# 論　說　報　告

土木學會誌　第十七卷第十一號　昭和六年十一月

# 彈性率の深さと共に變化する地盤に於ける基礎の沈下

准員 工學士　松　村　孫　治

# Effect of Variation of Modulus of Elasticity on Settlement of Elastic Foundation

By Magodi Matumura, C. E., Assoc. Member.

**內 容 梗 概**

本文は先に發表せる“彈性地盤に於ける基礎沈下の理論的研究”の續編にして，彈性率を異にする二地層よりなる地盤並に彈性率が深さの指數函數(exponential function)にて變化する地盤上に設けし圓形基礎に一樣なる垂直荷重の作用する場合の沈下量の算定に就き述べしものなり。

**目　次**



## I. 緒　言

彈性地盤上の基礎の沈下量に關し先に發表[1]せしものに於ては，地中に全く變形せざる硬地層の存在する場合及び下層に viscous fluid の地盤の存する場合，基礎沈下量に及ぼす影響を求めたり。之れ等は何れも兩極端の場合にして，實在する事稀なるのみならず，沈下量

(1) 土木學會誌第十七卷第九號“彈性地盤に於ける基礎の沈下に關する理論的研究”參照

の大體の値を推定する際にも不便尠なからず。加之 viscous fluid を以て軟地層を代表させたる爲に其の通用の範圍は廣からず，從つて地盤が弾性率を異にする二地層より成る場合の基礎沈下を求むるには他の方法に依らざるべからず。

實在の地盤は上記の如く弾性係數を異にする二地層より成る如き簡單なるものにあらず，寧ろ弾性係數は深さと共に變化し，一樣なる弾性係數を有する地盤の沈下と性質的にも異なる處あり。實在の地盤の弾性係數が深さと共に如何に變化するかは場所毎に異なり，實驗的研究によりて決定し得ると雖も，弾性係數と深さとの間の關係を求めたる實驗は未だ發表されたるものなく，計算を行ふ際には適當なる假定をするの止むを得ざる狀態にあり。本文に於ては一例として弾性係數が深さの exponential function にて變化する地盤のみを取り扱ひしが，定性的には充分なる結果を與へ得ると信ず。

前文に於て述べたる如く，圓形並に兩邊の比の著しく大ならざる矩形基礎の中央の沈下量（中央の沈下量を以て基礎全體としての沈下を代表し得）は，近似的に等面積の圓形基礎の沈下量を以て示し得べく，又圓形基礎に於ては相似たる荷重分布に對する基礎全體としての沈下は著しき差を生ぜざるを以て，本文にては計算を簡單ならしむる爲に圓形基礎に對稱的垂直荷重の作用する場合のみを取り扱ひたるが，定性並に定量的にも實用上充分なり。尙矩形基礎の場合も計算の煩雜さを忍べば，圓形の場合と全く同樣の方法にて求むる事を得らるべく，又任意の荷重分布による沈下量も一般式より容易に求むる事を得らるべし。

## II. 弾性係數の異なる二地層より成る地盤の基礎沈下

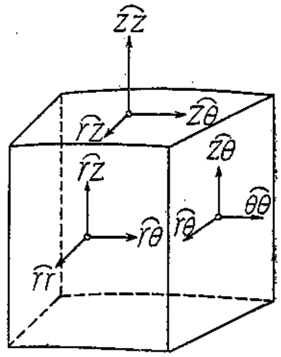
### 1. 基本公式

圓壔座標 (cylindrical co-ordinate) を用ひ，原點を基礎面に採り，$z$ は下方を正とす。

記　號（第一圖 參照）

$\widehat{rr}$： $r$ 軸に直角なる面內にて $r$ の方向に作用する應力
$\widehat{\theta\theta}$： $\theta$ 軸に直角なる面內にて $\theta$ の方向に作用する應力
$\widehat{zz}$： $z$ 軸に直角なる面內にて $z$ の方向に作用する應力
$\widehat{rz}$： $z$ 軸に直角なる面內にて $r$ の方向に作用する應力，又は $r$ 軸に直角なる面內にて $z$ の方向に作用する應力
$u$： $r$ の方向の變位
$w$： $z$ の方向の變位
$w_0$： 基礎の沈下，又は基礎地盤面の垂直變位
$W$： 基礎の中央の沈下
$p(r)$： 載荷面に作用する垂直荷重
$p_0$： 載荷面に作用する垂直荷重の平均値
$a$： 基礎面の半徑
$E$： 基礎地盤の彈性率

第　一　圖



$\sigma$： 基礎地盤のポアソン比

$h$： 上部の地層の厚さ

$\lambda, \mu$: Lamé's elastic constants

兩地層に共通なる記號に於ては suffix 1 を以て上部の地層，suffix 2 を以て下部の地層を示す。

式の誘導は前文[(2)]に用ひしものと全く同一なるを以て，本文にては途中の計算を成る可く省略せり。

上部地層に適用する解は次式の如く，

$$\left.\begin{aligned}
\widehat{zz}_1 &= \int_0^\infty (1+kz)X(k)e^{-kz}J_0(kr)\,dk + \int_0^\infty k^2\{B_1(\operatorname{Sinh} kz - kz\operatorname{Cosh} kz)\\
&\quad - D_1 kz \operatorname{Sinh} kz\} J_0(kr)dk\\
\widehat{zr}_1 &= \int_0^\infty kzX(k)e^{-kz}J_1(kr)dk + \int_0^\infty k^2\{B_1 kz\operatorname{Sinh} kz\\
&\quad + D_1(\operatorname{Sinh} kz + kz\operatorname{Cosh} kz)\} J_1(kr)dk\\
u_1 &= \frac{1+\sigma_1}{E_1}\int_0^\infty \frac{1}{k}\{(1-2\sigma_1) - kz\}X(k)e^{-kz}J_1(kr)dk\\
&\quad + \frac{1+\sigma_1}{E_1}\int_0^\infty k\Big[B_1\{(1-2\sigma_1)\operatorname{Sinh} kz + kz\operatorname{Cosh} kz\}\\
&\quad + D_1\{2(1-\sigma_1)\operatorname{Cosh} kz + kz\operatorname{Sinh} kz\}\Big]J_1(kr)dk\\
w_1 &= -\frac{1+\sigma_1}{E_1}\int_0^\infty \frac{1}{k}\{2(1-\sigma_1) + kz\}X(k)e^{-kz}J_0(kr)dk\\
&\quad + \frac{1+\sigma_1}{E_1}\int^\infty k\Big[B_1\{2(1-\sigma_1)\operatorname{Cosh} kz - kz\operatorname{Sinh} kz\}\\
&\quad + D_1\{(1-2\sigma_1)\operatorname{Sinh} kz - kz\operatorname{Cosh} kz\}\Big]J_0(kr)dk
\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(1)$$

$$X(k) = -k\int_0^\infty p(\alpha)J_0(k\alpha)\alpha d\alpha \quad\cdots\cdots(2)$$

(2) 式の $p(\alpha)$ は基礎地盤面にて $z$ の方向に作用するを正とす。(1) 式は $z=0$ にて $\widehat{zr}_1=0$ $\widehat{zz}_1=-p(r)$，即ち基礎地盤面に $p(r)$ なる垂直荷重のみ作用する場合の解を示す。

下部の地層に對しては，

$$\left.\begin{aligned}
\widehat{zz}_2 &= \int_0^\infty k^2\{A_2k + B_2kz + (1-2\sigma_2)B_2\}e^{-kz}J_0(kr)dk\\
\widehat{zr}_2 &= \int_0^\infty k^2\{A_2k + B_2(kz-2\sigma_2)\}e^{-kz}J_1(kr)dk\\
u_2 &= -\frac{1+\sigma_2}{E_2}\int_0^\infty k\{A_2k + B_2(kz-1)\}e^{-kz}J_1(kr)dk\\
w_2 &= -\frac{1+\sigma_1}{E_1}\int_0^\infty k\{A_2k + B_2kz + 2(1-2\sigma_2)B_2\}e^{-kz}J_0(kr)dk
\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(3)$$

基礎の大さに比し $h$ が著しく小ならざる場合は，一般に上下兩地層はその境界面にて滑動せずと考へ得るを以て，$z=h$ の限界條件は次の (4) 式の如し。

---

(2) 土木學會誌第十七卷第九號“弾性地盤に於ける基礎の沈下に關する理論的研究”參照

$$\left.\begin{aligned}\widehat{zz}_1&=\widehat{zz}_2\\ \widehat{zr}_1&=\widehat{zr}_2\\ u_1&=u_2\\ w_1&=w_2\end{aligned}\right\}\quad \text{at}\quad z=h \qquad\cdots\cdots(4)$$

依つて本文に求めたる沈下量は境界面に於て滑動せざる場合にのみ適用さるゝものなりと雖も，滑動の生ずる際は正確なる解を求むるは困難にして，後節の (3) に示す如くその影響は實用的にさして重要ならず。

(1) 式及び (3) 式を (4) 式に代入すれば各係數間に次の關係式を得。

$$\left.\begin{aligned}
&B_1(\mathrm{Sinh}\,kh-kh\,\mathrm{Cosh}\,kh)-D_1kh\,\mathrm{Sinh}\,kh-\{A_2k+B_2kh+(1-2\sigma_2)B_2\}e^{-kh}\\
&\quad=-(1+kh)\frac{X(k)}{k^2}e^{-kh}\\
&B_1kh\,\mathrm{Sinh}\,kh+D_1(\mathrm{Sinh}kh+kh\,\mathrm{Cosh}\,kh)-\{A_2k+B_2(kh-2\sigma_2)\}e^{-kh}\\
&\quad=-kh\frac{X(k)}{k^2}e^{-kh}\\
&\varepsilon B_1\{(1-2\sigma_1)\mathrm{Sinh}\,kh+kh\,\mathrm{Cosh}\,kh\}+\varepsilon D_1\{2(1-\sigma_1)\mathrm{Cosh}\,kh\\
&\qquad+kh\,\mathrm{Sinh}\,kh\}+\{A_2k+B_2(kh-1)\}e^{-kh}\\
&\quad=\varepsilon\{(1-2\sigma_1)-kh\}\frac{X(k)}{k^2}e^{-kh}\\
&\varepsilon B_1\{2(1-\sigma_1)\mathrm{Cosh}\,kh-kh\,\mathrm{Sinh}\,kh\}+\varepsilon D_1\{(1-2\sigma_1)\mathrm{Sinh}\,kh\\
&\qquad-kh\,\mathrm{Cosh}\,kh\}+\{A_2k+B_2kh+2(1-2\sigma_2)B_2\}e^{-kh}\\
&\quad=\varepsilon\{2(1-\sigma_1)+kh\}\frac{X(k)}{k^2}e^{-kh}
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(5)$$

(5) 式を解きて $B_1$, $D_1$ を求むれば,

$$\left.\begin{aligned}
&B_1=\frac{\beta_1}{\alpha_1}\frac{X(k)}{k^2}e^{-kh}\\
&D_1=\frac{\gamma_1}{\alpha_1}\frac{X(k)}{k^2}e^{-kh}\\
&\text{但し}\\
&\alpha_1=(3-4\sigma_2)(\mathrm{Sinh}^2kh-\overline{kh}^2)+\varepsilon\{8(1-\sigma_1)(1-\sigma_2)\mathrm{Sinh}\,kh\,\mathrm{Cosh}\,kh\\
&\qquad+2(1-2\sigma_1)(1-2\sigma_2)\mathrm{Sinh}^2kh+2(1-2\sigma_2)\overline{kh}^2\}\\
&\qquad+\varepsilon^2\{4(1-\sigma_1)^2\mathrm{Cosh}^2kh-(1-2\sigma_1)^2\mathrm{Sinh}^2kh+\overline{kh}^2\}\\
&\beta_1=-(3-4\sigma_2)\{\mathrm{Sinh}\,kh+kh(1+kh)(\mathrm{Sinh}\,kh+\mathrm{Cosh}\,kh)\}\\
&\qquad+\varepsilon\{4(1-\sigma_1)(1-\sigma_2)(\mathrm{Sinh}\,kh-\mathrm{Cosh}\,kh)\\
&\qquad-2(1-2\sigma_1)(1-2\sigma_2)\mathrm{Sinh}\,kh+2(1-2\sigma_2)kh(\mathrm{Sinh}\,kh+\mathrm{Cosh}\,kh)\\
&\qquad+2(1-2\sigma_2)\overline{kh}^2(\mathrm{Sinh}\,kh+\mathrm{Cosh}\,kh)\}+\varepsilon^2\{4(1-\sigma_1)^2\mathrm{Cosh}\,kh\\
&\qquad+(1-2\sigma_1)^2\mathrm{Sinh}\,kh+kh(1+kh)(\mathrm{Sinh}\,kh+\mathrm{Cosh}kh)\}\\
&\gamma_1=[(3-4\sigma_2)\overline{kh}^2+\varepsilon\{2(1-\sigma_1)(1-2\sigma_2)-2(1-2\sigma_2)\overline{kh}^2\}\\
&\qquad-\varepsilon^2\{2(1-2\sigma_1)(1-\sigma_1)+\overline{kh}^2\}](\mathrm{Sinh}\,kh+\mathrm{Cosh}\,kh)
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(6)$$

但し

$$\varepsilon=\frac{1+\sigma_1}{1+\sigma_2}\frac{E_2}{E_1}$$

求むる所の基礎の沈下量 $w_0$, $W$ は夫々次式の如し。

$$\left.\begin{aligned}w_0&=-\frac{2(1-\sigma_1^2)}{E_1}\int_0^\infty\frac{X(k)}{k}J_0(kr)dk+\frac{2(1-\sigma_1^2)}{E_1}\int_0^\infty\frac{\beta_1}{\alpha_1}\frac{X(k)}{k}J_0(kr)e^{-kh}dk\\W&=-\frac{2(1-\sigma_1^2)}{E_1}\int_0^\infty\frac{X(k)}{k}dk+\frac{2(1-\sigma_1^2)}{E_1}\int_0^\infty\frac{\beta_1}{\alpha_1}\frac{X(k)}{k}e^{-kh}dk\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots(7)$$

$p(r)$ が與へらるゝ時には (2) 式より $X(k)$ を得, 從つて (8) 式より基礎沈下量を算定するを得らるべし。

## 2. 一様なる荷重分布による基礎沈下

特別なる場合を除き一般に基礎に作用する荷重は略々一様に分布するを以て, 前文に示す如く基礎中央の沈下量に及ぼす影響を求むるには一樣なる荷重分布の際の影響を以て他の場合の値を代表し得。從つて本文にては垂直荷重 $p_0$ が半徑 $a$ なる基礎面に一樣に作用する場合のみ計算するも, 他の荷重分布の場合も一般式より容易に求め得べし。

此の場合の $p(r)$ は

$$\begin{aligned}p(r)&=p_0 &&(0<r\leqq a)\\&=0 &&(r>a)\end{aligned}$$

にして, 之れ等の値を (2) 式に代入すれば $X(k)$ は,

$$X(k)=-p_0aJ_1(ka)$$

從つて基礎沈下は (7) 式より,

$$\left.\begin{aligned}w_0&=\frac{2(1-\sigma_1^2)}{E_1}p_0a\int_0^\infty\frac{J_1(ka)J_0(kr)}{k}dk-\frac{2(1-\sigma_1^2)}{E}p_0a\int_0^\infty\frac{\beta_1}{\alpha_1}\frac{J_1(ka)J_0(kr)}{k}e^{-kh}dk\\W&=\frac{2(1-\sigma_1^2)}{E_1}p_0a-\frac{2(1-\sigma_1^2)}{E_1}p_0a\int_0^\infty\frac{\beta_1}{\alpha_1}\frac{J_1(ka)}{k}e^{-kh}dk\end{aligned}\right\}\quad\cdots(8)$$

(8) 式の第二項は何れも地中に存在する彈性係數を異にする地層の沈下量に及ぼす影響を示し, 基礎全體としての沈下量は基礎中央の沈下量にて代表し得るを以て, 數計算は $W$ の値のみに止めたり。尙 (8) 式は次の如く書き改められ,

$$W=\frac{2(1-\sigma_1^2)}{E_1}p_0a(1-S)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

$S$ は補正値を示し次式の如く,

$$S=\int_0^\infty\frac{\beta_1}{\alpha_1}\frac{J_1(ka)}{k}e^{-kh}dk\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

(6) 式に示す如く $\alpha_1$, $\beta_1$ は可成り複雜なる函數なれば, (10) 式の $S$ の値は數値積分によりて求むるを便とし, 玆には $\sigma_1=\sigma_2=0$ 及び $\sigma_1=\sigma_2=0.5$ の兩極端の場合を計算し以て大體の影響を知るに止めり。以下 $\sigma_1=\sigma_2=0$ に相當する $S$ の値を $S_1$, $\sigma_1=\sigma_2=0.5$ に相當する値を $S_2$ にて示す。

(10) 式に於て $kh=x$ と置けば，$S_1$，$S_2$ は夫々 (11) 式に示され，

$$\left.\begin{aligned} S_1=&\int_0^\infty \frac{-3\{\mathrm{Sinh}\,x+x(1+x)e^x\}+2\varepsilon\{x(1+x)e^x-2e^{-x}-\mathrm{Sinh}\,x\}+\varepsilon^2\{4\,\mathrm{Cosh}\,x+\mathrm{Sinh}x+x(1+x)e^x\}}{3(\mathrm{Sinh}^2x-x^2)+2\varepsilon(4\,\mathrm{Sinh}\,x\,\mathrm{Cosh}\,x+\mathrm{Sinh}^2x+x^2)+\varepsilon^2(4\,\mathrm{Cosh}^2x-\mathrm{Sinh}^2x+x^2)} \\ &\cdots\cdots\times\frac{J_1\left(x\frac{a}{h}\right)}{x}e^{-x}dx \\ S_2=&\int_0^\infty \frac{-\{\mathrm{Sinh}\,x+x(1+x)e^x\}-\varepsilon e^{-x}+\varepsilon^2\{\mathrm{Cosh}\,x+x(1+x)e^x\}}{(\mathrm{Sinh}^2x-x^2)+2\varepsilon\,\mathrm{Sinh}\,x\,\mathrm{Cosh}\,x+\varepsilon^2(\mathrm{Cosh}^2x+x^2)}\frac{J_1\left(x\frac{a}{h}\right)}{x}e^{-x}ax \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

$\varepsilon=\infty$ に相當する値は既知なるを以て，$\varepsilon=10$, 2, 0.5, 0.2, 0.1 及び 0.01 の場合に對し實算を行ひ，他の $\varepsilon$ に相當する値は圖面上より求めたり。從つて之れ等の値は精密度に多少缺く處ありと雖も實用上は何等の差支へなし。

$S_1$ の値は **第一表**及び **附圖第一**，$S_2$ の値は **第二表**及び **附圖第二**に示すが如し。

**第一表　補正値** $S_1$ $(\sigma_1=\sigma_2=0)$

| | $a/h$ | 0.1 | 0.5 | 0.8 | 1.0 | 1.5 | 2.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varepsilon$ | ∞ | 0.06 | 0.30 | 0.44 | 0.51 | 0.66 | 0.75 |
| | 10.00 | 0.05 | 0.25 | 0.38 | 0.45 | 0.59 | 0.67 |
| | 4.00 | 0.05 | 0.20 | 0.30 | 0.36 | 0.48 | 0.55 |
| | 2.00 | 0.03 | 0.13 | 0.19 | 0.23 | 0.30 | 0.34 |
| | 1.50 | 0.02 | 0.08 | 0.12 | 0.15 | 0.19 | 0.21 |
| | 1.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| | 0.70 | −0.02 | −0.10 | −0.16 | −0.18 | −0.23 | −0.27 |
| | 0.50 | −0.05 | −0.22 | −0.35 | −0.40 | −0.53 | −0.61 |
| | 0.40 | −0.07 | −0.32 | −0.49 | −0.59 | −0.78 | −0.90 |
| | 0.30 | −0.10 | −0.48 | −0.47 | −0.89 | −1.18 | −1.37 |
| | 0.20 | −0.16 | −0.78 | −1.19 | −1.43 | −1.92 | −2.27 |
| | 0.15 | −0.22 | −1.04 | −1.59 | −1.93 | −2.57 | −3.05 |
| | 0.10 | −0.33 | −1.53 | −2.36 | −2.86 | −3.84 | −4.63 |
| | 0.05 | −0.60 | −2.86 | −4.30 | −5.30 | −7.16 | −8.60 |
| | 0.02 | −1.30 | −6.00 | −9.06 | −10.90 | −14.90 | −18.40 |
| | 0.01 | −1.97 | −9.90 | −15.00 | −18.50 | −26.00 | −33.00 |

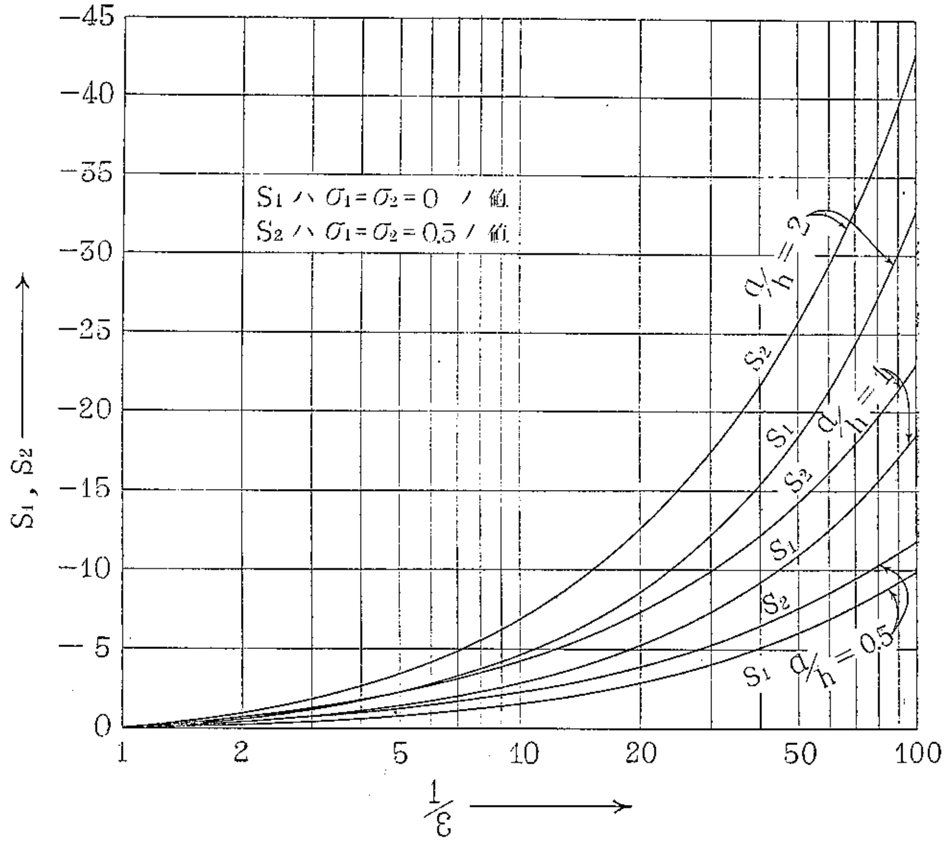
**第二表　補正値** $S_2$ $(\sigma_1=\sigma_2=0.5)$

| | $a/h$ | 0.1 | 0.5 | 0.8 | 1.0 | 1.5 | 2.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varepsilon$ | ∞ | 0.09 | 0.42 | 0.61 | 0.70 | 0.85 | 0.92 |
| | 10.00 | 0.08 | 0.38 | 0.56 | 0.64 | 0.78 | 0.86 |
| | 4.00 | 0.07 | 0.32 | 0.46 | 0.54 | 0.66 | 0.72 |
| | 2.00 | 0.05 | 0.22 | 0.32 | 0.37 | 0.44 | 0.48 |
| | 1.50 | 0.03 | 0.14 | 0.22 | 0.25 | 0.31 | 0.33 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| | 0.70 | −0.04 | −0.17 | −0.25 | −0.30 | −0.38 | −0.40 |
| | 0.50 | −0.08 | −0.40 | −0.59 | −0.69 | −0.87 | −0.95 |
| | 0.40 | −0.12 | −0.56 | −0.85 | −1.00 | −1.26 | −1.41 |
| | 0.30 | −0.17 | −0.82 | −1.23 | −1.46 | −1.83 | −2.13 |
| $\varepsilon$ | 0.20 | −0.26 | −1.25 | −1.90 | −2.27 | −2.97 | −3.45 |
| | 0.15 | −0.33 | −1.65 | −2.48 | −2.97 | −3.92 | −4.66 |
| | 0.10 | −0.47 | −2.27 | −3.50 | −4.23 | −5.76 | −6.90 |
| | 0.05 | −0.80 | −3.90 | −6.10 | −7.40 | −10.40 | −12.60 |
| | 0.02 | −1.50 | −7.50 | −11.60 | −14.20 | −20.20 | −5.80 |
| | 0.01 | −2.37 | −11.77 | −18.58 | −22.98 | −33.38 | −42.80 |

更に $S_1$ と $S_2$ との値を比較する爲に $a/h=0.5$, 1, 2 の三つの場合のみを**第二圖**に示せり，圖より $\varepsilon$ の他の値の補正値を大體推定し得べし。

**第　二　圖**



下部の地層が上部の地層より軟弱なる場合に，上部の硬地層の及ぼす影響を知らんが爲，(8) 式を (12) 式の如く書き改む。

$$W=\frac{2(1-\sigma_2^2)}{E_2}p_0a\frac{1-\sigma_1}{1-\sigma_2}\varepsilon\left\{1-\int_0^\infty\frac{\beta}{\alpha}\frac{J_0(ka)}{k}e^{-kh}dk\right\} \qquad \cdots\cdots(12)$$

$2(1-\sigma_2^2)p_0a/E_2$ は全地盤が下部の地層より成る場合の沈下量に相當し，上部の硬地層の補正値を $S'$ とすれば，$S'$ は (13) 式の如し。

$$S'=1-\frac{1-\sigma_1}{1-\sigma_2}\varepsilon(1-S) \qquad \cdots\cdots(13)$$

今 $S_1$ に相當する $S'$ を $S_1'$, $S_2$ に相當するものを $S_2'$ とすれば，$S_1'$ 及び $S_2'$ は夫々次の如し。

$$\left.\begin{aligned}S_1'&=1-\varepsilon(1-S_1)\\ S_2'&=1-\varepsilon(1-S_2)\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(14)$$

$S_1'$, $S_2'$ の値は夫々**第三表**及び**第四表**の如し。

**第三表　$S_1'$ の値**　($\sigma_1=\sigma_2=0$)

| $\varepsilon$ | 0.50 | 0.20 | 0.10 | 0.01 |
|---|---|---|---|---|
| $a/h=0.1$ | 0.48 | 0.77 | 0.87 | 0.97 |
| $=0.5$ | 0.39 | 0.65 | 0.75 | 0.89 |
| $=1.0$ | 0.30 | 0.51 | 0.61 | 0.81 |
| $=2.0$ | 0.24 | 0.42 | 0.52 | 0.73 |

**第四表　$S_2'$ の値**　($\sigma_1=\sigma_2=0.5$)

| $\varepsilon$ | 0.50 | 0.20 | 0.10 | 0.01 |
|---|---|---|---|---|
| $a/h=0.1$ | 0.46 | 0.75 | 0.85 | 0.97 |
| $=0.5$ | 0.30 | 0.55 | 0.67 | 0.87 |
| $=1.0$ | 0.16 | 0.35 | 0.48 | 0.76 |
| $=2.0$ | 0.02 | 0.11 | 0.21 | 0.56 |

上記の計算より，

**a)** 地中にある力學的性質を異にする地層の基礎沈下に及ぼす影響は $a/h$, 兩地層のポアソン比及び $\varepsilon=(1+\sigma_1)E_2/(1+\sigma_2)E_1$ 等の値に關係す。

**b)** $\varepsilon>1$ 卽ち下部の地層が上部に比し硬き場合は沈下は減少し，その大さは $\varepsilon$ 及び $a/h$ の大なる程大なり，然れども減少の割合は一般に $\varepsilon$ 及び $a/h$ の小なる程著しく，$\varepsilon=10$ の値は $\varepsilon=\infty$ の時の値の 80% 以上に及ぶ。

**c)** $\varepsilon<1$ 卽ち下部の地層が上部に比し軟き場合は沈下は增加し，その大さは $\varepsilon$ の小なる程，$a/h$ の大なる程大なり，增加の割合は $a/h$ の大なる程小なれど，$\varepsilon$ に對してはその關係明かならず。

**d)** $\varepsilon<1$ なる場合全地盤が下部と同じ地層より成ると假定する場合の上部の地層の影響

は $a/h$, $\varepsilon$ 及び $\sigma$ の大なる程小にして, $a/h=2$, $\varepsilon=0.5$, $\sigma_1=\sigma_2=0.5$ の場合には僅に 0.02 にすぎず, 全地盤が下部と同じ地層より成ると考ふるも差支へ無きを知る。

### 3. 兩地層の滑動による影響

(2) は上下兩地層がその境界面にて滑動せざる條件の下に求めしものなれば, 境界面にて滑動する場合にはその結果を適用し得ざるを以て, 更に滑動の基礎沈下に及ぼす影響を考察する必要あり。先に述べし如く, 此の場合の限界條件を正確に求むるは困難なるを以て, その極限の場合として兩地層の境界面に於て應剪力が全く作用せざる場合を考ふるに, $z=h$ に於て滿足すべき限界條件は,

$$\left.\begin{aligned} &\widehat{zz}_1=\widehat{zz}_2 \\ &\widehat{zr}_1=0 \\ &\widehat{zr}_2=0 \qquad \text{at} \quad z=h \\ &w_1=w_2 \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

(15) 式の $\widehat{zz}_1$, $\widehat{zz}_2$ 等は夫々 (1) 式, (3) 式の値を用ふ。(1) 式及び (3) 式の値を (15) 式に代入すれば係數間の關係は次の如し。

$$\left.\begin{aligned} &B_1(\mathrm{Sinh}\,kh-kh\,\mathrm{Cosh}\,kh)-D_1kh\,\mathrm{Sinh}\,kh-\{A_2k+B_2kh+(1-2\sigma_2)B_2\}e^{-kh} \\ &\qquad =-(1+kh)\frac{X(k)}{k^2}e^{-kh} \\ &B_1kh\,\mathrm{Sinh}\,kh+D_1(\mathrm{Sinh}\,kh+kh\,\mathrm{Cosh}\,kh)=-kh\frac{X(k)}{k^2}e^{-kh} \\ &A_2k+B_2(kh-2\sigma_2)=0 \\ &\varepsilon B_1\{2(1-\sigma_1)\,\mathrm{Cosh}\,kh-kh\,\mathrm{Sinh}\,kh\}+\varepsilon D_1\{(1-2\sigma_1)\,\mathrm{Sinh}\,kh-kh\,\mathrm{Cosh}\,kh\} \\ &\qquad +\{A_2k+B_2kh+2(1-2\sigma_2)B_2\}e^{-kh}=\varepsilon\{2(1-\sigma_1)+kh\}\frac{X(k)}{k^2}e^{-kh} \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

(16) 式を解きて $B_1$, $D_1$ を求むれば,

$$\left.\begin{aligned} &B_1=\frac{\beta_2}{\alpha_2}\frac{X(k)}{k^2}e^{-kh} \\ &D_1=\frac{\gamma_2}{\alpha_2}\frac{X(k)}{k^2}e^{-kh} \\ &\text{但し} \\ &\alpha_2=2\varepsilon\{(1-\sigma_1)\,\mathrm{Sinh}\,kh\,\mathrm{Cosh}\,kh+(1-\sigma_1)kh\} \\ &\qquad +2(1-\sigma_2)(\mathrm{Sinh}^2kh-\overline{kh}^2) \\ &\beta_2=2(1-\sigma_1)\varepsilon\{\mathrm{Sinh}\,kh+kh(\mathrm{Sinh}\,kh+\mathrm{Cosh}\,kh)\} \\ &\qquad -2(1-\sigma_2)\{\mathrm{Sinh}\,kh+kh(1+kh)(\mathrm{Sinh}\,kh+\mathrm{Cosh}\,kh)\} \\ &\gamma_2=-2kh\{\varepsilon(1-\sigma_1)-(1-\sigma_2)kh\}(\mathrm{Sinh}\,kh+\mathrm{Cosh}\,kh) \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

一様なる垂直荷重による基礎中央の沈下量は,

$$W=\frac{2(1-\sigma_1^2)}{E_1}p_0a-\frac{2(1-\sigma_1^2)}{E_1}p_0a\int_0^\infty\frac{\beta_2}{\alpha_2}\frac{J_1(ka)}{k}e^{-kh}dk \qquad (18)$$

補正値を $S''$ にて示せば

$$S''=\int_0^\infty \frac{\beta_2}{\alpha_2}\frac{J_1(ka)}{k}e^{-kh}dk \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(19)$$

(17) 式の $\alpha_2$, $\beta_2$ より直ちに知らるゝ如く，若し $\sigma_1=\sigma_2$ なれば，$\beta_2/\alpha_2$ はポアソン比には無關係となり，本文にては唯滑動の影響を知るの目的なるを以て，計算は $\sigma_1=\sigma_2$ の特別の場合に止めたり。此の場合 (19) 式は次式に示され，

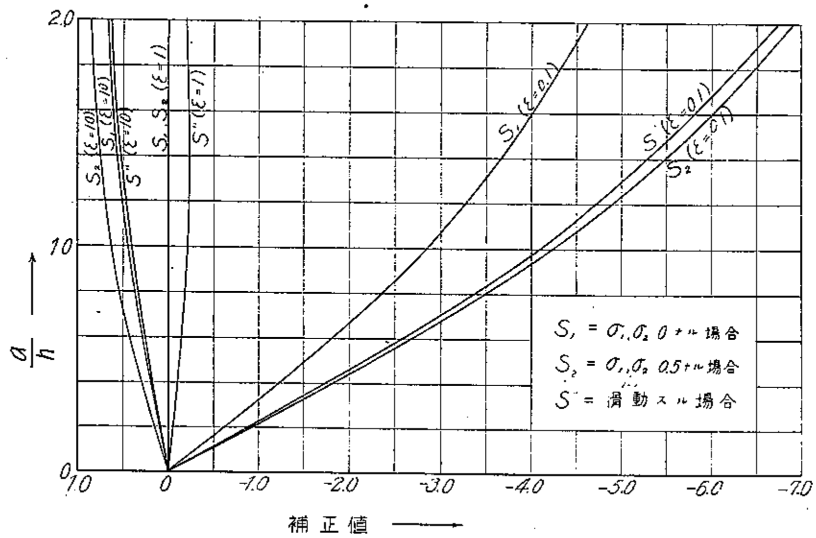
$$S''=\int_0^\infty \frac{\varepsilon(\mathrm{Sinh}x+xe^x)-\{\mathrm{Sinh}x+x(1+x)e^x\}}{\varepsilon(\mathrm{Sinh}\,x\,\mathrm{Cosh}x+x)+(\mathrm{Sinh}^2x-x^2)}\frac{J_1\left(\frac{a}{h}x\right)}{x}e^{-x}dx \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(20)$$

$S''$ の値は**第五表**及び**第三圖**の如し。

**第五表　$S''$ の値**

| | $a/h$ | 0.1 | 0.5 | 1.0 | 1.5 | 2.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varepsilon$ | 10.0 | 0.05 | 0.24 | 0.42 | 0.56 | 0.64 |
| | 1.0 | −0.03 | −0.13 | −0.21 | −0.23 | −0.21 |
| | 0.1 | −0.46 | −2.20 | −4.11 | −5.58 | −6.75 |

**第三圖　滑動による補正値の變化**




圖には比較の爲に $S_1$, $S_2$ の値も記せり。

**第三圖**より $\varepsilon=10$ にて $S''$ は $S_1$, $S_2$ の何れよりも小なれど，$S''$ と $S_1$ との値は略等しく，その差は $a/h=2$ の場合僅に 0.03 に過ぎず，之れに反し $\varepsilon=0.1$ にては $S''$ は $S_1$ と $S_2$ との中間にあり，その値は $S_2$ に略等しく，兩者の差は $a/h=2$ にて 0.15 に過ぎず，從つて滑動による影響は $a/h$ が著しく大にして，補正値が 1 に近き場合を除きては著しからず。本節にて取り扱ひし如く兩地層面に全く剪力の作用せざるは極端なる場合にして，實際

ありては假令滑動する場合と雖も剪力は存在すべく，$\varepsilon>1$ の補正値 $S''$ は必ず增大すべし從つて $S'$ の小にして，且つ實用上不必要なる $\varepsilon=1$ の附近を除きては $S''$ の値は $S_1$ と $S_2$ との中間に在ると考へて差支へなかるべし。本節にては $\varepsilon$ の三つの値の $S''$ のみを求めたるが，之れ等に依り大體の傾向を推定するに足る。

## III. 深さに依り彈性係數の變化する地盤の基礎沈下

### 4. 沈下量算定の基本公式

I と同樣に圓壔座標軸を用ひ，原點を基礎面上にとり，$z$ は下向を正とす。符號はすべて I と同じく圓形基礎に對稱的垂直荷重の作用する場合のみを取り扱ひたり。

彈性體の平衡條件並に應力と變位との間の關係は次式の如し。

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\widehat{rr}}{\partial r}+\frac{\partial\widehat{rz}}{\partial z}+\frac{\widehat{rr}-\widehat{\theta\theta}}{r}=0\\&\frac{\partial\widehat{rz}}{\partial r}+\frac{\partial\widehat{zz}}{\partial z}+\frac{\widehat{rz}}{r}=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(21)$$

$$\left.\begin{aligned}&\widehat{rr}=\lambda\Delta+2\mu\frac{\partial u}{\partial r}\\&\widehat{\theta\theta}=\lambda\Delta+2\mu\frac{u}{r}\\&\widehat{zz}=\lambda\Delta+2\mu\frac{\partial w}{\partial z}\\&\widehat{zr}=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial r}\right)\\&\Delta=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru)+\frac{\partial w}{\partial z}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(22)$$

式中 $\Delta$ は cubical dilation を，$\lambda,\ \mu$ は Láme's elastic constant を示し，$\lambda,\ \mu$ と $E,\ \sigma$ との間には次の關係あり。

$$\left.\begin{aligned}&\lambda=\frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\\&\mu=\frac{E}{2(1+\sigma)}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(23)$$

$\lambda,\ \mu$ を $z$ の函數とし (22) 式を (21) 式に代入すれば，(21) 式は

$$\left.\begin{aligned}&(\lambda+2\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial r}+\mu\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial r}\right)+\frac{\partial\mu}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial r}\right)=0\\&(\lambda+2\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial z}(\lambda+2\mu)\Delta+\mu\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial w}{\partial r}-\frac{\partial u}{\partial z}\right)\\&\quad+\frac{\mu}{r}\left(\frac{\partial w}{\partial r}-\frac{\partial u}{\partial z}\right)-2\frac{\partial\mu}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}\right)=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(24)$$

$\lambda, \mu$ を次式の如く $z$ の exponential function にて表はす時は,

$$\left.\begin{aligned} &\lambda=\lambda_0 e^{\alpha z}, \qquad \mu=\mu_0 e^{\alpha z} \\ &\frac{\partial \varDelta}{\partial z}+\nu\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\alpha\nu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial r}\right)=0 \\ &\frac{\partial \varDelta}{\partial z}+\alpha\varDelta+\nu\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial r}-\frac{\partial u}{\partial z}\right)-2\alpha\nu\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}\right)=0 \\ &\text{但し} \\ &\nu=\frac{\mu_0}{\lambda_0+2\mu_0} \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

$z$ の増大に伴ひ $u, w$ は限りなく小となるを要するを以て, (25)式の解は次の如くなる, 但し $\nu=1/2$ と然らざる場合とを區別するを要す。

**i)** $\nu \fallingdotseq \dfrac{1}{2}$ の場合

$$\left.\begin{aligned} &u=(A_1e^{\lambda_1 z}+A_2e^{\lambda_2 z})J_1(kr) \\ &w=(B_1e^{\lambda_1 z}+B_2e^{\lambda_2 z})J_0(kr) \\ &\widehat{zz}=[\{\lambda_0(A_1k+B_1\lambda_1)+2\mu_0B_1\lambda_1\}e^{\lambda_1 z}+\{\lambda_0(A_2k+B_2\lambda_2) \\ &\qquad +2\mu_0B_2\lambda_2\}e^{\lambda_2 z}]e^{\alpha z}J_0(kr) \\ &\widehat{zr}=\mu_0\{(A_1\lambda_1-B_1k_1)e^{\lambda_1 z}+(A_2\lambda_2-B_2k)e^{\lambda_2 z}\}e^{\alpha z}J_1(kr) \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

式中 $\lambda_1, \lambda_2$ は (27) 式, 常數 $A_1, A_2, B_1$ 及び $B_2$ の關係は (28) 式の如し。

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_1=-\frac{\alpha+\beta+i\gamma}{2} \\ &\lambda_2=-\frac{\alpha+\beta-i\gamma}{2} \\ &\text{但し} \\ &\sqrt{2}\beta=\{\sqrt{(\alpha^2+4k^2)^2+16\alpha^2k^2(1-2\nu)}+\alpha^2+4k^2\}^{\frac{1}{2}} \\ &\sqrt{2}\gamma=\{\sqrt{(\alpha^2+4k^2)^2+16\alpha^2k^2(1-2\nu)}-\alpha^2-4k^2\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

$$\left.\begin{aligned} &A_1(\nu\lambda_1^2+\alpha\nu\lambda_1-k^2)+B_1\{k\lambda_1(\nu-1)-\alpha\nu k\}=0 \\ &A_2(\nu\lambda_2^2+\alpha\nu\lambda_2-k^2)+B_2\{k\lambda_2(\nu-1)-\alpha\nu k\}=0 \end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

**ii)** $\nu=\dfrac{1}{2}$ の場合

$$\left.\begin{aligned} &u=(Ae^{\lambda_1 z}+Bze^{\lambda_1 z})J_1(kr) \\ &w=-\frac{1}{k}\left\{\lambda_1A+\lambda_1Bz-B\left(1+\frac{2\lambda_1^2}{k^2}\right)\right\}e^{\lambda_1 z}J_0(kr) \\ &\widehat{zz}=-\frac{2\mu_0\lambda_1^2}{k}e^{\alpha z}\left(A+Bz-\frac{2\lambda_1}{k^2}B\right)e^{\lambda_1 z}J_0(kr) \\ &\widehat{zr}=2\mu_0e^{\alpha z}\left(A\lambda_1-B\frac{\lambda_1^2}{k^2}+Bz\lambda_1\right)e^{\lambda_1 z}J_1(kr) \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

但し $\lambda_1$ は次式の如し。

$$\lambda_1=-\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+4k^2}}{2}$$

$A$, $B$ は夫々常數を示す。

### 5. 垂直荷重のみ作用する場合の基礎沈下

基礎地盤面上に對稱的荷重の作用する場合の基礎沈下は一般に(26)式又は(29)式より求むる事を得，水平荷重の作用する場合は垂直荷重の場合と全く同一の方法にて求むる事を得るを以て，玆には垂直荷重のみ作用する場合を取り扱へり。$\lambda$, $\mu$ と $E$, $\sigma$ との間には(23)式に示す關係在るを以て，$E$ 及び $\sigma$ は $z$ の函數として示す事を得らるべく，計算を簡單ならしむる爲 $\sigma$ は $z$ に無關係にして $E$ のみ $z$ の函數なる場合のみに止むるも，彈性係數の變化の沈下量に及ぼす影響のみを知るには差支へなし。更に $\sigma$ の任意の値の場合は可成り複雜なる計算を必要とするを以て，$\sigma=0$ 及び $\sigma=0.5$ の兩極端の場合に止めたり。

i) $\sigma=0$ の場合

地盤面の彈性率を $E_0$ とすれば $\lambda_0=0$, $\mu_0=E_0/2$, 且つ $\nu=1/2$ なるを以て(29)式を用ひ解は次の如し。

$$\left.\begin{aligned}
\widehat{zz}&=-\int_0^\infty\frac{\lambda_1^2}{k^2}\left(A+Bz-\frac{2\lambda_1}{k^2}B\right)e^{\lambda_1 z}J_0(kr)dk\\
\widehat{zr}&=\int_0^\infty\lambda_1\left(A+Bz-\frac{\lambda_1}{k^2}B\right)e^{\lambda_1 z}J_1(kr)dk\\
w&=-\frac{1}{E_0e^{\alpha z}}\int_0^\infty\left\{\lambda_1A+\lambda_1Bz-B\left(1+\frac{2\lambda_1^2}{k^2}\right)\right\}e^{\lambda_1 z}J_0(kr)dk\\
&\text{但し}\\
\lambda_1&=-\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+4k^2}}{2}
\end{aligned}\right\}\qquad\cdots\cdots(30)$$

$p(r)$ を以て基礎地盤面に作用する垂直荷重とすれば限界條件は次の如く，

$$\left.\begin{aligned}\widehat{zr}&=0\\ \widehat{zz}&=-p(r)\end{aligned}\right\}\quad \text{at}\quad z=0$$

但し $p(r)$ は $z$ の方向に作用するを正とす。(30)式の常數 $A$, $B$ をして上記の限界條件を滿足する如く定むれば，

$$\left.\begin{aligned}
\widehat{zz}&=-\int_0^\infty\frac{\lambda_1-k^2z}{\lambda_1}X(k)J_0(kr)e^{\lambda_1 z}dk\\
w&=-\frac{1}{E_0e^{\alpha z}}\int_0^\infty\frac{(k^2+\lambda_1^2)-\lambda_1k^2z}{\lambda_1^3}X(k)J_0(kr)e^{\lambda_1 z}dk\\
&\text{但し}\\
X(k)&=k\int_0^\infty p(\eta)J_0(k\eta)\eta d\eta
\end{aligned}\right\}\qquad\cdots\cdots(31)$$

基礎の沈下及び基礎の中央の沈下は夫々

$$\left.\begin{aligned}
w_0&=-\frac{1}{E_0}\int_0^\infty\frac{k^2+\lambda_1^2}{\lambda_1^3}X(k)J_0(kr)dk\\
W&=-\frac{1}{E_0}\int_0^\infty\frac{k^2+\lambda_1^2}{\lambda_1^3}X(k)dk
\end{aligned}\right\}\qquad\cdots\cdots(32)$$

**ii)**　$\sigma=0.5$ の場合

此の場合は $\nu=0$ となりて (26) 式を用ふるを要すべく，基礎に垂直荷重のみ作用する場合の限界條件は i) と同一にして，$z=0$ にて $\widehat{zr}=0$ を滿足せしむれば，係數 $A_1$，$B_1$，$A_2$ 及び $B_2$ の間には次の關係あり。

$$\left.\begin{aligned}&A_1(\nu\lambda_1^2+\alpha\nu\lambda_1-k^2)+B_1\{k(\nu-1)\lambda_1-\alpha\nu k\}=0\\&A_2(\nu\lambda_2^2+\alpha\nu\lambda_2-k^2)+B_2\{k(\nu-1)\lambda_2-\alpha\nu h\}=0\\&A_1\lambda_1-B_1k+A_2\lambda_2-B_2k=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(33)$$

式中の $\lambda_1$，$\lambda_2$ 及び $\alpha$, $\beta$ は (27) 式の値を示す。(33) 式より $A_1$，$B_1$，$B_2$ を求め (26) 式に代入すれば，$\widehat{zz}$, $w$ は次式の如し。

$$\left.\begin{aligned}\widehat{zz}&=(\vartheta_1e^{\lambda_1z}+\vartheta_2e^{\lambda_2z})A_2e^{\alpha z}J_0(kr)\\w&=\left\{\frac{(\nu\lambda_1^2+\alpha\nu\lambda_1-k^2)}{(2\nu\lambda_1^2-\lambda_1^2-k^2)}\frac{(2\nu\lambda_2^2-\lambda_2^2-k^2)}{(\nu-1)\lambda_2-\alpha\nu}e^{\lambda_1z}\right.\\&\qquad\left.-\frac{\nu\lambda_2^2+\alpha\nu\lambda_2-k^2}{(\nu-1)\lambda_2-\alpha\nu}e^{\lambda_2z}\right\}\frac{A^2}{k}e^{\alpha z}J_0(kr)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(34)$$

式中 $\vartheta_1$，$\vartheta_2$ は (35) 式の函數を示す。

(34) 式より垂直荷重の作用する場合の解は (35) 式に示され，

$$\left.\begin{aligned}\widehat{zz}&=\int_0^\infty(\vartheta_1e^{\lambda_1z}+\vartheta_2e^{\lambda_2z})A_2e^{\alpha z}J_0(kr)dk\\w&=\int_0^\infty\left\{\frac{(\nu\lambda_1^2+\alpha\nu\lambda_1-k^2)}{(2\nu\lambda_1-\lambda_1^2-k^2)}\frac{2\nu\lambda_2^2-\lambda_2^2-k^2}{(\nu-1)\lambda_2-\alpha\nu}e^{\lambda_1z}\right.\\&\qquad\left.-\frac{\nu\lambda_2^2+\alpha\nu\lambda_2-k^2}{(\nu-1)\lambda_2-\alpha\nu}\right\}\frac{A_2}{k}e^{\alpha z}J_0(kr)dk\\&\text{但し}\\\vartheta_1&=\frac{(2\nu\lambda_2^2-\lambda_2^2-k^2)\{\nu\lambda_1^3+\alpha\nu\lambda_1^2-k^2\lambda_1-(\nu-1)k^2\lambda_1+\alpha\nu k^2\}}{k(2\nu\lambda_1^2-\lambda_1^2-k^2)\{(\nu-1)\lambda_2-\alpha\nu\}}\\&\quad+2\mu_0\lambda_1\frac{(\nu\lambda_1^2+\alpha\nu\lambda_1-k^2)(2\nu\lambda_2^2-\lambda_2^2-k^2)}{k(2\nu\lambda_1^2-\lambda_1^2-k^2)\{(\nu-1)\lambda_2-\alpha\nu\}}\\\vartheta_2&=-\frac{\alpha\nu k^2+\nu\lambda_2^3+\alpha\nu\lambda_2^2-\nu k^2\lambda_2}{k\{(\nu-1)\lambda_2-\alpha\nu\}}\lambda_0-2\mu_0\frac{\nu\lambda_2^3+\alpha\nu\lambda_2^2-k^2\lambda_2}{k\{(\nu-1)\lambda_2-\alpha\nu\}}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(35)$$

基礎面に作用する垂直荷重を $p(r)$ とすれば次式にて示さるゝを以て，

$$p(r)=\int_0^\infty J_0(kr)kdk\int_0^\infty p(\eta)J_0(k\eta)\eta d\eta$$

(35) 式より $A_2$ は次の如く得らる。

$$A_2=-\frac{k}{\vartheta_1+\vartheta_2}\int_0^\infty p(\eta)J_0(k\eta)\eta d\eta$$

此の値を (35) 式に代入すれば基礎の沈下 $w_0$ 及び $W$ は (36) 式の如し。

$$w_0=-\int_0^\infty\frac{1}{\vartheta_1+\vartheta_2}\left[\frac{\nu\lambda_1^2+\alpha\nu\lambda_1-k^2}{2\nu\lambda_1^2-\lambda_1^2-k^2}\frac{2\nu\lambda_2^2-\lambda_2^2-k^2}{(\nu-1)\lambda_2-\alpha\nu}\right.$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\quad -\frac{\nu\lambda_2{}^2+\alpha\nu\lambda_2-k^2}{\{(\nu-1)\lambda_2-\alpha\nu\}}\Bigg]\frac{X(k)}{k}J_0(kr)dk \\
&W=-\int_0^\infty \frac{1}{\vartheta_1+\vartheta_2}\Bigg[\frac{\nu\lambda_1{}^2+\alpha\nu\lambda_1-k^2}{2\nu\lambda_1{}^2-\lambda_1{}^2-k^2}\,\frac{2\nu\lambda_2{}^2-\lambda_2{}^2-k^2}{(\nu-1)\lambda_2-\alpha\nu} \\
&\quad -\frac{\nu\lambda_2{}^2+\alpha\nu\lambda_2-k^2}{\{(\nu-1)\lambda_2-\alpha\nu\}}\Bigg]\frac{X(k)}{k}dk \\
&\text{但し} \\
&X(k)=k\int_0^\infty p(\eta)J_0(k\eta)\eta d\eta
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(36)
$$

一般に $p(r)$ が與へらるゝ時は (36) 式より基礎の沈下を求め得るも，$\sigma$ の一般の値の計算は可成り複雑なるを以て，玆には $\sigma=0.5$ の場合に止めたり。$\sigma=0.5$ の場合は $\nu=0$, $\lambda_0\nu=\mu_0$ なるを以て (36) 式は次の如く簡單となる。

$$
\left.\begin{aligned}
w_0&=\frac{3}{E_0}\int_0^\infty \frac{(\alpha+\beta)k^2}{\frac{1}{16}\{(\alpha+\beta)^2+\gamma^2\}^2+k^2\gamma^2+3k^4}X(k)J_0(kr)dk \\
W&=\frac{3}{E_0}\int_0^\infty \frac{(\alpha+\beta)k^2}{\frac{1}{16}\{(\alpha+\beta)^2+\gamma^2\}+k^2\gamma^2+3k^4}X(k)dk
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(37)
$$

### 6. 一様なる垂直荷重による基礎沈下

先に述べし如く任意の對稱的垂直荷重の作用による基礎沈下は一般式より求むるを得るを以て，玆には計算方法及び地盤の弾性率の變化の基礎沈下に及ぼす影響を知らんが爲に，半徑 $a$ なる圓形基礎に一様なる垂直荷重の作用する場合に就てのみ數計算を行へり。此の場合

$$X(k)=p_0aJ_1(ka)\cdots\cdots(38)$$

にして，計算は I の場合と同じく $\sigma=0$, $\sigma=0.5$ の兩極端の場合に止め，基礎の中央の沈下量のみを求めたり。

**i)** $\sigma=0$ の場合

$X(k)$ の値を (32) 式に代入すれば基礎沈下は，

$$W=-\frac{p_0a}{E_0}\int_0^\infty \frac{k^2+\lambda_1{}^2}{\lambda_1{}^3}J_1(ka)dk\cdots\cdots(39)$$

弾性率 $E_0$，ポアソン比 0 なる一様の弾性的性質を有する地盤の基礎沈下を $W'$ とし，兩者の差を $\varDelta W_1=W-W'$ にて示す時は $\varDelta W_1$ は次式の如く，

$$\varDelta W_1=-\frac{2p_0a}{E_0}\int_0^\infty \frac{1}{k}\,\frac{(\alpha-k)\sqrt{\alpha^2+4k^2}+\alpha^2+2k^2}{\alpha^2+2k^2+\alpha\sqrt{\alpha^2+4k^2}}J_1(ka)dk\cdots\cdots(40)$$

今 $E$ の値が $E_0$ の 1.5 倍なる深さ $h$ を基準にとれば，$h$ を以て地盤變化狀況を示し得らるべく，$\alpha=\alpha'/h\ (\alpha'=0.40547)$ となり，(40) 式に之れ等の値を代入し $kh=x$ と置けば，$\varDelta W_1$ は次の如し。

$$\varDelta W_1=-\frac{2p_0a}{E_0}\int_0^\infty \frac{1}{x}\,\frac{(\alpha'-x)\sqrt{\alpha'^2+4x^2}+\alpha'^2+2x^2}{\alpha'^2+2x^2+\alpha'\sqrt{\alpha'^2+4x^2}}J_1\left(\frac{a}{h}x\right)dx$$

又は

$$\varDelta W_1=-\frac{2p_0a}{E_0}S_1 \quad\cdots\cdots(41)$$

但し

$$S_1=\int_0^\infty\frac{1}{x}\frac{(\alpha'-x)\sqrt{\alpha'^2+4x^2}+\alpha'^2+2x^2}{\alpha'^2+2x^2+\alpha'\sqrt{\alpha'^2+4x^2}}J_1\left(\frac{a}{h}x\right)dx \quad\cdots\cdots(42)$$

然るに $W'=2p_0a/E_0$ なるを以て，(41) 式に代入すれば $W$ は，

$$W=W'(1-S_1) \quad\cdots\cdots(43)$$

にて示され，$S_1$ は地盤の彈性率の變化による補正値を示す。

**ii)** $\sigma=0.5$ の場合

$X(k)$ の値を (37) 式に代入し，

$$W=\frac{2\times1.5}{E_0}p_0a\int_0^\infty\frac{k^3(\alpha+\beta)}{\frac{1}{16}\{(\alpha+\beta)^2+\gamma^2\}^2+k^2\gamma^2+3k^4}J_1(ka)dk \quad\cdots\cdots(44)$$

(44) 式の $W$ と上記の $W'$ との差を $\varDelta W_2$ とすれば，

$$\varDelta W_2=\frac{1.5}{E_0}p_0a\int_0^\infty\frac{1}{k}\left\{\frac{2k^3(\alpha+\beta)-\frac{1}{16}\{(\alpha+\beta)^2+\gamma^2\}^2-\frac{3}{2}k^2(\alpha+\beta)^2-\frac{1}{2}k^2\gamma^2+3k^4}{\frac{1}{16}\{(\alpha+\beta)^2+\gamma^2\}^2+\frac{3}{2}k^2(\alpha+\beta)^2+\frac{1}{2}k^2\gamma^2-3k^4}\right\}J_1(ka)dk$$

$\varDelta W_1$ と同じく $E$ が $E_0$ の 1.5 倍なる深さ $h$ を基準にとり，$kh=x$ と置けば $\varDelta W_2$ は (45) 式の如し。

$$\varDelta W_2=\frac{1.5}{E_0}p_0a\int_0^\infty\frac{1}{x}\left\{\frac{2x^3(\alpha'+\beta')-\frac{1}{16}\{(\alpha'+\beta')^2+\gamma'^2\}^2-\frac{3}{2}x^2(\alpha'+\beta')^2-\frac{1}{2}x^2\gamma'^2+3x^4}{\frac{1}{16}\{(\alpha'+\beta')^2+\gamma'^2\}^2+\frac{3}{2}x^2(\alpha'+\beta')^2+\frac{1}{2}x^2\gamma'^2-3x^4}\right\}J_1\left(\frac{a}{h}x\right)dx$$

$$\cdots\cdots(45)$$

但し

$$\alpha'=0.40547$$

$$\beta'=\left\{\sqrt{\left(\frac{\alpha'^2}{2}+2x^2\right)^2+4\alpha'^2x^2}+\frac{\alpha'^2}{2}+2x^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\gamma'=\left\{\sqrt{\left(\frac{\alpha'^2}{2}+2x^2\right)^2+4\alpha'^2x^2}-\frac{\alpha'^2}{2}-2x^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

(45) 式の積分値を $S_2$ とすれば $W'=1.5p_0a/E_0$ なるを以て，$W=W'(1-S_2)$ にして，$S_2$ は彈性率の變化による補正値を示す。

$$S_2=-\int_0^\infty\frac{1}{x}\left\{\frac{2x^3(\alpha'+\beta')-\frac{1}{16}\{\alpha'+\beta')^2+\gamma'^2\}^2-\frac{3}{2}x^2(\alpha'+\beta')^2-\frac{1}{2}x^2\gamma'^2+3x^4}{\frac{1}{16}\{(\alpha'+\beta')^2+\gamma'^2\}^2+\frac{3}{2}x^2(\alpha'+\beta')^2+\frac{1}{2}x^2\gamma'^2-3x^4}\right\}J_1\left(x\frac{a}{h}\right)dx$$

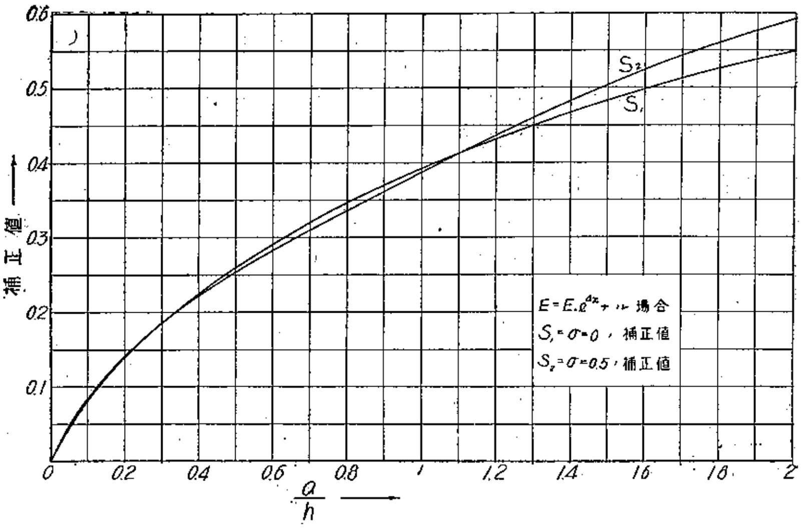
$$\cdots\cdots(46)$$

(42) 式, (46) 式の $S_1$, $S_2$ は數値積分により求め, 之れ等の値は**第六表**及び**第四圖**に示す如し。

**第六表　補正値 $S_1$, $S_2$ の値**

| $a/h$ | 0.1 | 0.5 | 0.8 | 1.0 | 1.5 | 2.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | 0.08 | 0.26 | 0.35 | 0.39 | 0.48 | 0.55 |
| $S_2$ | 0.08 | 0.25 | 0.34 | 0.39 | 0.50 | 0.59 |

**第四圖　補正値 $S_1$, $S_2$ の値**




弾性率 $E$ の $y$ なる深さ迄の平均値を $E_m$ とすれば,

$$E_m=\frac{E_0}{\alpha y}(e^{\alpha y}-1) \quad \cdots\cdots\cdots (47)$$

$E_m$ なる一様の弾性係數の地盤の基礎中央の沈下は $W_m=2(1-\sigma^2)p_0a/E_m$ なるを以て, $E_0e^{\alpha}$ にて示す地盤の基礎沈下と同じ沈下を與ふる $E_m$, 從つて深さ $y$ の値を, $\sigma=0$ 及び $\sigma=0.5$ に對し夫々 $y_1$, $y_2$ とすれば, 之れ等の値は次式の如く,

$$1-S_1=\frac{\alpha y_1}{e^{\alpha y_1}-1}$$

$$1-S_2=\frac{\alpha y_2}{e^{\alpha y_2}-1}$$

更に $h$ を $E$ が表面の値の 1.5 倍になる深さ, $a$ を基礎の半徑とし,

$$y_1=\alpha_1 h, \qquad y_2=\alpha_2 h$$

$$y_1=\beta_1 a, \qquad y_2=\beta_2 a$$

と置けば, $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\beta_1$ 及び $\beta_2$ の値は**第七表**の如し。

第七表

| $a/h$ | 0.10 | 0.5 | 1.0 | 1.5 | 2.0 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha_1$ | 0.42 | 1.4 | 2.3 | 2.9 | 3.5 |
| $\alpha_2$ | 0.42 | 1.3 | 2.3 | 3.0 | 3.9 |
| $\beta_1$ | 4.20 | 2.8 | 2.3 | 2.0 | 1.8 |
| $\beta_2$ | 4.20 | 2.6 | 2.3 | 2.1 | 2.0 |

上記の計算より，

a) 弾性係数が深さに伴ひて變化する場合には基礎中央の沈下量は一様なる弾性的性質の地盤と異なり，荷重強度一定なる場合基礎（載荷面）の半徑に比例して增大せず。

b) 地盤表面と同じ弾性係數を有する一様な地盤の基礎沈下に對する補正値は $\sigma$ と $a/h$ に關係し（$h$ は地盤の弾性係數の變化狀態を示す），$a/h$ の大なる程大なるも本節の計算の範圍にては $\sigma$ には餘り關係せざる如し。

c) $a/h$ の小なる時 $\alpha_1$，$\alpha_2$ の値は小なるを以て同じ沈下量を與ふる弾性率は比較的地盤表面に近き部分の平均値にて充分なり，換言すれば主として表面に近き部分のみが沈下に與り，之れに反し $a/h$ の大なる時は，$\alpha_1$，$\alpha_2$ の値大に，從つて相當深き部分も沈下に關係するを知る。

## 7. 結　　言

弾性地盤上に設けし基礎の沈下量に及ぼす地盤の弾性率の變化の影響に就き次の事項を知る。

(a) 前文に求めし如く一様なる弾性的性質を有する地盤基礎に垂直荷重の作用する場合，基礎中央の沈下量は荷重強度一定なる時は基礎の半徑に比例して增大するを知りしが，地盤の弾性率が深さにより變化する場合は半徑に比例して增加せず，その影響は可成り著し。

(b) 地盤の弾性率の變化の基礎中央の沈下量に及ぼす影響は，圓形基礎にありては $a/h$（$h$ は基礎地盤の弾性率の變化狀態を示し，2種の地層より成る場合は上部地層の厚さ，弾性率が深さの exponential function にて變化する時は地表面の値の 1.5 倍になる深さ等を示す），ポアソン比及び2地層より成る場合に限り $\varepsilon=(1+\sigma_1)E_2/(1+\sigma_2)E_1$ にのみ關係する。從つて $\sigma$，$E$ の値の變化は暫く措き，$a$ 及び $h$ が變化すると共に補正値は變化するも，兩者の變化が同じ割合にて生ずる場合には補正値は變化せず，換言すれば基礎の大さの變化に伴ひ補正値は變化すれど，地盤の弾性率の變化を適當に調節すれば基礎の大さの變化する場合にも尙補正値を一定に保つ事を得べし。されば弾性地盤に設けられし基礎の沈下量を求むる際には基礎面積の大さは重大なる要素なり。

(c) 小なる大さの基礎の沈下量より，大なる基礎の沈下量を求むる際には弾性地盤の弾

性的性質の深さによる變化を知らざるべからず。從つて荷重分布，構造物の變形に對する抵抗等を無視するも，一樣なる力學的性質を有する地盤を除きて，既設の構造物の沈下又は小面積載荷試驗の結果より直ちに基礎の沈下量を推定するを得ざるを知る。

(d) 下層に非常に軟弱なる地層の存する場合を除き，基礎沈下に關與する地盤は主として基礎の半徑の約 10 倍の深さ迄にして，それ以下の部分の及ぼす影響は小にして實用上無視するも差支なき程度なり。從つて半徑の 10 倍の深さ迄の彈性率の値を知れば基礎沈下量を算定するを得べし。

(e) 前文に於ては軟地層の代りに viscous fluid を用ひたり。その時沈下量は却つて減少する場合もありしが，彈性係數の小なる地層が地中に在る場合は沈下量は常に増加し，計算の結果によれば兩者の間には本質的に著しき差異あり。

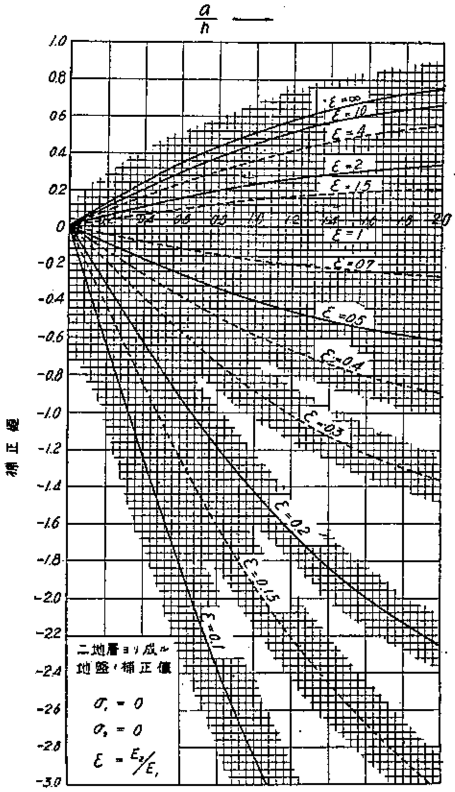
本文は彈性係數が深さに伴ひ變化する地盤の簡單なる場合を二，三取り扱ひしに過ぎざるも，地盤の彈性率變化の基礎沈下に及ぼす影響の大體の傾向を推定するに足るべく，特に基礎沈下の實驗的研究に多少貢献する處あれば著者の幸とする處なり。

本文は內務省土木試驗所長物部博士の指導の下になれるものにして，玆に附記し深く同博士に感謝の意を表す。

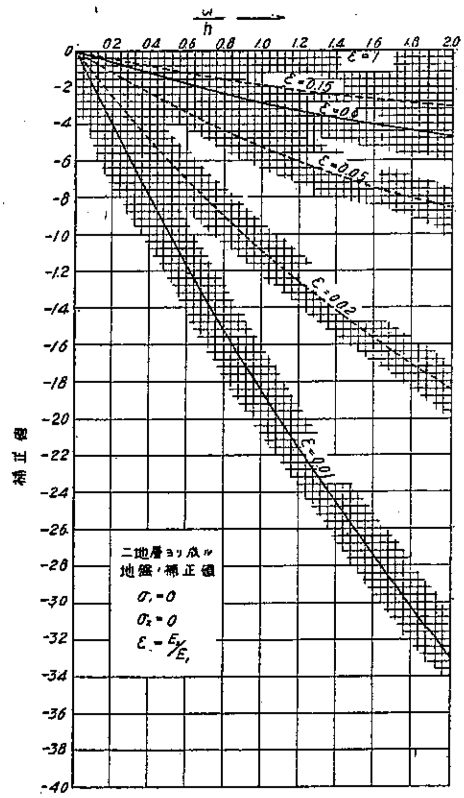
（完）

## 附圖第一

(a)

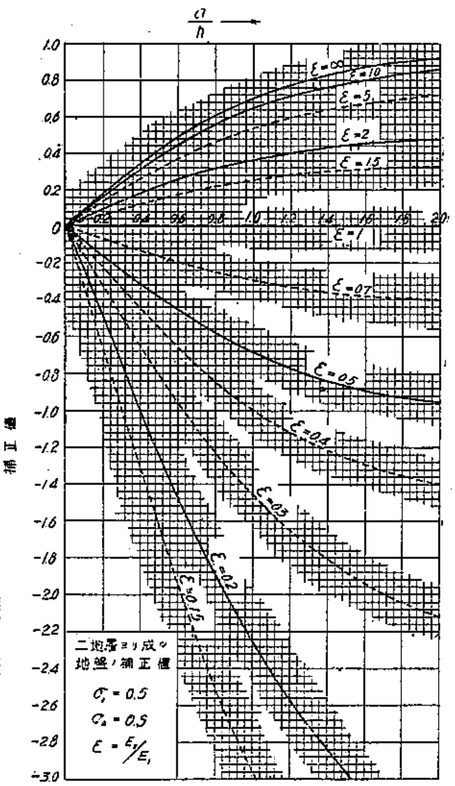



(b)

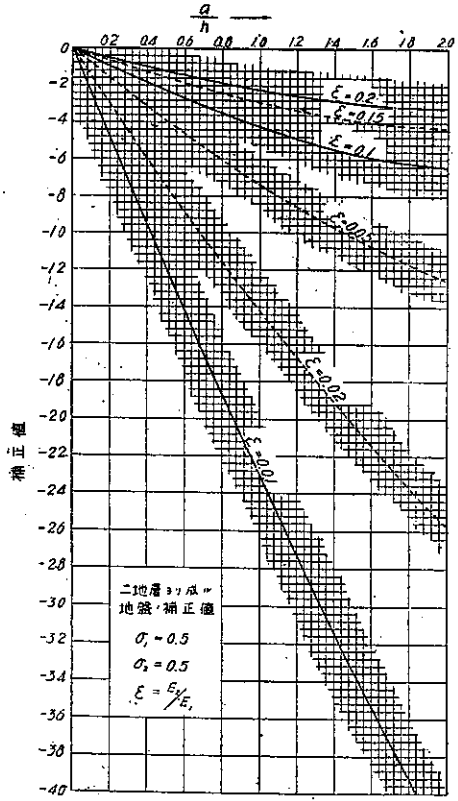



## 附圖第二

(a)




(b)




(土木學會誌第十七卷第一號附圖)