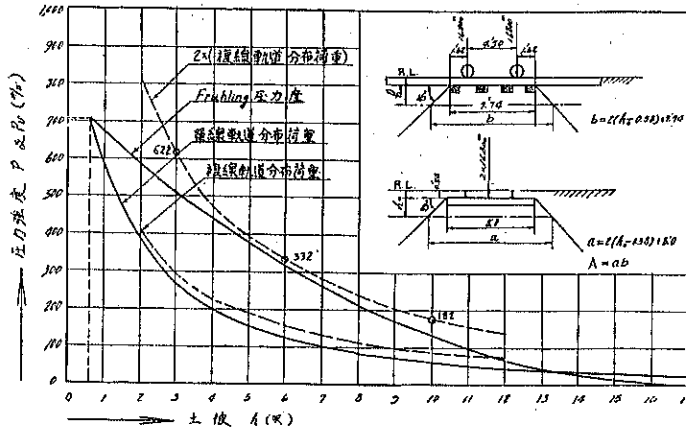
備考：中心に於ては道路構造に関する細則に依る均等強度の2倍とし、直線的に漸減するもの。

でにして、地表荷重の重心線に近く最大にして、重心線を隔つるに従つて遞減するを以て、地表下或る平面上に於ける分布荷重の最大壓力度は分布面積で地表荷重を除したる平均壓力度の2倍とし、其の分布範囲は軌條下端より45度下向線までとし、其の範囲内に於て最大より零まで遞減する所の直線變化及び曲線變化の二つとせり。

第二節 土の反壓

地下埋設物が前節の如き略三角形の荷重を受くる時に、埋設物下部の土に反壓を生ずる状

第十圖 地表荷重分布圖



$$\frac{16800 \times 2 \times 1.3}{8 \times 7.74} = 706 \text{ \#/ft}^2$$

.....軌道荷重

$$p_0 = \frac{(17.08 - h_0)^2}{16.5^2} \times 706$$

.....Fruhling

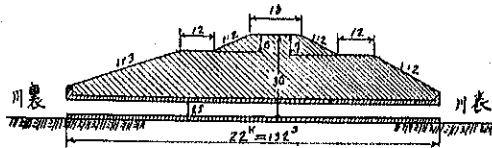
$$p = \frac{16800 \times 2 \times 1.3}{ab}$$

.....道路構造に關する細則に依る値

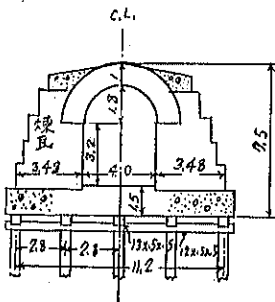
備考: Oは採川壓力度なり。

態は同じく其の荷重の重心線近くに最大にして、重心線を隔つる事或る距離に到つて遂に零となる如き直線變化及び曲線變化の二つとせり。之れは實驗上略妥當であるといふことは、大正3年3月完成せる利根川左岸にある煉瓦造暗渠の底面敷の沈下を大正5年4月より大正11年3月に亙り、前後5回内務省の手に依りて測定せるものを見れば判る。即ち本暗渠は全長22間にして、最大沈下は略堤防の重心線附近に生じ、2.564尺、又最小沈下は川表側の方に生じ、0.594尺、又川裏の方に於ては1.168尺沈下せり。此の暗渠は定長のものなるが、若し軌道下埋設管路の様に残んど無限長を有する構造物に斯の如き略三角形荷重が加はりたる時は、構造物の沈下の零となる點は少くとも荷重の載荷範圍より外方にある事は推斷出来る(第十一圖、第十二圖及び第十三圖参照)。

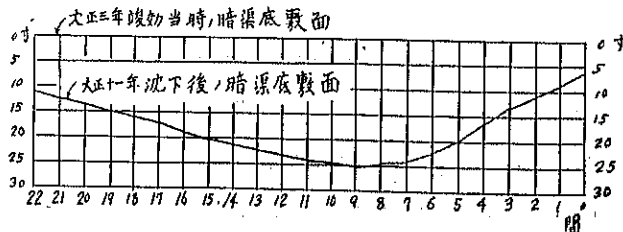
第十一圖 利根川堤防形狀圖(附暗渠縱斷圖)



第十二圖 利根川堤防煉瓦造暗渠橫斷圖



第十三圖 利根川堤防煉瓦造暗渠沈下圖



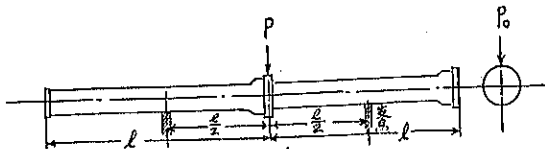
第三節 圓管としての應力

軌道下埋設管路は圓形にして、拱理論に依りて解かるべき應力あれども、之れ亦地表荷重及び土の重さに依る鉛直及び水平壓力に依りて著しく其の値を異にす。依つて筆者は此の點に關しては、地表荷重に對する分布荷重は Fruhling 氏に依り、土の重さに依る鉛直土壓力度は構造物の幅を考へたる場合及び幅と高さを考へたる場合との二者を比較し、其の內大なるものを採用する方針にて、Janssen 氏のもの と Bierbaumer 氏のもの とを比較せしに結局 Janssen 氏のもの大であるといふ事になり、Fruhling 氏に依る分布荷重と Janssen 氏に依る鉛直土壓とを合計せるものを鉛直壓力とし、其の鉛直壓力が圓管幅に等布すると見たる時と其の等布壓力の 2 倍を管頂の荷重とし、圓管の幅の端に於て零となる如き三角形荷重と見たる時との 2 種を假定し、又水平壓力度は angle of repose 30 度と見たる Rankin 氏のものを見込みたる時と、見込まない場合とを假定し計算せるに、其の應力は水平壓力は見込まない場合が最安全側であり、且つ鐵管は最大徑のものに就て計算した方が最安全側であり、尙ほ鉛直荷重は三角形に取りたる場合が最安全側であるといふ、極めて合理的の結論に到達したるも、土被に就ては土被は深い程安全側であるといふ結論になれり。土被は深い程安全側であるといふ結論は實際として餘り好ましくない結果であるが、此の結果は Janssen 氏の鉛直土壓は土被深くなるに従つて大となる上に、計算では水平土壓を見込まずに進みたる爲の結果にして、此の不合理は計算上當然排除すべきものであるから、水平土壓を見込みて計算して見たるに、先づ土被 4 呎より深くして、管徑 36 吋より小なる時は防護の必要はないと云ふ事になれり。加之、最近斯の如き構造物では外力を從來の慣例より小に取つてもよいと云ふ説も有力であるから、圓管としての應力は徑極めて大なる場合及び土被極めて浅い場合を兼ね備へた時には考慮を要すべきも、其の他の場合は考ふる必要なしと云ひ得る。但し此處に安全側と謂へるは、最大應力を起すといふ意味である。又地表荷重は東京市電 30 噸電車に 30% の衝擊を見込みたるものとせり。尙ほ土被 2.3 呎より浅い時は 12 噸 roller の方が大なる外力を與ふる事も附記す。

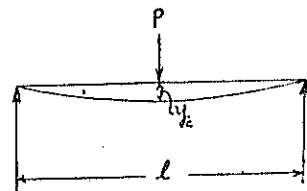
第四節 管路の彈性係數及び物量力率

軌道下埋設管路は、大正 8 年 10 月決定したる現行本邦上水協議會型水道用鑄鐵直管、低壓

第十四圖 試驗方法



第十五圖 荷重及び撓度

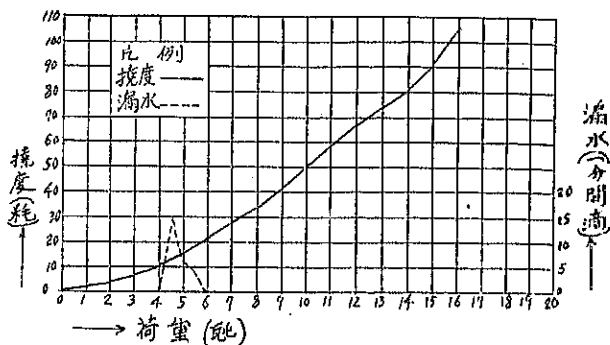


管に就て其の彈性係數及び物量力率を計算する事にせるも、管路は接手ありて、接手部分は普通部分に比して挿込及び承口のために斷面の形狀及び張力及び壓力に對する値を異にせる譯なれば、連続された管路が桁として外力を受け彎曲する時には、其の彎曲の状態は圓滑なる彈性曲線をなさずして、折線に近い形狀をなすべく、其の状態は接手部分の彈性係數及び物量力率が普通部分に比して異なる割合に依りて決定さる。然れども管路を桁として、縦の方向の彎曲を計算するには、管路の彈

性係數及び物量力率は連続管路の全長を通じて均齊であるものとして取扱ふ方が便利であるから、其の均齊なる彈性係數及び物量力率を見出すために、大正 15 年東京市水道局擴張課に依りて試験されたる撓度及び漏水試験の結果に依り次の假定に基きて計算を試みたり

(第十四圖、第十五圖及び第十六圖並に土木學會誌第十四卷第二號参照)。

第十六圖 水道管撓度及び漏水圖 (24 吋管 B)



備考：大正 15 年 5 月 24 日より同年 6 月 3 日試験

假 定

- i) 撓度曲線は圓滑なる彈性曲線とす。
- ii) 接合部分を含みたる連続管路の普通部分に對する彈性係數の比と物量力率の比とは同一とす。
- iii) 試験荷重に應ずる測定撓度の採用範圍は撓度の急變せざる所までとす。

尚ほ其の外、次の記號を用ふ。

- P : 試験荷重 (吨), l : 支承點間隔にして鐵管 1 本分の長さ (米)
- y_c : 測定撓度 (厘米), E : 普通部分の彈性係數 (吨/厘米²)
- E_0 : 接合部分を含みたる連續管路の伸長及び壓縮力にして彈性係數と對應する値 (吨/厘米²)
- I : 普通部分の物量力率 (厘米⁴)
- I_0 : 接合部分を含みたる連續管路の物量力率 (厘米⁴)
- n : $E_0/E = I_0/I = n$ なる値

然らば、支承點間の中心に集中荷重 P が載せられたる時は

$$y_c = \frac{1}{48} \frac{Pl^3 \times 100^3}{E_0 I_0}$$

或は

$$E_0 I_0 = \frac{1}{48} \frac{Pl^3 \times 100^3}{y_c} \dots \dots \dots (30^{\circ})$$

然るに、假定 iii) に依れば $n = E_0/E = I_0/I$ なるを以て

$$n = \sqrt{\frac{E_0 I_0}{EI}} \dots\dots\dots (37)$$

故に (36°) 式と (37) 式とより、

$$n = \sqrt{\frac{1}{48} \frac{l^3 \times 100^3}{EI}} \sqrt{\frac{P}{y_0}} \dots\dots\dots (38)$$

従つて

$$\left. \begin{aligned} E_0 &= nE \\ I_0 &= nI \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (39)$$

斯の如く、(37) 式を徑 4 吋より徑 24 吋までの鐵管に就て計算せるものが附表である。即ち n の値は大體 30% 内外であるから、

$$\left. \begin{aligned} n &= 0.316 \\ n^2 &= 0.10 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (40)$$

とせり。以後管路の計算には特に明記なき時も E_0 及び I_0 の値を使用せるものとす。

第五節 沈下係數及び地盤の沈下

地盤の沈下係數は、地表に於けるものと、地下に於けるものとは、其の値を異にせるを妥當と考へたる故にその二者を區別せり。地表に於けるものは地盤を軟弱、中及び堅硬の三つに分け、50 封度毎吋³、100 封度毎吋³ 及び 200 封度毎吋³ の三つとし、計算には軟弱地盤として 50 封度毎吋³ を採用せり (Engineering and Construction, Road & Street by Bureau of Public Road U. S. Volume 7, No. 2, page 301, 1926 参照)。

又地表下の沈下係數は、地表下の深さ、加重面積の大小に依りて一定に定め難きも、地表下の深さ餘り深からず、又加重面積餘り大ならず、又小ならざる時は大體 Dr. Prof. Charles Terzaghi 氏の謂へる處に依るを妥當と考へたる故に、其の著 Erdbaumechanik (s. 264) に示せるものに依れり、次に示すものが即ち夫れである。

$$K_0 = \frac{K}{1 + \frac{0.5l}{r}} \dots\dots\dots (41)$$

但し K, K_0 : 深さ $l, 0$ の沈下係數, r : 加重面積の平均半徑

今此の式に依りて、東京市電枕木 4 挺分複線軌道の場合の式を作れば、

$$K = K_0 \left(1 + \frac{h_0 - 0.58}{12.62} \right) \dots\dots\dots (42)$$

但し加重板は軌條と見做したるを以て、地表よりの深さ h_0 より軌條の高さ 0.58 呎を減じたるものを加重板よりの深さとせり。

斯くして K_0 を 50 封度毎吋³ とする時の地表下 3 呎、6 呎及び 10 呎の所の沈下係數を計算すれば、59.5 封度毎吋³、71.5 封度毎吋³ 及び 87.5 封度毎吋³ となる (第十圖参照)。

而して本節の沈下係數に依りて第十圖に示す處の東京市電 30 噸電車が複線軌道枕木 4 挺分に掛かる場合の分布荷重に對する軌道下地盤の沈下を計算せる者が次に示す第三表である

第三表 軌道中心線の最大分布荷重及び地盤沈下表

土被 (呎)	軌道中心線の 最大分布荷重		沈下係數 K (封度/吋 ³)	軌道下地盤 の沈下 d (吋)	荷重の分 布範圍の $1/2$ (h) (呎)
	(封度/吋 ²)	(封度/吋 ²)			
3	622	4.32	59.5	0.0726	11.17
6	332	2.30	71.5	0.0322	14.17
10	182	1.26	87.5	0.0144	18.17

備考：本表作製の場合 $K_0 = 50$ 封度毎吋³とせり。

第六節 計算上使用すべき諸數量

軌道下埋設管路の縦彎曲應力を計算する際、管路を桁と考ふる時の桁の單位長に加はる荷重は管路の徑に依りて異り、又桁の物量力率或は斷面係數も管路の徑に依りて異なる故、夫れ等のものを次に表示して計算に便す。

第四表 軌道下埋設管路諸數量表 (第十圖參照)

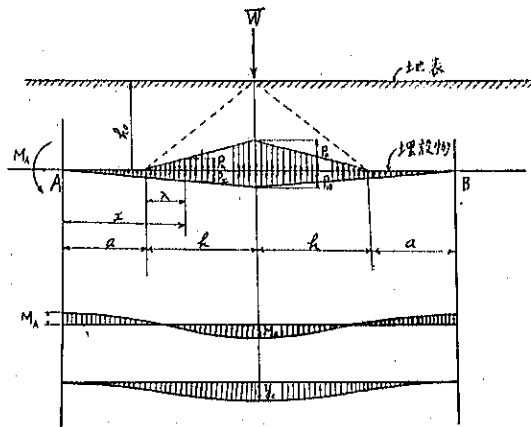
公稱 内徑	物量力率 I_0	斷面係數 S_0	軌道中心線の最大分布荷重 p_0		
			土被3呎の場合	土被6呎の場合	土被10呎の場合
8吋	34.8吋 ⁴	7.8吋 ³	414封度毎呎	222封度毎呎	122封度毎呎
36	5610.0	301.0	1866	996	546
60	36200.0	1160.0	3110	1630	910

但し S_0 及び I_0 には各 0.316 を乘じてある (前節參照)。

第七節 軌道下埋設管路の縦彎曲應力

軌道下埋設管路に作用する荷重は本章第一節及び第二節に假定せる如く上下兩方向より加はる處の對稱群集荷重なり。然るに群集荷重は單一荷重の集合なれば單一に荷重に對する彈曲線の集合は群集荷重に對する彈曲線である譯である。而して單一荷重に對する理論上の彈曲線は他の假定上の彈曲線と極めて近似せる事は第二章節二節に依りて明かれば、單一荷重に對する假定上の彈曲線の集合は群集荷重に對する理論上の彈曲線に近似せる譯である。而して又理論上の彈曲線も假定上の彈曲線も其の性質のみならず、其の大きさに於ても共に近似せる如く假定を定め得るを以て、群集荷重は單一荷

第十七圖



重の集合なりとの見地より、尙ほ一步を進めて一氣に群集荷重に對する假定上の近似彈曲線を求め、其の求められたる彈曲線に依りて軌道下埋設管路の縦彎曲應力を算出せんとするのが即ち本節である。

第十七圖に示す如く分布荷重及び土の反壓も共に直線變化にして、分布荷重の總和は土の反壓の總和に等しかるべきに依り、分布荷重の最大値を p_0 とし、土の反壓の最大値を p_1 とすれば、

$$p_0 h = p_1 (a + h)$$

$$\therefore p_1 = \frac{p_0 h}{a + h} \dots \dots \dots (43)$$

然るに p_λ 及び p_x を其の原點から λ 及び x なる距離に於ける分布荷重の大きさとすれば、分布荷重は直線變化であるから、

$$p_\lambda = \frac{p_0 \lambda}{h} \dots \dots \dots (44)$$

$$p_x = \frac{p_1 x}{(a + h)} \dots \dots \dots (45)$$

$$p_x = \frac{p_0 h x}{(a + h)^2} \dots \dots \dots (46)$$

然るに第二章第一節 (7) 式に依れば、

$$- \frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{1}{EI} p_x$$

にして、彈曲線の第四微分係数は分布荷重又は土の反壓を EI にて除したるものに等しき故に、

$$- EI \frac{d^4 y}{dx^4} = p_x - p_\lambda \dots \dots \dots (46')$$

$$= \frac{p_0 h x}{(a + h)^2} - \frac{p_0 \lambda}{h} = p_0 \left\{ \frac{h}{(a + h)^2} x - \frac{\lambda}{h} \right\} \dots \dots \dots (47)$$

$$- EI \frac{d^3 y}{dx^3} = p_0 \left\{ \frac{h}{(a + h)^2} \times \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2h} \lambda^2 \right\} \dots \dots \dots (48)$$

但し彈曲線の性質は原點に於ては、 $EI d^2 y / dx^2$ は零なる様にせるを以て、積分常數は零なり、又 (48) 式を積分すれば、

$$- EI \frac{d^2 y}{dx^2} = p_0 \left\{ \frac{h}{(a + h)^2} \times \frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{6h} \lambda^3 \right\} + C \dots \dots \dots (49)$$

彈曲線は原點に於て $EI d^2 y / dx^2 = M_A$ なる如き固定力率を有するを以て、積分常數は $C = M_A$ である、故に (49) 式は

$$- EI \frac{d^2 y}{dx^2} = p_0 \left\{ \frac{h}{(a + h)^2} \times \frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{6h} \lambda^3 \right\} + M_A \dots \dots \dots (50)$$

(50) 式を更に積分すれば、

$$-EI \frac{dy}{dx} = p_0 \left\{ \frac{h}{(a+h)^2} \times \frac{1}{24} x^4 - \frac{1}{24h} \lambda^4 \right\} + M_A x \dots\dots\dots(52)$$

但し彈曲線は原點に於ては水平を爲す様になれるを以て、積分常數は零なり、又(52)式を積分すれば、

$$-EIy = p_0 \left\{ \frac{h}{(a+h)^2} \times \frac{1}{120} x^5 - \frac{1}{120h} \lambda^5 \right\} + \frac{1}{2} M_A x^2 \dots\dots\dots(52)$$

但し彈曲線は原點に於ては縦距は零なるを以て、積分常數は零なり、依つて(52)式に依る彈曲線と原位置線とに依りて包まるゝ面積を徑間の左半で A_0 とすれば、

$$\begin{aligned} A_0 &= - \int y dx = \frac{1}{EI} \left[p_0 \left\{ \frac{h}{(a+h)^2} \times \frac{1}{720} x^6 - \frac{1}{720h} \lambda^6 \right\} + \frac{1}{6} M_A x^3 \right]_{\lambda=h}^{x=a+h} \\ &= \frac{p_0 h}{720 EI} \left\{ (a+h)^6 - h^6 \right\} + \frac{1}{6} M_A (a+h)^3 \dots\dots\dots(53) \end{aligned}$$

依つて今埋設管路の幅を D とし、土の沈下係数を K とすれば、土の反壓の總和は埋路を沈下せしめし力に等しく、管路を沈下せしめし力の總和は分布荷重の總和に等しかるべきに依り、

$$A_0 K D = - \frac{1}{2} p_0 h \dots\dots\dots(54)$$

或は(53)式より

$$\frac{p_0 h K D}{720 EI} \left\{ (a+h)^6 - h^6 \right\} + \frac{1}{6} M_A (a+h)^3 = - \frac{1}{2} p_0 h \dots\dots\dots(54^a)$$

但し M_A は原點に於ける固定力率にして、之れは徑間の中心では彈曲線への切線は水平であるとすれば求められるから、(52)式に於て $x=a+h$, $\lambda=h$ なる時 $dy/dx=0$ とすれば良い、即ち

$$M_A = - \frac{p_0 h}{24(a+h)} \left\{ (a+h)^2 - h^2 \right\} \dots\dots\dots(55)$$

従つて(54^a)式は

$$\frac{p_0 h K D}{720 EI} \left\{ (a+h)^6 - h^6 \right\} - \frac{p_0 h (a+h)^2}{144} \left\{ (a+h)^2 - h^2 \right\} = - \frac{1}{2} p_0 h \dots\dots\dots(56)$$

本式に於ては未定量は a のみであるから、 a は本式に依りて求められる。其の求め方は任意なるも、兩邊を $p_0 h$ にて除し、 EI/KD を乘じ簡単にすれば、

$$-4(a+h)^4 - h^4 + 5h^2(a+h)^2 + \frac{360EI}{KD} = 0 \dots\dots\dots(56^a)$$

或は

$$4a^4 + 16a^3h + 19a^2h^2 + 6ah^3 - \frac{360EI}{KD} = 0 \dots\dots\dots(56^b)$$

此の三つの式は a を求むる式にして、 a が求めれば彈曲線の基線長は $(a+h)$ で表はされる。又(56)式、(56^a)式及び(56^b)式を計算するには、 h, E, I, K, D 等の單位を h を以、 E を對度/吋²、

I を時⁴, K を封度/時²/時, D を時にて表はせば, a が呎にて算出されるためには,

$$4a^4 + 16a^3h + 19a^2h^2 + 6ah^3 - \frac{360 EI}{KD(12)^4} = 0 \dots\dots\dots(57)$$

となる。今一例を挙げれば地表下 6 呎, 換言すれば地表埋設管路頂まで 6 呎の處に徑 36 時の管路ありて, 軌道荷重を受くる時は第三章第六節第三表に依りて

$$h = 11.17 \text{ (呎)}, \quad K = 71.5 \text{ (封度/時}^2\text{/時)}$$

又同節第四表に依りて

$$I = I_0 = 5\,610 \text{ (時}^4\text{)}, \quad D = 36 \text{ (時)}$$

今 $E = 12\,000\,000 \times 0.316 = 3\,790\,000 \text{ 封度/時}^2$

とすれば, (57) 式より,

$$4a^4 + 16a^3 \times 11.17 + 19a^2 \times 11.17^2 + 6a \times 11.17^3 - \frac{360 \times 3\,790\,000 \times 5\,610}{71.5 \times 36 \times (12)^4} = 0$$

$$\therefore a \doteq 4.0 \text{ (呎)}$$

但し計算は計算尺を以て索試法に依れり。斯の如くして求められたる a の値は本節第五表にあり。従つて此處に求められたる a を以て管路の徑間中心に於ける彎曲力率 M_c 及び撓度 y_c を求むるには, 其の式は M_c は (50) 式に於て $x = (a+h)$, $\lambda = h$ とし, (55) 式の M_A を代入すれば,

$$M_c = p_0 \left\{ \frac{1}{6} h(a+h) - \frac{1}{6} h^2 \right\} - \frac{p_0 h}{24(a+h)} \{(a+h)^2 - h^2\} = \frac{p_0 h a}{24(a+h)} (3a+2h) \dots\dots(58)$$

又 y_c は (52) 式に同じく $x = a+h$, $\lambda = h$ 及び M_A を代入して,

$$y_c = p_0 \left\{ \frac{h(a+h)^2}{120} - \frac{1}{120} h^3 \right\} - \frac{1}{2} \times \frac{p_0 h}{24(a+h)} \{(a+h)^2 - h^2\} (a+h)^2$$

$$= -\frac{p_0 a h}{240 EI} \{3a^2 + 9ah + 4h^2\} \dots\dots\dots(59)$$

(58) 式及び (59) 式を軌道下埋設管路に對して計算せる計算結果は本節第五表にあり, 又 $M_c > M_A$ であるから, 縦彎曲應力 f は,

$$f = \frac{M_c}{S_0} \dots\dots\dots(60)$$

に依りて計算せるものも本節第五表にあり。但し S_0 は管路の断面係數にして, 第三章第六節第四表にあり。

第五表

管徑 (吋)	土被 3 呎の場合				土被 6 呎の場合				土被 10 呎の場合			
	a (吋)	M_c (吋封度)	y_c (吋)	f (吋封度/時 ²)	a (吋)	M_c (吋封度)	y_c (吋)	f (吋封度/時 ²)	a (吋)	M_c (吋封度)	y_c (吋)	f (吋封度/時 ²)
8	0.50	2 370	-0.070	304	0.22	705	-0.0317	90	0.09	200	-0.0143	21
36	5.90	122 000	-0.0457	405	4.00	62 600	-0.0262	208	2.27	23 800	-0.0129	79
60	10.96	475 000	-0.0390	409	8.30	231 000	-0.0211	199	5.59	103 000	-0.0113	89
地盤沈下			-0.0723				-0.0323				-0.0144	

第五表に依つて見れば、縦彎曲應力は僅々略 20~400 封度毎吋²に過ぎずして、此の程度ならば、軌道下埋設管路は軌道荷重に對して充分安全であると謂ひ得る。

第五表の値を略圖に畫きたるものが即ち附圖第一及び附圖第二である。但し M_A は (55) 式に依りて計算せるものである。

尚ほ本節に於ては分布荷重及び土の反壓は (44) 式及び (46) 式の如く、軌道中心線より左右對稱に直線的に遞減するものなりと假定したれども、餘弦又は正弦的に遞減するものと

$$p_x = \frac{p_0 h}{2(a+h)} \left(1 - \cos \frac{\pi x}{a+h}\right) \dots\dots\dots (61)$$

又は

$$\left. \begin{aligned} p_\lambda &= \frac{1}{4} \pi p_0 \sin \frac{\pi}{2h} \lambda \\ p_x &= \frac{1}{4} \frac{\pi p_0 h}{(a+h)} \sin \frac{\pi x}{2(a+h)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (62)$$

の如くすれば、(61) 式に對しては

$$\left. \begin{aligned} M_A &= -\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{2\pi^2}\right) \frac{p_0 h}{a+h} \{(a+h)^2 - h^2\} \\ M_C &= M_A + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2}\right) p_0 a h \\ y_C &= -\frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} (a+h)^2 M_A + \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{2\pi^2}\right) p_0 a h^3 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{4\pi^2} - \frac{1}{\pi^4}\right) p_0 h \{(a+h)^2 - h^2\} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (63)$$

又 (62) 式に對しては、

$$\left. \begin{aligned} M_A &= -\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2}\right) \frac{p_0 h}{a+h} \{(a+h)^2 - h^2\} \\ M_C &= M_A + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\right) p_0 a h \\ y_C &= -\frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} (a+h)^2 M_A + \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2}\right) p_0 a h^3 + \left(\frac{1}{6} - \frac{4}{\pi^3}\right) p_0 h \{(a+h)^2 - h^2\} \right] \end{aligned} \right\} (64)$$

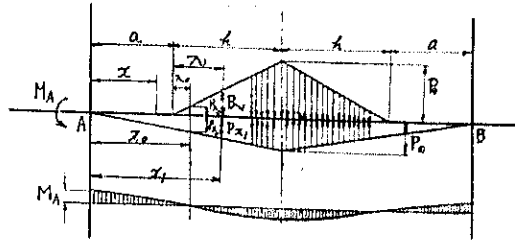
となり、何れも近似のものである。

斯の如く分布荷重及び土の反壓を假定する事にすれば、其の假定を注意工夫する事に依りて殆んど理論上の彈曲線に近迫せる假定上の彈曲線を得る譯である。是即ち假定撓度線の方法と名づけて著者が提唱する處のものにして、第三章第三節末尾にも記述せり。即ち此の意味に於て本節 (61) 式及び (62) 式に示す p_x の式、又は第三章第二節 (24) 式に示すものは何れも假定撓度線と名づくるのである、本節 (46) 式も亦同じ。

第八節 反 曲 點

前節の如く、土の反壓を假定せる場合、縦彎曲式 (52) 式に於て反曲點が如何なる状態にあるかに就て懸念なきに非れば、次の第十八圖に依りて反曲點は一點のみなる事を明かにせん。

第十八圖



$x < a$ の間に於ては縦彎曲式は (50) 式に依りて、

$$M = \frac{p_0 h x^3}{6(a+h)^2} + M_A$$

然るに (55) 式に依りて

$$M_A = -\frac{p_0 h}{24(a+h)} \{(a+h)^2 - h^2\}$$

なるを以て、

$$M = \frac{p_0 h x^3}{6(a+h)^2} - \frac{p_0 h}{24(a+h)} \{(a+h)^2 - h^2\}$$

反曲點に於ては $M=0$ なるを以て、

$$x = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \sqrt[3]{(a+h) \{(a+h)^2 - h^2\}} \dots \dots \dots (65)$$

又 $x > a$ なる時は反曲點までの距離を各 x_0, λ_0 とし、 $x_1 > x_0, \lambda_1 > \lambda_0$ なる點を取れば、(46°) 式を二度積分すれば、反曲點に於ては

$$-EI \frac{d^2 y}{dx^2} = \int_0^{x_0} \int_0^\infty p_2 dx dx - \int_0^{\lambda_1} \int_0^\lambda p_\lambda d\lambda d\lambda + M_1 = 0$$

にして、 $M_1 < 0$ なるを以て、

$$\int_0^{x_0} \int_0^\infty p_2 dx dx - \int_0^{\lambda_0} \int_0^\lambda p_\lambda d\lambda d\lambda > 0$$

然るに

$$\left[\int_0^{x_1} \int_0^\infty p_2 dx dx - \int_0^{\lambda_1} \int_0^\lambda p_\lambda d\lambda d\lambda \right] > \left[\int_0^{x_0} \int_0^\infty p_2 dx dx - \int_0^{\lambda_0} \int_0^\lambda p_\lambda d\lambda d\lambda \right]$$

$$\dots \dots \dots \int_0^{x_1} \int_0^\infty p_2 dx dx - \int_0^{\lambda_1} \int_0^\lambda p_\lambda d\lambda d\lambda + M_1 > 0 \dots \dots \dots (66)$$

即ち (65) 式及び (66) 式に依りて反曲點は只一點のみなる事を知る、依つて反曲點を求めらるには (50) 式より、

$$\frac{p_0 h x_0^3}{6(a+h)^2} - \frac{p_0 (x_0 - a)^3}{6h} - \frac{p_0 h}{24(a+h)} \{(a+h)^2 - h^2\} = 0$$

なる式に第三表の h 及び第四表の p 。並に第五表の a の値を代入して索試法に依りて求むれば、良く其の結果は次に掲ぐる第六表である。

第六表 反曲點表

管 徑 (吋)	土 被 (呎)		
	3.00	6.00	10.00
8	5.90	8.00	10.00
36	9.30	9.50	10.50
60	12.68	12.05	12.69

第四章 結 論

以上第二章及び第三章に述ぶる如く、軌道下埋設管路の縦彎曲に関する解法は、其の値は幾分近似的なるを免れずと雖も、其の理論上の根據は充分嚴格にして、第三章第七節第五表に示す應力表の如きは、其の眞値と相隔つる事決して遠からざるべし。特に第二章第一節(18)式に於て $x=0$ なる時 $dy/dx=0$ 及び $x=0$ なる時 $d^2y/dx^2=0$ なる二つの條件が同時に成立するために、原點より單一荷重 P 。までの距離 a が近似的に $3\pi/4\beta$ なる事は本論の如き無限長の埋設物に関する縦彎曲應力を計算する上に極めて重要にして、且つ嚴格なる事實たるべし。

然るに實際技術に於ては軌道下埋設管路は其の應力の計算充分明かならざりしためか、多大の經費と勞力とを掛けて頑丈なる防護工を施す現状なるは眞に痛恨に堪へず。之れ其の據る處は 現行本邦軌道法中軌道建設規定第三節第十四條に、“軌道を地下工作物と交叉又は接近して敷設する爲其の工作物を防護する必要ある時は適當の設備を爲すべし”なる規定あるを過重して、只因襲的に斯くなれるものにして、應用力學の進歩せる今日斯の如き慣例の現存せるは邦家のため眞に痛恨に堪へず。

尙ほ軌道下埋設管路は圓管としての應力は、徑極めて大なる場合と土被極めて淺き場合とを兼ね備へたる場合の極めて特例を除く外は、殆んど絶體安全と謂ひ得る事第三章第三節にも略述せり。

又軌道下埋設管路が電車の衝擊又は振動に依りて多年の内に幾分支障を受くるには非ずやとの懸念に對しては、鋼桁橋又は鋼構橋等に取付けられたる水道管又は瓦斯管の例を見ても其の懸念全然なき事明かなり。

尙ほ又一朝震災の如き天變の際、軌道下埋設管路が破壊又は漏水する事なきや否との懸念に對しては、東京市 30 年の經驗に依れば、特に軌道下なりし故を以て、斯かる災厄に會ひたる事なし。

尙ほ軌道下埋設管路は他日修理又は移轉等の爲、其の掘返し又は引抜きに便ずるため豫め

軌道との縁を切り置く必要ありや否やと云へば、水道管の如きは一度埋設すれば、尠くとも30箇年位は其の儘置けるものなれば、何かの場合必要あるを見越して全部一様に豫め防護し置くは極めて不經濟の事なり。

之れを要するに、軌道下埋設管路の防護工の問題は公安上の問題に非ずして、防護者と被防護者との間に於ける補償關係に依る經濟上の問題である事が、其の力學的探究に依りて闡明せられた譯である。而して其の解決の第一段は先づ現行本邦軌道法中軌道建設規定第三節第十四條中“必要ある時は”の意味を力學的に解釋する事である。

(以上)

附 表 試 験 荷 重 及 び 測 定 撓 度 並 び n の 値

試 験 荷 重 P (kg)												測 定 撓 度 y_0 (mm)										$n = \frac{E_0}{E} \text{ 又 是 } \frac{I_0}{I} \text{ の 値}$													
4''B	4''C	6''B	6''C	12''B	12''C	14''B	14''C	24''A	24''B	24''C	24''C	4''B	4''C	6''B	6''C	12''B	12''C	4''B	14''C	24''A	24''B	24''C	24''C	4''B	4''C	6''B	6''C	12''B	12''C	14''B	14''C	24''A	24''B	24''C	24''C
500	500	1000	500	500	500	500	500	1000	500	1000	500	0.4	2.2	0.5	0.3	0.4	0.15	0.3	0.54	0.3175	0.15	0.0609	0.10	1.224	0.521	0.843	0.770	0.338	0.5525	0.303	0.226	0.166	0.171	0.330	0.2095
1000	800	1500	1000	1000	1000	1000	1000	2000	1000	2000	1000	3.3	6.4	1.9	1.3	0.5	0.20	0.4	0.60	0.4762	0.20	0.1219	0.15	0.6025	0.387	0.530	0.523	0.4275	0.666	0.371	0.303	0.192	0.209	0.380	0.242
2000	1000	2000	1500	1500	1500	1500	1400	3000	1500	3000	1500	11.5	8.8	5.4	3.1	0.6	0.35	0.5	1.00	0.5556	0.30	0.2108	0.20	0.420	0.369	0.363	0.415	0.479	0.625	0.406	0.278	0.217	0.209	0.353	0.256
—	1200	2400	2000	2000	2000	2000	1600	4000	2000	4000	2000	—	13.3	8.0	6.3	0.7	0.80	0.6	2.60	0.6350	0.30	0.3378	0.30	—	0.328	0.327	0.336	0.512	0.479	0.429	0.299	0.235	0.2235	0.322	0.242
—	1300	2500	2200	2500	2500	2500	1800	5000	2500	5000	2500	—	15.0	8.4	9.0	0.9	1.70	0.8	4.80	0.7144	0.50	0.4546	0.35	—	0.325	0.322	0.294	0.505	0.367	0.415	0.1438	0.248	0.224	0.310	0.250
—	1400	3000	—	3000	3000	2800	—	6000	3000	6000	3000	—	16.5	9.8	11.5	1.9	3.40	1.1	—	0.8731	0.65	0.6070	0.40	—	0.319	0.330	0.248	0.380	0.284	0.374	—	0.245	0.201	0.295	0.256
—	1500	3200	—	3500	3500	3000	—	7000	3500	7000	3600	—	17.5	11.7	12.5	2.8	5.00	1.3	—	1.1120	0.80	0.8483	0.50	—	0.321	0.312	0.238	0.338	0.254	0.357	—	0.234	0.196	0.269	0.251
—	1700	—	2300	4000	4000	3500	—	8000	4000	8000	4000	—	19.0	—	13.5	3.8	7.50	1.8	—	1.3493	1.00	1.1507	0.60	—	0.328	—	0.246	0.310	0.221	0.327	—	0.223	0.187	0.246	0.242
—	1800	—	—	4500	4300	—	—	9000	4500	9000	4600	—	19.6	—	14.5	4.7	10.00	1.9	—	1.6670	1.20	1.5747	0.80	—	0.332	—	0.238	0.296	0.198	0.295	—	0.217	0.181	0.224	0.224
—	1900	—	—	5000	—	4000	—	10000	5000	10000	5000	—	20.3	—	15.5	5.1	11.0	2.5	—	1.9049	1.50	1.8490	0.90	—	0.335	—	0.229	0.300	0.189	0.297	—	0.214	0.171	0.217	0.221
—	—	—	—	5500	—	4500	—	11000	5500	11000	5500	—	—	—	22.5	5.5	12.0	3.25	—	2.1430	1.80	2.0903	1.20	—	—	—	0.190	0.303	0.181	0.276	—	0.212	0.1635	0.215	0.200
—	—	—	—	6000	—	4800	—	12000	6000	12000	6000	—	—	—	23.5	5.9	13.0	3.90	—	2.4605	2.15	2.4605	1.40	—	—	—	0.1865	0.305	0.174	0.260	—	0.206	0.156	0.206	0.194
—	—	—	—	6500	—	5000	—	13000	6500	13000	6500	—	—	—	28.5	6.4	14.0	4.4	—	2.8570	2.40	2.9082	1.70	—	—	—	0.1695	—	0.168	0.261	—	0.1995	0.154	0.1975	0.183
—	—	—	2500	7000	—	5500	—	14000	7000	14000	7000	—	—	—	29.0	7.1	15.0	5.2	—	3.4000	2.70	3.0606	2.00	—	—	—	0.1748	—	0.162	0.2415	—	0.190	0.150	0.200	0.175
—	—	—	—	7500	—	6200	—	15000	7500	15000	8000	—	—	—	—	8.0	21.0	5.0	—	3.8099	3.00	3.9394	2.33	—	—	—	—	0.293	0.137	0.247	—	0.1855	0.148	0.1825	0.1725
—	—	—	—	8000	—	6500	—	16000	8000	16000	9000	—	—	—	—	9.1	—	6.15	—	4.5274	3.30	4.4703	2.70	—	—	—	—	0.300	—	0.242	—	0.176	0.1455	0.177	0.171
—	—	—	—	8500	—	7000	—	17000	8700	17000	10000	—	—	—	—	10.5	—	6.75	—	5.7940	3.60	5.1515	3.10	—	—	—	—	0.272	—	0.239	—	0.1605	0.1455	0.170	0.168
—	—	—	—	8800	—	7000	—	—	9000	18000	11000	—	—	—	—	13.0	—	7.95	—	—	4.10	5.9384	3.50	—	—	—	—	0.249	—	0.226	—	—	0.1385	0.163	0.166
—	—	—	—	—	—	—	—	—	9500	19000	12000	—	—	—	—	14.0	—	—	—	—	4.55	6.1822	4.10	—	—	—	—	0.240	—	—	—	—	0.1355	0.1645	0.185
—	—	—	—	—	—	—	—	—	10000	20000	13000	—	—	—	—	15.0	—	—	—	—	4.95	8.1811	4.70	—	—	—	—	0.232	—	—	—	—	0.133	0.146	0.1555
—	—	—	—	—	—	—	—	—	10500	21000	14000	—	—	—	—	15.5	—	—	—	—	5.40	9.090	5.60	—	—	—	—	0.328	—	—	—	—	0.1305	0.1422	0.148
—	—	—	—	—	—	—	—	—	11000	—	15000	—	—	—	—	—	—	—	—	—	5.80	—	6.25	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.1290	—	0.145
—	—	—	—	—	—	—	—	—	11500	—	16000	—	—	—	—	—	—	—	—	—	6.30	—	6.80	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.1265	—	0.144
—	—	—	—	—	—	—	—	—	12000	—	17000	—	—	—	—	—	—	—	—	—	6.60	—	8.50	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.1260	—	0.1325
—	—	—	—	—	—	—	—	—	12500	—	18000	—	—	—	—	—	—	—	—	—	6.95	—	9.30	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.1255	—	0.130
—	—	—	—	—	—	—	—	—	13000	—	19000	—	—	—	—	—	—	—	—	—	7.30	—	10.50	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.125	—	0.126
—	—	—	—	—	—	—	—	—	13500	—	20000	—	—	—	—	—	—	—	—	—	7.60	—	12.30	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.1245	—	0.1192
—	—	—	—	—	—	—	—	—	14000	—	20600	—	—	—	—	—	—	—	—	—	8.60	—	13.56	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.1240	—	0.1158
—	—	—	—	—	—	—	—	—	14600	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	8.60	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.1220	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	15000	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	9.10	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.1200	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	15500	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	9.60	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.119	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	16000	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	10.50	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.1155	—	—

土木學會誌第十八卷第三編附表

