論說報告

土木學會誌　第十七卷第十二號　昭和六年十二月

單鉸拱振動に關する考究

會員　工學博士　三　浦　七　郎

On the Vibration of One-hinged Arch

By Shichiro Miura, Dr. Eng., Member.

內容梗概

本文は鐵筋コンクリート單鉸拱の自己振動に關する研究にして實驗は著者が曩に發表せる單鉸拱模型試驗に於けると同供試體につき昭和6年6月內務省土木試驗所岩淵分室に於て行ひたるものなり。著者は拱の自己振動數を算定し實驗による拱頂振動數と比較研究し以て單鉸拱振動に關する性態を明にせんと努めたり。之れにより拱の振動數は無載荷の場合には突桁として算定せる振動數に略一致し，荷重の加はるに從つて單鉸拱の橋臺の水平變位を考慮に入れて算定せる振動數に接近せる値を得る事を示せり。

目　　次

緒　　論

近代文明の進展と共に，頓に車輛重量の增加，交通速度の增大を來し，之れが爲，構造物に尠からざる動的影響を與ふるに至れり。故に昔時は靜的荷重狀態のみにて安全に設計せられし構造物も，夫れのみにては不安を感ずるに至れり。之れが爲各國にては荷重の動的影響

を考慮に入るゝと雖，其の性質複雜にして僅かに荷重に衝擊係數を乘じて設計荷重を大にするか，或は安全率を大にして許容强度を低下せしむるかの方法に依り構造物の安全を圖れり。而して此の衝擊係數及び安全率增大の決定を理論的に證明するには，構造物の振動性態を明らかにする事肝要にして，近時構造物振動の研究の盛なる所以玆に存す。且つ構造物の振動週期，振動の形態，振動衰弱の緩和等よりして其の構造物の種々の性質を知悉し得べく，猶又構造物に週期的荷重，例へば足並を揃へし群集荷重の加はりし場合に，其の週期が構造物の自己振動週期と一致せる時共鳴作用を起し，構造物は破壞さるゝに至るべし，斯る理由より見ても，構造物振動性態の研究は必要缺くべからざるものにして，振動性態の根幹を爲すものは構造物の自己振動なりとす。

著者は曩に單鉸拱の種々の性質に就き研究實驗を爲せしが，本編に於ては單鉸拱の自己振動に就き研究せむとす。荷重狀態は等布滿載荷重とす。

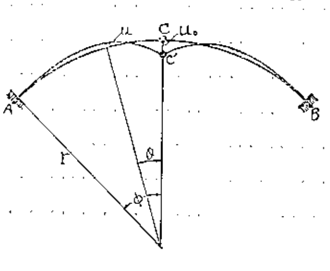
第一章　等布荷重を滿載せし場合の單鉸拱振動數の算定公式

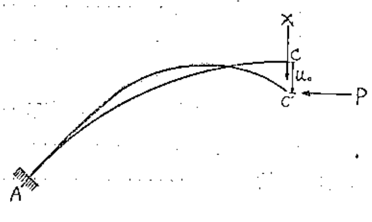
1. 橋臺不動の場合の振動數算定公式

(A)　振動曲線

彈性體の振動週期乃至振動數を近似的に算定するには，Lord Rayleigh に由つて示されたる勢力の方法 (Energy method) を用ふること便利なり (Lord Rayleigh; Theory of Sound Vol. I §89)。本法に由る時は最初振動曲線を假定する必要あるも，振動曲線を合理的に假定せば假令其の曲線が正確ならざる場合にも，振動數には殆んど誤差なきの利あり。單鉸拱は一般に任意の拱軸を有すると雖，近似的には之れを圓弧と考ふるを得べく，且つ EJ は一般に定數ならざるも振動曲線を考ふる際には，定數と考ふるを得べし。

第一圖





今第一圖の如き剛性率 EJ 定數なる圓弧形單鉸拱が，P, X の力を受けて平衡狀態 ACB より AC'B の如く變位せしものとすれば，AC 間の (r, θ) 點の放射變位 u の微分方程式は

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=-\frac{Mr^2}{EJ} \quad \cdots\cdots (1)$$

にて與へらる。但し

M＝彎曲力率
E＝彈性體の彈性率
J＝惰性率
r＝拱軸の半徑

然して

$$M=Pr(1-\cos\theta)-Xr\sin\theta \qquad (2)$$

故に (2) 式を (1) 式に代入して

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=-\frac{Pr^3}{EJ}+\frac{Pr^3}{EJ}\cos\theta+\frac{Xr^3}{EJ}\sin\theta \qquad (3)$$

なる微分方程式を得。

微分方程式 (3) の一般解は

$$u=A\cos\theta+B\sin\theta-\frac{Pr^3}{EJ}+\frac{Pr^3}{2EJ}\theta\sin\theta-\frac{Xr^3}{2EJ}\theta\cos\theta$$

$$=A\cos\theta+B\sin\theta-2C+C\theta\sin\theta-D\theta\cos\theta \qquad (4)$$

にて與へらる。

(4)式中の定數は次の環境條件より決定せらる。

I. 起拱點 (r,ϕ) に於ては放射變位は 0 なり。即ち

$$\theta=\phi,\quad u=0 \qquad (5)$$

II. 起拱點 (r,ϕ) に於ては角變化なし。即ち

$$\theta=\phi,\quad \frac{du}{d\theta}=0 \qquad (6)$$

III. 鉸點 $(r,0)$ に於ては放射變位を u_0 とす。即ち

$$\theta=0,\quad u=u_0 \qquad (7)$$

IV. 起拱點と鉸點との間の軸線方向の變位は 0 なり。即ち

$$\int_0^\phi u\,d\theta=0 \qquad (8)$$

(5) 式より

$$A\cos\phi+B\sin\phi-2C+C\phi\sin\phi-D\phi\cos\phi=0 \qquad (9)$$

(6) 式より

$$-A\sin\phi+B\cos\phi+C\sin\phi+C\phi\cos\phi-D\cos\phi+D\phi\sin\phi=0 \qquad (10)$$

(7) 式より

$$u_0=A-2C \qquad (11)$$

(8) 式より

$$\int_0^\phi u\,d\theta=\Big[A\sin\theta-B\cos\theta-2C\theta+C(\sin\theta-\theta\cos\theta)-D(\cos\theta+\theta\sin\theta)\Big]_0^\phi=0$$

故に

$$[A\sin\phi-B\cos\phi-2C\phi+C(\sin\phi-\phi\cos\phi)-D(\cos\phi+\phi\sin\phi)]+[B+D]=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

(9), (10), (11), (12) 式より A,B,C,D を求むれば

$$A=u_0+2C$$

$$\left.\begin{aligned}
B&=\frac{\begin{bmatrix}-u_0[6\cos^4\phi-2\cos^5\phi-2\cos^3\phi-6\cos^2\phi+3\phi\sin\phi\cos^3\phi+2\phi\sin\phi\cos^2\phi\\ -2\sin^2\phi\cos^3\phi+\sin^2\phi\cos^2\phi+4\cos\phi-2\sin^2\phi\cos\phi-2\phi\sin\phi\cos\phi+\phi\sin^3\phi\cos\phi]\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}\sin\phi[6\cos^3\phi-2\cos^4\phi-6\cos^2\phi+2\cos\phi+2\phi\sin\phi\cos^2\phi+4\phi\sin\phi\cos\phi\\ -2\sin^2\phi\cos^2\phi-3\phi^2\cos\phi-\sin^2\phi\cos\phi]\end{bmatrix}}\\
C&=\frac{-u_0[2\cos\phi-2\cos^2\phi-\sin^2\phi\cos\phi]}{[6\cos^3\phi-2\cos^4\phi-6\cos^2\phi+2\cos\phi+2\phi\sin\phi\cos^2\phi+4\phi\sin\phi\cos\phi-2\sin^2\phi\cos^2\phi-3\phi^2\cos\phi-\sin^2\phi\cos\phi]}\\
D&=\frac{u_0[-3\phi\cos\phi+4\sin\phi\cos\phi-\sin\phi\cos^2\phi]}{[6\cos^3\phi-2\cos^4\phi-6\cos^2\phi+2\cos\phi+2\phi\sin\phi\cos^2\phi+4\phi\sin\phi\cos\phi-2\sin^2\phi\cos^2\phi-3\phi^2\cos\phi-\sin^2\phi\cos\phi]}
\end{aligned}\right\}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

然るに**第二圖**より

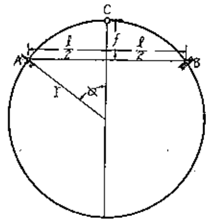
$$\frac{f}{l}=k$$

と置けば

$$(2r-f)f=\frac{l^2}{4}$$

$$r=\frac{1+4k^2}{8k}l$$

第　二　圖



故に

$$\left.\begin{aligned}\sin\phi&=\frac{4k}{1+4k^2}\\ \cos\phi&=\frac{1-4k^2}{1+4k^2}\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

又　$$\phi=\sin^{-1}\frac{4k}{1+4k^2} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

(14)式及び(15)式の値を(13)式中に代入すれば, A,B,C,D は鉸點に於ける放射變位 u 及び拱矢比 k の函數として表はされ一定なり。斯くして圓弧形單鉸拱の或る瞬間に於ける振動曲線決定さる。

(B)　振動數算定公式

今或る瞬間に於ける (r,θ) 點の放射變位を η とすれば

$$\eta=u\,\sin ct$$

にて表はさる。玆に

$$c=\frac{2\pi}{T} \qquad (T\text{は振動週期})$$

$u=$ (4) 式に示す如く (r,θ) のみの函數なり

然らば，等布滿載荷重を受けたる圓弧形單鉸拱を一つの振動系とすれば，或る瞬間に於ける振動系の有する位置の勢力は

$$V=2\times\frac{1}{2}\int_0^\phi\frac{M^2r}{EJ}d\theta$$

$$=2\times\frac{1}{2}\int_0^\phi\frac{\left(\frac{EJ}{r^2}\frac{d^2\eta}{d\theta^2}\right)^2}{EJ}rd\theta=\frac{E}{r^3}\int_0^\phi J\left(\frac{d^2\eta}{d\theta^2}\right)^2d\theta=\frac{E}{r^3}\int_0^\phi J\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}\right)^2\sin^2ct\,d\theta$$

$$=\frac{E\sin^2ct}{r^3}\int_0^\phi J\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}\right)^2d\theta$$

又或る瞬間に於ける振動系の有する運動の勢力は

$$T=2\times\frac{1}{2}\int_0^\phi\left(\frac{F\rho}{g}+\frac{p}{g}\right)\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2rd\theta=\frac{1}{g}\int_0^\phi(F\rho+p)u^2c^2\cos^2ct\,rd\theta$$

$$=\frac{c^2\cos^2ct}{g}\int_0^\phi(F\rho+p)u^2rd\theta$$

但し

F＝斷面積

ρ＝拱物質單位體積の重量

$p=\dfrac{\text{等布荷重}}{\text{拱單位長}}$

斯くして兩者の和は，各瞬間を通して一定ならざるべからず故に

$$\frac{E\sin^2ct}{r^3}\int_0^\phi J\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}\right)^2d\theta+\frac{c^2\cos^2ct}{g}\int_0^\phi(F\rho+p)u^2rd\theta=\text{定數}$$

時間 t にて微分すれば

$$\frac{2Ec\sin ct\cos ct}{r^3}\int_0^\phi J\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}\right)^2d\theta-\frac{2c^3\sin ct\cos ct}{g}\int_0^\phi(F\rho+p)u^2rd\theta=0$$

$$\frac{E}{r^3}\int_0^\phi J\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}\right)^2d\theta-\frac{c^2}{g}\int_0^\phi(F\rho+p)u^2rd\theta=0\quad\cdots\cdots(16)$$

(16) 式より c を求むれば

$$c=\frac{\sqrt{E\int_0^\phi J\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}\right)^2d\theta}}{r^2\sqrt{\frac{1}{g}\int_0^\phi(F\rho+p)u^2d\theta}}\quad\cdots\cdots(17)$$

一秒間の振動數を n とすれば

$$n=\frac{1}{T}=\frac{c}{2\pi}=\frac{\sqrt{E\int_0^\phi J\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}\right)^2d\theta}}{2\pi r^2\sqrt{\frac{1}{g}\int_0^\phi(F\rho+p)u^2d\theta}}\quad\cdots\cdots(18)$$

拱の厚さ一定ならざる場合は，惰性率及び斷面積も從て變化す。

今　J_s＝鉸點に於ける惰性率

J_k＝起拱點に於ける惰性率

$\alpha=\dfrac{J_k-J_s}{J_s}$

F_s＝鉸點に於ける斷面積

F_k＝起拱點に於ける斷面積

$$\beta=\frac{F_k-F_s}{F_s}$$

とし，各點 (r,θ) に於ける惰性率及び斷面積が

$$\left.\begin{aligned}J&=J_s\left[1+\alpha\left(\frac{\theta}{\phi}\right)^2\right]\\F&=F_s\left[1+\beta\left(\frac{\theta}{\phi}\right)^2\right]\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(19)$$

の如く變化するものとせば (19) 式を (18) 式中に代入して，振動數

$$n=\frac{\sqrt{J_sE\int_0^\phi\left[1+\alpha\left(\frac{\theta}{\phi}\right)^2\right]\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}\right)^2d\theta}}{2\pi r^2\sqrt{\frac{1}{g}\int_0^\phi\left\{F_s\left[1+\beta\left(\frac{\theta}{\phi}\right)^2\right]\rho+p\right\}u^2d\theta}}\quad\cdots\cdots(20)$$

を得。(20) 式を變形すれば

$$n=\frac{32f^2}{\pi(l^2+4f^2)^2}\sqrt{gEJs}\frac{\sqrt{\int_0^\phi\left[1+\alpha\left(\frac{\theta}{\phi}\right)^2\right]\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}\right)d\theta}}{\sqrt{\int_0^\phi\left\{F_s\left[1+\beta\left(\frac{\theta}{\phi}\right)^2\right]\rho+p\right\}u^2d\theta}}\quad\cdots\cdots(21)$$

となる。

2. 橋臺の變位せる場合の振動數算定公式

地盤軟弱なる箇所に於ては，橋臺は荷重に由る水平推力の爲に，尠からざる變位をなし之れが爲，頂點鉸部に垂直撓度を起す。斯かる垂直撓度の量は拱の彈性的撓度に比して決して侮るべからざるものにして，曩に行へる單鉸拱撓度實驗に於ては彈性的撓度の 1.5 倍に及べり。斯かる場合には，振動數の算定に (21) 式を用ふる事は最早不可能にして，新に橋臺の變位を考慮に入れし振動數算定の公式を求めざるべからず。

橋臺の變位としては次の二つが擧げらる。卽ち

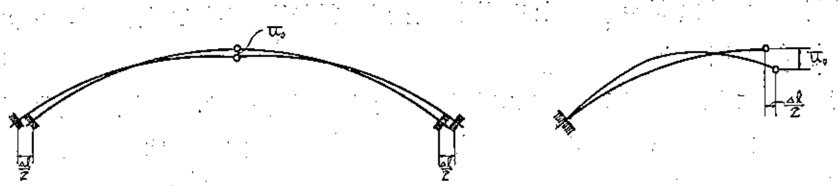
1 橋臺の水平變位

2 橋臺の回轉

にして，此の內橋臺の回轉は，曩に行へる單鉸拱撓度試驗に於ては，殆んど表はれざりき。故に今回橋臺の變位せる場合の單鉸拱振動數算定公式を求むる場合にも，橋臺の水平變位のみを考ふ。

今單鉸拱の振動曲線を考ふるに**第三圖**の如く鉸點に於て u_0 なる垂直變位をなせる時，兩橋臺間の相互水平變位を Δl とすれば，振動曲線を求むる微分方程式及び其の一般解は各々 (3) 式及び (4) 式に等し。唯定數 A,B,C,D は次の環境條件を滿足せざるべからず。

第 三 圖



I. 起拱點 (r,ϕ) に於ては放射變位 0 なり。即ち

$$\theta=\phi, \qquad u=0 \quad \cdots\cdots (22)$$

II. 起拱點 (r,ϕ) に於ては角變化なし。即ち

$$\theta=\phi, \qquad \frac{du}{d\theta}=0 \quad \cdots\cdots (23)$$

III. 鉸點 $(r,0)$ に於ては放射變位を u_0 とす。即ち

$$\theta=0, \qquad u=u_0 \quad \cdots\cdots (24)$$

IV. 起拱點と鉸點との間の軸線方向の變位は $\dfrac{\Delta l}{2}$ なり。即ち

$$\frac{1}{r}\int_0^{\phi} u\,d\theta=\frac{\Delta l}{2} \quad \cdots\cdots (25)$$

此の 4 條件により決定せらるゝ定數を A',B',C',D' とし，其の際の振動曲線の放射變位を u' とすれば，(4) 式より

$$u'=A'\cos\theta+B'\sin\theta-2C'+C'\theta\sin\theta-D'\theta\cos\theta \quad \cdots\cdots (26)$$

なる振動曲線の方程式を得。故に橋臺の水平變位を考慮せる場合の振動數 n' は，(26) 式の u' の値を (21) 式に代入すれば直ちに求めらる。即ち

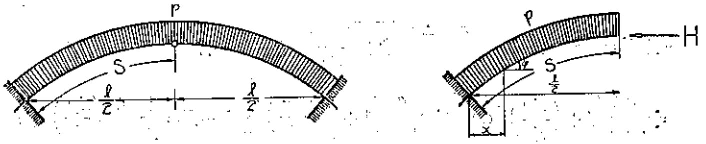
$$n'=\frac{32f^2}{\pi(l^2+4f^2)^2}\sqrt{gEJ}\;\frac{\sqrt{\int_0^{\phi}\left[1+\alpha\left(\frac{\theta}{\phi}\right)^2\right]\left(\frac{d^2u'}{d\theta^2}\right)\,d\theta}}{\sqrt{\int_0^{\phi}\left\{F_s\left[1+\beta\left(\frac{\theta}{\phi}\right)^2\right]\rho+p\right\}u'^2\,d\theta}} \quad \cdots\cdots (27)$$

なる式を得。

3. 實桁としての振動數算定公式

今**第四圖**の如き單鉸拱上に p なる等布荷重が滿載する場合には，兩拱半は鉸點に於て H なる水平推力を受けて靜的釣合を保つ。

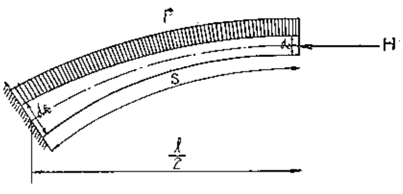
第 四 圖



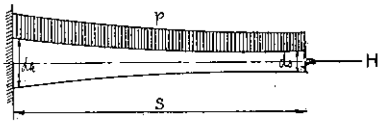
然して等布荷重なるを以て，各斷面の軸壓力は拱軸に一致すると考へ得るが故に，各斷面に於ては斷面の中軸に $N_x=\dfrac{H}{\cos\varphi}$ なる軸壓力を受く。拱矢比の小なる場合には，$\cos\varphi\doteqdot 1$ にして，$N_x\doteqdot H$ と置くことを得。

今斯る釣合より，何等かの原因にて自由振動を始むる場合には，兩拱半の振動に對する性

第　五　圖

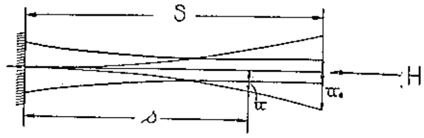


(a)



(b)

第　六　圖



態全然等しきを以て，拱の振動數を求るには，一つの振動系として，左右何れかの拱半を考ふれば可なり。然して**第五圖** (a) の如き拱半の振動は，結局同圖 (b) の如き直線狀突桁の振動と考へ得。横力 p は時間に無關係なるを以て，振動數には全然影響なし。故に單鉸拱の振動は結局**第六圖**の如き突桁の振動を考究すれば可なり。

振動數の算定には勢力の法を用ふ。振動曲線は合理的に

$$y=u\sin ct$$

$$y=u_0\left(1-\cos\frac{\pi s}{2S}\right)\sin ct \qquad (28)$$

と假定し得。但し振動の始源狀態は靜止狀態とし $c=\dfrac{2\pi}{T}$ とす。

然らば或瞬間に於て

(a) 突桁の彎曲に由て有する位置の勢力は

$$V=\frac{1}{2}\int_0^S\frac{M^2}{EJ}ds=\frac{E}{2}\int_0^S J\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 ds$$

(b) 突桁及び荷重の質量の有する運動の勢力は

$$T=\frac{1}{2}\int_0^S\left(\frac{\rho F}{g}+\frac{p}{g}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 ds$$

(c) 外力 H の有する位置の勢力は

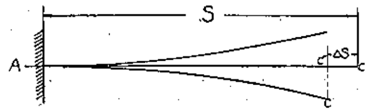
突桁の頭部が振動の或瞬間，柱軸の方向への變位を $\varDelta S$ とすれば (**第七圖**)

$$\varDelta S=Ac-Ac''=Ac'-Ac''=\int_0^{S-\Delta S}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}\,ds-(S-\varDelta S)$$

$$\doteqdot\int_0^S\sqrt{1+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}\,ds-S=\int_0^S\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right]ds-S=\frac{1}{2}\int_0^S\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 ds$$

斯の如く，H なる水平推力が或變位をなす爲の位置の勢力は

第 七 圖



$$T'=-\frac{H}{2}\int_0^S\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 ds$$

此の外，突桁の回轉に起因する勢力，外力の慣性に起因する勢力等考へ得るも，振幅小なる間は他の勢力に比して小なれば無視す。

斯くして振動系の或瞬間に於ける勢力の和一定ならば

$$\frac{E}{2}\int_0^S J\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 ds+\frac{1}{2}\int_0^S\left(\frac{\rho F}{g}+\frac{p}{g}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 ds-\frac{H}{2}\int_0^S\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 ds=\text{定數}$$

にして之れを時間 t に付きて微分すれば

$$\frac{E}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^S J\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 ds+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^S\left(\frac{\rho F}{g}+\frac{p}{g}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 ds-\frac{H}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^S\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 ds=0 \quad\ldots\ldots(29)$$

(29) 式は突桁として振動數を決定する條件式なり。(29) 式中に於て

(1) 第 一 項

$$y=u_0\left(1-\cos\frac{\pi}{2S}s\right)\sin ct,\qquad \frac{dy}{ds}=\frac{u_0\pi}{2S}\sin\frac{\pi}{2S}s\sin ct,\qquad \frac{d^2y}{ds^2}=\frac{u_0\pi^2}{4S^2}\cos\frac{\pi}{2S}s\sin ct$$

故に

$$\frac{E}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^S J\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 ds=\frac{E}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^S J\frac{u_0^2\pi^4}{16S^4}\cos^2\frac{\pi}{2S}s\sin^2 ct$$

$$=\frac{Eu_0^2\pi^4 c\sin ct\cos ct}{16S^4}\int_0^S J\cos^2\frac{\pi}{2S}s\,ds$$

(2) 第 二 項

$$y=u_0\left(1-\cos\frac{\pi s}{2S}\right)\sin ct,\qquad \frac{dy}{dt}=u_0c\left(1-\cos\frac{\pi s}{2S}\right)\cos ct$$

故に

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^S\left(\frac{\rho F}{g}+\frac{p}{g}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 ds=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^S\left(\frac{\rho F}{g}+\frac{p}{g}\right)u_0^2c^2\left(1-\cos\frac{\pi s}{2S}\right)^2\cos^2 ct\,ds$$

$$=-u_0^2c^3\sin ct\cos ct\int_0^S\left(\frac{\rho F}{g}+\frac{p}{g}\right)\left(1-\cos\frac{\pi}{2S}s\right)^2 ds$$

(3) 第 三 項

$$-\frac{H}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^S\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 ds=-\frac{H}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^S\frac{u_0^2\pi^2}{4S^2}\sin^2\frac{\pi s}{2S}\sin^2 ct\,ds=-\frac{Hu_0^2\pi^2c\sin ct\cos ct}{4S^2}\int_0^S\sin\frac{\pi s}{2S}ds$$

$$=-\frac{Hu_0^2\pi^2c\sin ct\cos ct}{4S^2}\left[\frac{1}{2}s-\frac{S}{\pi}\sin\frac{\pi}{S}s\right]_0^S=-\frac{Hu_0^2\pi^2c\sin ct\cos ct}{8S}$$

之れ等の結果を (29) 式中に代入すれば

$$\frac{E\pi^4}{16S^4}\int_0^S J\cos^2\frac{\pi s}{2S}ds-\frac{c^2}{g}\int_0^S(\rho F+p)\left(1-\cos\frac{\pi s}{2S}\right)^2 ds-\frac{H\pi^2}{8S}=0$$

本式より c を求むれば

$$c=\frac{\pi\sqrt{\frac{E\pi^2}{4S^2}\int_0^S J\cos\frac{\pi s}{2S}ds-\frac{HS}{2}}}{2S\sqrt{\frac{1}{g}\int_0^S(\rho F+p)(1-\cos\frac{\pi s}{2S})^2ds}}$$

一秒間の振動數を n とすれば

$$n=\frac{1}{T}=\frac{c}{2\pi}=\frac{\sqrt{g}\sqrt{\frac{E\pi^2}{4S^2}\int_0^S J\cos\frac{\pi s}{2S}ds-\frac{HS}{2}}}{4S\sqrt{\int_0^S(\rho F+p)(1-\cos\frac{\pi s}{2S})^2ds}} \quad \cdots\cdots (30)$$

を得。

拱の厚さ一定ならざる場合には

J_s＝鉸點に於ける惰性率

J_k＝起拱點に於ける惰性率

$$\alpha=\frac{J_k-J_s}{J_s}$$

F_s＝鉸點に於ける斷面積

F_k＝起拱點に於ける斷面積

$$\beta=\frac{F_k-F_s}{F_s}$$

とし，s 點に於ける惰性率，斷面積が

$$\left.\begin{aligned}J&=J_s\left[1+\alpha\left(\frac{s}{S}\right)^2\right]\\F&=F_s\left[1+\beta\left(\frac{s}{S}\right)^2\right]\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(31)$$

の如く變化するものとすれば，(31) 式を (30) 式中に代入して振動數

$$n=\frac{\sqrt{g}\sqrt{\frac{E\pi^2J_s}{4S^2}\int_0^S\left[1+\alpha\left(\frac{s}{S}\right)^2\right]ds-\frac{HS}{2}}}{4S\sqrt{\int_0^S\left\{\rho F_s\left[1+\beta\left(\frac{s}{S}\right)^2\right]+p\right\}\left\{1-\cos\frac{\pi s}{2S}\right\}^2ds}}$$

を得。

本式を積分し計算に便なる如く改むれば

$$n=\frac{\sqrt{g}\sqrt{\frac{E\pi^2J_s}{4}\left(1+\frac{\alpha}{3}\right)-\frac{HS^2}{2}}}{4S^2\sqrt{(0.22676+0.15748\beta)\rho F_s+0.22676p}} \quad \cdots\cdots(32)$$

本式中 H は死荷重，活荷重に由る鉸點に於ける水平推力なり。

第二章　實　驗

1. 實驗用單鉸拱

振動實驗に使用せる單鉸拱は撓度實驗に使用せるものと同一なり。(附圖第一參照)

2. 荷　重

荷重には銑鐵を用ふ。荷重箇所，荷重用支臺は撓度實驗の場合と同樣なり。唯振動中，荷

重と拱肋とが共に振動する樣，直徑 5/8 吋の鐵筋にて，銑鐵を拱肋にボルトにて締付けたり。(寫眞第一參照)

又一支臺上の荷重を W 瓩とすれば，(支臺は全徑間に涉りて 6 個) 之れを全拱肋に等布せるものと見做し，計算に際し，等布荷重

$$p=\frac{6W}{bS}$$

なる値を使用せり。但し

b＝單鉸拱の幅

S＝拱軸の延長

とす。

本實驗に於ては

I. 無荷重

II. $W=149$瓩

III. $W=279$瓩

なる荷重の場合に付きて，振動實驗をなせり。

$b=65$ 糎

$S=362.36$糎

とすれば I, II, III に匹敵する等布滿載荷重は

I. $p=0$

II. $p=0.0380$ 瓩/平方糎

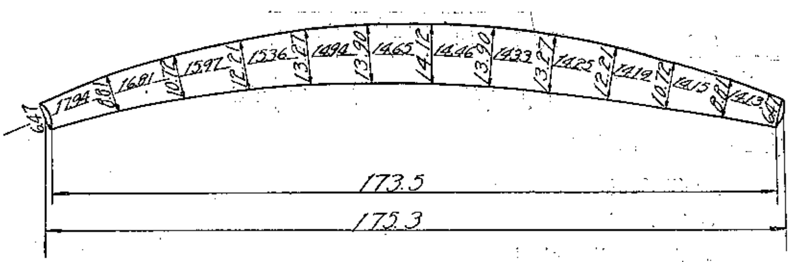
III. $p=0.0711$ 瓩/平方糎

3. コンクリートの彈性率

コンクリートの彈性率は撓度實驗に際し桁の彎曲に由りて決定したる $E=225\,000$ 瓩/平方糎を使用す。

4. コンクリート單位體積の重量

第八圖



本實驗に使用せし單鉸拱單位體積の重量は單鉸拱と同樣なる鐵網を挿入せる，**第八圖**の如き曲桁の單位重量を測定決定せり。

今

$V=Fb=$曲桁の體積

$b=$曲桁の幅

$F=$曲桁の縱斷面積

$G=$曲桁の重量

$\rho=$單位體積の重量

とすれば

$$\rho=\frac{G}{V}=\frac{G}{Fb}$$

第八圖より

$$(17.94+14.13)\frac{6.47+8.81}{2}+(16.81+14.15)\frac{8.81+10.72}{2}+(15.97+14.19)\frac{10.72+12.21}{2}$$
$$+(15.36+14.25)\frac{12.21+13.27}{2}+(14.94+14.33)\frac{13.27+13.90}{2}$$
$$+(14.65+14.46)\frac{(13.90+14.12)}{2}=245.015+302.324+345.784+377.231$$
$$+398.633+407.831=2\,075.528\ \text{平方糎}$$

且つ

$b=65$ 糎

$G=318.2$ 瓩

故に單位體積の重量 ρ は

$$\rho=\frac{318.2}{2\,075.528\times 65}=0.00236\ \text{瓩/立方糎}$$

5. 公式に由る振動數の計算

(A) 橋臺不動の場合の振動數

拱軸圓形なる單鉸拱の一秒間に於ける振動數は，前章 (21) 式に由りて求めらる。本實驗に用ひたる單鉸拱の拱軸は，圓形ならざるも，大體圓形に一致すると認め得るが故に，振動數の算定には (21) 式を用ふるも殆んど誤差なし。

(21) 式より振動數 n は

$$n=\frac{32f^2}{\pi(l^2+4f^2)^2}\sqrt{gEJ_s}\frac{\sqrt{\int_0^\phi\left[1+\alpha\left(\frac{\theta}{\phi}\right)^2\right]\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}\right)^2 d\theta}}{\sqrt{\int_0^\phi\left\{F_s\left[1+\beta\left(\frac{\theta}{\phi}\right)^2\right]\rho+p\right\}u^2 d\theta}}$$

に由り算定さる。本式に於て

$f=47.06$ 糎

$l=338.8$ 糎

$E=225\,000$ 瓩/平方糎

$g=980$ 糎/秒/秒

$\phi=0.541942412$

$J_s=22.5700$ 糎^4

$J_k=234.5972$ 糎^4

$$\alpha=\frac{J_k-J_s}{J_s}=9.3942$$

$F_s=6.47$ 平方糎

$F_k=14.12$ 平方糎

$$\beta=\frac{F_k-F_s}{F_s}=1.18238$$

$\rho=0.00236$ 瓩/立方糎

なれば振動數

$$n=0.10409\frac{\sqrt{\int_0^{\phi}\left[1+\frac{\alpha}{\phi^2}\theta^2\right]\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}\right)^2 d\theta}}{\sqrt{\int_0^{\phi}\left\{F_s\rho+F_s\rho\frac{\beta}{\phi^2}\theta^2+p\right\}u^2 d\theta}}=0.10409\frac{\sqrt{\int_0^{0.541942412}\{1+31.9856\theta^2\}\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}\right)^2 d\theta}}{\sqrt{\int_0^{0.541942412}\{0.01526+0.061470\theta^2+p\}u^2 d\theta}} \quad \cdots\cdots(33)$$

(33) 式中に於て

$$\int_0^{\phi}u^2 d\theta=\int_0^{\phi}\Big[A\cos\theta+B\sin\theta-2C+C\theta\sin\theta-D\theta\cos\theta\Big]^2 d\theta$$

$$=\int_0^{\phi}\Big[A^2\cos^2\theta+B^2\sin^2\theta+4C^2+C^2\theta^2\sin^2\theta+D^2\theta^2\cos^2\theta+2AB\sin\theta\cos\theta-4AC\cos\theta$$

$$+2AC\theta\sin\theta\cos\theta-2AD\theta\cos^2\theta-4BC\sin\theta+2BC\theta\sin^2\theta-2BD\theta\sin\theta\cos\theta$$

$$-4C^2\theta\sin\theta+4CD\theta\cos\theta-2CD\theta^2\sin\theta\cos\theta\Big]d\theta$$

積分に便なる如く直せば

$$=\left(\frac{1}{2}A^2+\frac{1}{2}B^2+4C^2\right)\int_0^{\phi}d\theta+\frac{1}{2}(A^2-B^2)\int_0^{\phi}\cos2\theta d\theta+AB\int_0^{\phi}\sin2\theta d\theta$$

$$-4AC\int_0^{\phi}\cos\theta d\theta-4BC\int_0^{\phi}\sin\theta d\theta-(AD-BC)\int_0^{\phi}\theta d\theta-(AD+BC)\int_0^{\phi}\theta\cos2\theta d\theta$$

$$+(AC-BD)\int_0^{\phi}\theta\sin2\theta d\theta+4CD\int_0^{\phi}\theta\cos\theta d\theta-4C^2\int_0^{\phi}\theta\sin\theta d\theta+\frac{1}{2}(C^2+D^2)\int_0^{\phi}\theta^2 d\theta$$

$$-\frac{1}{2}(C^2-D^2)\int_0^{\phi}\theta^2\cos2\theta d\theta-CD\int_0^{\phi}\theta^2\sin2\theta d\theta \quad \cdots\cdots(34)$$

從て

$$\int_0^{\phi}u^2\theta^2 d\theta=\left(\frac{1}{2}A^2+\frac{1}{2}B^2+C^2\right)\int_0^{\phi}\theta^2 d\theta+\frac{1}{2}(A^2-B^2)\int_0^{\phi}\theta^2\cos2\theta d\theta+AB\int_0^{\phi}\theta^2\sin2\theta d\theta$$

$$-4AC\int_0^{\phi}\theta^2\cos\theta d\theta-4BC\int_0^{\phi}\theta^2\sin\theta d\theta-(AD-BC)\int_0^{\phi}\theta^3 d\theta$$

$$-(AD-BC)\int_0^{\phi}\theta^3\cos2\theta d\theta+(AC-BD)\int_0^{\phi}\theta^3\sin2\theta d\theta+4CD\int_0^{\phi}\theta^3\cos\theta d\theta$$

$$-4C^2\int_0^\phi \theta^3\sin\theta d\theta+\frac{1}{2}(C^2+D^2)\int_0^\phi \theta^4 d\theta-\frac{1}{2}(C^2-D^2)\int_0^\phi \theta^4\cos 2\theta d\theta$$

$$-CD\int_0^\phi \theta^4\sin 2\theta d\theta \quad \cdots\cdots(35)$$

又

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}=(-A+2C)\cos\theta+(-B+2D)\sin\theta-C\theta\sin\theta+D\theta\cos\theta$$

故に

$$\int_0^\phi\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}\right)^2 d\theta=\int_0^\phi\Big[(-A+2C)^2\cos^2\theta+(-B+2D)^2\sin^2\theta+C^2\theta^2\sin^2\theta+D^2\theta^2\cos^2\theta$$
$$+2(-A+2C)(-B+2D)\sin\theta\cos\theta-2(-A+2C)\sin\theta\cos\theta+2D(-A+2C)\theta\cos^2\theta$$
$$+2(B-2D)C\theta\sin^2\theta-2(B-2D)D\theta\sin\theta\cos\theta-2CD\theta^2\sin\theta\cos\theta\Big]d\theta$$

積分に便なる如く直せば

$$=\frac{1}{2}\Big[(-A+2C)^2+(-B+2D)^2\Big]\int_0^\phi d\theta+\frac{1}{2}\Big[(-A+2C)^2-(-B+2D)^2\Big]$$
$$\times\int_0^\phi\cos 2\theta d\theta+(-A+2C)(-B+2D)\int_0^\phi\sin 2\theta d\theta+(-AD+CB)\int_0^\phi\theta d\theta$$
$$+\Big[D(-A+2C)+C(-B+2D)\Big]\int_0^\phi\theta\cos 2\theta d\theta+\Big[-C(-A+2C)+D(-B+2D)\Big]$$
$$\times\int_0^\phi\theta\sin 2\theta d\theta+\frac{1}{2}(C^2+D^2)\int_0^\phi\theta^2 d\theta+\frac{1}{2}(-C^2+D^2)\int_0^\phi\theta^2\cos 2\theta d\theta \quad \cdots\cdots(36)$$

從て

$$\int_0^\phi\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}\right)^2\theta^2 d\theta=\frac{1}{2}\Big[(-A+2C)^2+(-B+2D)^2\Big]\int_0^\phi\theta^2 d\theta+\frac{1}{2}\Big[(-A+2C)^2-(-B+2D)^2\Big]$$
$$\times\int_0^\phi\theta^2\cos 2\theta d\theta+(-A+2C)(-B+2D)\int_0^\phi\theta^2\sin 2\theta d\theta+(-AD+CB)\int_0^\phi\theta^3 d\theta$$
$$+\Big[D(-A+2C)+C(-B+2D)\Big]\int_0^\phi\theta^3\cos 2\theta d\theta+\Big[-C(-A+2C)+D(-B+2D)\Big]$$
$$\times\int_0^\phi\theta^3\sin 2\theta d\theta+\frac{1}{2}(C^2+D^2)\int_0^\phi\theta^4 d\theta+\frac{1}{2}(-C^2+D^2)\int_0^\phi\theta^4\cos 2\theta d\theta$$
$$\cdots\cdots(37)$$

然るに

$$k=\frac{f}{l}=\frac{47.06}{338.8}=\frac{1}{7.1993}=0.138902007$$

なれば (14) 式及び (15) 式に由り

$$\left.\begin{aligned}\sin\phi&=\frac{4k}{1+4k^2}=0.515801046\\ \cos\phi&=\frac{1-4k^2}{1+4k^2}=0.856708399\\ \phi&=0.541942412\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(38)$$

從て

$$\left.\begin{aligned}\sin 2\phi&=2\sin\phi\cos\phi=0.883782176\\ \cos 2\phi&=\cos^2\phi-\sin^2\phi=0.467893562\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(39)$$

(38) 式及び (39) 式の値を利用して，(34)，(35)，(36)，(37) 式中の定積分を求むれば次の如し。

$$\int_0^\phi d\theta=\Big[\theta\Big]_0^\phi=0.541942412$$

$$\int_0^\phi \cos\theta d\theta=\Big[\sin\theta\Big]_0^\phi=\sin\phi=0.515801046$$

$$\int_0^\phi \sin\theta d\theta=\Big[-\cos\theta\Big]_0^\phi=-\cos\phi+1=0.143291601$$

$$\int_0^\phi \cos 2\theta d\theta=\Big[\frac{1}{2}\sin 2\theta\Big]_0^\phi=\frac{1}{2}\sin 2\phi=0.441891088$$

$$\int_0^\phi \sin 2\theta d\theta=\Big[-\frac{1}{2}\cos 2\theta\Big]_0^\phi=-\frac{1}{2}\cos 2\phi+\frac{1}{2}=0.266050719$$

$$\int_0^\phi \theta d\theta=\Big[\frac{\theta^2}{2}\Big]_0^\phi=\frac{\phi^2}{2}=0.146850789$$

$$\int_0^\phi \theta\cos\theta d\theta=\Big[\cos\theta+\theta\sin\theta\Big]_0^\phi=\cos\phi+\phi\sin\phi-1=0.136242862$$

$$\int_0^\phi \theta\sin\theta d\theta=\Big[\sin\theta-\theta\cos\theta\Big]_0^\phi=\sin\phi-\phi\cos\phi=0.051514430$$

$$\int_0^\phi \theta\cos 2\theta d\theta=\Big[\frac{\cos 2\theta}{4}+\theta\frac{\sin 2\theta}{2}\Big]_0^\phi=\frac{\cos 2\phi}{4}+\phi\frac{\sin 2\phi}{2}-\frac{1}{4}=0.106454163$$

$$\int_0^\phi \theta\sin 2\theta d\theta=\Big[\frac{\sin 2\theta}{4}-\theta\frac{\cos 2\theta}{2}\Big]_0^\phi=\frac{\sin 2\phi}{4}-\phi\frac{\cos 2\phi}{2}=0.094158507$$

$$\int_0^\phi \theta^2 d\theta=\Big[\frac{\theta^3}{3}\Big]_0^\phi=\frac{\phi^3}{3}=0.530564470$$

$$\int_0^\phi \theta^2\cos\theta d\theta=\Big[2\theta\cos\theta+\theta^2\sin\theta-2\sin\theta\Big]_0^\phi=2\phi\cos\phi+\phi^2\sin\phi-2\sin\phi=0.048462721$$

$$\int_0^\phi \theta^2\sin\theta d\theta=\Big[2\theta\sin\theta-\theta^2\cos\theta+2\cos\theta\Big]_0^\phi=2\phi\sin\phi-\phi^2\cos\phi+2\cos\phi-2=0.020869115$$

$$\int_0^\phi \theta^2\cos 2\theta d\theta=\Big[\frac{\theta^2\sin 2\theta}{2}-\frac{\sin 2\theta}{4}+\frac{\theta\cos 2\theta}{2}\Big]_0^\phi=\frac{\phi^2\sin 2\phi}{2}-\frac{\sin 2\phi}{4}+\frac{\phi\cos 2\phi}{2}=0.035625604$$

$$\int_0^\phi \theta^2\sin 2\theta d\theta=\Big[\frac{\cos 2\theta}{4}-\frac{\theta^2\cos 2\theta}{2}+\frac{\theta\sin 2\theta}{2}\Big]_0^\phi$$

$$=\frac{\cos 2\phi}{4}-\frac{\phi^2\cos 2\phi}{2}+\frac{\phi\sin 2\phi}{2}-\frac{1}{4}=0.037742890$$

$$\int_0^\phi \theta^3 d\theta=\Big[\frac{\theta^4}{4}\Big]_0^\phi=\frac{\phi^4}{4}=0.021565154$$

$$\int_0^\phi \theta^3\cos\theta d\theta=\Big[\theta^3\sin\theta-6\theta\sin\theta+3\theta^2\cos\theta-6\cos\theta\Big]_0^\phi$$

$$=\phi^3\sin\phi-6\phi\sin\phi+3\phi^2\cos\phi-6\cos\phi+6=0.019492368$$

$$\int_0^\phi \theta^3\sin\theta d\theta=\Big[-\theta^3\cos\theta+6\theta\cos\theta+3\theta^2\sin\theta-6\sin\theta\Big]_0^\phi$$

$$=-\phi^3\cos\phi+6\phi\cos\phi+3\phi^2\sin\phi-6\sin\phi=0.009026451$$

$$\int_0^\phi \theta^3\cos2\theta d\theta=\left[\frac{1}{2}\theta^3\sin2\theta+\frac{3}{4}\theta^2\cos2\theta-\frac{3}{8}\cos2\theta-\frac{3}{4}\theta\sin2\theta\right]_0^\phi$$

$$=\frac{1}{2}\phi^3\sin2\phi+\frac{3}{4}\phi^2\cos2\phi-\frac{3}{8}\cos2\phi-\frac{3}{4}\phi\sin2\phi+\frac{3}{8}=0.013721179$$

$$\int_0^\phi \theta^3\sin2\theta d\theta=\left[-\frac{1}{2}\theta^3\cos2\theta+\frac{3}{4}\theta^2\sin2\theta-\frac{3}{8}\sin2\theta+\frac{3}{4}\theta\cos2\theta\right]_0^\phi$$

$$=-\frac{1}{2}\phi^3\cos2\phi+\frac{3}{4}\phi^2\sin2\phi-\frac{3}{8}\sin2\phi+\frac{3}{4}\phi\cos2\phi=0.016200852$$

$$\int_0^\phi \theta^4 d\theta=\left[\frac{\theta^5}{5}\right]_0^\phi=0.009349657$$

$$\int_0^\phi \theta^4\sin2\theta d\theta=\left[-\frac{1}{2}\theta^4\cos2\theta+\theta^3\sin2\theta+\frac{3}{2}\theta^2\cos2\theta-\frac{3}{4}\cos2\theta-\frac{3}{2}\theta\sin2\theta\right]_0^\phi$$

$$=-\frac{1}{2}\phi^4\cos2\phi+\phi^3\sin2\phi+\frac{3}{2}\phi^2\cos2\phi-\frac{3}{4}\cos2\phi-\frac{3}{2}\phi\sin2\phi+\frac{3}{4}=0.007261749$$

$$\int_0^\phi \theta^4\cos2\theta d\theta=\left[\frac{1}{2}\theta^4\sin2\theta+\theta^3\cos2\theta-\frac{3}{2}\theta^2\sin2\theta+\frac{3}{4}\sin2\theta-\frac{3}{2}\theta\cos2\theta\right]_0^\phi$$

$$=\frac{1}{2}\phi^4\sin2\phi+\phi^3\cos2\phi-\frac{3}{2}\phi^2\sin2\phi+\frac{3}{4}\sin2\phi-\frac{3}{2}\phi\cos2\phi=0.005716094$$

且つ振動曲線 (4) 式中の定數, A, B, C, D は, (13) 式中に ϕ, $\sin\phi$, $\cos\phi$ の價を代入することに依り求めらる。

即ち

$$\left.\begin{aligned}A&=1\,367.6360488\ u_0\\ B&=\ 142.8987156\ v_0\\ C&=\ 683.3180244\ u_0\\ D&=\ 150.2250602\ u_0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(40)$$

斯くして, 定積分の値及び (40) 式の値を (34), (35), (36) 及び (37) 式中に代入すれば

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\phi u^2 d\theta=0.0533\ u_0^2\\ &\int_0^\phi u^2\theta^2 d\theta=0.1397\ u_0^2\\ &\int_0^\phi\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}\right)^2 d\theta=301.9136\ u_0^2\\ &\int_0^\phi\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}\right)^2\theta^2 d\theta=28.0528\ u_0^2\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(41)$$

(41) 式の値を (33) 式中に代入すれば, 振動數 n の値を求め得, 即ち

$$n=\frac{3.6048}{\sqrt{0.009401+0.0533p}}\cdots\cdots(42)$$

(42) 式に由れば, 振動數は等布荷重 p に由て變化す。之れを計算すれば次表の如し。

(附圖第三參照)

$p=0$	0.01	0.02	0.04	0.06	0.08	0.1
$n=37.3$	36.2	35.3	33.6	32.1	30.9	29.8

(B) 橋臺變位せる場合の單鉸拱振動數計算

橋臺の變位を考慮せる場合の振動數は (27) 式

$$n'=\frac{32f^2}{\pi(l^2+4f^2)^2}\sqrt{gEJ_s}\,\frac{\sqrt{\int_0^\phi\left[1+\alpha\left(\frac{\theta}{\phi}\right)^2\right]\left(\frac{d^2u'}{d\theta^2}\right)^2d\theta}}{\sqrt{\int_0^\phi\left\{F_s\left[1+\beta\left(\frac{\theta}{\phi}\right)^2\right]\rho+p\right\}u'^2d\theta}}$$

に由り算定さる，本式に於て

$f=47.06$ 粍

$l=\ 338.8$ 粍

$E=225\,000$ 瓩/平方粍

$g=\ 980$ 粍/秒/秒

$\phi=0.541942412$

$J_s=22.5700$ 粍^4

$J_k=234.5972$ 粍^4

$\alpha=\dfrac{J_k-J_s}{J_s}=9.3942$

$F_s=6.47$ 平方粍

$F_k=14.12$ 平方粍

$\beta=\dfrac{F_k-F_s}{F_s}=1.18238$

$\rho=0.000236$ 瓩/立方粍

にして振動數は

$$n'=0.10409\frac{\sqrt{\int_0^{0.541942412}\{1+31.9856\theta^2\}\left(\frac{d^2u'}{d\theta^2}\right)^2d\theta}}{\sqrt{\int_0^{0.541942412}\{0.01526+0.061470\theta^2+p\}u'^2d\theta}}\quad\cdots\cdots(43)$$

にて與へらるべし，

振動曲線 u' は (26) 式に由りて

$$u'=A'\cos\theta+B'\sin\theta-2C'+C'\theta\sin\theta-D'\theta\cos\theta$$

但し u' は點 (r,θ) の放射變位にして，A', B', C', D' は (22), (23) (24), (25) 式より決定せらるべき定數なり。(22), (23), (24), (25) を書直せば次の如し。

(22) 式より

$$A'\cos\phi+B'\sin\phi-2C'+C'\phi\sin\phi-D'\phi\cos\phi=0\quad\cdots\cdots(44)$$

(23) 式より

$$-A'\sin\phi+B'\cos\phi+C'\sin\phi+C'\phi\cos\phi-D'\cos\phi+D'\phi\sin\phi=0\quad\cdots\cdots45)$$

(24) 式より

$$u_0=A'-2C'\quad\cdots\cdots(46)$$

(25) 式より

$$[A'\sin\phi-B'\cos\phi-2C'\phi+C'(\sin\phi-\phi\cos\phi)-D'(\cos\phi+\phi\sin\phi)]+[B'+D']=r\frac{\Delta l}{2}\ \ldots\ldots(47)$$

(44), (45), (46), (47) 式より A', B', C', D' を求むれば

$$\left.\begin{aligned}
&A'=u_0+2C'\\
&B'=\frac{\left[\begin{aligned}&r\frac{\Delta l}{2}\{[\phi\cos\phi-\sin\phi\cos^2\phi][2\cos\phi-2+\phi\sin\phi][\phi-\sin\phi\cos\phi]-[\phi\cos\phi-\sin\phi\cos^2\phi]\\&\times[\cos\phi-1]^2\phi\cos\phi\}+u_0[6\cos^4\phi-2\cos^5\phi-2\cos^3\phi-6\cos^2\phi+3\phi\sin\phi\cos^3\phi+2\phi\sin\phi\cos^2\phi\\&-2\sin^2\phi\cos^3\phi+\sin^2\phi\cos^2\phi+4\cos\phi-2\sin^2\phi\cos\phi-2\phi\sin\phi\cos\phi+\phi\sin^3\phi\cos\phi]\end{aligned}\right]}{\left[\begin{aligned}&-\sin\phi[6\cos^3\phi-2\cos^4\phi-6\cos^2\phi+2\cos\phi+2\phi\sin\phi\cos^2\phi+4\phi\sin\phi\cos\phi-2\sin^2\phi\cos^2\phi\\&-3\phi^2\cos\phi-\sin^2\phi\cos\phi][\phi-\sin\phi\cos\phi]\end{aligned}\right]}\\
&C'=\frac{r\frac{\Delta l}{2}[\phi\cos\phi-\sin\phi\cos^2\phi]-u_0[2\cos\phi-2\cos^2\phi-\sin^2\phi\cos\phi]}{\left[\begin{aligned}&6\cos^3\phi-2\cos^4\phi-6\cos^2\phi+2\cos\phi+2\phi\sin\phi\cos^2\phi+4\phi\sin\phi\cos\phi\\&-2\sin^2\phi\cos^2\phi-3\phi^2\cos\phi-\sin^2\phi\cos\phi\end{aligned}\right]}\\
&D'=\frac{r\frac{\Delta l}{2}[\phi\cos\phi-\sin\phi\cos^2\phi][\cos^2\phi-2\cos\phi+1]+u_0[-3\phi\cos\phi+4\sin\phi\cos\phi-\sin\phi\cos^2\phi]}{\left[\begin{aligned}&[\phi-\sin\phi\cos\phi][6\cos^3\phi-2\cos^4\phi-6\cos^2\phi+2\cos\phi+2\phi\sin\phi\cos^2\phi+4\phi\sin\phi\cos\phi\\&-2\sin^2\phi\cos^2\phi-3\phi^2\cos\phi-\sin^2\phi\cos\phi]\end{aligned}\right]}
\end{aligned}\right\}\cdots(48)$$

然るに (38) 式に由り

$$\sin\phi=0.515801046$$
$$\cos\phi=0.856708399$$
$$\phi=0.541942412$$

又嚢に單鉸拱の撓度實驗に於て，等布荷重を滿載せし場合，次の結果を得たり。

	等布荷重（瓩/橋長米）	拱頂の全撓度 u_0（粍）	橋臺の相互變位 Δl（粍）	$\frac{1}{2}$(橋臺相互變位) / 拱頂の全撓度
I	309.92	0.30	0.173	0.288
II	566.71	0.55	0.342	0.311
III	796.93	0.77	0.499	0.324
			平均	0.308

今單鉸拱の振動を考ふる場合にも

$$\frac{\Delta l}{2}:u_0=0.308$$

なる値を用ふるとすれば，之れ等の値を (48) 式に代入して

$$A'=-671\,926.82360\ u_0$$
$$B'=-\ 66\,644.30923\ u_0$$
$$C'=-335\,963.91180\ u_0$$
$$D'=-\ 68\,936.35240\ u_0$$

なる値を得。斯くして A', B', C', D' を求むれば

$$\int_0^\phi u'^2 d\theta, \quad \int_0^\phi u'^2\theta^2 d\theta, \quad \int_0^\phi \left(\frac{d^2u'}{d\theta^2}\right)^2 d\theta, \quad \int_0^\phi \left(\frac{d^2u'}{d\theta^2}\right)^2 \theta^2 d\theta$$

の値は (34), (35), (36), (37) 式中, A, B, C, D の代りに A', B', C', D' を代入する事に由て求めらる。即ち

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\phi u'^2 d\theta = 22\,386 \\ &\int_0^\phi u'^2\theta^2 d\theta = 80\,770 \\ &\int_0^\phi \left(\frac{d^2u'}{d\theta^2}\right)^2 d\theta = 69\,763\,702 \\ &\int_0^\phi \left(\frac{d^2u'}{d\theta^2}\right)^2 \theta^2 d\theta = 8\,737\,642 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (49)$$

(49) 式の値を (43) 式に代入すれば振動數

$$n' = \frac{1\,945.320}{\sqrt{5\,306.784 + 22\,386p}} \cdots\cdots (50)$$

なる式を得。之れを計算すれば次の如し。(**附圖第三**參照)

$p=$	0	0.01	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10
$n'=$	26.8	26.2	25.7	24.8	23.9	23.2	22.4

(**C**) 突桁として計算せる振動數

突桁として計算せる振動數は (32) 式

$$n'' = \frac{\sqrt{g}\sqrt{\dfrac{E\pi^2 J_s}{4}\left(1+\dfrac{\alpha}{3}\right) - \dfrac{HS^2}{2}}}{4S^2\sqrt{(0.22676 + 0.15748\beta)\rho F_s + 0.22676p}}$$

に由て求めらる, 本式中水平推力 H は死荷重, 活荷重に由るものにして

$H = X_d + X_p$

X_d = 死荷重に由る水平推力

X_p = 活荷重に由る水平推力

(**a**) 死荷重に由る水平推力 X_d は

$$X_d = \sum \rho t \sec\varphi\, \eta \lambda$$

にて與へらる。本式中

ρ = 拱單位體積の重量

t = 拱の厚

η = 水平推力影響線の縦距

λ = 格點距離

實驗用單鉸拱に就き, (**附圖第一**參照) 水平推力 H の影響線を計算し (**附圖第二**) 之れより X_d を計算すれば次表の如し。

格 點	水平推力影響線 η	拱厚 t (糎)	$\cos\varphi$	$t\sec\varphi$	$\eta t\sec\varphi$
12	0.0000	14.12	0.787	17.941	0
11	0.0200	11.92	0.840	14.190	0.2838
10	0.0908	10.54	0.884	11.923	1.0826
9	0.2103	9.59	0.919	10.435	2.1945
8	0.3783	8.89	0.945	9.407	3.5587
7	0.5917	8.35	0.963	8.671	5.1306
6	0.8413	7.93	0.976	8.125	6.8356
5	1.1239	7.59	0.985	7.706	8.6608
4	1.4273	7.28	0.991	7.346	10.4849
3	1.7496	7.03	0.995	7.065	12.3609
2	2.0794	6.82	0.998	6.834	14.2106
1	2.4159	6.62	0.999	6.627	16.0102
0	2.7526	6.47	1.000	6.47	17.8093

$2(12+11+\ldots.+2+1)+0=179.4357$

且つ

$\rho=0.00236$ 瓲/立方糎

$\lambda=14.11676$ 糎

$$X_a=\Sigma\rho t\sec\varphi\eta\lambda$$
$$=179.4357\times0.00236\times14.11676$$
$$=5.9519 \text{ 瓲}$$

(b) 活荷重に由る水平推力 X_p は

$$X_p=\frac{pl^2}{8f}\frac{1}{1+\mu}$$

にて與へらる。(土木學會誌第十五卷第十一號 807 頁參照) 本式中

$$\mu=\frac{5}{2(1+5n)}\left(\frac{ds}{f}\right)^2=0.0286$$

$$\because\quad\begin{cases} n=\dfrac{J_s}{J_k\cos\varphi_k}=0.13 \\ ds=6.47 \text{ 糎} \\ f=47.06 \text{ 糎} \end{cases}$$

$l=3.388$ 米

なれば

$X_p=296.4p \qquad p=$(瓲/平方糎)

故に

$$H=5.9519+296.4\,p \text{ 瓲}$$

此の値並びに

$E=225\,000$ 瓲/平方糎

$J_s=22.57$ 糎^4

$\alpha=9.39420$

$F_s=6.47$ 平方糎

$\beta=1.18238$

$S=177.3586$ 糎

を振動數算定公式 (32) に代入すれば

$$n''=0.0002489\frac{\sqrt{51\,673\,078.54081-4\,661\,790.0186p}}{\sqrt{0.0063059+0.22676p}}$$

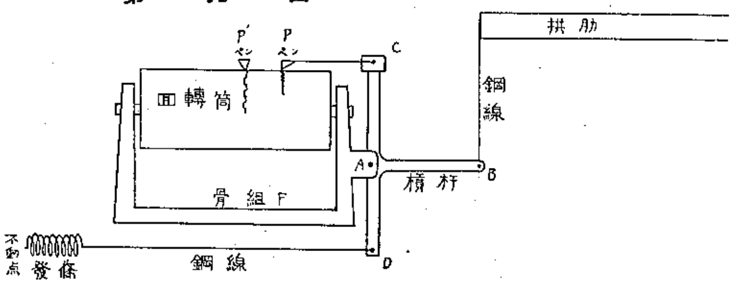
なる式を得。n'' と p との關係は次の如し。(**附圖第三**參照)

$p=$	0	0.01	0.02	0.04	0.06	0.08	0.1
$n''=$	22.5	19.3	17.13	14.4	12.65	11.4	10.45

6. 振動數の測定

振動數の測定には，田邊式撓度振動計を用ひたり。田邊式撓度振動計の構造，取付は**寫眞第二**及び**第九圖**に示すが如し，**第九圖**に於て，骨組は完全に固定せられ，回轉筒は骨組上に在り，スプリング仕掛けにて回轉す。ペン P′ は時間を記錄す，横杆は A 點にて骨組に取付けらる。横杆は ト 形をなし，B 點よりは鋼線によりて拱肋に取付く。D 點よりは，鋼線，

第　九　圖



スプリングを以て不動點に取付く。C 點よりペン P を出す。今拱肋が上下に振動するとせば，D 點はスプリングにて不動點に引張らるゝを以て B 點は拱肋と共に上下に振動す。A 點は固定せらるゝを以て，C 點は拱肋の上下に振動するにつれ左右に振動し，ペン P は此の振動を回轉筒上に記錄す。

回轉筒上の記錄より振動數を決定するには**第十圖**に於て

$L=$記錄紙上 t 秒時の長　　$l=$記錄紙上 ξ 波數の長

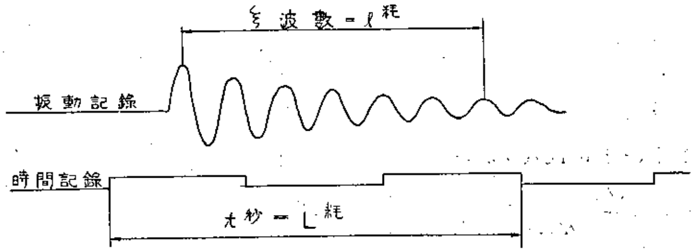
とすれば，振動數 n は

$$n=\frac{\xi L}{tl}$$

より求めらる。

式中 ξ, t, L, l は記錄紙上より，コムパレーター又は蟲眼鏡にて讀むものとす。

第十圖



實驗の結果より，無載荷の場合，$p=0.0380$ 瓩/平方糎の場合及び $p=0.0711$ 瓩/平方糎の場合に對する振動數を計算すれば次の如し。

I. $p=0$ の場合

記錄番號	ξ	l(粍)	t	L(粍)	$n=\frac{\xi L}{tl}$
1	6	13.5	1.5	6.15	18.2
2	6	13.2	1.0	4.05	18.4
3	6	10.9	1.5	5.20	19.1
4	6	10.0	1.0	3.08	18.5
5	6	9.8	1.0	2.95	18.1
6	3	4.4	1.0	35.97	24.4
7	3	3.97	1.0	30.24	22.9
8	3	4.52	1.0	34.27	22.6
9	4	7.18	1.0	41.23	22.9
10	4	7.07	1.0	42.78	24.2
				平均	20.9

II. $p=0.0380$ 瓩/平方糎の場合

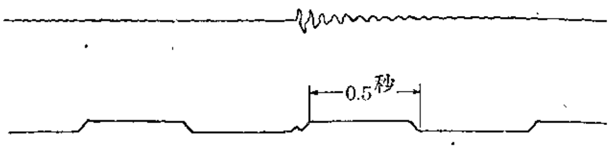
11	3	2.80	1	23.2	16.6
12	3	2.90	1	24.3	16.8
13	3	3.15	1	26.0	16.5
14	3	3.20	1	26.5	16.6
15	3	3.30	1	26.5	16.1
16	3	3.05	1	25.0	16.4
17	2	2.00	1	22.4	22.4
18	2	2.40	1	27.0	22.5
19	2	2.40	1	26.6	22.2
20	2	2.35	1	26.6	18.7
21	1	2.15	1	35.8	16.7
22	3	6.4	1	38.5	18.0
23	1	2.20	1	38.0	17.3

記錄番號	ξ	l(耗)	t	L(耗)	$n=\frac{\xi L}{tl}$
24	1	2.10	1	36.5	17.4
25	2	4.20	1	37.0	17.6
26	1	2.20	1	38.0	17.3
27	1	2.00	1	37.2	18.6
28	2	4.60	1	38.0	16.5
29	1	2.40	1	37.5	15.6
30	1	2.30	1	36.5	15.9
				平均	17.8

III. $p=0.0711$ 瓩/平方糎の場合

31	4	8.18	1	32.2	15.8
32	4	8.05	1	30.4	15.1
33	4	7.60	1	31.5	16.6
34	4	8.00	1	31.0	15.5
35	4	7.90	1	30.5	15.5
36	4	7.80	1	31.0	15.9
37	4	8.00	1	31.0	15.5
38	4	8.00	1	31.5	15.8
39	4	8.00	1	32.5	16.3
40	4	8.80	1	33.5	15.3
41	4	8.00	1	32.0	16.0
42	4	8.10	1	32.7	16.2
43	4	8.00	1	33.0	16.5
44	4	7.85	1	32.5	16.6
45	4	8.00	1	33.0	16.5
46	4	7.80	1	32.0	16.4
47	4	7.85	1	32.0	16.3
48	4	7.90	1	31.5	16.0
49	3	5.60	1	30.8	16.5
50	4	8.00	1	32.5	16.3
				平均	16.0

第十一圖 (a)



記錄番號 1

之れ等の結果より見る時は，單鉸拱の振動は荷重と共に減ず（附圖第三參照)。

又 I, II, III の場合に對する記錄を參考として掲ぐれば**第十一圖**の如し。同圖 (a) は I の場合, (b) は II の場合, (c) は III の場合の記錄を示す。

(b)　　(c)

記錄番號 16　　記錄番號 35

第三章　結　論

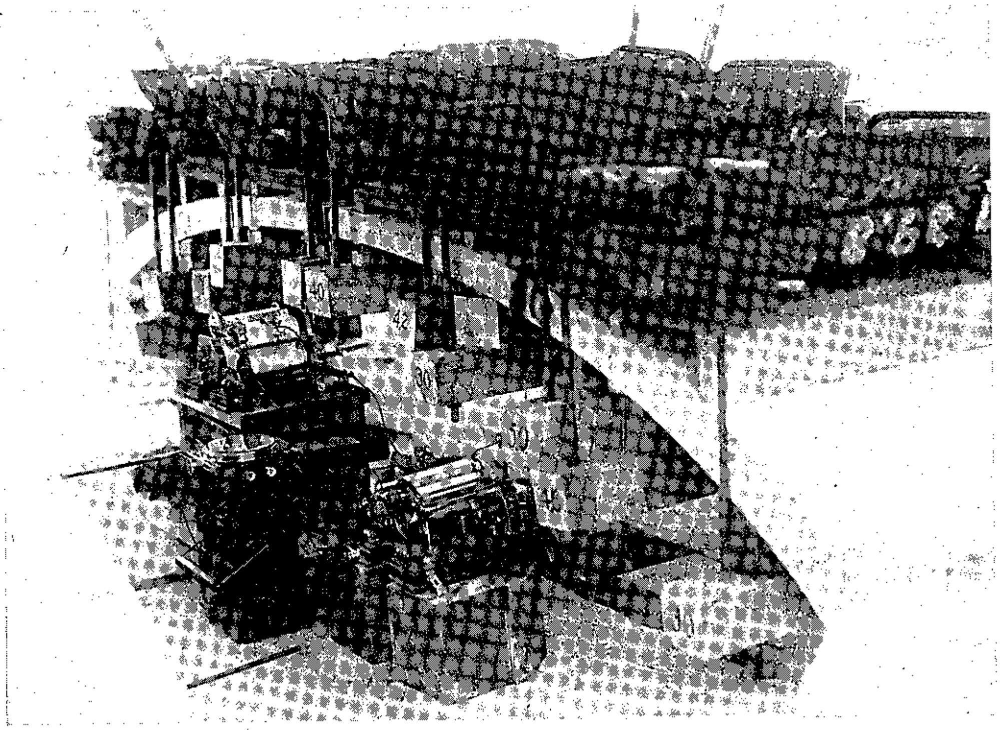
第一章 **1** に於ては橋臺不動, **2** 節に於ては橋臺が水平變位をなすものとして振動數算定公式を導きしが, 共に鉸を完全なる理想的蝶交（彎曲力率は完全に傳へず, 剪力は完全に傳へ, 常に接觸を保つ）と假定したり。然れども實際の單鉸拱にあつては鉸は完全なる蝶交に非ざるを以て, 斯かる假定の元に導かれたる公式に由りて計算せる振動數が, 果して實際の場合に適合するや否やは, 一に實驗に俟たざるべからず, 本實驗の目的も茲に存す。

單鉸拱を完全なる理想的蝶交を有するものとし, (27) 式に由りて計算せる振動數と實驗に由りて求められし振動數とを比較する時は荷重の加はるに從て振動數の減ずる傾向は一致するも, 振動數は計算に由る方幾分大なるを見る。之れ實際の單鉸拱にあつては鉸は理想的蝶交に非ざる事, 又振動中橋臺が幾分の回轉をなす事等に基因するものにして, 敢て (21) 式及び (27) 式の合理性を否定する程度のものに非ず。

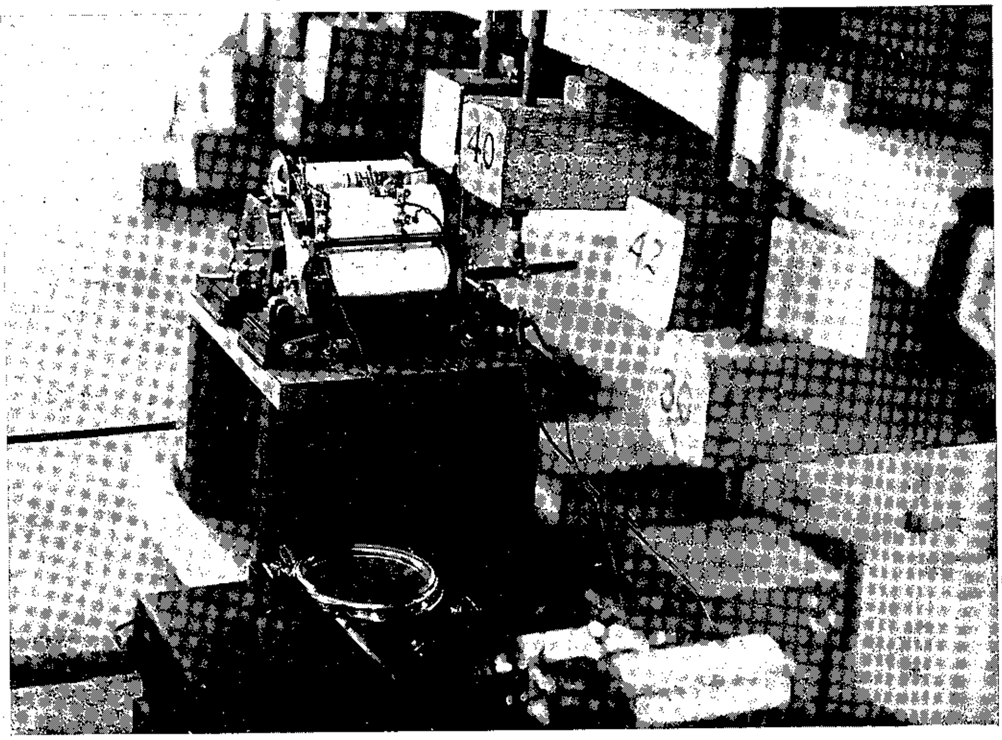
又第一章 **3** に於ては突桁として振動數を算定する公式を導きしが, 同式に由りて計算せる振動數と實驗に由りて求めし振動數とを比較する時は, 荷重の小なる間は實に良く一致せるを見る, 之れ荷重の小なる間の單鉸拱の振動は鉸點の密接せざる爲に寧ろ突桁の振動に近似するを知る, 荷重の加はるに從て突桁として計算せる振動數が實驗の結果より求めし振動數に比し次第に減少せるは水平推力の爲に鉸點に於ける非密接が除かれ, 次第に單鉸拱としての振動に近づくが爲なり。

單鉸拱に關する斯る研究, 實驗は未だ何人も爲さざるところにして, 本實驗は單鉸拱振動に關する性態の一部を明にせるものなり。　　(終)

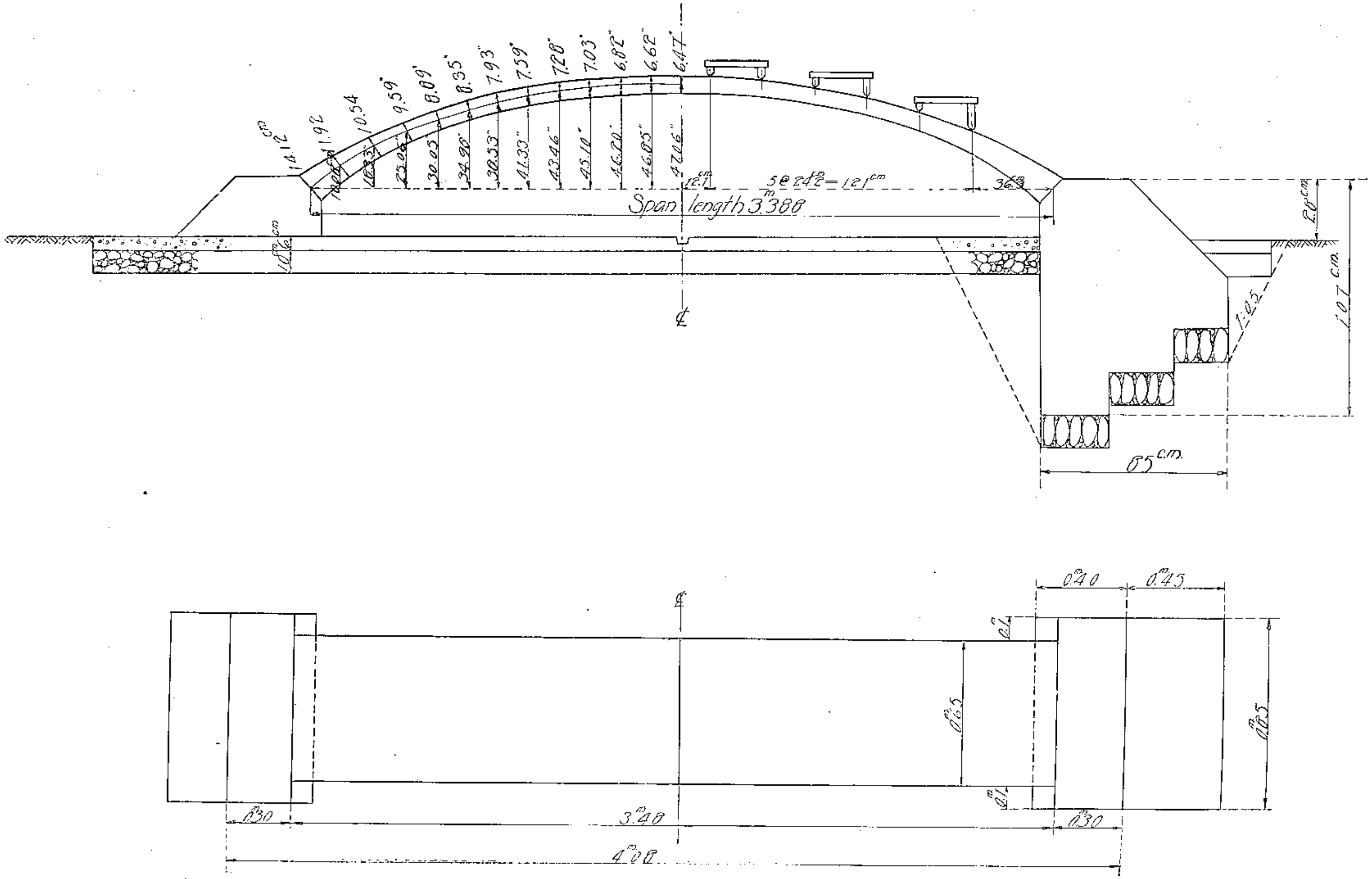
寫眞第一



寫眞第二

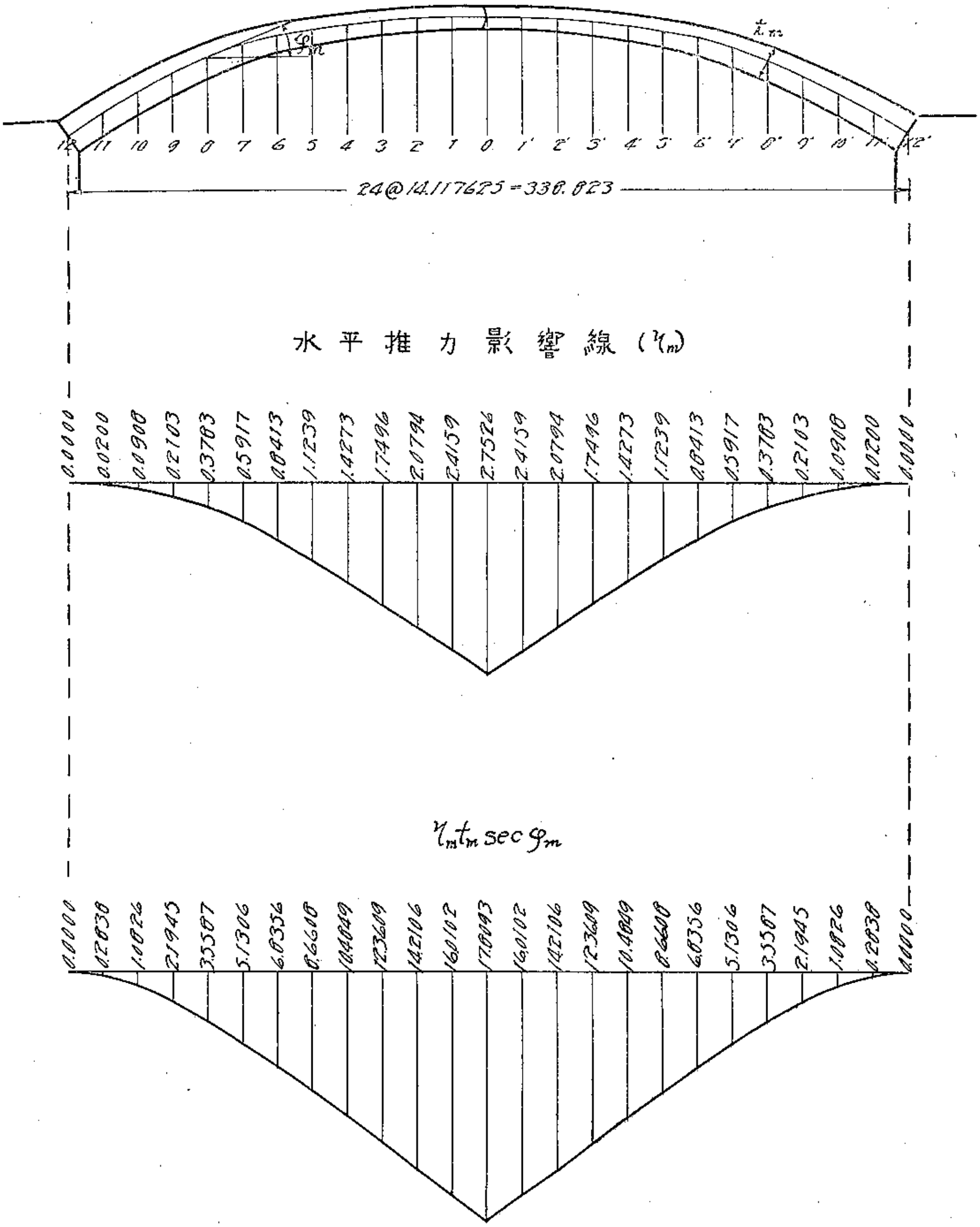


附圖第一



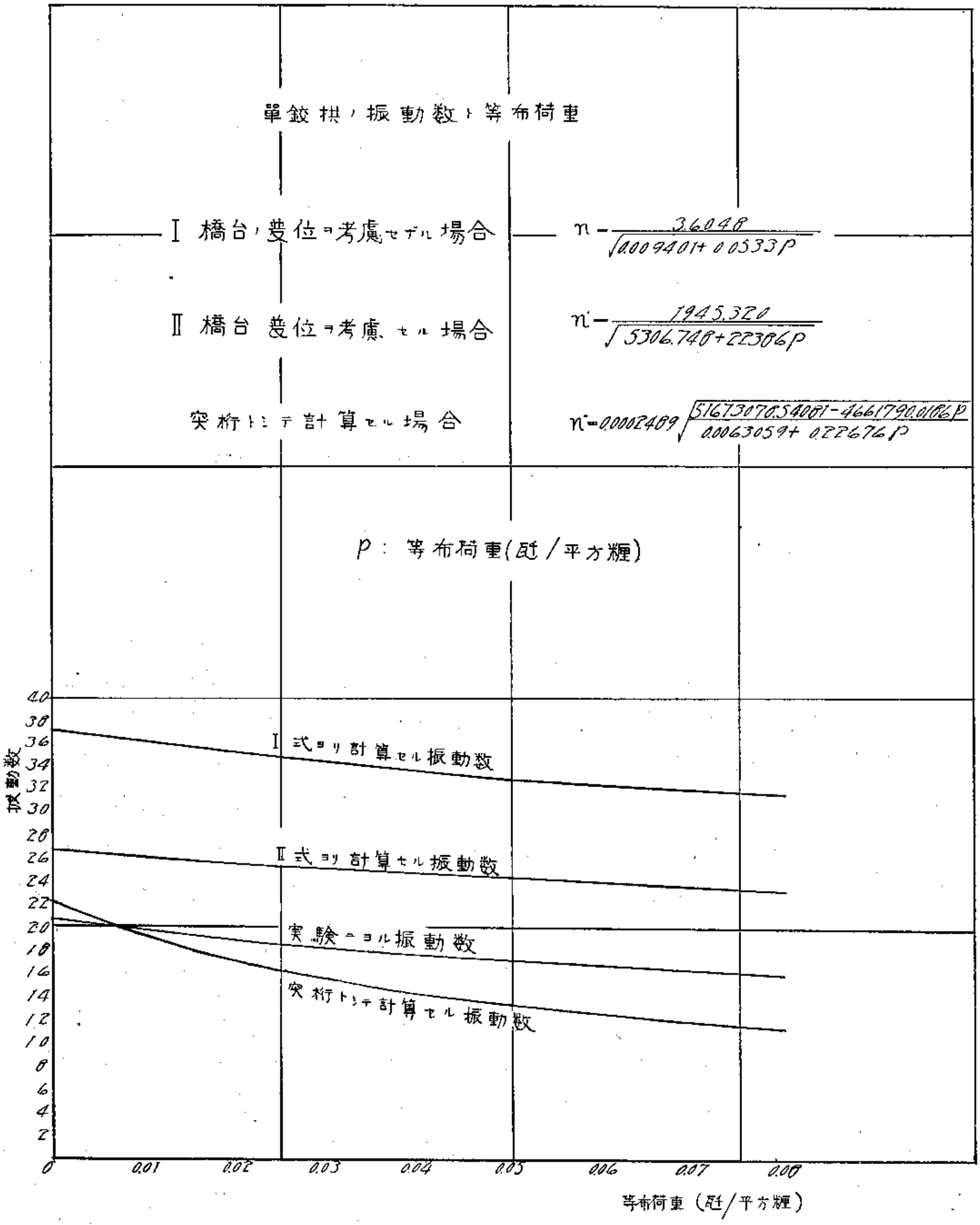
14.12 cm
11.92
10.54
9.59
8.09
8.35
7.93
7.59
7.28
7.03
6.82
6.62
6.47
25.06
30.05
34.96
38.53
41.33
43.46
45.10
46.20
46.85
47.06
12.1 cm
5 @ 24.2 = 121 cm
36.3
Span length 3.388 m
28 cm
107 cm
1:0.5
85 cm
0.40
0.45
0.65
0.85
0.30
3.40
4.00

附圖第二



φ_m
t_m
12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 1' 2' 3' 4' 5' 6' 7' 8' 9' 10' 11' 12'
24@14.117625=338.823
水平推力影響線 (η_m)
0.0000 0.0200 0.0908 0.2103 0.3783 0.5917 0.8413 1.1239 1.4273 1.7496 2.0794 2.4159 2.7526 2.4159 2.0794 1.7496 1.4273 1.1239 0.8413 0.5917 0.3783 0.2103 0.0908 0.0200 0.0000
$\eta_m t_m \sec\varphi_m$
0.0000 0.2838 1.0826 2.1945 3.5587 5.1306 6.8356 8.6608 10.4849 12.3609 14.2106 16.0102 17.8093 16.0102 14.2106 12.3609 10.4849 8.6608 6.8356 5.1306 3.5587 2.1945 1.0826 0.2838 0.0000

附圖第三



(土木學會誌第十七卷第十二號附圖)