

言　　義

土木學會誌 第十七卷第十二號 昭和六年十二月

## 剛體上に於ける水平彈性層の應力 及び變位の代數的解法 (但し平面變形の場合)

(第十七卷第八號所載)

會　員　工　學　士　安　藏　善　之　輔

之れ迄他の方面よりも比較的遅れて居た土質及び基礎の研究が、近來盛に各方面の人々に依つて着々進められて居る事は誠に欣ぶべき事である。本會誌第十七卷第八號に記載せられた准員高橋憲雄氏の頭書の如き論文も矢張り此の種の研究の一部であつて、恐らく多數の人々の興味を惹いた事と思はれる。本問題に就き聊か卑見を述べ多少なりとも御参考になれば幸甚とする所である。

本問題を解くに當り著者は特に代數的解法を用ひられたが其の理由が解り兼ねる。何となれば、始めから plain strain の場合と限定されてゐるのであるから、普通の遣り方で Airy の應力函数を用ひた方が、係数を決定する場合に一々 plain strain の条件を持ち出す必要はなく、夫れだけ勞が省けるからである。夫れのみならず著者の解法では彈性體表面の荷重を示す式が仲々思ふ様に與へられた荷重を示し得ない缺點がある。例題Ⅲを見ると、或級數で示された荷重に對する變位を求め、夫れを以て直ちに梯形荷重に依る變位として居るが、其の表面荷重を表す式を書き直せば

$$\Pi\{1 - \cos(2.5y/h)\}/(2.5y)^2$$

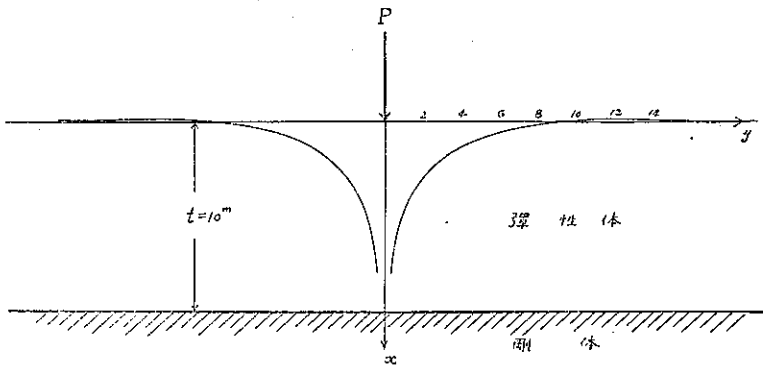
であり、例題Ⅱの山形荷重

$$\Pi\{1 - \cos(y/h)\}/y^2$$

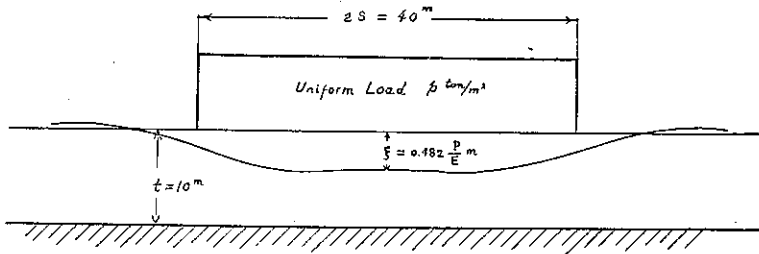
と比較して同じ様なものであり、之れを梯形と見做すのは餘り無理ではなからうかと考へる。成程例題に示された様な梯形斷面を有する堆積土の底部に於ける壓力の分布状態は必ずしも梯形ではないかも知れないが、夫れが上記の式で示されるかどうかは、尙ほ相當の論據がなくは斷言出來ない。又例題Ⅰの様な谷形荷重は實際に於て起り得るであらうか。只徒に數學式を取扱ふだけで其の實際上の利用及び効果は殆んどない様に思はれる。

筆者は曾て Airy の應力函数を用ひて本問題を解いた事があるので、夫れを記し御批判を

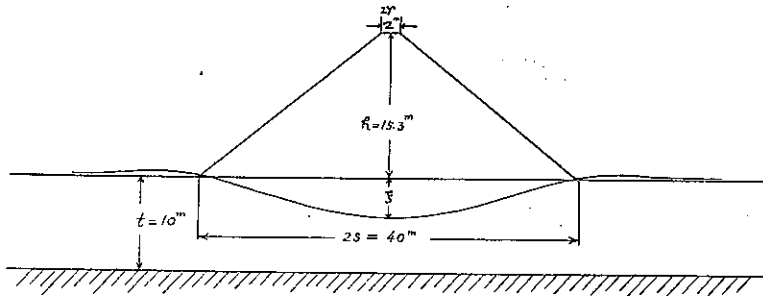
第一圖



第二圖



第三圖



仰ぎ度いと思ふ。但し茲では計算を簡單にする爲、次の場合のみに限定する。

- (1) 荷重は  $x$  軸に對して左右對稱的であり、荷重の幅を  $2s$  とする（第一圖乃至第三圖参照）。
- (2) 荷重は垂直荷重のみであつて、弾性體の表面變位後も荷重分布状態不變である。
- (3) 荷重に依る弾性體表面の變位のみを計算す。従つて其の目的の爲には殆んど弾性體の自重を考へる必要がない。
- (4) 表面よりの深さ  $t$  の所に水平剛體があり、其の表面は極めて粗であるか或は弾性體と密着せるものとす。扱て今 Airy の應力函数として

$$F = \int_0^\infty \cos \alpha y [A \sinh \alpha x + B \cosh \alpha x + C \alpha x \sinh \alpha x + D \alpha x \cosh \alpha x] d\alpha$$

なる形のものを用ふれば明かに

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \int_0^\infty -\alpha^2 \cos \alpha y [A \sinh \alpha x + B \cosh \alpha x + C \alpha x \sinh \alpha x + D \alpha x \cosh \alpha x] d\alpha$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \int_0^\infty \alpha^2 \sin \alpha y [(A+D) \cosh \alpha x + (B+C) \sinh \alpha x + C \alpha x \cosh \alpha x + D \alpha x \sinh \alpha x] d\alpha$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \int_0^\infty -\alpha^2 \cos \alpha y [(A+2D) \sinh \alpha x + (B+2C) \cosh \alpha x + C \alpha x \sinh \alpha x + D \alpha x \cosh \alpha x] d\alpha$$

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{m+1}{mE} \left\{ -\int \sigma_y dx + \frac{m-1}{m} \int (\sigma_x + \sigma_y) dx \right\} \\ &= \frac{m+1}{mE} \int_0^\infty \alpha \cos \alpha y [ \{ A + (1-2k)D \} \cosh \alpha x + \{ B + (1-2k)C \} \sinh \alpha x \\ &\quad + C \alpha x \cosh \alpha x + D \alpha x \sinh \alpha x ] d\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{m+1}{mE} \left\{ -\int \sigma_x dy + \frac{m-1}{m} \int (\sigma_x + \sigma_y) dy \right\} \\ &= \frac{m+1}{mE} \int_0^\infty \alpha \sin \alpha y [ (A+2kD) \sinh \alpha x + (B+2kC) \cosh \alpha x + C \alpha x \sinh \alpha x + D \alpha x \cosh \alpha x ] d\alpha \end{aligned}$$

但し上式中  $k = (m-1)/m$  である。

扱て  $A, B, C, D$  の 4 つの係数は次の boundary condition を満足させる様に決めればよらしい。

- (i)  $x=0, \quad \tau_{xy} = 0$
- (ii)  $x=0, \quad \sigma_x = f(y)$  但し  $-s < y < s$   
 $\sigma_x = 0$  但し  $y < -s$  又は  $y > s$
- (iii)  $x=t, \quad \xi = \eta = 0$
- (iv)  $y = \pm \infty, \quad \sigma_x = \tau_{xy} = \sigma_y = \xi = \eta = 0$

即ち第一の条件から

$$A + D = 0 \dots \dots \dots (1)$$

第二の条件から

$$\sigma_x = \int_0^\infty -B \alpha^2 \cos \alpha y d\alpha = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos \alpha y d\alpha \int_0^s f(\lambda) \cos \alpha \lambda d\lambda$$

従つて  $B = -\frac{2}{\pi} \int_0^s \frac{f(\lambda) \cos \alpha \lambda}{\alpha^2} d\lambda \dots \dots \dots (2)$

第三の条件から

$$(A + 2kD) \sinh \alpha t + (B + 2kC) \cosh \alpha t + C \alpha t \sinh \alpha t + D \alpha t \cosh \alpha t = 0 \dots \dots \dots (3)$$

$$\{ A + (1-2k)D \} \cosh \alpha t + \{ B + (1-2k)C \} \sinh \alpha t + C \alpha t \cosh \alpha t + D \alpha t \sinh \alpha t = 0 \dots \dots \dots (4)$$

これ等の 4 聯立方程式から  $A, B, C, D$  の値は次の様に決定される。

$$\left. \begin{aligned} A &= -B \left\{ \frac{(4k-1) \sinh \alpha t \cosh \alpha t - \alpha t}{(4k-1) \sinh^2 \alpha t + 4k^2 + \alpha^2 t^2} \right\} \\ C &= -B \left\{ \frac{(4k-1) \sinh^2 \alpha t + 2k}{(4k-1) \sinh^2 \alpha t + 4k^2 + \alpha^2 t^2} \right\} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned}
 D &= B \left\{ \frac{(4k-1)\sinh cct \cosh cct - cct}{(4k-1)\sinh^2 cct + 4k^2 + c\alpha^2 t^2} \right\} \\
 B &= \frac{2P}{\pi c\alpha^2} \quad \text{集中荷重の場合 (第一圖参照)} \\
 &= \frac{2p}{\pi} \frac{\operatorname{sinc} c\alpha s}{c\alpha^3} \quad \text{等布荷重の場合 (第二圖参照)} \\
 &= \frac{2p_1}{\pi(s-r)} \frac{(\operatorname{cosec} c\alpha - \operatorname{cosec} c\alpha s)}{c\alpha^4} \quad \text{梯形荷重の場合 (第三圖参照)}
 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

次に最後の第四の條件が満足されてゐるや否やを考へるには先づ一般に  $\varphi(\alpha)$  を  $\alpha$  の任意の函数とすれば

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \varphi(\alpha) \cos \alpha y d\alpha = \lim_{y \rightarrow \infty} \left[ \frac{\varphi(\alpha) \sin \alpha y}{y} \right] - \lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \varphi'(\alpha) \frac{\sin \alpha y}{y} d\alpha$$

であるから、 $\varphi(\alpha)$  又は  $\varphi'(\alpha)$  が  $\alpha$  の如何なる値に對しても無限大にならない時は上式の右邊は零となる。然るに (5) 式で求めた  $A, B, C, D$  の値を  $\sigma_x, \tau_{xy}, \sigma_y, \xi, \eta$  の式に代入して上の様な吟味をすれば、何れも  $y \rightarrow \infty$  にて  $\sigma_x = \tau_{xy} = \sigma_y = \xi = \eta = 0$  である事が判り、結局第四の條件も満足されて居る。

そこで今荷重を集中荷重とし、夫れに依つて生ずる弾性體表面の depression を求めれば

$$\xi = \frac{m+1}{mE} \int_0^{\infty} 2kD\alpha \cos \alpha y d\alpha = \frac{4(m^2-1)P}{\pi m^2 E} \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha y}{\alpha} \left\{ \frac{\sinh 2c\alpha t - \frac{2c\alpha t}{4k-1}}{\cosh 2c\alpha t + \frac{8k^2 + 2c\alpha^2 t^2}{4k-1} - 1} \right\} d\alpha$$

然るに括弧 { } 内の値は  $\alpha$  が或る値、例へば  $c$  よりも大なる時は 1 と見做す事が出来るから、

$$\begin{aligned}
 \xi &= \frac{4(m^2-1)P}{\pi m^2 E} \left[ \int_0^c \frac{\cos \alpha y}{\alpha} \left\{ \frac{\sinh 2c\alpha t - \frac{2c\alpha t}{4k-1}}{\cosh 2c\alpha t + \frac{8k^2 + 2c\alpha^2 t^2}{4k-1} - 1} \right\} d\alpha + \int_c^{\infty} \frac{\cos \alpha y}{\alpha} d\alpha \right] \\
 &= \frac{4(m^2-1)P}{\pi m^2 E} \left[ \int_0^c \frac{\cos \alpha y}{\alpha} \left\{ \frac{\sinh 2c\alpha t - \frac{2c\alpha t}{4k-1}}{\cosh 2c\alpha t + \frac{8k^2 + 2c\alpha^2 t^2}{4k-1} - 1} \right\} d\alpha \right. \\
 &\quad \left. - 0.57722 - \frac{1}{2} \log(cy)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n! 2n} (cy)^{2n} \right]
 \end{aligned}$$

(Haan's Tables D'intégrales Définies. p. 347 参照)

尙ほ最後にある級数の收斂を早くする爲に次の形にして計算すれば便利である

$$\xi = \frac{4(m^2-1)P}{\pi m^2 E} \left[ \int_0^c \frac{\varphi'(\alpha) \cos \alpha y}{\alpha} \left\{ \frac{\sinh 2c\alpha t - \frac{2c\alpha t}{4k-1}}{\cosh 2c\alpha t + \frac{8k^2 + 2c\alpha^2 t^2}{4k-1} - 1} \right\} d\alpha \right]$$

$$+ \int_{e'}^e \frac{\cos \alpha y}{\alpha} \left\{ \frac{\sinh 2\alpha t - \frac{2\alpha t}{4k-1}}{\cosh 2\alpha t + \frac{8k^2 + 2\alpha^2 t^2}{4k-1} - 1} - 1 \right\} d\alpha - 0.57723 - \frac{1}{2} \log(e'y)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n} \frac{(e'y)^{2n}}{2n}$$

上式中  $e'$  は任意の小さな値とする事が出来る。第一及び第二項の定積分は Simpson 或は Gauss の方法其の他に依り、計算の勞さへ厭はなければ如何程でも精密な結果が得られる。次の計算例では  $e=0.76$ ,  $e'=0.04$  として計算した。

(計算例 I) 集中荷重を  $P$  とし,  $t=10$  米,  $m=3$  とすれば弾性體表面各點の沈下は  $\xi=d(P/E)$  米で表す事が出来,  $d$  は次の値となる。

$y$ (米)	0	1	2	4	6	8	10	12	14	20
$d$	$\infty$	0.46569	0.23614	0.12322	0.04305	0.01195	-0.00551	-0.01053	-0.00974	-0.00600

圖示すれば第一圖となる。

(計算例 II)  $p$  なる等布荷重の場合,  $t=10$  米,  $m=2.5$  とすれば  $\xi=d(p/E)$  米で表され, 此の場合  $d$  は次の値となる。(第二圖参照)

$y$ (米)	0	10	20	30
$d$	0.483	0.538	0.234	-0.596

(計算例 III) 梯形荷重の場合(第三圖参照),  $t=10$  米,  $m=2.5$ , 最大壓力強度を  $p_1$  とすれば  $\xi=d(p_1/E)$  米で表はされ,  $d$  は次の如き値となる。

$y$ (米)	0	10	20	30	40
$d$	5.258	2.583	-0.201	-0.241	-0.102

今  $p_1=15.3$  米 $\times$ 0.74 噸=11.322 噸/米<sup>2</sup>,  $E=40$  噸/米<sup>2</sup> とすれば, 荷重中央に於ける沈下  $\xi=1.49$  米となる。

扱て以上の計算を實際の基礎の問題に適用せんとするには次の事に對して考慮を爲す事を忘れてはならない。

(1) たとへ粘土其の他の土質を弾性體として取扱ふ事が許されたとしても, 上の計算は所謂弾性限度内のものであるから, 勿論弾性體の内部や表面に龜裂や沁りが生じない場合である。然るに實際沈下が問題となるのは大概之れ等が伴ふ場合が多い。

(2) 弾性體の表面荷重は沈下後も同じ壓力分布を爲すものと假定して居るが, 多少でも Rigidity のある基礎を用いた場合は其の底部の壓力の分布は決して簡單なものではない。

筆者は基礎を剛體と假定して其の底部の壓力分布を調べた所, 荷重の大きさ, 地層の深さ等に依つて異なる事が判つた。従つて基礎の沈下も之れ等の函數で表はす事が出来る。然し此の研究は未だ完成して居ないので, 茲に數字を以て細かに發表出来ないのを遺憾とする。