論 說 報 告

土木學會誌 第十七卷第十號 昭和六年十月

THEORIE DER ROSTE UND IHRE ANWENDUNGEN.

ZWEITER TEIL.

DER LEITERTRÄGER.

Von Takeo Fukuda, Mitglied

Synopsis.

Der vorliegende zweite Teil ist der Untersuchung der leiterförmigen Tragwerke gewidmet, die wir als Leiterträger bezeichnen wollen. Ein Leiterträger besteht aus zwei parallelen Hauptträgern und beliebig vielen, senkrecht dazu fest verbundenen Querträgern und wird durch die senkrecht zur Trägerebene wirkenden Kräften belastet. Als Grundlagen der Untersuchung dienen die im ersten Abschnitte dargestellten allgemeinen Gleichungen.*

Inhaltsverzeichnis.

* Theorie der Roste und ihre Anwendungen. Erster Teil. Allgemeine Untersuchungen der Roste. Journal of the Civil Eng. Soc., Vol. XVII, Nr. 5, 1931.

III. ABSCHNITT.

ALLGEMEINE GRUNDLAGEN DER BERECHNUNG DES LEITERTRÄGERS.

1. Begriff und Aufgabe des Leiterträgers.

Unter einem Leiterträger ist ein Tragwerk zu verstehen, welches, wie eine vollwandige Balkenbrücke, aus zwei im Abstande h liegenden, parallelen Stäben (Längs- oder Hauptträgern) und aus den beliebig vielen, senkrecht dazu fest verbundenen Stäben (Querträgern) besteht und durch die senkrecht zur Trägerebene wirkenden Belastungen belastet wird.

Ist der Leiterträger an den vier Eckknoten derart gelagert, dass ebenso wie eine einfache Balkenbrücke infolge senkrechter Lasten nur senkrechte Auflagerkräfte auftreten können, so nennen wir ihn einen einfachen Leiterträger (**Abb. 1a**). Wenn der Leiterträger, wie in **Abb. 1b**, an beiden Enden fest eingespannt ist, nennen wir ihn einen beiderseits eingespannten Leiterträger. **Abb. 1c** stellt einen einseitig eingespannten Leiterträger dar.

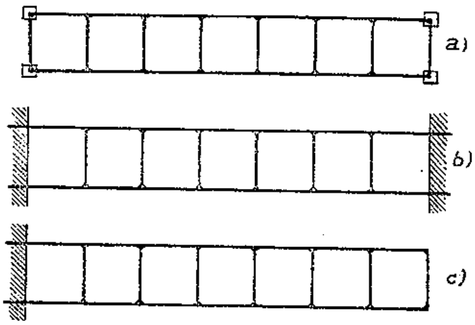


Abb. 1.

Diese drei Arten der Leiterträger entsprechen den in der Statik gewöhnlichen Trägerarten, einfachem Balken, beiderseits eingespanntem Balken bzw. einseitig eingespanntem Balken oder Freibalken. Die vollwandige Eisenbahnbalkenbrücke mit unten liegendem Fahrbahn können wir als einfachen Leiterträger auffassen und der einseitig eingespannte Leiterträger kann in den Vierendeelmasten, den zweistieligen Stockwerkrahmen oder in den Flügeln der Eindecker seine Anwendung finden.

Die Theorie und Gleichungen, die wir in nachfolgenden Untersuchungen herleiten werden, gelten im allgemeinen für jede Art der Leiterträger, z. B. für den einerseits fest eingespannten und anderseits einfach gestützten Leiterträger, für den durchlaufenden Leiterträger auf beliebig vielen Stützen mit oder ohne Gelenke oder für den kontinuierlichen Leiterträger auf elastischen Stützen. Jedoch werden wir uns jetzt hauptsächlich mit den oben genannten drei Arten der Leiterträger beschäftigen.

2. Aufstellung des Gleichungssystems für die Zwischenknoten.

Wir setzen bei den nachfolgenden Untersuchungen stets voraus, dass der Einfluss der Quer- und Normalkräfte auf die Verbiegung des Leiterträgers unberücksichtigt bleiben darf.

Für die Folge bezeichnen wir allgemein in bezug auf **Abb. 2** mit:

h	die Trägerbreite,
l_r	die Feldweite zwischen den r-ten und $(r-1)$-ten Querträgern,
I_r, I_r' und J_r	die Trägheitsmomente beider Längsträger für das Feld l_r bzw. des r-ten Querträgers um die in der Trägerebene gelegene Achse,
H_r, H_r' und K_r	die Drillungswiderstände beider Längsträger für das Feld l_r bzw. des r-ten Querträgers,
P_r und P_r'	die Knotenlasten, welche die äussere Belastung zum Knoten r bzw. r' beiträgt,
R_r und R_r'	die Auflagerdrücke an dem Knoten r bzw. r',
z_r und z_r'	die Verschiebungen des Knotens r bzw. r' in der positiven Richtung der äusseren Belastung,
M_r^l, M_r^r, $M_r^{l'}$ u. $M_r^{r'}$	die Biegungsmomente in beiden Längsträgern unmittelbar links und rechts vom Knoten r bzw. r',
L_r und L_r'	die Biegungsmomente in dem r-ten Querträger am Knoten r bzw. r',
X_r, X_r' und Y_r	die Torsionsmomente in beiden Längsträgern für das Feld l_r bzw. in dem r-ten Querträger,
$\mathfrak{M}_r$, $\mathfrak{M}_r'$ und $\mathfrak{L}_r$	die Biegungsmomente infolge der äusseren Belastung in den frei aufliegend gedachten Trägern $(r-1)$–r, $(r-1)'$–r' bzw. $r-r'$, die durch Zerschneiden der Stäbe knapp neben den Knoten daselbst entstehen werden.

Die positiven Richtungen der Biegungs- und Torsionsmomente sind denselben Regeln, die in I. Abschnitt aufgestellt worden sind, unterworfen und in **Abb. 2** zur Darstellung gebracht, ausgenommen die von X_r', deren positive

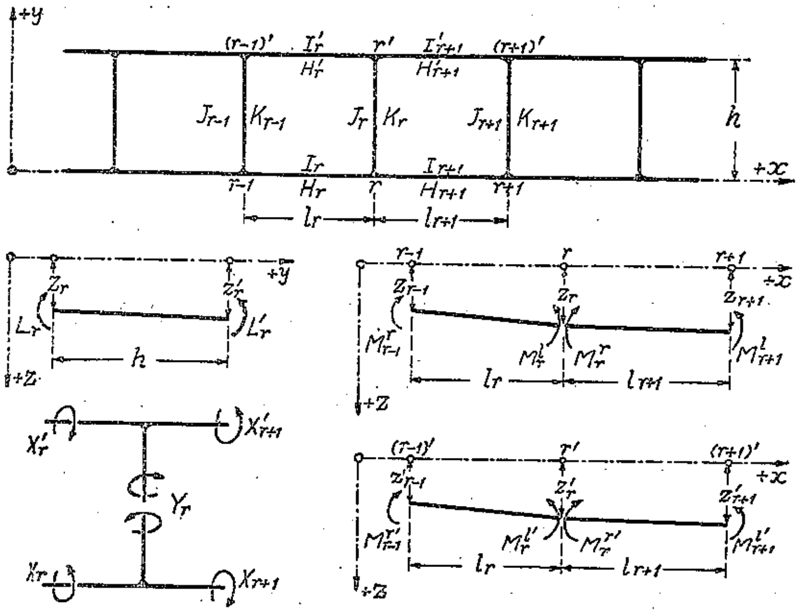


Abb. 2

Richtung entgegengesetzt der von X_r ist.

Gemäss den im I. Abschnitt eingeführten Abkürzungen setzen wir noch:

$$\mu_r=\frac{l_r}{EI_r},\qquad \phi_r=\frac{l_r}{GH_r},\qquad \mu_r'=\frac{l_r}{EI_r'},\qquad \phi_r'=\frac{l_r}{GH_r'},$$

$$\lambda_r=\frac{h_r}{EJ_r},\qquad \psi_r=\frac{h_r}{GK_r},$$

$$S_r^l=\frac{1}{l_r}\int_{r-1}^{r}\mathfrak{M}_r\,x\,dx,\qquad S_r^r=\frac{1}{l_{r+1}}\int_{r}^{r+1}\mathfrak{M}_{r+1}(l_{r+1}-x)\,dx,$$

$$S_r^{l'}=\frac{1}{l_r}\int_{(r-1)'}^{r'}\mathfrak{M}_r'\,x\,dx,\qquad S_r^{r'}=\frac{1}{l_{r+1}}\int_{r'}^{(r+1)'}\mathfrak{M}'_{r+1}(l_{r+1}-x)\,dx,$$

$$U_r=\frac{\mu_r}{l_r}S_r^l+\frac{\mu_{r+1}}{l_{r+1}}S_r^r,\qquad U_r'=\frac{\mu_r'}{l_r}S_r^{l'}+\frac{\mu'_{r+1}}{l_{r+1}}S_r^{r'},$$

$$T_r=\frac{1}{h}\int_0^h\mathfrak{L}_r(h-y)\,dy,\qquad T_r'=\frac{1}{h}\int_0^h\mathfrak{L}_r\,y\,dy.$$

Wir wollen nun das im I. Abschnitt aufgestellten Grundgleichungssystem auf diese Aufgabe anwenden; dabei ist zu beachten, dass die Gl. (I, 2)[1] hier keine Anwendung findet.

1) Mit (I, 1) bezeichnen wir die Gleichung (1) im I. Abschnitt.

Stellen wir das Grundgleichungssystem für die Zwischenknoten r und r' des Leiterträgers auf, so erhalten wir

aus Gl. (I, 1)

für r: $$\mu_{r+1}(M_{r+1}^{l}+2M_r^{r})+\mu_r(2M_r^{l}+M_{r-1}^{r})+6\left(\frac{z_{r+1}-z_r}{l_{r+1}}-\frac{z_r-z_{r-1}}{l_r}\right)+6U_r=0 \quad \text{(1)}$$

„ r': $$\mu'_{r+1}(M_{r+1}^{l'}+2M_r^{r'})+\mu_r'(2M_r^{l'}+M_{r-1}^{r'})+6\left(\frac{z'_{r+1}-z_r'}{l_{r+1}}-\frac{z_r'-z'_{r-1}}{l_r}\right)+6U_r'=0 \quad \text{(1')}$$

aus Gl. (I, 3)

für r: $$\frac{M_{r+1}^{l}-M_r^{r}}{l_{r+1}}-\frac{M_r^{l}-M_{r-1}^{r}}{l_r}-\frac{L_r-L_r'}{h}=R_r-P_r \quad \text{(2)}$$

„ r'; $$\frac{M_{r+1}^{l'}-M_r^{r'}}{l_{r+1}}-\frac{M_r^{l'}-M_{r-1}^{r'}}{l_r}+\frac{L_r-L_r'}{h}=R_r'-P_r' \quad \text{(2')}$$

aus Gl. (I, 4) für r: $$Y_r=M_r^{l}-M_r^{r} \quad \text{(3)}$$

„ „ „ r': $$-Y_r=M_r^{l'}-M_r^{r'} \quad \text{(3')}$$

aus Gl. (I, 5) für r: $$X_{r+1}-X_r=-L_r \quad \text{(4)}$$

„ „ „ r': $$X'_{r+1}-X_r'=-L_r' \quad \text{(4')}$$

aus Gl. (I, 6) und (I, 6a) für r':

$$\psi_r Y_r=+\frac{1}{l_r}(z_r-z_r'-z_{r-1}+z'_{r-1})-\frac{1}{6}[\mu_r(2M_r^{l}+M_{r-1}^{r})$$
$$-\mu_r'(2M_r^{l'}+M_{r-1}^{r'})]-\frac{1}{l_r}(\mu_r S_r^{l}-\mu_r' S_r^{l'}) \quad \text{(5)}$$

$$\psi_r Y_r=+\frac{1}{l_{r+1}}(z_{r+1}-z'_{r+1}-z_r+z_r')+\frac{1}{6}[\mu_{r+1}(2M_r^{r}+M_{r+1}^{l})$$
$$-\mu'_{r+1}(2M_r^{r'}+M_{r+1}^{l'})]+\frac{1}{l_{r+1}}(\mu_{r+1}S_r^{r}-\mu'_{r+1}S_r^{r'}) \quad \text{(5a)}$$

aus Gl. (I, 7a) für r:

$$\phi_r X_r=+\frac{1}{h}(z_r-z_r'-z_{r-1}+z'_{r-1})-\frac{1}{6}[\lambda_r(2L_r+L_r')$$
$$-\lambda_{r-1}(2L_{r-1}+L'_{r-1})]-\frac{1}{h}(\lambda_r T_r-\lambda_{r-1}T_{r-1}) \quad \text{(6)}$$

aus Gl. (I, 7) für r':

$$\phi_r' X_r'=-\frac{1}{h}(z_r-z_r'-z_{r-1}+z'_{r-1})-\frac{1}{6}[\lambda_r(L_r+2L_r')$$
$$-\lambda_{r-1}(L_{r-1}+2L'_{r-1})]-\frac{1}{h}(\lambda_r T_r'-\lambda_{r-1}T'_{r-1}) \quad \text{(6')}$$

Es sei hier erwähnt werden, dass, wie man sich leicht überzeugen kann, die Gleichungen (I, 6), (I, 6a) und (I, 7) für den Knoten r sowohl wie die Gleichung (I, 7a) für den Knoten r' nicht gelten. Ausgenommen die Gl. (5a), die sich aus den Gl. (1), (1′) und (5) herleiten kann, sind die anderen elf Gleichungen voneinander unabhängig.

Die Unbekannten, die den Knoten r und r' gehören, sind dreizehn. Aber wenn z vorhanden ist, so verschwindet R, und wenn R vorhanden ist, so verschwindet z, und bei dem elastisch senkbar unterstützten Knoten können wir im allgemeinen eine zusammenhängende Verknüpfung zwischen z und R voraussetzen, so dass die Anzahl der unabhängigen Unbekannten elf ist und im Einklang mit der der Gleichungen steht.

Aus den Gleichungen (2) und (2′) bzw. (3) und (3′) ergeben sich folgende Gleichungen

$$\frac{1}{l_{r+1}}[(M^l_{r+1}+M^{l'}_{r+1})-(M^r_r+M^{r'}_r)]-\frac{1}{l_r}[(M^l_r+M^{l'}_r)-(M^r_{r-1}+M^{r'}_{r-1})]$$
$$=(R_r+R_r')-(P_r+P_r'), \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (2a)$$

$$\frac{1}{l_{r+1}}[(M^l_{r+1}-M^{l'}_{r+1})-(M^r_r-M^{r'}_r)]-\frac{1}{l_r}[(M^l_r-M^{l'}_r)-(M^r_{r-1}-M^{r'}_{r-1})]$$
$$-\frac{2}{h}(L_r-L_r')=(R_r-R_r')-(P_r-P_r'), \quad \dots\dots \quad (2b)$$

$$M^l_r+M^{l'}_r=M^r_r+M^{r'}_r, \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (3a)$$

$$2Y_r=M^l_r-M^{l'}_r-(M^r_r-M^{r'}_r), \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (3b)$$

die wir je nach den Umständen statt der Gl. (2) und (2′) bzw. (3) und (3′) anwenden können.

3. Die Randbedingungen.

Die in dem vorangehenden Paragraphen erhaltenen Gleichungen können wir als simultane gewöhnliche Differenzengleichungen auffassen, die wir für jeden Innenknoten des Leiterträgers aufzustellen brauchen. Zur eindeutigen Festlegung der Lösungen dieser Differenzengleichungen müssen wir die Randbedingungen an den Endknoten klarstellen.

I) Das freie Ende.

a) Das freie Ende ohne Querträger.

Wenn der Leiterträger an dem Ende vollkommen frei ist und ausserdem dort der Querträger fehlt, wie dies z. B. in **Abb. 3a** für $r=0$ und $r=n$ dargestellt ist, so ergeben sich als Randwerte

$$\text{für } r=0 \text{ und } r=n: \quad R_r=R_r'=M_r^l=M_r^{l'}=M_r^r=M_r^{r'}=L_r=L_r'=X_r=X_r'=X_{r+1}$$
$$=X_{r+1}'=Y_r=0,$$

so dass diesem Ende nur z_r und z_r' gehören. Das Grundgleichungssystem gilt hier nicht, ausgenommen die Gl. (2) und (2′), die

$$\left.\begin{array}{ll} \text{für } r=0: & M_1^l=-P_0 l_1, \quad M_1^{l'}=-P_0' l_1 \\ \text{und für } r=n: & M_{n-1}^r=-P_n l_n, \quad M_{n-1}^{r'}=-P_n' l_n \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

ergeben.

b) Das freie Ende mit Querträger.

Hat dagegen der Leiterträger an dem Ende den Querträger, wie in **Abb. 3b**, so ergeben sich als Randwerte

$$\text{für } r=0: \quad R_0=R_0'=M_0^l=M_0^{l'}=X_0=X_0'=0$$

$$\text{und für } r=n: \quad R_n=R_n'=M_n^r=M_n^{r'}=X_{n+1}=X_{n+1}'=0.$$

Dem Ende $r=0$ gehören sieben Unbekannten z_0, z_0', M_0^r, $M_0^{r'}$, L_0, L_0' und Y_0 und gelten die Gl. (1), (1′), (5), (6) und (6′) nicht.

Dem Ende $r=n$ gehören neun Unbekannten z_n, z_n' M_n^l, $M_n^{l'}$ L_n, L_n', X_n, X_n' und Y_n und gelten die Gl. (1), (1′) und (5a) nicht.

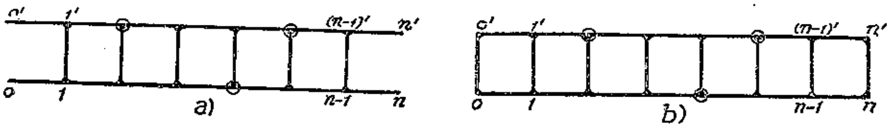


Abb. 3.

2) Das frei aufliegende Ende.

a) Das frei aufliegende Ende ohne Querträger.

Wenn der Leiterträger an den Endknoten frei aufliegt und ausserdem dort der Querträger fehlt, **Abb. 4a**, so ergeben sich als Randwerte

$$\text{für } r=0 \text{ und } r=n: \quad z_r=z_r'=M_r^l=M_r^{l'}=M_r^r=M_r^{r'}=L_r=L_r'=X_r=X_r'$$
$$=X_{r+1}=X_{r+1}'=Y_r=0,$$

so dass diesem Ende nur R_r und R_r' gehören. Das Grundgleichungssystem gilt hier nicht, ausgenommen die Gl. (2) und (2′), die aber

$$\left.\begin{array}{ll} \text{für } r=0: & M_1^l=(R_0-P_0)l_1, \quad M_1^{l'}=(R_0'-P_0')l_1 \\ \text{und für } r=n: & M_{n-1}^r=(R_n-P_n)l_n, \quad M_{n-1}^{r'}=(R_n'-P_n')l_n \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots(8)$$

ergeben.

b) Das frei aufliegende Ende mit Querträger.

Dieser Fall ist in **Abb. 4b** dargestellt. Als Randwerte ergeben sich

für $r=0$: $z_0=z_0'=M_0^l=M_0^{l'}=X_0=X_0'=0$

und für $r=n$: $z_n=z_n'=M_n^r=M_n^{r'}=X_{n+1}=X_{n+1}'=0$.

Dem Ende $r=0$ gehören sieben Unbekannten R_0, R_0', M_0^r, $M_0^{r'}$, L_0, L_0' und Y_0 und dem Ende $r=n$ gehören neun Unbekannten R_n, R_n', M_n^l, $M_n^{l'}$, L_n, L_n', X_n, X_n', und Y_n.

Ueber die Gültigkeit des Grundgleichungssystems gilt dasselbe wie für den Fall **1) b)**.

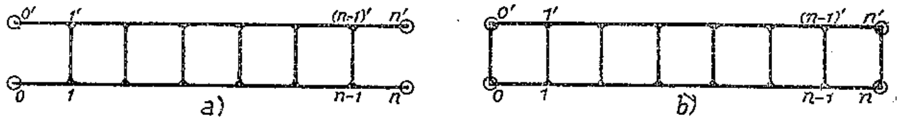


Abb. 4.

3) Das fest eingespannte Ende.

Wenn der Leiterträger an dem Ende fest eingespannte ist, wie es in **Abb. 5** für $r=0$ und $r=n$ dargestellt ist, bleibt die Endtangente in ihrer ursprünglichen Lage, wenn der Leiterträger unter den äusseren Kräften eine Deformation erleidet. Wir wollen für diesen Fall die Randbedingungsgleichungen anwenden, die im Paragraphen 4 des ersten Abschnittes gegeben sind.

Abb. 5.

a) Für $r=0$.

Es ist zunächst $$z_r=z_r'=0.$$

Zu diesem Ende gehören 4 Unbekannten: R_0, R_0', M_0^r und $M_0^{r'}$.

Schreiben wir die Gl. (I, 24) für den Endknoten 0 bzw. 0′ an, so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} \mu_1(2M_0^r+M_1^l)+\frac{6}{l_1}z_1+6\frac{\mu_1}{l_1}S_0^r&=0,\\ \mu_1'(2M_0^{r'}+M_1^{l'})+\frac{6}{l_1}z_1'+6\frac{\mu_1'}{l_1}S_0^{r'}&=0. \end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(9)$$

Sowie erhalten wir aus Gl. (I, 25) für $r=0$ und $r=0'$:

$$\left.\begin{aligned} M_1^l-M_0^r&=(R_0-P_0)\,l_1,\\ M_1^{l'}-M_0^{r'}&=(R_0'-P_0')\,l_1. \end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(10)$$

Diese Gleichungen entsprechen den Grundgleichungen (1), (1′), (2), (2′) für $r=0$.

Die Gl. (I, 26a) und (I, 26) ergeben die für $r=1$ der Gl. (6) bzw. (6′) entsprechenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\phi_1 X_1 &= +\frac{1}{h}(z_1-z_1')-\frac{\lambda_1}{6}(L_1'+2L_1)-\frac{\lambda_1}{h}T_1,\\ \phi_1' X_1' &= -\frac{1}{h}(z_1-z_1')-\frac{\lambda_1}{6}(L_1+2L_1')-\frac{\lambda_1}{h}T_1'.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(11)$$

b) Für $r=n$.

Es ist zunächst $z_n=z_n'=0$.

Zu diesem Ende gehören 6 Unbekannten: R_n, R_n', M_n^l, $M_n^{l'}$, X_n und X_n'.

Schreiben wir die Gl. (I, 24a) und (I, 25a) für den Endknoten n bzw. n' an, so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned}\mu_n(M_{n-1}^r+2M_n^l)+\frac{6}{l_n}z_{n-1}+6\frac{\mu_n}{l_n}S_n^l=0,\\ \mu_n'(M_{n-1}^{r'}+2M_n^{l'})+\frac{6}{l_n}z_{n-1}'+6\frac{\mu_n'}{l_n}S_n^{l'}=0.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(9a)$$

$$\left.\begin{aligned}M_{n-1}^r-M_n^l&=(R_n-P_n)\,l_n,\\ M_{n-1}^{r'}-M_n^{l'}&=(R_n'-P_n')l_n.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(10a)$$

Die Gl. (I, 27a) für $r=n$ und die Gl. (I, 27) für $r=n'$ ergeben

$$\left.\begin{aligned}\phi_n X_n &= -\frac{1}{h}(z_{n-1}-z_{n-1}')+\frac{\lambda_{n-1}}{6}(L_{n-1}'+2L_{n-1})+\frac{\lambda_{n-1}}{h}T_{n-1},\\ \phi_n' X_n' &= +\frac{1}{h}(z_{n-1}-z_{n-1}')+\frac{\lambda_{n-1}}{6}(L_{n-1}+2L_{n-1}')+\frac{\lambda_{n-1}}{h}T_{n-1}'.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(11a)$$

Die vorstehenden sechs Gleichungen entsprechen der Reihe nach den Gl. (1), (1)′, (2), (2′), (6) bzw. (6′) für $r=n$.

4) Anleitung zur Auflösung der Gleichungen.

Aus obigen Erwähnungen erkennen wir, dass zur Ermittelung der Unbekannten der Aufgabe in der Tat ebensoviele Bestimmungsgleichungen zur Verfügung stehen.

Z.B. bei einem einfachen Leiterträger mit n Feldern

für die Unbekannten		stehen die Gleichungen	
R_r, R_r' :	4,	aus (1), (1′):	$2(n-1)$,
z_r, z_r' :	$2(n-1)$,	,, (2), (2′):	$2(n+1)$,

$M_r^r,\ M_r^{r\prime},\ M_r^l,\ M_r^{l\prime}$:	$4n$,	aus (3), (3′) :	$2(n+1)$,
$L_r,\ L_r'$:	$2(n+1)$,	,, (4), (4′) :	$2(n+1)$,
$X_r,\ X_r'$:	$2n$,	,, (5) od. (5a) :	$n+1$,
Y_r :	$n+1$	(6), (6′) :	$2n$
	$11\,n+5$		$11\,n+5$

zur Verfügung.

Bei einem beiderseits eingespannten Leiterträger mit n Feldern

für die Unbekannten		stehen die Gleichungen			
$R_r,\ R_r'$:	4,	aus (1), (1′) :	$2(n-1)$,	aus (9) : 2,	aus (9a) : 2,
$z_r,\ z_r'$:	$2(n-1)$,	,, (2), (2′) :	$2(n-1)$,	,, (10) : 2,	,, (10a) : 2,
$M_r^r,\ M_r^{r\prime},\ M_r^l,\ M_r^{l\prime}$:	$4n$,	,, (3), (3′) :	$2(n-1)$,		
$L_r,\ L_r'$:	$2(n-1)$,	,, (4), (4′) :	$2(n-1)$,		
$X_r,\ X_r'$:	$2n$,	,, (5) od. (5a) :	$n-1$,		
Y_r :	$n-1$	,, (6), (6′) :	$2(n-2)$,	,, (11) : 2,	,, (11a) : 2
	$11\,n-1$		$11\,n-1$		

zur Verfügung.

Ebenso bei einem einseitig eingespannten Leiterträger mit n Feldern

für die Unbekannten		stehen die Gleichungen		
$R_r,\ R_r'$:	2,	aus (1), (1′) :	$2(n-1)$,	aus (9) : 2,
$z_r,\ z_r'$:	$2n$,	,, (2), (2′) :	$2n$,	,, (10) : 2,
$M_r^r,\ M_r^{r\prime},\ M_r^l,\ M_r^{l\prime}$:	$4n$,	,, (3), (3′) :	$2n$,	
$L_r,\ L_r'$:	$2n$,	,, (4), (4′) :	$2n$,	
$X_r,\ X_r'$:	$2n$,	,, (5), od. (5a) :	n,	
Y_r :	n	,, (6), (6′) :	$2(n-1)$,	,, (11) : 2
	$11\,n+2$		$11\,n+2$	

zur Verfügung.

Die unbekannten Grössen ergeben sich als lineare Funktionen der Lasten, so dass also das Gesetz der Superposition gilt.

4. Der Leiterträger mit konstantem Querträgerquerschnitt und gleich verlaufenden Hauptträgern bei konstanten Feldweiten.

1) Einführung der neuen Unbekannten.

Für die weitere Berechnung wird nun entsprechend der praktischen Anwendung angenommen, dass beide Hauptträger gleich grossen Querschnitt und alle Querträger konstanten Querschnitt haben, wie es in **Abb. 6.** dargestellt ist. Und setzen wir noch voraus, dass der Leiterträger in gleichlangen Feldern geteilt sei. Also nehmen wir an, dass

$$I_r = I_r', \quad H_r = H_r', \quad l_r = l,$$
$$J_r = J, \quad K_r = K,$$

und demgemäss

$$\lambda = \frac{h}{EJ}, \quad \psi = \frac{h}{GK},$$

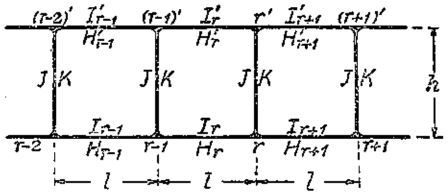


Abb. 6.

$$\mu_r = \mu_r' = \frac{l}{EI_r}, \qquad \phi_r = \phi_r' = \frac{l}{GH_r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

Aus Gl. (3a) erkennen wir

$$M_r^l + M_r^{l\prime} = M_r^r + M_r^{r\prime},$$

so dass wir

$$M_r = M_r^l + M_r^{l\prime} = M_r^r + M_r^{r\prime} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

setzen können. Wir führen nun dementsprechend das folgende System der neuen Unbekannten ein:

$$\left.\begin{array}{llll} \overline{M}_r^l = M_r^l - M_r^{l\prime}, & \overline{M}_r^r = M_r^r - M_r^{r\prime}, & L_{r,0} = L_r + L_r', & \overline{L}_r = L_r - L_r', \\ X_{r,0} = X_r + X_r', & \overline{X}_r = X_r - X_r', & z_{r,0} = z_r + z_r', & \bar{z}_r = z_r - z_r', \\ R_{r,0} = R_r + R_r', & \overline{R}_r = R_r - R_r'. & & \end{array}\right\} \ldots (14)$$

Die bisherigen Unbekannten werden dann durch

$$\left.\begin{array}{l} M_r^l = \frac{1}{2}(M_r + \overline{M}_r^l), \quad M_r^{l\prime} = \frac{1}{2}(M_r - \overline{M}_r^l), \quad M_r^r = \frac{1}{2}(M_r + \overline{M}_r^r), \quad M_r^{r\prime} = \frac{1}{2}(M_r - \overline{M}_r^r), \\ L_r = \frac{1}{2}(L_{r,0} + \overline{L}_r), \quad L_r' = \frac{1}{2}(L_{r,0} - \overline{L}_r), \quad X_r = \frac{1}{2}(X_{r,0} + \overline{X}_r), \quad X_r' = \frac{1}{2}(X_{r,0} - \overline{X}_r), \\ z_r = \frac{1}{2}(z_{r,0} + \bar{z}_r), \quad z_r' = \frac{1}{2}(z_{r,0} - \bar{z}_r), \quad R_r = \frac{1}{2}(R_{r,0} - \overline{R}_r), \quad R_r' = \frac{1}{2}(R_{r,0} - \overline{R}_r) \end{array}\right\}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

berechnet.

Für die Konstanten, die von der äusseren Belastung herrühren, werden auch die folgenden Zusammensetzungen eingeführt:

$$\left.\begin{array}{llll} P_{r,0} = P_r + P_r', & \overline{P}_r = P_r - P_r', & T_{r,0} = T_r + T_r', & \overline{T}_r = T_r - T_r', \\ S_{r,0}^l = S_r^l + S_r^{l\prime}, & \overline{S}_r^l = S_r^l - S_r^{l\prime}, & S_{r,0}^r = S_r^r + S_r^{r\prime}, & \overline{S}_r = S_r^r - S_r^{r\prime}, \\ \multicolumn{4}{l}{U_{r,0} = U_r + U_r' = \frac{1}{l}(\mu_r S_{r,0}^l + \mu_{r+1} S_{r,0}^r), \quad \overline{U}_r = U_r - U_r' = \frac{1}{l}(\mu_r \overline{S}_r^l + \mu_{r+1} \overline{S}_r^r).} \end{array}\right\}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

2) **Das Gleichungssystem und die Randbedingungen.**

Mit den vorstehenden Zusammensetzungen erhalten wir aus dem Grundgleichungssystem die folgenden Gleichungen für die neuen Unbekannten:
aus (1) und (1′):

$$\mu_{r+1}(M_{r+1}+2M_r)+\mu_r(2M_r+M_{r-1})+\frac{6}{l}\Delta^2 z_{r-1,0}+6U_{r,0}=0, \quad \ldots\ldots(17)$$

$$\mu_{r+1}(\overline{M}_{r+1}^l+2\overline{M}_r^r)+\mu_r(2\overline{M}_r^l+\overline{M}_{r-1}^r)+\frac{6}{l}\Delta^2\bar{z}_{r-1}+6\overline{U}_r=0, \quad \ldots\ldots(18)$$

aus (2a):
$$M_{r+1}-2M_r+M_{r-1}=(R_{r,0}-P_{r,0})\,l, \quad \ldots\ldots(19)$$

aus (2b):
$$\overline{M}_{r+1}^l-\overline{M}_r^r-\overline{M}_r^l+\overline{M}_{r-1}^r-2\frac{l}{h}\overline{L}_r=(\overline{R}_r-\overline{P}_r)\,l, \quad \ldots\ldots(20)$$

aus (3b):
$$Y_r=\frac{1}{2}(\overline{M}_r^l-\overline{M}_r^r), \quad \ldots\ldots(21)$$

aus (4) und (4′):
$$X_{r+1,0}-X_{r,0}=-L_{r,0}, \quad \ldots\ldots(22)$$
$$\overline{X}_{r+1}-\overline{X}_r=-\overline{L}_r, \quad \ldots\ldots(23)$$

aus (5):
$$\psi\,Y_r=\frac{1}{l}\Delta\bar{z}_{r-1}-\frac{\mu_r}{6}(2\overline{M}_r^l+\overline{M}_{r-1}^r)-\frac{\mu_r}{l}\overline{S}_r^l, \quad \ldots\ldots(24)$$

aus (5a):
$$\psi\,Y_r=\frac{1}{l}\Delta\bar{z}_r+\frac{\mu_{r+1}}{6}(\overline{M}_{r+1}^l+2\overline{M}_r^r)+\frac{\mu_{r+1}}{l}\overline{S}_r^r \quad \ldots\ldots(24a)$$

und schliesslich aus (6) und (6′):

$$\phi_r X_{r,0}=-\frac{\lambda}{2}(L_{r,0}-L_{r-1,0})-\frac{\lambda}{h}(T_{r,0}-T_{r-1,0}), \quad \ldots\ldots(25)$$

$$\phi_r \overline{X}_r=\frac{2}{h}\Delta\bar{z}_{r-1}-\frac{\lambda}{6}(\overline{L}_r-\overline{L}_{r-1})-\frac{\lambda}{h}(\overline{T}_r-\overline{T}_{r-1}). \quad \ldots\ldots(26)$$

Die Gl. (3a) brauchen wir nicht anzuschreiben, da diese schon durch (13) gedeckt ist. Die Gl. (24a) ist aus den Gl. (18) und (24) zu erhalten, so dass wir über zehn voneinander unabhängigen Gleichungen verfügen können, um die neuen zehn Unbekannten zu bestimmen.

Die im Paragraphen 3 aufgestellten Randbedingungen werden hier kurz übertragen. Die Randbedingungen (7) für das freie Ende $r=0$ bzw. $r=n$ ohne Querträger gehen in

$$\left.\begin{array}{lll} \text{für } r=0: & M_1=-P_{0,0}\,l, & \overline{M}_1^l=-\overline{P}_0\,l, \\ \text{für } r=n: & M_{n-1}=-P_{n,0}\,l, & \overline{M}_{n-1}^r=-\overline{P}_n l \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots(27)$$

über. Die Randbedingungen (8) für das frei aufliegende Ende $r=0$ bzw. $r=n$ ohne Querträger werden zu

$$\left.\begin{array}{ll}\text{für } r=0: & M_1=(R_{0,0}-P_{0,0})\,l, \quad \overline{M}_1^l=(\overline{R}_0-\overline{P}_0)\,l, \\ \text{für } r=n: & M_{n-1}=(R_{n,0}-P_{n,0})\,l, \quad \overline{M}_{n-1}^r=(\overline{R}_n-\overline{P}_n)\,l.\end{array}\right\} \quad \ldots (28)$$

Die Randbedingungen (9), (10) und (11) für das fest eingespannte Ende $r=0$ gehen in

$$\left.\begin{array}{l}\mu_1(2M_0+M_1)+\dfrac{6}{l}\,z_{1,0}+\dfrac{6\mu_1}{l}\,S_{0,0}^r=0, \\ \mu_1(2\overline{M}_0^r+\overline{M}_1^l)+\dfrac{6}{l}\,\bar{z}_1+\dfrac{6\mu_1}{l}\,\overline{S}_0^r=0,\end{array}\right\} \quad \ldots (29)$$

$$M_1-M_0=(R_{0,0}-P_{0,0})\,l, \quad \overline{M}_1^l-\overline{M}_0^r=(\overline{R}_0-\overline{P}_0)\,l, \quad \ldots (30)$$

$$\left.\begin{array}{l}\phi_1 X_{1,0}=-\dfrac{\lambda}{2}\,L_{1,0}-\dfrac{\lambda}{h}\,T_{1,0}, \\ \phi_1\overline{X}_1=+\dfrac{2}{h}\,\bar{z}_1-\dfrac{\lambda}{6}\,\overline{L}_1-\dfrac{\lambda}{h}\,\overline{T}_1\end{array}\right\} \quad \ldots (31)$$

über und die Randbedingungen (9a), (10a) und (11a) für das fest eingespannte Ende $r=n$ werden zu

$$\left.\begin{array}{l}\mu_n(2M_n+M_{n-1})+\dfrac{6}{l}\,z_{n-1,0}+\dfrac{6\mu_n}{l}\,S_{n,0}^l=0, \\ \mu_n(2\overline{M}_n^l+\overline{M}_{n-1}^r)+\dfrac{6}{l}\,\bar{z}_{n-1}+\dfrac{6\mu_n}{l}\,\overline{S}_n^l=0,\end{array}\right\} \quad \ldots (29a)$$

$$M_{n-1}-M_n=(R_{n,0}-P_{n,0})\,l, \quad \overline{M}_{n-1}^r-\overline{M}_n^l=(\overline{R}_n-\overline{P}_n)\,l \quad \ldots (30a)$$

$$\left.\begin{array}{l}\phi_n X_{n,0}=+\dfrac{\lambda}{2}\,L_{n-1,0}+\dfrac{\lambda}{h}\,T_{n-1,0}, \\ \phi_n\overline{X}_n=-\dfrac{2}{h}\,\bar{z}_{n-1}+\dfrac{\lambda}{6}\,\overline{L}_{n-1}+\dfrac{\lambda}{h}\,\overline{T}_{n-1}.\end{array}\right\} \quad \ldots (31a)$$

Für freien Knoten

$$R_{r,0}=\overline{R}_r=0,$$

und für gestützten Knoten

$$z_{r,0}=\bar{z}_r=0.$$

5. Der einfache Leiterträger mit konstantem Querträgerquerschnitt und gleich verlaufenden Hauptträgern bei konstanten Feldweiten.

1) Ermittelung der Biegungsmomente beider Hauptträger und der Auflagerkräfte.

a) M_r, $R_{0,0}$ und $R_{n,0}$.

Zuerst wollen wir M_r bestimmen, die Differenzengleichung dafür ist Gl. (19) oder

$$M_{r+1}-2M_r+M_{r-1}=(R_{r,0}-P_{r,0})\,l.$$

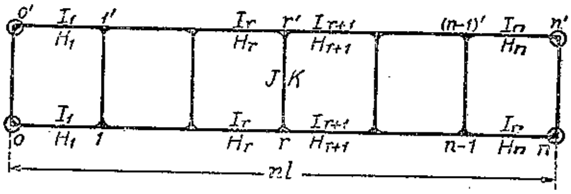


Abb. 7.

Für die Zwischenknoten verschwindet die Auflagerkräfte $R_{r,0}$ und für $r=0$ und $r=n$ verschwindet M_r, da sowohl M_r^l und M_r^{ll} für $r=0$ auch M_r^l und M_r^{ll} für $r=n$ gleich Null sind.

Fassen wir nun die Gleichungen, die aus der vorstehenden Differenzengleichung für den Bereich des Trägers entstehen werden, als simultane Gleichungen auf, so erkennen wir leicht, dass die Zahl der Gleichungen die Zahl der unbekannten M_r um zwei übersteigt. Dies dient zur Ermittelung von $R_{0,0}$ und $R_{n,0}$.

Die Lösungen ergeben sich zu

$$M_r=rR_{0,0}l-\sum_{i=0}^{r-1}P_{i,0}(r-i)\,l=(n-r)\,R_{n,0}l-\sum_{i=r+1}^{n}P_{i,0}(i-r)\,l, \quad \ldots\ldots(32)$$

$$R_{0,0}=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}(n-i)\,P_{i,0}\,;\quad R_{n,0}=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}i\,P_{i,0}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(33)$$

Wie wir uns daraus leicht überzeugen können, sind M_r, $R_{0,0}$ bzw. $R_{n,0}$ das Biegungsmoment und die Auflagerkräfte eines einfachen Balkens mit der Spannweite von nl, der durch $P_{r,0}$ belastet ist. Wirkt nun die Belastung nicht direct im Knoten, sondern wird sie vermittels einfachen Zwischenträger auf den Querträgern und dann auf Knotenpunkten übertragen oder wirkt sie zwischen zwei Knotenpunkten direct auf dem Hauptträger, so bleiben M_r, $R_{0,0}$ bzw. $R_{n,0}$ dieselben, ob wir

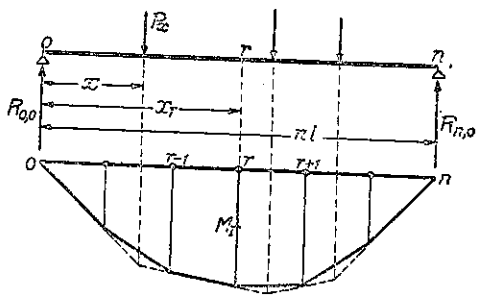


Abb. 8.

die Belastung auf die Knotenpunkten verteilt denken oder wir sie bei unmittelbarer Belastung des Balkens berechnen, so dass wir gemäss der **Abb. 8**

$$M_r=x_rR_{0,0}-\sum_{0}^{x_r}(x_r-x)\,P_{x,0}=(nl-x_r)\,R_{n,0}-\sum_{x_r}^{nl}(x-x_r)\,P_{x,0}\quad\ldots(32a)$$

$$R_{0,0}=\frac{1}{nl}\sum_{0}^{nl}(nl-x)\,P_{x,0}\;;\;R_{n,0}=\frac{1}{nl}\sum_{0}^{nl}x\,P_{x,0}\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(33a)$$

schreiben können.

b) $\overline{M}_r^l$, $\overline{M}_r^r$, $\overline{R}_0$ und $\overline{R}_n$.

Für die folgenden $6n+3$ Unbekannten:

die Unbekannten	die Randwerte	die Zahl
$\overline{M}_r^l$	$\overline{M}_0^l=\overline{M}_{n+1}^l=0$	n
$\overline{M}_r^r$	$\overline{M}_{-1}^r=\overline{M}_n^r=0$	n
$\overline{L}_r$	$\overline{L}_{-1}=\overline{L}_{n+1}=0$	$n+1$
$\overline{X}_r$	$\overline{X}_0=\overline{X}_{n+1}=0$	n
Y_r	$Y_{-1}=Y_{n+1}=0$	$n+1$
$\bar{z}_r$	$\bar{z}_0=\bar{z}_n=0$	$n-1$
$\overline{R}_0$ und $\overline{R}_n$		2

stehen die folgenden $6n+3$ Gleichungen:

Gl. (20), (21) und (23) für $r=0, 1, \ldots n-1, n,$

Gl. (24) und (26) „ $r=1, 2, \ldots n-1, n,$

Gl. (24a) „ $r=0, 1, \ldots n-2, n-1$

zur Verfügung, aus denen wir $\overline{L}_r$, $\overline{X}_r$, Y_r und $\bar{z}_r$ eliminieren wollen, um $2n+2$ Gleichungen für die Unbekannten $\overline{M}_r^l$, $\overline{M}_r^r$, $\overline{R}_0$ und $\overline{R}_n$ zu erhalten.

Ersetzen wir den Zeiger r in Gl. (24a) durch $r-1$, so erhalten wir

$$\psi Y_{r-1}=\frac{1}{l}\,\Delta\bar{z}_{r-1}+\frac{\mu_r}{6}(\overline{M}_r^l+2\overline{M}_{r-1}^r)+\frac{\mu_r}{l}\overline{S}_{r-1}^r,\;\ldots\ldots\ldots\ldots(24b)$$

die mit Gl. (24) die folgenden zwei Gleichungen

$$\psi(Y_r-Y_{r-1})=-\frac{\mu_r}{2}(\overline{M}_r^l+\overline{M}_{r-1}^r)-\frac{\mu_r}{l}(\overline{S}_r^l+\overline{S}_{r-1}^r),\;\ldots\ldots\ldots\ldots(34)$$

$$\psi(Y_r+Y_{r-1})=\frac{2}{l}\,\Delta\bar{z}_{r-1}-\frac{\mu_r}{6}(\overline{M}_r^l-\overline{M}_{r-1}^r)-\frac{\mu_r}{l}(\overline{S}_r^l-\overline{S}_{r-1}^r)\;\ldots(34a)$$

$$(r=1, 2, \ldots n-1, n)$$

ergeben. Setzen wir die Werte der Y_r von Gl. (21) in die obigen Gleichungen ein, so ergeben sich mit der Abkürzung

$$\alpha_r=\frac{\psi}{\mu_r}=\frac{h\cdot EI_r}{l\cdot GK}\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(35)$$

$$(1+\alpha_r)(\overline{M}_r^l+\overline{M}_{r-1}^r)-\alpha_r(\overline{M}_r^r+\overline{M}_{r-1}^l)=-\frac{2}{l}(\overline{S}_r^l+\overline{S}_{r-1}^r)\;\ldots\ldots\ldots\ldots(36)$$

und

$$2\Delta\bar{z}_{r-1}=\frac{l\mu_r}{6}[(1+3\alpha_r)(\overline{M}_r^l-\overline{M}_{r-1}^r)-3\alpha_r(\overline{M}_r^r-\overline{M}_{r-1}^l)]+\mu_r(\overline{S}_r^l-\overline{S}_{r-1}^r)\quad\ldots(37)$$

$$(r=1,2,\ldots n)$$

Mit den Randwerten $\overline{X}_0=\overline{X}_{n+1}=0$ erhalten wir aus Gl. (23)

$$\overline{X}_r=-\sum_{i=0}^{r-1}\overline{L}_i=+\sum_{i=r}^{n}\overline{L}_i,\quad \sum_{i=0}^{n}\overline{L}_i=0,\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(38)$$

so dass sich aus Gl. (26)

$$\left.\begin{aligned}2\Delta\bar{z}_{r-1}&=+\frac{\lambda h}{6}\Delta\overline{L}_{r-1}-\phi_r h\sum_{i=0}^{r-1}\overline{L}_i+\lambda\Delta\overline{T}_{r-1}\\ \text{oder}\quad 2\Delta\bar{z}_{r-1}&=+\frac{\lambda h}{6}\Delta\overline{L}_{r-1}+\phi_r h\sum_{i=r}^{n}\overline{L}_i+\lambda\Delta\overline{T}_{r-1}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(39)$$

$$(r=1,2,\ldots n)$$

ergibt.

Wir erhalten aus Gl. (20) mit den Randwerten $\overline{M}_{-1}^r=\overline{M}_0^l=\overline{M}_n^r=\overline{M}_{n+1}^l=0$

$$\overline{L}_r=\frac{h}{2l}[\overline{M}_{r+1}^l-(\overline{M}_r^r+\overline{M}_r^l)+\overline{M}_{r-1}^r]+\frac{h}{2}(\overline{P}_r-\overline{R}_r)\quad\ldots\ldots\ldots(40)$$

und

$$\left.\begin{aligned}\Delta\overline{L}_{r-1}&=\frac{h}{2l}\Delta^2(\overline{M}_{r-1}^l-\overline{M}_{r-2}^r)+\frac{h}{2}\Delta(\overline{P}_{r-1}-\overline{R}_{r-1}),\\ \sum_{i=0}^{r-1}\overline{L}_i&=+\frac{h}{2l}(\overline{M}_r^l-\overline{M}_{r-1}^r)+\frac{h}{2}\left(\sum_{i=0}^{r-1}\overline{P}_i-\overline{R}_0\right),\\ \sum_{i=r}^{n}\overline{L}_i&=-\frac{h}{2l}(\overline{M}_r^l-\overline{M}_{r-1}^r)+\frac{h}{2}\left(\sum_{i=r}^{n}\overline{P}_i-\overline{R}_n\right).\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots(40a)$$

Setzen wir (40a) in (39) ein und eliminieren wir $\Delta\bar{z}_{r-1}$ aus den dadurch entstehenden Gleichungen mit der Gl. (37), so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{2}\beta_r(\overline{M}_{r+1}^l-\overline{M}_{r-2}^r)-(1+3\alpha_r+\beta_r+3\gamma_r)(\overline{M}_r^l-\overline{M}_{r-1}^r)-\left(3\alpha_r-\frac{\beta_r}{2}\right)(\overline{M}_{r-1}^l-\overline{M}_r^r)\\ &=\frac{1}{2}\beta_r\Delta(\overline{R}_{r-1}-\overline{P}_{r-1})\,l+3\gamma_r\left(\sum_{i=0}^{r-1}\overline{P}_i-\overline{R}_0\right)l+\frac{6}{l}(\overline{S}_r^l-\overline{S}_{r-1}^r)-\frac{6}{l}\left(\frac{l}{h}\right)^2\beta_r\Delta\overline{T}_{r-1}\\ &\text{oder}\\ &=\frac{1}{2}\beta_r\Delta(\overline{R}_{r-1}-\overline{P}_{r-1})\,l-3\gamma_r\left(\sum_{i=r}^{n}\overline{P}_i-\overline{R}_n\right)l+\frac{6}{l}(\overline{S}_r^l-\overline{S}_{r-1}^r)-\frac{6}{l}\left(\frac{l}{h}\right)^2\beta_r\Delta\overline{T}_{r-1},\end{aligned}\right\}(41)$$

worin der Kürze halber

$$\beta_r=\frac{\lambda}{\mu_r}\left(\frac{h}{l}\right)^2=\frac{I_r}{J}\left(\frac{h}{l}\right)^3,\quad \gamma_r=\frac{\phi_r}{\mu_r}\left(\frac{h}{l}\right)^2=\frac{EI_r}{GH}\left(\frac{h}{l}\right)^2\ldots\ldots(42)$$

gesetzt ist. Diese ist eine Differenzengleichung für die Unbekannten $\overline{M}_r^l$, $\overline{M}_r^r$,

$\overline{R}_0$ und $\overline{R}_n$. Wir können sie folgenderweise umschreiben:

$$\left.\begin{array}{l}
\overline{M}_2^l \;-a_1\overline{M}_1^l \qquad\qquad -b_1\overline{M}_1^r+a_1\overline{M}_0^r \qquad\qquad +(1+c_1)\overline{R}_0 l=A_1, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\overline{M}_{r+1}^l-a_r\overline{M}_r^l+b_r\overline{M}_{r-1}^l-b_r\overline{M}_r^r+a_r\overline{M}_{r-1}^r-\overline{M}_{r-2}^r+c_r\overline{R}_0 l=A_r, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\qquad -a_n\overline{M}_n^l+b_n\overline{M}_{n-1}^l \qquad\qquad +a_n\overline{M}_{n-1}^r-\overline{M}_{n-2}^r+(1+c_n)\overline{R}_0 l=A_n
\end{array}\right\}\dots\dots(43)$$

oder auch

$$\left.\begin{array}{l}
\overline{M}_2^l \;-a_1\overline{M}_1^l \qquad\qquad -b_1\overline{M}_1^r+a_1\overline{M}_0^r \qquad\qquad -(1+c_1)\overline{R}_n l=A_1', \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\overline{M}_{r+1}^l-a_r\overline{M}_r^l+b_r\overline{M}_{r-1}^l-b_r\overline{M}_r^r+a_r\overline{M}_{r-1}^r-\overline{M}_{r-2}^r-c_r\overline{R}_n l=A_r', \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\qquad -a_n\overline{M}_n^l+b_n\overline{M}_{n-1}^l \qquad\qquad +a_n\overline{M}_{n-1}^r-\overline{M}_{n-2}^r-(1+c_n)\overline{R}_n l=A_n',
\end{array}\right\}\dots\dots(43a)$$

wobei

$$\left.\begin{array}{l}
a_r=\dfrac{2}{\beta_r}(1+3\alpha_r+\beta_r+3\gamma_r),\quad b_r=1-6\,\dfrac{\alpha_r}{\beta_r},\quad c_r=6\,\dfrac{\gamma_r}{\beta_r}; \\
A_r=+c_r l\displaystyle\sum_{i=0}^{r-1}\overline{P}_i-(\overline{P}_r-\overline{P}_{r-1})\,l+\frac{12}{l\beta_r}(\overline{S}_r^l-\overline{S}_{r-1}^r)-\frac{12}{l}\left(\frac{l}{h}\right)^2(\overline{T}_r-\overline{T}_{r-1}) \\
\qquad\qquad\qquad (r=1,2,\dots n-1), \\
A_n=(1+c_n)\,l\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\overline{P}_i+\overline{P}_{n-1}l+\frac{12}{l\beta_n}(\overline{S}_n^l-\overline{S}_{n-1}^r)-\frac{12}{l}\left(\frac{l}{h}\right)^2(\overline{T}_n-\overline{T}_{n-1}); \\
A_1'=-(1+c_1)\,l\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\overline{P}_i-\overline{P}_1 l+\frac{12}{l\beta_1}(\overline{S}_1^l-\overline{S}_0^r)-\frac{12}{l}\left(\frac{l}{h}\right)^2(\overline{T}_1-\overline{T}_0), \\
A_r'=-c_r l\displaystyle\sum_{i=r}^{n}\overline{P}_i-(\overline{P}_r-\overline{P}_{r-1})\,l+\frac{12}{l\beta_r}(\overline{S}_r^l-\overline{S}_{r-1}^r)-\frac{12}{l}\left(\frac{l}{h}\right)^2(\overline{T}_r-\overline{T}_{r-1}) \\
\qquad\qquad\qquad (r=2,3,\dots n).
\end{array}\right\}\dots(44)$$

Die Gleichungsgruppe (43a) ist die Folge der (43), denn, wie wir uns aus Gl. (20) und (38) leicht überzeugen können, zwischen $\overline{R}_0$ und $\overline{R}_n$ muss die Gleichgewichtsbedingung

$$\overline{R}_0+\overline{R}_n=\sum_{i=0}^{n}\overline{P}_i\dots\dots\dots\dots(45)$$

bestehen.

Hiermit haben wir für $2n+1$ Unbekannten, $\overline{M}_r^l$, $\overline{M}_r^r$ und $\overline{R}_0$ oder $\overline{R}_n$, $2n$ simultane Gleichungen (36) und (43) oder (43a) erhalten. Um die fehlende Gleichung zu erhalten, ersetzen wir den Zeiger r der Gl. (37) der Reihe nach durch $1, 2, \dots n$ und addieren wir die linken bzw. die rechten Seiten der so zustande gekommenen n Gleichungen, so erhalten wir mit den Randwerten $\overline{z}_0 = \overline{z}_n = 0$ die Gleichung

$$3\psi(\overline{M}_0^r - \overline{M}_n^l) + \sum_{i=1}^{n} \mu_i (1+6\alpha_i)(\overline{M}_i^l - \overline{M}_{i-1}^r) = -\frac{6}{l} \sum_{i=1}^{n} \mu_i (\overline{S}_i^l - \overline{S}_{i-1}^r) \quad \ldots . (46)$$

Damit sind wir imstande die Unbekannten $\overline{M}_r^l$, $\overline{M}_r^r$, $\overline{R}_0$ bzw. $\overline{R}_n$ eindeutig zu bestimmen, wenn die Nennerdeterminante des betreffenden Gleichungssystems einen von Null verschiedenen Wert hat, was aber hier im allgemeinen vorausgesetzt werden darf.

Anstatt der simultanen Auflösung der Gleichungen nach $\overline{M}_r^l$, $\overline{M}_r^r$, $\overline{R}$ oder $\overline{R}_n$, lösen wir die Gl. (36) und (43) oder (36) und (43a) nach $\overline{M}_r^l$ und $\overline{M}_r^r$ auf, so erhalten wir die Lösungen in der Form

$$\overline{M}_r^l = +f_r \overline{R}_0 l + F_r, \qquad \overline{M}_r^r = +g_r \overline{R}_0 l + G_r, \ldots \ldots \ldots \ldots (47)$$

$$\overline{M}_r^l = -f_r \overline{R}_n l + F_r', \qquad \overline{M}_r^r = -g_r \overline{R}_n l + G_r', \ldots \ldots \ldots . (47a)$$

wobei f_r und g_r die von $\overline{R}_0$, $\overline{R}_n$ oder von den Belastungen unabhängigen Koeffizienten vorstellen, während die Grössen F_r, G_r, F_r' und G_r' von den Belastungen, aber nicht von $\overline{R}_0$ und $\overline{R}_n$ abhängig sind.

Setzen wir jetzt (47) oder (47a) in die Gl. (46) ein, so erhalten wir

$$\overline{R}_0 = -\frac{3\psi(G_0 - F_n) + \sum_{i=1}^{n} \mu_i \left[(1+6\alpha_i)(F_i - G_{i-1}) + \frac{6}{l}(\overline{S}_i^l - \overline{S}_{i-1}^r) \right]}{\left[3\psi(g_0 - f_n) + \sum_{i=1}^{n} \mu_i (1+6\alpha_i)(f_i - g_{i-1}) \right] l} \ldots \ldots (48)$$

oder

$$\overline{R}_n = +\frac{3\psi(G_0' - F_n') + \sum_{i=1}^{n} \mu_i \left[(1+6\alpha_i)(F_i' - G_{i-1}') + \frac{6}{l}(\overline{S}_i^l - \overline{S}_{i-1}^r) \right]}{\left[3\psi(g_0 - f_n) + \sum_{i=1}^{n} \mu_i (1+6\alpha_i)(f_i - g_{i-1}) \right] l} \ldots . (48a)$$

Dabei ist zu beachten, dass wir nur eine von $\overline{R}_0$ und $\overline{R}_n$ berechnen brauchen, da die andere durch Gl. (45) bestimmt werden kann. Nach der Festsetzung der $\overline{R}_0$ und $\overline{R}_n$ können wir nun die Unbekannten $\overline{M}_r^l$ und $\overline{M}_r^r$ durch (47) oder (47a) eindeutig bestimmen.

Es sei hier noch das Folgende erwähnt werden. Wenn die Felderzahl n verhältmässig klein ist, können wir die Gleichungsgruppen (36) und (43) oder (36) und (43a) zweckmässig nach $2n$ Unbekannten $\overline{M}_r^l$ und $\overline{M}_r^r$ auflösen. Aber da die unmittelbare Auflösung im allgemeinen sehr umständlich ist, wollen wir uns überlegen, dass sich aus diesem System von zwei simultanen Differenzengleichungen, davon die erste in den $\overline{M}_r^l$ und $\overline{M}_r^r$ von erster Ordnung und die andere von zweiter Ordnung ist, eine einzige Differenzengleichung herstellen lässt, die nur die $\overline{M}_r^l$ oder $\overline{M}_r^r$ enthält und in diesen Veränderlichen im allgemeinen von vierter Ordnung ist.

Zunächst denken wir die zwei Gleichungen, die sich aus Gl. (36) für $r=r$ und $r=r-1$ ergeben werden, nach $\overline{M}_r^r$ und $\overline{M}_{r-1}^r$ aufgelöst. Die Ausdrücke, denen $\overline{M}_r^r$ und $\overline{M}_{r-1}^r$ gleichgesetzt sind, enthalten also nur noch die Veränderlichen $\overline{M}_r^l$, $\overline{M}_{r-1}^l$, $\overline{M}_{r-2}^l$ und $\overline{M}_{r-2}^r$. Wir lösen nun die Gl. (43) oder (43a) nach $\overline{M}_{r+1}^l$ auf und erhalten einen Ausdruck, der $\overline{M}_r^l$, $\overline{M}_{r-1}^l$, $\overline{M}_r^r$, $\overline{M}_{r-1}^r$ und $\overline{M}_{r-2}^r$ enthält. Hierauf ersetzen wir auf der rechten Seite $\overline{M}_r^r$ und $\overline{M}_{r-1}^r$ durch die soeben gefundenen Ausdrücke. Auf diese Weise entsteht ein Ausdruck für $\overline{M}_{r+1}^l$, der von den Veränderlichen $\overline{M}_r^r$ nur $\overline{M}_{r-2}^r$ enthält. In diesem Ausdruck ersetzen wir den Zeiger r durch $r+1$ und auf der rechten Seite der so entstehenden Gleichung $\overline{M}_{r-1}^r$ durch den Ausdruck für $\overline{M}_{r-1}^r$, erhalten somit einen Ausdruck für $\overline{M}_{r+2}^l$, der von den $\overline{M}_r^r$ nur $\overline{M}_{r-2}^r$ enthält. Eliminieren wir dann aus diesen so zustande gekommenen zwei Gleichungen, denen $\overline{M}_{r+1}^l$ und $\overline{M}_{r+2}^l$ gleichgesetzt sind, die $\overline{M}_{r-2}^r$, so entsteht eine Differenzengleichung für $\overline{M}_r^l$, die von vierter Ordnung ist.

Diese Gleichung nimmt die Gestalt

$$\underline{\overline{M}_{r+2}^l + k_{r,1}\,\overline{M}_{r+1}^l + k_{r,0}\,\overline{M}_r^l + k_{r,1}\,\overline{M}_{r-1}^l + \overline{M}_{r-2}^l = B_r + C_r,} \quad \ldots\ldots(49)$$

wobei k die von $\overline{E}$ und von den Belastungen unabhängigen Koeffizienten, B_r das von $\overline{E}_0$ oder $\overline{E}_n$ abhängige Belastungsglied und C_r das von den Belastungen abhängige Belastungsglied bedeuten.

Die Randbedingungsgleichung für $r=1$ erhalten wir durch Eliminieren von $\overline{M}_2^r$, $\overline{M}_1^r$ und $\overline{M}_0^r$ aus den vier Gleichungen, die sich aus Gl. (36) und (43) oder (43a) für $r=1,2$ ergeben sollen. Die letzte Gleichung für $r=n$ erhalten wir durch Eliminieren von $\overline{M}_{n-1}^r$, $\overline{M}_{n-2}^r$ aus den drei Gleichungen, die sich aus Gl. (36) für $r=n$, $n-1$ und aus Gl. (43) oder (43a) für $r=n$ ergeben werden.

Nach der Berechnung von $\overline{M}_r^l$ durch (49), können wir $\overline{M}_r^r$ durch die Gl. (36) berechnen, die aber in

$$\overline{M}_r^r - \delta_r \overline{M}_{r-1}^r = \delta_r \overline{M}_r^l - \overline{M}_{r-1}^l + \frac{2}{\alpha_r l}(\overline{S}_r^l + \overline{S}_{r-1}^r) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(50)$$

übergeht, wenn wir

$$\delta_r = \frac{1+\alpha_r}{\alpha_r} = 1 + \frac{1}{\alpha_r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (51)$$

setzen. Die Lösung dieser Differenzengleichung erster Ordnung mit den Randwerten $\overline{M}^r_{-1} = \overline{M}^r_n = 0$ lautet:

$$\underline{\overline{M}^r_r = -\sum_{i=r+1}^{n}\left[\prod_{\nu=r+1}^{i}\left(\frac{1}{\delta_\nu}\right)\cdot\left\{\delta_i \overline{M}^l_i - \overline{M}^l_{i-1} + \frac{2}{\alpha_i l}(\overline{S}^l_i + \overline{S}^r_{i-1})\right\}\right]}. \quad \ldots (52)$$

Aus Gl. (49) und (52) ergeben sich die Lösungen natürlich in der Form von (47) oder (47a).

Es sei noch eine Näherungslösung angedeutet werden. Wir erhalten aus den Gl. (20), (21) und (23) ohne besonderen Schwierigkeiten

$$\left.\begin{aligned} \overline{R}_0 &= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}(n-i)\overline{P}_i + \frac{2}{nl}\sum_{i=0}^{n} Y_i + \frac{2}{nh}\sum_{i=1}^{n}\overline{X}_i, \\ \overline{R}_n &= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} i\,\overline{P}_i - \frac{2}{nl}\sum_{i=0}^{n} Y_i - \frac{2}{nh}\sum_{i=1}^{n}\overline{X}_i \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (53)$$

Setzen wir hierauf voraus, dass

$$h\sum_{i=0}^{n} Y_r + l\sum_{i=1}^{n}\overline{X}_r = 0,$$

so erhalten wir

$$\overline{R}_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}(n-i)\overline{P}_i, \quad \overline{R}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} i\,\overline{P}_i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (54)$$

Dies setzt voraus, dass

$$R_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}(n-i)P_i, \quad R_0' = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}(n-i)P_i',$$

$$R_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} i\,P_i, \quad R_n' = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} i\,P_i'$$

sind, und wir können uns leicht überzeugen, dass diese Voraussetzung für die Fälle ganz richtig ist, wo der Leiterträger symmetrisch gebaut und belastet ist oder die Drillungswiderstände der Stäbe überall verschwinden. Mit dieser Voraussetzung können wir $\overline{M}^l_r$ und $\overline{M}^r_r$ durch (49) und (52) unmittelbar ausrechnen. Die Fehler, die dadurch herbeigeführt werden mögen, sind in meisten Fällen sehr gering, wie es später durch Zahlenbeispiele gezeigt werden soll.

2) Ermittelung der Biegungsmomente der Quertrager.

Es ist nun nach (15)

$$L_r = \frac{1}{2}(L_{r,0} + \overline{L}_r), \quad L_r' = \frac{1}{2}(L_{r,0} - \overline{L}_r).$$

Zunächst wollen wir die Differenzengleichung für $L_{r,0}$ erhalten. Aus Gl. (22) ergeben sich mit den Randwerten $X_{0,0} = X_{n+1,0} = 0$

$$X_{r,0} = -\sum_{i=0}^{r-1} L_{i,0} = +\sum_{i=r}^{n} L_{i,0} \quad \text{.................}(55)$$

und

$$\sum_{i=0}^{n} L_{i,0} = 0. \quad \text{.........................}(56)$$

Setzen wir (55) in die Gl. (25) ein, so entsteht

$$\sum_{i=0}^{r-1} L_{i,0} = \frac{\varepsilon_r}{2}(L_{r,0} - L_{r-1,0}) + \frac{\varepsilon_r}{h}(T_{r,0} - T_{r-1,0}),$$

mit der Abkürzung

$$\varepsilon_r = \frac{\lambda}{\phi_r} = \frac{h}{l} \cdot \frac{GH_r}{EJ} = \frac{\beta_r}{\gamma_r} \quad \text{.................}(57)$$

Ersetzen wir hierauf den Zeiger r durch $r+1$, so erhalten wir

$$\sum_{i=0}^{r} L_{i,0} = \frac{\varepsilon_{r+1}}{2}(L_{r+1,0} - L_{r,0}) + \frac{\varepsilon_{r+1}}{h}(T_{r+1,0} - T_{r,0})$$

und durch die Subtraktion der linken bzw. der rechten Seiten dieser zwei Gleichungen erhalten wir für $L_{r,0}$ die Differenzengleichung zweiter Ordnung

$$\varepsilon_{r+1} L_{r+1,0} - (2 + \varepsilon_{r+1} + \varepsilon_r) L_{r,0} + \varepsilon_r L_{r-1,0}$$
$$= -\frac{2}{h}\Big[\varepsilon_{r+1}(T_{r+1,0} - T_{r,0}) - \varepsilon_r(T_{r,0} - T_{r-1,0})\Big]. \quad \text{....}(58)$$

mit den Randwerten

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_{n+1} = 0, \quad L_{-1,0} = L_{n+1,0} = 0 \text{ und } T_{-1,0} = T_{n+1,0} = 0.$$

Anstatt der unmittelbaren Auflösung der Gl. (58) setzen wir

$$L_{r,0} = -\frac{2}{h} T_{r,0} + L_r^* \quad \text{...................}(59)$$

und erhalten damit

$$\underline{\varepsilon_{r+1} L_{r+1}^* - (2 + \varepsilon_{r+1} + \varepsilon_r) L_r^* + \varepsilon_r L_{r-1}^* = -\frac{4}{h} T_{r,0}} \quad \text{........}(60)$$

mit den Randwerten

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_{n+1} = 0, \quad L_{-1}^* = L_{n+1}^* = 0 \text{ und } T_{-1,0} = T_{n+1,0} = 0.$$

Die Auflösung dieser Gleichung bietet keine Schwierigkeiten und nach ihrer Auflösung nach L_r^* können wir $L_{r,0}$ durch (59) bestimmen.

Zur Ermittelung von $\overline{L_r}$ steht die Gl. (40):

$$\overline{L_r}=\frac{h}{2l}[\overline{M}^l_{r+1}-(\overline{M}^l_r+\overline{M}^r_r)+\overline{M}^r_{r-1}]+\frac{h}{2}(\overline{P}_r-\overline{R}_r)\ \ldots\ldots\ldots(40)$$

zur Verfügung, da $\overline{M}^l_r$ und $\overline{M}^r_r$ uns schon bekannt sind.

Nach der Ermittelung von $L_{r,0}$ und $\overline{L}_r$ können die Biegungsmomente L_r bzw. L_r' an den Enden der Querträger durch (15) berechnet werden.

3) Ermittelung der Torsionsmomente.

a) Die Torsionsmomente in den Hauptträgern.

Es ist nun nach (15)

$$X_r=\frac{1}{2}(X_{r,0}+\overline{X}_r)\ \text{ und }\ X_r'=\frac{1}{2}(X_{r,0}-\overline{X}_r),$$

wobei $X_{r,0}$ und $\overline{X}_r$ durch die Gl. (38) bzw. (55), d.h. durch

$$X_{r,0}=-\sum_{i=0}^{r-1}L_{i,0}=+\sum_{i=r}^{n}L_{i,0}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(55)$$

und

$$\overline{X}_r=-\sum_{i=0}^{r-1}\overline{L}_i=+\sum_{i=r}^{n}\overline{L}_i\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(38)$$

bestimmt werden, wenn $L_{i,0}$ und $\overline{L}_i$ uns bekannt sind.

Aus obigen Gleichungen ergeben sich auch

$$\left.\begin{aligned}X_r&=-\sum_{i=0}^{r-1}L_i=+\sum_{i=r}^{n}L_i\\ \text{und}\quad X_r'&=-\sum_{i=0}^{r-1}L_i'=+\sum_{i=r}^{n}L_i',\end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(61)$$

die X_r und X_r' unmittelbar ermitteln.

b) Die Torsionsmomente in den Querträgern.

Y_r werden durch die Gl. (21):

$$Y_r=\frac{1}{2}(\overline{M}^l_r-\overline{M}^r_r)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(21)$$

bestimmt werden, wenn $\overline{M}^l_r$ und $\overline{M}^r_r$ bekannt sind.

4) Ermittelung der Verschiebungen.

Wir wollen die Knotenpunktverschiebungen durch

$$z_r=\frac{1}{2}(z_{r,0}+\bar{z}_r)\ \text{ und }\ z_r'=\frac{1}{2}(z_{r,0}-\bar{z}_r)$$

bestimmen.

Für $z_{r,0}$ erhalten wir aus der Gl. (17) eine Differenzengleichung zweiter Ordnung:

$$z_{r+1,0}-2z_{r,0}+z_{r-1,0}=-Z_{r,0}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (62)$$

wobei als Belastungsglied

$$Z_{r,0}=+\frac{l}{6}\left[\mu_{r+1}M_{r+1}+2(\mu_{r+1}+\mu_r)\,M_r+\mu_r M_{r-1}\right]+U_{r,0}\,l \quad \ldots (63)$$

gesetzt ist.

Setzen wir die Werte von (32) und (33) in (63) ein, so erhalten wir

$$Z_{r,0}=+\frac{l^2}{6}\cdot\left[\begin{array}{l}\frac{1}{n}\left\{\mu_{r+1}[3(n-r)-1]+\mu_r[3(n-r)+1]\right\}\sum\limits_{i=0}^{r} i\,P_{i,0}\\ +\frac{1}{n}\left\{\mu_{r+1}(3r+1)+\mu_r(3r-1)\right\}\sum\limits_{i=r+1}^{n}(n-i)\,P_{i,0}-\mu_r P_{r,0}\end{array}\right]+U_{r,0}\,l \quad \ldots (63a)$$

Die Gl. (62) gilt für r von 1 bis $n-1$ und mit den Randwerten $z_{0,0}=z_{n,0}=0$ erhalten wir als Lösung:

$$\left.\begin{aligned}z_{1,0}&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)\,Z_{i,0},\\ z_{r,0}&=\frac{r}{n}\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)\,Z_{i,0}-\sum_{i=1}^{r-1}(r-i)\,Z_{i,0}\\ &=\frac{(n-r)}{n}\sum_{i=1}^{n-1}i\,Z_{i,0}+\sum_{i=r}^{n-1}(r-i)\,Z_{i,0},\\ z_{n-1,0}&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}i\,Z_{i,0}.\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (64)$$

In gleicher Weise erhalten wir aus der Gl. (18)

$$\bar{z}_{r+1}-2\bar{z}_r+\bar{z}_{r-1}=-\overline{Z}_r, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (65)$$

wobei

$$\overline{Z}_r=+\frac{l}{6}\left[\mu_{r+1}(\overline{M}^l_{r+1}+2\overline{M}^r_r)+\mu_r(2\overline{M}^l_r+\overline{M}^r_{r-1})\right]+\overline{U}_r l \quad \ldots\ldots (66)$$

gesetzt ist. Mit den Randwerten $\bar{z}_0=\bar{z}_n=0$ bekommen wir die Lösung:

$$\left.\begin{aligned}\bar{z}_1&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)\,\overline{Z}_i,\\ \bar{z}_r&=\frac{r}{n}\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)\,\overline{Z}_i-\sum_{i=1}^{r-1}(r-i)\,\overline{Z}_i\\ &=\frac{(n-r)}{n}\sum_{i=1}^{n-1}i\,\overline{Z}_i+\sum_{i=r}^{n-1}(r-i)\,\overline{Z}_i,\\ \bar{z}_{n-1}&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}i\,\overline{Z}_i.\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (67)$$

6. Der beiderseits eingespannte Leiterträger mit konstantem Querträgerquerschnitt und gleich verlaufenden Hauptträgern bei konstanten Feldweiten.

1) Ermittelung der Biegungsmomente beider Hauptträger und der Auflagerkräfte.

a) M_r, $R_{0,0}$ und $R_{n,0}$.

Zur Bestimmung der M_r, $R_{0,0}$ und $R_{n,0}$ dienen die Gl. (19) und die Randbedingungen (30) und (30a). Es ist:

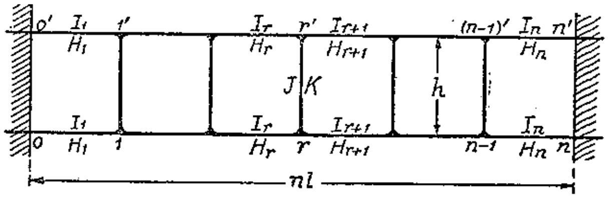


Abb. 9.

$$\left.\begin{aligned} &M_1 - M_0 = (R_{0,0} - P_{0,0})\,l,\\ &M_{r+1} - 2M_r + M_{r-1} = -P_{r,0}\,l,\\ &\qquad (r = 1, 2, \ldots n-1)\\ &M_{n-1} - M_n = (R_{n,0} - P_{n,0})\,l. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (68)$$

Lösen wir diese Gleichungen nach $R_{0,0}, M_1, \ldots M_{n-1}$ und $R_{n,0}$ auf, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} M_r &= \frac{n-r}{n}\,M_0 + \frac{r}{n}\,M_n + \frac{(n-r)\,l}{n}\sum_{i=0}^{r-1} i\,P_{i,0}\\ &\quad + \frac{rl}{n}\sum_{i=r+1}^{n}(n-i)\,P_{i,0} + \frac{r(n-r)\,l}{n}\,P_{r,0},\\ R_{0,0} &= \frac{1}{nl}(M_n - M_0) + \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}(n-i)\,P_{i,0},\\ R_{n,0} &= \frac{1}{nl}(M_0 - M_n) + \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} i\,P_{i,0}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (69)$$

Diese Lösungen können wir folgenderweise umschreiben:

$$\left.\begin{aligned} M_r &= \frac{n-r}{n}\,M_0 + \frac{r}{n}\,M_n + M_r^*,\\ R_{0,0} &= \frac{1}{nl}\,(M_n - M_0) + R_0^*,\\ R_{n,0} &= \frac{1}{nl}\,(M_0 - M_n) + R_n^*, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (69a)$$

wenn wir

$$\left.\begin{aligned} M_r^* &= \frac{l}{n}\left[(n-r)\sum_{i=0}^{r-1} i\,P_{i,0} + r\sum_{i=r+1}^{n}(n-i)\,P_{i,0} + r(n-r)\,P_{r,0}\right] \\ &= rl\,R_0^* - \sum_{i=0}^{r-1}(r-i)\,P_{i,0}\,l = (n-r)\,l\,R_n^* - \sum_{i=r+1}^{n}(i-r)\,P_{i,0}\,l, \\ R_0^* &= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}(n-i)\,P_{i,0}, \quad R_n^* = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} i\,P_{i,0} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots(70)$$

setzen, wobei, wie wir uns leicht überzeugen können, M_r^*, R_0^* und R_n^* das Biegungsmoment und die Auflagerkräfte eines einfachen Balkens mit der Spannweite von nl bedeuten, so dass wir sie in ganz einfacher Weise berechnen können.

Es erübrigt nun noch die Bestimmung von M_0 und M_n. Aus den Randbedingungsgleichungen (29) und (29a) erhalten wir

$$\mu_1(M_1+2M_0)+\frac{6}{l}\,z_{1,0}+\frac{6\mu_1}{l}\,S_{0,0}^r=0,$$

$$\mu_n(2M_n+M_{n-1})+\frac{6}{l}\,z_{n-1,0}+\frac{6\mu_n}{l}\,S_{n,0}^l=0.$$

Um $z_{1,0}$ und $z_{n-1,0}$ als Funktionen der M_0 und M_n auszudrücken, lösen wir die Differenzengleichung (17), die in $z_{r,0}$ von zweiter Ordnung ist, nach $z_{r,0}$ auf, so erhalten wir mit den Randwerten $z_{0,0}=z_{n,0}=0$ die Lösungen für $z_{1,0}$ bzw. $z_{n-1,0}$:

$$z_{1,0}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)\,Z_{i,0}, \quad z_{n-1,0}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} i\,Z_{i,0},$$

wobei

$$Z_{r,0}=+\frac{l}{6}\left[\mu_{r+1}M_{r+1}+2(\mu_{r+1}+\mu_r)\,M_r+\mu_r M_{r-1}\right]+U_{r,0}\,l$$

gesetzt ist. Nach Einsetzen von (69a) wird dieser Ausdruck für $Z_{r,0}$ zu

$$\begin{aligned} Z_{r,0}=+\frac{l}{6n}\Big[&\left\{(3n-3r-1)\,\mu_{r+1}+(3n-3r+1)\,\mu_r\right\}M_0 \\ &+\left\{(3r+1)\,\mu_{r+1}+(3r-1)\,\mu_r\right\}M_n\Big]+Z_r^*, \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots(71)$$

wenn wir dabei

$$Z_r^*=+\frac{l}{6}\left[\mu_{r+1}M_{r+1}^*+2(\mu_{r+1}+\mu_r)M_r^*+\mu_r M_{r-1}^*\right]+U_{r,0}\,l \quad \ldots\ldots(71a)$$

setzen.

Dann erhalten wir

$$\left.\begin{aligned}
z_{1,0} &= \frac{l}{6n^2}\cdot\left[\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)\left\{(3n-3i-1)\mu_{i+1}+(3n-3i+1)\mu_i\right\}\cdot M_0\\ &+\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)\left\{(3i+1)\mu_{i+1}+(3i-1)\mu_i\right\}\cdot M_n\end{aligned}\right]\\
&\qquad\qquad+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)Z_i^*,\\
z_{n-1,0} &= \frac{l}{6n^2}\cdot\left[\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n-1}i\left\{(3n-3i-1)\mu_{i+1}+(3n-3i+1)\mu_i\right\}\cdot M_0\\ &+\sum_{i=1}^{n-1}i\left\{(3i+1)\mu_{i+1}+(3i-1)\mu_i\right\}\cdot M_n\end{aligned}\right]\\
&\qquad\qquad+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}i\,Z_i^*.
\end{aligned}\right\}\text{(72)}$$

Gemäss (69a) ergeben sich noch

$$M_1=\frac{n-1}{n}M_0+\frac{1}{n}M_n+M_1^*,$$

$$M_{n-1}=\frac{1}{n}M_0+\frac{n-1}{n}M_n+M_{n-1}^*.$$

Setzen wir diese Werte und (72) in die aus den Randbedingungen (29) bzw. (29a) sich ergebenden zwei Gleichungen ein, so erhalten wir nach einigen Umformungen die folgenden zwei Gleichungen für M_0 und M_n:

$$\left.\begin{aligned}
m_0M_0+m_{n,0}M_n &= -\left[\frac{6}{nl}\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)\,Z_i^*+\mu_1\left(M_1^*+\frac{6}{l}S_{0,0}^r\right)\right],\\
m_{n,0}M_0+m_nM_n &= -\left[\frac{6}{nl}\sum_{i=1}^{n-1}i\,Z_i^*+\mu_n\left(M_{n-1}^*+\frac{6}{l}S_{n,0}^l\right)\right],
\end{aligned}\right\}\ldots.\text{(73)}$$

wobei

$$\left.\begin{aligned}
m_0 &= +\frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mu_i[3(n-i)^2+3(n-i)+1],\\
m_n &= +\frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mu_i[3i^2-3i+1],\\
m_{n,0} &= +\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mu_i[6(n-i)i-3(n-i)+3i-2].
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(74)}$$

gesetzt sind. Aus Gl. (73) ergeben sich sofort

$$\left.\begin{aligned}
M_0 &= -\frac{m_n\left[\frac{6}{nl}\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)Z_i^* + \mu_1\left(M_1^* + \frac{6}{l}S_{0,0}^r\right)\right] - m_{n,0}\left[\frac{6}{nl}\sum_{i=1}^{n-1} iZ_i^* + \mu_n\left(M_{n-1}^* + \frac{6}{l}S_{n,0}^l\right)\right]}{m_0 m_n - m_{n,0}^2},\\
M_n &= -\frac{m_0\left[\frac{6}{nl}\sum_{i=1}^{n-1} iZ_i^* + \mu_n\left(M_{n-1}^* + \frac{6}{l}S_{n,0}^l\right)\right] - m_{n,0}\left[\frac{6}{nl}\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)Z_i^* + \mu_1\left(M_1^* + \frac{6}{l}S_{0,0}^r\right)\right]}{m_0 m_n - m_{n,0}^2}.
\end{aligned}\right\}\quad(75)$$

Sind M_0 und M_n aus obigen Formeln gefunden, so können wir $R_{0,0}$, $R_{n,0}$ und M_r durch die Gl. (69) oder (69a) bestimmen.

b) $\overline{M}_r^l$, $\overline{M}_r^r$, $\overline{R}_0$ und $\overline{R}_n$.

In ganz gleicher Weise, wie wir die Gl. (34) und (34a) für einfachen Leiterträger hergeleitet haben, erhalten wir aus den Gl. (24) und (24a) die folgenden zwei Gleichungen für $r=2, 3, \ldots n-1$

$$\psi(Y_r - Y_{r-1}) = -\frac{\mu_r}{2}(\overline{M}_r^l + \overline{M}_{r-1}^r) - \frac{\mu_r}{l}(\overline{S}_r^l + \overline{S}_{r-1}^r), \ldots\ldots(76)$$

$$\psi(Y_r + Y_{r-1}) = \frac{2}{l}\Delta\bar{z}_{r-1} - \frac{\mu_r}{6}(\overline{M}_r^l - \overline{M}_{r-1}^r) - \frac{\mu_r}{l}(\overline{S}_r^l - \overline{S}_{r-1}^r) \ldots\ldots(77)$$

Die Randgleichung für $r=1$ erhalten wir aus Gl. (24) und der Randbedingungsgleichung (29)

$$\psi Y_1 = -\frac{\mu_1}{2}(\overline{M}_1^l + \overline{M}_0^r) - \frac{\mu_1}{l}(\overline{S}_1^l + \overline{S}_0^r), \ldots\ldots(76a)$$

$$\psi Y_1 = \frac{2}{l}\Delta\bar{z}_0 - \frac{\mu_1}{6}(\overline{M}_1^l - \overline{M}_0^r) - \frac{\mu_1}{l}(\overline{S}_1^l - \overline{S}_0^r). \ldots\ldots(77a)$$

Die letzte Gleichung für $r=n$ erhalten wir aus Gl. (24a) und der Randbedingungsgleichung (29a)

$$-\psi Y_{n-1} = -\frac{\mu_n}{2}(\overline{M}_n^l + \overline{M}_{n-1}^r) - \frac{\mu_n}{l}(\overline{S}_n^l + \overline{S}_{n-1}^r), \ldots\ldots(76b)$$

$$\psi Y_{n-1} = \frac{2}{l}\Delta\bar{z}_{n-1} - \frac{\mu_n}{6}(\overline{M}_n^l - \overline{M}_{n-1}^r) - \frac{\mu_n}{l}(\overline{S}_n^l - \overline{S}_{n-1}^r). \ldots\ldots(77b)$$

Setzen wir nun die Werte von Y_r aus Gl. (21) in die obigen Gleichungen ein, so erhalten wir aus Gl. (76), (76a) und (76b), wie die Gl. (36),

$$\left.\begin{aligned}
&(1+\alpha_1)\overline{M}_1^l - \alpha_1\overline{M}_1^r + \overline{M}_0^r = -\frac{2}{l}(\overline{S}_1^l + \overline{S}_0^r),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&(1+\alpha_r)(\overline{M}_r^l + \overline{M}_{r-1}^r) - \alpha_r(\overline{M}_r^r + \overline{M}_{r-1}^l) = -\frac{2}{l}(\overline{S}_r^l + \overline{S}_{r-1}^r),
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(78)$$

$$\left.\begin{array}{l}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \overline{M}_n^l-\alpha_n\overline{M}_{n-1}^l+(1+\alpha_n)\overline{M}_{n-1}=-\frac{2}{l}(\overline{S}_n^l+\overline{S}_{n-1}^r)\end{array}\right\}$$

und aus Gl. (77), (77a) und (77b), wie die Gl. (37),

$$\left.\begin{array}{l}2\Delta\bar{z}_0=\frac{l\mu_1}{6}[(1+3\alpha_1)\overline{M}_1^l-3\alpha_1\overline{M}_1^r-\overline{M}_0^r]+\mu_1(\overline{S}_1^l-\overline{S}_0^r),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ 2\Delta\bar{z}_{r-1}=\frac{l\mu_r}{6}[(1+3\alpha_r)(\overline{M}_r^l-\overline{M}_{r-1}^r)-3\alpha_r(\overline{M}_r^r-\overline{M}_{r-1}^l)]+\mu_r(\overline{S}_r^l-\overline{S}_{r-1}^r),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ 2\Delta\bar{z}_{n-1}=\frac{l\mu_n}{6}[\overline{M}_n^l+3\alpha_n\overline{M}_{n-1}^l-(1+3\alpha_n)\overline{M}_{n-1}^r]+\mu_n(\overline{S}_n^l-\overline{S}_{n-1}^r),\end{array}\right\}\quad\ldots(79)$$

wobei
$$\alpha_r=\frac{\psi}{\mu_r}.$$

Wenden wir die Gl. (23) für $r=1,\ 2\ldots.n-1$ an, so erhalten wir aus den dadurch entstehenden Gleichungen

$$\overline{X}_r=\overline{X}_1-\sum_{i=1}^{r-1}\overline{L}_i=\overline{X}_n+\sum_{i=r}^{n-1}\overline{L}_i;\qquad \overline{X}_1-\overline{X}_n=\sum_{i=1}^{n-1}\overline{L}_i\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(80)$$

Setzen wir diese Werte in die Gl. (26) und ihre Randgleichungen (30), (30a) ein, so ergeben sich

$$\left.\begin{array}{l}2\Delta\bar{z}_0=+\frac{\lambda h}{6}\overline{L}_1+\phi_1h\overline{X}_1+\lambda\overline{T}_1,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ 2\Delta\bar{z}_{r-1}=+\frac{\lambda h}{6}\Delta\overline{L}_{r-1}-\phi_rh\sum_{i=1}^{r-1}\overline{L}_i+\phi_rh\overline{X}_1+\lambda(\overline{T}_r-\overline{T}_{r-1}),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ 2\Delta\bar{z}_{n-1}=-\frac{\lambda h}{6}\overline{L}_{n-1}-\phi_nh\sum_{i=1}^{n-1}\overline{L}_i+\phi_nh\overline{X}_1-\lambda\overline{T}_{n-1}\end{array}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots(81)$$

oder

$$\left.\begin{array}{l}2\Delta\bar{z}_0=+\frac{\lambda h}{6}\overline{L}_1+\phi_1h\sum_{i=1}^{n-1}L_i+\phi_1h\overline{X}_n+\lambda\overline{T}_1,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ 2\Delta\bar{z}_{r-1}=+\frac{\lambda h}{6}\Delta\overline{L}_{r-1}+\phi_rh\sum_{i=r}^{n-1}\overline{L}_i+\phi_rh\overline{X}_n+\lambda(\overline{T}_r-\overline{T}_{r-1}),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{array}\right\}\quad\ldots\ldots(81a)$$

$$2\Delta\bar{z}_{n-1}=-\frac{\lambda h}{6}\overline{L}_{n-1}+\phi_n h\overline{X}_n-\lambda\overline{T}_{n-1}.$$

Die Gl. (20) mit den Randbedingungen (30) und (30a) ergibt

$$\left.\begin{aligned}
\overline{L}_r&=\frac{h}{2l}[\overline{M}^l_{r+1}-(\overline{M}^l_r+\overline{M}^r_r)+\overline{M}^r_{r-1}]+\frac{h}{2}\overline{P}_r \quad (r=1,\ldots n-1),\\
\Delta\overline{L}_{r-1}&=\frac{h}{2l}\Delta^2(\overline{M}^l_{r-1}-\overline{M}^r_{r-2})+\frac{h}{2}\Delta\overline{P}_{r-1} \quad (r=2,\ldots n-1),\\
\sum_{i=1}^{r-1}\overline{L}_i&=+\frac{h}{2l}(\overline{M}^l_r-\overline{M}^r_{r-1})+\frac{h}{2}\left(\sum_{i=0}^{r-1}\overline{P}_i-\overline{R}_0\right)(r=1,\ldots\ldots n),\\
\sum_{i=r}^{n-1}\overline{L}_i&=-\frac{h}{2l}(\overline{M}^l_r-\overline{M}^r_{r-1})+\frac{h}{2}\left(\sum_{i=r}^{n}\overline{P}_i-\overline{R}_n\right)(r=1,\ldots n-1).
\end{aligned}\right\}\ldots(82)$$

Setzen wir diese Werte in die Gl. (81) oder (81a) ein und eliminieren wir dann $\Delta\bar{z}_{r-1}$ aus den dadurch entstehenden Gleichungen mit Hilfe der Gl. (79), so erhalten wir nach einigen Umformungen aus Gl. (81):

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\beta_1}{2}\overline{M}^l_2-\left(1+3\alpha_1+\frac{\beta_1}{2}\right)\overline{M}^l_1+\left(3\alpha_1-\frac{\beta_1}{2}\right)\overline{M}^r_1+\left(1+\frac{\beta_1}{2}\right)\overline{M}^r_0+6\left(\frac{l}{h}\right)\gamma_1\overline{X}_1\\
&\qquad=-\frac{\beta_1}{2}\overline{P}_1 l+\frac{6}{l}(\overline{S}^l_1-\overline{S}^r_0)-\frac{6}{l}\left(\frac{l}{h}\right)^2\beta_1\overline{T}_1,\\
&\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{\beta_r}{2}(\overline{M}^l_{r+1}-\overline{M}^r_{r-2})-(1+3\alpha_r+\beta_r+3\gamma_r)(\overline{M}^l_r-\overline{M}^r_{r-1})-\left(3\alpha_r-\frac{\beta_r}{2}\right)(\overline{M}^l_{r-1}-\overline{M}^r_r)\\
&\qquad+6\left(\frac{l}{h}\right)\gamma_r\overline{X}_1+3\gamma_r\overline{R}_0 l=-\frac{\beta_r}{2}\Delta\overline{P}_{r-1}l+3\gamma_r\sum_{i=0}^{r-1}\overline{P}_i l+\frac{6}{l}(\overline{S}^l_r-\overline{S}^r_{r-1})\\
&\qquad\qquad-\frac{6}{l}\left(\frac{l}{h}\right)^2\beta_r\Delta\overline{T}_{r-1},\\
&\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&-\left(1+\frac{\beta_n}{2}+3\gamma_n\right)\overline{M}^l_n-\left(3\alpha_n-\frac{\beta_n}{2}\right)\overline{M}^l_{n-1}+\left(1+3\alpha_n+\frac{\beta_n}{2}+3\gamma_n\right)\overline{M}^r_{n-1}\\
&\qquad-\frac{\beta_n}{2}\overline{M}^r_{n-2}+6\left(\frac{l}{h}\right)\gamma_n\overline{X}_1+3\gamma_n\overline{R}_0 l=+\frac{\beta_n}{2}\overline{P}_{n-1}l+3\gamma_n\sum_{i=0}^{n-1}\overline{P}_i l\\
&\qquad\qquad+\frac{6}{l}(\overline{S}^l_n-\overline{S}^r_{n-1})+\frac{6}{l}\left(\frac{l}{h}\right)^2\beta_n\overline{T}_{n-1}
\end{aligned}\right\}\ldots(83)$$

oder aus Gl. (81a):

$$\frac{\beta_1}{2}\overline{M}^l_2-\left(1+3\alpha_1+\frac{\beta_1}{2}+3\gamma_1\right)\overline{M}^l_1+\left(3\alpha_1-\frac{\beta_1}{2}\right)\overline{M}^r_1+\left(1+\frac{\beta_1}{2}+3\gamma_1\right)\overline{M}^r_0$$

$$+6\left(\frac{l}{h}\right)\gamma_1\overline{X}_n-3\gamma_1\overline{R}_n l=-\frac{\beta_1}{2}\overline{P}_1 l-3\gamma_1\sum_{i=1}^{n}\overline{P}_i l-\frac{6}{l}\left(\frac{l}{h}\right)^2\beta_1\overline{T}_1+\frac{6}{l}(\overline{S}_1^l-\overline{S}_0^r),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\beta_r}{2}(\overline{M}_{r+1}^l-\overline{M}_{r-2}^r)-(1+3\alpha_r+\beta_r+3\gamma_r)(\overline{M}_r^l-\overline{M}_{r-1}^r)-\left(3\alpha_r-\frac{\beta_r}{2}\right)(\overline{M}_{r-1}^l-\overline{M}_r^r)$$

$$+6\left(\frac{l}{h}\right)\gamma_r\overline{X}_n-3\gamma_r\overline{R}_n l=-\frac{\beta_r}{2}\Delta\overline{P}_{r-1}l-3\gamma_r\sum_{i=r}^{n}\overline{P}_i l+\frac{6}{l}(\overline{S}_r^l-\overline{S}_{r-1}^r)$$

$$-\frac{6}{l}\left(\frac{l}{h}\right)^2\beta_r\Delta\overline{T}_{r-1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-\left(1+\frac{\beta_n}{2}\right)\overline{M}_n^l-\left(3\alpha_n-\frac{\beta_n}{3}\right)\overline{M}_{n-1}^l+\left(1+3\alpha_n+\frac{\beta_n}{2}\right)\overline{M}_{n-1}^r-\frac{\beta_n}{2}\overline{M}_{n-2}^r$$

$$+6\left(\frac{l}{h}\right)\gamma_n\overline{X}_n=+\frac{\beta_n}{2}\overline{P}_{n-1}l+\frac{6}{l}(\overline{S}_n^l-\overline{S}_{n-1}^r)+\frac{6}{l}\left(\frac{l}{h}\right)^2\beta_n\overline{T}_{n-1}.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (83a)$$

Dabei gelten, wie beim einfachen Leiterträger, die Abkürzungen (35) und (42):

$$\alpha_r=\frac{\psi}{\mu_r},\quad \beta_r=\frac{\lambda}{\mu_r}\left(\frac{h}{l}\right)^2,\quad \gamma_r=\frac{\phi_r}{\mu_r}\left(\frac{h}{l}\right)^2 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (84)$$

Multiplizieren wir die linke und rechte Seiten der zweiten Gleichung der Randbedingung (30) mit $3\gamma_1$, so erhalten wir

$$3\gamma_1(-\overline{M}_1^l+\overline{M}_0^r+\overline{R}_0 l)=3\gamma_1\overline{P}_0 l.$$

Addieren wir nun die linke bzw. rechte Seiten dieser Gleichung auf die linke bzw. rechte Seite der ersten Gleichung von (83), so ergibt sich

$$\frac{\beta_1}{2}\overline{M}_2^l-\left(1+3\alpha_1+\frac{\beta_1}{2}+3\gamma_1\right)\overline{M}_1^l+\left(3\alpha_1-\frac{\beta_1}{2}\right)\overline{M}_1^r+\left(1+\frac{\beta_1}{2}+3\gamma_1\right)\overline{M}_0^r$$

$$+6\left(\frac{l}{h}\right)\gamma_1\overline{X}_1+3\gamma_1\overline{R}_0 l=-\frac{\beta_1}{2}\overline{P}_1 l+3\gamma_1\overline{P}_0 l+\frac{6}{l}(\overline{S}_1^l-\overline{S}_0^r)-\frac{6}{l}\left(\frac{l}{h}\right)^2\beta_1\overline{T}_1.$$

In gleicher Weise erhalten wir aus der zweiten Gleichung der Randbedingung (30a) und der letzten Gleichung von (83a)

$$-\left(1+\frac{\beta_n}{2}+3\gamma_n\right)\overline{M}_n^l-\left(3\alpha_n-\frac{\beta_n}{2}\right)\overline{M}_{n-1}^l+\left(1+3\alpha_n+\frac{\beta_n}{2}+3\gamma_n\right)\overline{M}_{n-1}^r-\frac{\beta_n}{2}\overline{M}_{n-2}^r$$

$$+6\left(\frac{l}{h}\right)\gamma_n\overline{X}_n-3\gamma_n\overline{R}_n l=+\frac{\beta_n}{2}\overline{P}_{n-1}l-3\gamma_n\overline{P}_n l+\frac{6}{l}(\overline{S}_n^l-\overline{S}_{n-1}^r)+\frac{6}{l}\left(\frac{l}{h}\right)^2\beta_n\overline{T}_{n-1}.$$

Dann können wir die Gleichungsgruppe (83) oder (83a) folgenderweise umschreiben:

$$\left.\begin{array}{l}
\overline{M}_2^l-(a_1-1)\overline{M}_1^l \quad -b_1\overline{M}_1^r+(a_1+b_1-2)\overline{M}_0^r+2\left(\frac{l}{h}\right)c_1\overline{X}_1+c_1 l\overline{R}_0=A_1, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\overline{M}_{r+1}^l-a_r\overline{M}_r^l+b_r\overline{M}_{r-1}^l-b_r\overline{M}_r^r+a_r\overline{M}_{r-1}^r-\overline{M}_{r-2}^r+2\left(\frac{l}{h}\right)c_r\overline{X}_1+c_r l\overline{R}_0=A_r, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
-(a_n+b_n-2)\overline{M}_n^l+b_n\overline{M}_{n-1}^l+(a_n-1)\overline{M}_{n-1}^r-\overline{M}_{n-2}^r+2\left(\frac{l}{h}\right)c_n\overline{X}_1+c_n l\overline{R}_0=A_n,
\end{array}\right\} \quad \dots\dots (85)$$

oder

$$\left.\begin{array}{l}
\overline{M}_2^l-(a_1-1)\overline{M}_1^l \quad -b_1\overline{M}_1^r+(a_1+b_1-2)\overline{M}_0^r+2\left(\frac{l}{h}\right)c_1\overline{X}_n-c_1 l\overline{R}_n=A_1', \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\overline{M}_{r+1}^l-a_r\overline{M}_r^l+b_r\overline{M}_{r-1}^l-b_r\overline{M}_r^r+a_r\overline{M}_{r-1}^r-\overline{M}_{r-2}^r+2\left(\frac{l}{h}\right)c_r\overline{X}_n-c_r l\overline{R}_n=A_r', \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
-(a_n+b_n-2)\overline{M}_n^l+b_n\overline{M}_{n-1}^l+(a_n-1)\overline{M}_{n-1}^r-\overline{M}_{n-2}^r+2\left(\frac{l}{h}\right)c_n\overline{X}_n-c_n l\overline{R}_n=A_n',
\end{array}\right\} \quad \dots\dots (85a)$$

wenn wir dabei, wie wir es beim einfachen Leiterträger getan haben,

$$\left.\begin{array}{l}
a_r=\frac{2}{\beta_r}(1+3\alpha_r+\beta_r+3\gamma_r)=2+c_r+\frac{2}{\beta_r}(1+3\alpha_r), \\
b_r=\frac{2}{\beta_r}\left(\frac{\beta_r}{2}-3\alpha_r\right)=1-6\frac{\alpha_r}{\beta_r}, \quad c_r=6\frac{\gamma_r}{\beta_r}, \\
A_1=-\overline{P}_1 l+c_1\overline{P}_0 l+\frac{12}{l\beta_1}(\overline{S}_1^l-\overline{S}_0^r)-\frac{12}{l}\left(\frac{l}{h}\right)^2\overline{T}_1, \\
A_r=-(\overline{P}_r-\overline{P}_{r-1})l+c_r l\sum_{i=0}^{r-1}\overline{P}_i+\frac{12}{l\beta_r}(\overline{S}_r^l-\overline{S}_{r-1}^r)-\frac{12}{l}\left(\frac{l}{h}\right)^2(\overline{T}_r-\overline{T}_{r-1}), \\
A_n=+\overline{P}_{n-1}l+c_n l\sum_{i=0}^{n-1}\overline{P}_i+\frac{12}{l\beta_n}(\overline{S}_n^l-\overline{S}_{n-1}^r)+\frac{12}{l}\left(\frac{l}{h}\right)^2\overline{T}_{n-1}, \\
A_1'=-\overline{P}_1 l-c_1 l\sum_{i=1}^{n}\overline{P}_i+\frac{12}{l\beta_1}(\overline{S}_1^l-\overline{S}_0^r)-\frac{12}{l}\left(\frac{l}{h}\right)^2\overline{T}_1, \\
A_r'=-(\overline{P}_r-\overline{P}_{r-1})l-c_r l\sum_{i=r}^{n}\overline{P}_i+\frac{12}{l\beta_r}(\overline{S}_r^l-\overline{S}_{r-1}^r)-\frac{12}{l}\left(\frac{l}{h}\right)^2(\overline{T}_r-\overline{T}_{r-1}), \\
A_n'=+\overline{P}_{n-1}l-c_n\overline{P}_n l+\frac{12}{l\beta_n}(\overline{S}_n^l-\overline{S}_{n-1}^r)+\frac{12}{l}\left(\frac{l}{h}\right)^2\overline{T}_{n-1}
\end{array}\right\} \dots (86)$$

setzen werden.

Damit haben wir $2n$ Gleichungen, Gl. (78) und (85) oder Gl. (78) und (85a) erhalten. Lösen wir diese $2n$ Gleichung nach $2n$ Unbekannten, $\overline{M}_r^l$ und $\overline{M}_r^r$, auf, so erhalten wir die Lösungen in der Form
aus Gl. (78) und (85):

$$\overline{M}_r^l=f_r\left[2\left(\frac{l}{h}\right)\overline{X}_1+\overline{R}_0 l\right]+F_r,\quad \overline{M}_r^r=g_r\left[2\left(\frac{l}{h}\right)\overline{X}_1+\overline{R}_0 l\right]+G_r,\ldots\ldots(87)$$

oder aus Gl. (78) und (85a):

$$\overline{M}_r^l=f_r\left[2\left(\frac{l}{h}\right)\overline{X}_n-\overline{R}_n l\right]+F_r',\quad \overline{M}_r^r=g_r\left[2\left(\frac{l}{h}\right)\overline{X}_n-\overline{R}_n l\right]+G_r',\ldots(87a)$$

wobei f_r und g_r die von $\overline{X}_1$, $\overline{X}_n$, $\overline{R}_0$, $\overline{R}_n$ und von den Belastungen unabhängigen Koeffizienten vorstellen, während die Grössen F_r, G_r, F_r' und G_r' von den Belastungen, aber nicht von $\overline{X}_1$, $\overline{X}_n$, $\overline{R}_0$ und $\overline{R}_n$ abhängig sind.

Es erübrigt nur noch die Ermittelung von $\overline{X}_1$; $\overline{X}_n$, $\overline{R}_0$ und $\overline{R}_n$. Zu diesem Zweck addieren wir die linken bzw. die rechten Seiten der n Gleichungen (79) miteinander, so bekommen wir, wie die Gl. (46) für einfachen Leiterträger,

$$6\psi(\overline{M}_0^r-\overline{M}_n^l)+\sum_{i=1}^{n}\mu_i(1+6\alpha_i)(\overline{M}_i^l-\overline{M}_{i-1}^r)=-\frac{6}{l}\sum_{i=1}^{n}\mu_i(\overline{S}_i^l-\overline{S}_{i-1}^r)\quad\ldots\ldots(88)$$

Durch Einsetzen von (87) oder (87a) in die vorstehende Gleichung erhalten wir

$$2\left(\frac{l}{h}\right)\overline{X}_1+\overline{R}_0 l=-\frac{6\psi(G_0-F_n)+\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_i\left[(1+6\alpha_i)(F_i-G_{i-1})+\frac{6}{l}(\overline{S}_i^l-\overline{S}_{i-1}^r)\right]}{6\psi(g_0-f_n)+\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_i(1+6\alpha_i)(f_i-g_{i-1})}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(89)$$

oder

$$2\left(\frac{l}{h}\right)\overline{X}_n-\overline{R}_n l=-\frac{6\psi(G_0'-F_n')+\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_i\left[(1+6\alpha_i)(F_i'-G_{i-1}')+\frac{6}{l}(\overline{S}_i^l-\overline{S}_{i-1}^r)\right]}{6\psi(g_0-f_n)+\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_i(1+6\alpha_i)(f_i-g_{i-1})}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(89a)$$

Nach der Festsetzung von $2\left(\frac{l}{h}\right)\overline{X}_1+\overline{R}_0 l$ oder $2\left(\frac{l}{h}\right)\overline{X}_n-\overline{R}_n l$ können wir nun $\overline{M}_r^l$ und $\overline{M}_r^r$ durch Gl. (87) oder (87a) berechen.

Wie beim einfachen Leiterträger können wir, anstatt der simultanen Auflösung der Gl. (78) und (85) oder der Gl. (78) und (85a) nach $\overline{M}_r^l$ und $\overline{M}_r^r$, eine einzige Differenzengleichung vierter Ordnung für $\overline{M}_r^l$ herstellen.

Diese Gleichung nimmt die Gestalt

$$\overline{M}_{r+2}^l + k_{r,1}\overline{M}_{r+1}^l + k_{r,0}\overline{M}_r^l + k_{r,1}\overline{M}_{r-1}^l + \overline{M}_{r-2}^l = B_r + C_r \quad \text{.............(90)}$$

an, wobei k die von $\overline{R}_0$, $\overline{R}_n$, $\overline{X}_1$, $\overline{X}_n$ und von den Belastungen unabhängigen Koeffizienten, B_r das von $2\left(\frac{l}{h}\right)\overline{X}_1 + \overline{R}_0 l$ oder von $2\left(\frac{l}{h}\right)\overline{X}_n - \overline{R}_n l$ abhängige Belastungsglied und C_r das nur von den Belastungen abhängige Belastungsglied bedeuten. Die erste bzw. die letzte Gleichung für $r=1$ bzw. für $r=n$ ergeben sich etwas abweichend von der allgemeinen Form von (90).

Nach der Berechnung von $\overline{M}_r^l$ durch (90), können wir $\overline{M}_r^r$ durch die Gl. (78) berechnen, die aber in

$$\left.\begin{aligned}
\overline{M}_1^r - (\delta_1 - 1)\overline{M}_0^r &= \delta_1 \overline{M}_1^l + \frac{2}{\alpha_1 l}(\overline{S}_1^l + \overline{S}_0^r), \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\overline{M}_r^r - \delta_r \overline{M}_{r-1}^r &= \delta_r \overline{M}_r^l - \overline{M}_{r-1}^l + \frac{2}{\alpha_r l}(\overline{S}_r^l + \overline{S}_{r-1}^r), \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
-\delta_n \overline{M}_{n-1}^r &= (\delta_n - 1)\overline{M}_n^l - \overline{M}_{n-1}^l + \frac{2}{\alpha_n l}(\overline{S}_n^l + \overline{S}_{n-1}^r)
\end{aligned}\right\} \quad \text{........(91)}$$

übergeht, wenn wir dabei

$$\delta_r = \frac{1+\alpha_r}{\alpha_r} = 1 + \frac{1}{\alpha_r} \quad \text{......................(92)}$$

setzen. Die Lösung dieser Gleichungen lautet:

$$\left.\begin{aligned}
\overline{M}_r^r &= -\sum_{i=r+1}^{n}\left[\prod_{\nu=r+1}^{i}\left(\frac{1}{\delta_\nu}\right)\cdot\left\{\delta_i \overline{M}_i^l - \overline{M}_{i-1}^l + \frac{2}{\alpha_i l}(\overline{S}_i^l + \overline{S}_{i-1}^r)\right\}\right] + \overline{M}_n^l \prod_{i=r+1}^{n}\left(\frac{1}{\delta_i}\right), \\
&\qquad (r = 1,\ 2, \ldots .\, n-1) \\
\overline{M}_0^r &= -(1+\alpha_1)\sum_{i=1}^{n}\left[\prod_{\nu=1}^{i}\left(\frac{1}{\delta_\nu}\right)\cdot\left\{\delta_i \overline{M}_i^l - \overline{M}_{i-1}^l + \frac{2}{\alpha_i l}(\overline{S}_i^l + \overline{S}_{i-1}^r)\right\}\right] \\
&\qquad + (1+\alpha_1)\overline{M}_n^l \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\delta_i}\right).
\end{aligned}\right\} \quad (93)$$

Wenn $\overline{M}_r^l$ und $\overline{M}_r^r$ bekannt sind, können wir $\overline{R}_0$ und $\overline{R}_n$ durch

$$\overline{R}_0=\overline{P}_0+\frac{1}{l}(\overline{M}_1^l-\overline{M}_0^r),\qquad \overline{R}_n=\overline{P}_n+\frac{1}{l}(\overline{M}_{n-1}^r-\overline{M}_n^l)\ldots\ldots\ldots\ldots(94)$$

bestimmen.

Für die Folge werden $\overline{X}_1$ und $\overline{X}_n$ bestimmt werden. Dazu dienen die Gl. (89) und (89a). Wir können sie auch aus Gl. (94) bestimmen, da sich durch Einsetzen von (87) bzw. (87a) in (94)

$$\left.\begin{aligned}\overline{X}_1&=\frac{h}{2(g_0-f_1)}\left[\overline{P}_0+(f_1-g_0-1)\overline{R}_0+\frac{1}{l}(F_1-G_0)\right],\\ \overline{X}_n&=\frac{h}{2(f_n-g_{n-1})}\left[\overline{P}_n+(f_n-g_{n-1}-1)\overline{R}_n+\frac{1}{l}(G_{n-1}'-F_n')\right]\end{aligned}\right\}\ldots(95)$$

ergeben.

2) Ermittelung der Biegungsmomente der Querträger.

Wenden wir die Gl. (22) für $r=1,\ 2,\ldots n-1$ an, so bekommen wir aus den dadurch entstehenden Gleichungen

$$X_{r,0}=X_{1,0}-\sum_{i=1}^{r-1}L_{i,0}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(96)$$

Setzen wir diese Werte von $X_{r,0}$ in die Gl. (25) und ihre Randgleichungen (31) bzw. (31a) ein, so ergeben sich mit der Abkürzung (57)

$$\left.\begin{aligned}X_{1,0}&=-\frac{\varepsilon_1}{2}L_{1,0}-\frac{\varepsilon_1}{h}T_{1,0},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ X_{1,0}-\sum_{i=1}^{r-1}L_{i,0}&=-\frac{\varepsilon_r}{2}(L_{r,0}-L_{r-1,0})-\frac{\varepsilon_r}{h}(T_{r,0}-T_{r-1,0}),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ X_{1,0}-\sum_{i=1}^{n-1}L_{i,0}&=+\frac{\varepsilon_n}{2}L_{n-1,0}+\frac{\varepsilon_n}{h}T_{n-1,0}.\end{aligned}\right\}$$

Durch Subtraktion der linken und rechten Seiten der aufeinander folgenden Gleichungen des vorstehenden Gleichungssystems erhalten wir der Reihe nach

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_2L_{2,0}-(2+\varepsilon_2+\varepsilon_1)L_{1,0}&=-\frac{2}{h}[\varepsilon_2(T_{2,0}-T_{1,0})-\varepsilon_1T_{1,0}],\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \varepsilon_{r+1}L_{r+1,0}-(2+\varepsilon_{r+1}+\varepsilon_r)L_{r,0}+\varepsilon_rL_{r-1,0}&=-\frac{2}{h}[\varepsilon_{r+1}(T_{r+1,0}-T_{r,0})-\varepsilon_r(T_{r,0}-T_{r-1,0})],\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right\}$$

$$-(2+\varepsilon_n+\varepsilon_{n-1})L_{n-1,0}+\varepsilon_{n-1}L_{n-2,0}=-\frac{2}{h}\Big[-\varepsilon_n T_{n-1,0}-\varepsilon_{n-1}(T_{n-1,0}-T_{n-2,0})\Big].\quad\Bigg\}\quad\ldots\ldots(97)$$

Wie beim einfachen Leiterträger setzen wir

$$L_{r,0}=-\frac{2}{h}T_{r,0}+L_r^* \quad\ldots\ldots(98)$$

und erhalten damit

$$\varepsilon_{r+1}L_{r+1}^*-(2+\varepsilon_{r+1}+\varepsilon_r)L_r^*+\varepsilon_r L_{r-1}^*=-\frac{4}{h}T_{r,0} \quad\ldots\ldots(99)$$

mit den Randbedingungen

$$L_0^*=L_n^*=0,\qquad T_{0,0}=T_{n,0}=0.$$

Nach der Ermittelung von L_r^* aus Gl. (99) berechnen wir $L_{r,0}$ durch Gl. (98). Zur Ermittelung von $\overline{L}_r$ steht die erste Gleichung von (82):

$$\overline{L}_r=\frac{h}{2l}[\overline{M}_{r+1}^l-\overline{M}_r^l-\overline{M}_r^r+\overline{M}_{r-1}^r]+\frac{h}{2}\overline{P}_r \quad\ldots\ldots(100)$$

zur Verfügung, da $\overline{M}_r^l$ und $\overline{M}_r^r$ uns schon bekannt sind.

Die eigentlichen Endmomente L_r und L_r' des Querträgers können wir durch

$$L_r=\frac{1}{2}(L_{r,0}+\overline{L}_r),\qquad L_r'=\frac{1}{2}(L_{r,0}-\overline{L}_r)$$

ausrechnen.

3) Ermittelung der Torsionsmomente.

a) Die Torsionsmomente in den Hauptträgern.

Es ist nun nach (15)

$$X_r=\frac{1}{2}(X_{r,0}+\overline{X}_r),\quad X_r'=\frac{1}{2}(X_{r,0}-\overline{X}_r).$$

Aus Gl. (80) und (96) erhalten wir

$$\left.\begin{aligned}X_{r,0}&=X_{1,0}-\sum_{i=1}^{r-1}L_{i,0}=X_{n,0}+\sum_{i=r}^{n-1}L_{i,0},\\ \overline{X}_r&=\overline{X}_1-\sum_{i=1}^{r-1}\overline{L}_i=\overline{X}_n+\sum_{i=r}^{n-1}\overline{L}_i.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots(101)$$

Die ersten Gleichungen der Randbedingungen (31) bzw. (31a) bestimmen $X_{1,0}$ bzw. $X_{n,0}$:

$$\left.\begin{aligned} X_{1,0} &= -\varepsilon_1\left[\frac{1}{2}L_{1,0}+\frac{1}{h}T_{1,0}\right],\\ X_{n,0} &= +\varepsilon_n\left[\frac{1}{2}L_{n-1,0}+\frac{1}{h}T_{n-1,0}\right].\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (102)$$

Zur Ermittelung von $\overline{X}_1$ bzw. $\overline{X}_n$ stehen Gl. (89) bzw. (89a) oder Gl. (95) zur Verfügung.

b) Die Torsionsmomente in den Querträgern.

Für Y_r steht die Gl. (21) zur Verfügung

$$Y_r=\frac{1}{2}(\overline{M}_r^l-\overline{M}_r^r).$$

4) Ermittelung der Verschiebungen.

Die Verschiebungen der Knoten werden durch

$$z_r=\frac{1}{2}(z_{r,0}+\bar{z}_r), \quad z_r'=\frac{1}{2}(z_{r,0}-\bar{z}_r)$$

bestimmt werden.

Wir wenden zunächst die Gl. (17) für $r=1, 2, \ldots. n-1$ an und lösen die so entstehenden $n-1$ Gleichungen nach $z_{r,0}$ mit den Randwerten $z_{0,0}=z_{n,0}=0$ auf. Dann erhalten wir die Lösung in der Form

$$\left.\begin{aligned} z_{1,0} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)Z_{i,0},\\ z_{n,0} &= \frac{r}{n}\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)Z_{i,0}-\sum_{i=1}^{r-1}(r-i)Z_{i,0}\\ &= \frac{(n-r)}{n}\sum_{i=1}^{n-1} i\,Z_{i,0}-\sum_{i=r}^{n-1}(i-r)Z_{i,0},\\ z_{n-1,0} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} iZ_{i,0},\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (103)$$

wobei

$$Z_{r,0}=+\frac{l}{6}[\mu_{r+1}M_{r+1}+2(\mu_{r+1}+\mu_r)M_r+\mu_rM_{r-1}]+U_{r,0}\,l \ldots\ldots (104)$$

Da wir gemäss (71) und (71a)

$$Z_{r,0}=Z_r^*+Z_r^{**} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (104a)$$

setzen können, wenn wir dabei

$$Z_r^*=+\frac{l}{6}[\mu_{r+1}M_{r+1}^*+2(\mu_{r+1}^*+\mu_r)M_r^*+\mu_rM_{r-1}^*]+U_{r\,0}\,l,$$

$$\left.\begin{aligned} Z_r^{**} = +\frac{l}{6n}\Big[&\{(3n-3r-1)\mu_{r+1}+(3n-3r+1)\mu_r\}M_0 \\ &+\{(3r+1)\mu_{r+1}+(3r-1)\mu_r\}M_n\Big] \end{aligned}\right\}\ldots\ldots(104\text{b})$$

setzen, so wird

$$z_{r,0}=z_r^{*}+z_r^{**}\ldots\ldots\ldots\ldots(103\text{a})$$

Dabei bedeuten z_r^* bzw. z_r^{**} die Anteile von $z_{r,0}$, die von Z_r^* bzw. von Z_r^{**} herrühren. Wie wir uns leicht überzeugen können, sind die z_r^* die $z_{r,0}$ des einfachen Leiterträgers und bedeuten z_r^{**} die von den Einspannungsmomenten M_0 und M_n bedingten Verminderungen der $z_{r,0}$.

Für die $\bar{z}_r$ gelten dieselben Gleichungen wie beim einfachen Leiterträger d.h.

$$\left.\begin{aligned} \bar{z}_1 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)\bar{Z}_i, \\ \bar{z}_r &= \frac{r}{n}\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)\bar{Z}_i-\sum_{i=1}^{r-1}(r-i)\bar{Z}_i \\ &= \frac{(n-r)}{n}\sum_{i=1}^{r-1}i\bar{Z}_i-\sum_{i=r}^{n-1}(i-r)\bar{Z}_i, \\ \bar{z}_{n-1} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}i\bar{Z}_i, \end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots(105)$$

wobei

$$\bar{Z}_r=+\frac{l}{6}[\mu_{r+1}(\bar{M}^l_{r+1}+2\bar{M}^r_r)+\mu_r(2\bar{M}^l_r+\bar{M}^r_{r-1})]+\bar{U}_r l\ \ldots\ldots\ldots(106)$$

7. Der einseitig eingespannte Leiterträger mit konstantem Querträgerquerschnitt und gleich verlaufenden Hauptträgern bei konstanten Feldweiten.

1) Ermittelung der Biegungsmomente beider Hauptträger und der Auflagerkräfte.

a) M_r und $R_{0,0}$.

Zur Bestimmung der M_r und $R_{0,0}$ dienen die Gl. (19) und die erste Gleichung von (30). Es ist:

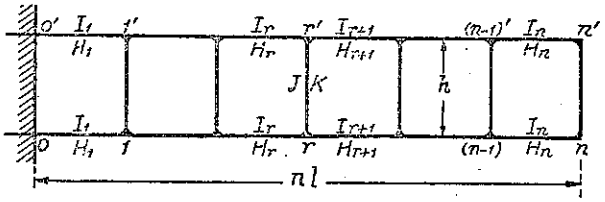


Abb. 10.

$$\left.\begin{aligned} &M_1 - M_0 = (R_{0,0} - P_{0,0})\,l \\ &M_{r+1} - 2M_r + M_{r-1} = -P_{r,0}\,l \\ &\qquad (r=1,\,2,\ldots n). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (107)$$

Die Lösungen dieser Gleichungen sind:

$$M_r = -\sum_{i=r+1}^{n}(i-r)P_{i,0}\,l\,; \quad R_{0,0} = \sum_{i=0}^{n} P_{i,0} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (108)$$

Daraus erkennen wir, dass M_r und $R_{0,0}$ das Biegungsmoment und die Auflagerkraft eines Freibalkens bedeuten, der durch die Belastungen $P_{r,0}$ belastet ist.

b) $\overline{M}_r^l$, $\overline{M}_r^r$ und $\overline{R}_0$.

In gleicher Weise, wie wir bei beiden vorangehenden Fällen getan haben, erhalten wir aus den Gl. (24) und (24a) die folgenden zwei Gleichungen für $r=2,\,3,\ldots n$:

$$\psi(Y_r - Y_{r-1}) = -\frac{\mu_r}{2}(\overline{M}_r^l + \overline{M}_{r-1}^r) - \frac{\mu_r}{l}(\overline{S}_r^l + \overline{S}_{r-1}^r), \quad \ldots\ldots\ldots (109)$$

$$\psi(Y_r + Y_{r-1}) = \frac{2}{l}\Delta\bar{z}_{r-1} - \frac{\mu_r}{6}(\overline{M}_r^l - \overline{M}_{r-1}^r) - \frac{\mu_r}{l}(\overline{S}_r^l - \overline{S}_{r-1}^r) \quad \ldots (110)$$

Die Randgleichung für $r=1$ erhalten wir aus Gl. (24) und der Randbedingung (29), wie beim beiderseits eingespannten Leiterträger,

$$\psi Y_1 = -\frac{\mu_1}{2}(\overline{M}_1^l + \overline{M}_0^r) - \frac{\mu_1}{l}(\overline{S}_1^l + \overline{S}_0^r), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (109a)$$

$$\psi Y_1 = \frac{2}{l}\Delta\bar{z}_0 - \frac{\mu_1}{6}(\overline{M}_1^l - \overline{M}_0^r) - \frac{\mu_1}{l}(\overline{S}_1^l - \overline{S}_0^r) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (110a)$$

Setzen wir nun die Werte von Y_r aus Gl. (21) in die obigen Gleichungen ein, so erhalten wir aus Gl. (109) und (109a)

$$\left.\begin{aligned} &(1+\alpha_1)\overline{M}_1^l - \alpha_1\overline{M}_1^r + \overline{M}_0^r = -\frac{2}{l}(\overline{S}_1^l + \overline{S}_0^r), \\ &(1+\alpha_r)(\overline{M}_r^l + \overline{M}_{r-1}^r) - \alpha_r(\overline{M}_r^r + \overline{M}_{r-1}^l) = -\frac{2}{l}(\overline{S}_r^l + \overline{S}_{r-1}^r) \\ &\qquad (r=2,\,3,\ldots n), \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (111)$$

und aus Gl. (110) und (110a)

$$\left.\begin{aligned} &2\Delta\bar{z}_0 = \frac{l\mu_1}{6}[(1+3\alpha_1)\overline{M}_1^l - 3\alpha_1\overline{M}_1^r - \overline{M}_0^r] + \mu_1(\overline{S}_1^l - \overline{S}_0^r), \\ &2\Delta\bar{z}_{r-1} = \frac{l\mu_r}{6}[(1+3\alpha_r)(\overline{M}_r^l - \overline{M}_{r-1}^r) - 3\alpha_r(\overline{M}_r^r - \overline{M}_{r-1}^l)] + \mu_r(\overline{S}_r^l - \overline{S}_{r-1}^r) \\ &\qquad (r=2,\,3,\ldots n), \end{aligned}\right\} \quad \ldots (112)$$

wobei zu beachten ist, dass $\overline{M}_r^r$ für $r=n$ verschwindet.

Wenden wir die Gl. (23) für $r=1, 2, \ldots n$ an, so erhalten wir mit dem Randwerte $\overline{X}_{n+1}=0$

$$\overline{X}_r = +\sum_{i=r}^{n} \overline{L}_i, \quad (r=1, 2, \ldots n) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (113)$$

Setzen wir diese Werte in die Gl. (26) und ihre Randgleichung (31) ein, so ergeben sich

$$\left.\begin{aligned} 2\Delta\bar{z}_0 &= +\frac{\lambda h}{6}\overline{L}_1 + \phi_1 h\sum_{i=1}^{n}\overline{L}_i + \lambda\overline{T}_1, \\ 2\Delta\bar{z}_{r-1} &= +\frac{\lambda h}{6}(\overline{L}_r - \overline{L}_{r-1}) + \phi_r h\sum_{i=r}^{n}\overline{L}_i + \lambda(\overline{T}_r - \overline{T}_{r-1}), \\ &\qquad (r=2, 3, \ldots n). \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (114)$$

Aus Gl. (20) erhalten wir mit den Randwerten $\overline{M}_{n+1}^l = \overline{M}_n^r = 0$

$$\left.\begin{aligned} \overline{L}_r &= \frac{h}{2l}[\overline{M}_{r+1}^l - \overline{M}_r^r - \overline{M}_r^l + \overline{M}_{r-1}^r] + \frac{h}{2}\overline{P}_r \quad (r=1, 2, \ldots n) \\ \text{und}\quad \overline{L}_r - \overline{L}_{r-1} &= \frac{h}{2l}\Delta^2(\overline{M}_{r-1}^l - \overline{M}_{r-2}^r) + \frac{h}{2}\Delta\overline{P}_{r-1} \quad (r=2, 3, \ldots n), \\ \sum_{i=r}^{n}\overline{L}_i &= -\frac{h}{2l}(\overline{M}_r^l - \overline{M}_{r-1}^r) + \frac{h}{2}\sum_{i=r}^{n}\overline{P}_i \quad (r=1, 2, \ldots n). \end{aligned}\right\} \ldots (115)$$

Setzen wir diese Werte in die Gl. (114) ein und eliminieren wir dann $\Delta\bar{z}_{r-1}$ aus den dadurch entstehenden Gleichungen mit Hilfe der Gl. (112), so erhalten wir nach einigen Umformungen

$$\left.\begin{aligned} &\overline{M}_2^l - (a_1 - 1)\overline{M}_1^l \qquad - b_1\overline{M}_1^l + (a_1 + b_1 - 2)\overline{M}_0^r = A_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\overline{M}_{r+1}^l - a_r\overline{M}_r^l + b_r\overline{M}_{r-1}^l - b_r\overline{M}_r^r + a_r\overline{M}_{r-1}^r - \overline{M}_{r-2}^r = A_r, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\qquad - a_n\overline{M}_n^l + b_n\overline{M}_{n-1}^l \qquad + a_n\overline{M}_{n-1}^r - \overline{M}_{n-2}^r = A_n, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (116)$$

wobei

$$\begin{aligned} a_r &= \frac{2}{\beta_r}(1 + 3\alpha_r + \beta_r + 3\gamma_r) = 2 + c_r + \frac{2}{\beta_r}(1 + 3\alpha_r), \\ b_r &= \frac{2}{\beta_r}\left(\frac{\beta_r}{2} - 3\alpha_r\right) = 1 - 6\frac{\alpha_r}{\beta_r}, \quad c_r = 6\frac{\gamma_r}{\beta_r}, \\ A_1 &= -\overline{P}_1 l - c_1 l\sum_{i=1}^{n}\overline{P}_i + \frac{12}{l\beta_1}(\overline{S}_1^l - \overline{S}_0^r) - \frac{12}{l}\left(\frac{l}{h}\right)^2\overline{T}_1, \end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l} A_r = -(\overline{P}_r - \overline{P}_{r-1})l - c_r l \sum_{i=r}^{n} \overline{P}_i + \frac{12}{l\beta_r}(\overline{S}_r^l - \overline{S}_{r-1}^r) - \frac{12}{l}\left(\frac{l}{h}\right)^2 (\overline{T}_r - \overline{T}_{r-1}), \\ \qquad (r=2,\ 3, \ldots . n) \\ \alpha_r = \frac{\psi}{\mu_r}, \quad \beta_r = \frac{\lambda}{\mu_r}\left(\frac{h}{l}\right)^2, \quad \gamma_r = \frac{\phi_r}{\mu_r}\left(\frac{h}{l}\right)^2. \end{array}\right\} \quad (117)$$

Durch Auflösung der simultanen Gleichungssysteme (111) und (116) können wir $\overline{M}_r^l$ und $\overline{M}_r^r$ bestimmen.

Wie es bei vorangehenden Fällen erwähnt ist, lässt sich aus den Gleichungssysteme (111) und (116) eine einzige Differenzengleichung für $\overline{M}_r^l$

$$\overline{M}_{r+2}^l + k_{r,1}\overline{M}_{r+1}^l + k_{r,0}\overline{M}_r^l + k_{r,1}\overline{M}_{r-1}^l + \overline{M}_{r-2}^l = C_r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (118)$$

herstellen, wobei k die von den Belastungen unabhängigen Koeffizienten und C_r das von den Belastungen abhängige Belastungsglied bedeuten.

Nach der Bestimmung von $\overline{M}_r^l$ können wir $\overline{M}_r^r$ durch Gl. (111) bestimmen, die aber in

$$\left.\begin{array}{l} \overline{M}_1^r - (\delta_1 - 1)\overline{M}_0^r = \delta_1 \overline{M}_1^l + \frac{2}{\alpha_1 l}(\overline{S}_1^l + \overline{S}_0^r), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \overline{M}_r^r - \delta_r \overline{M}_{r-1}^r = \delta_r \overline{M}_r^l - \overline{M}_{r-1}^l + \frac{2}{\alpha_r l}(\overline{S}_r^l + \overline{S}_{r-1}^r), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ -\delta_n \overline{M}_{n-1}^r = \delta_n \overline{M}_n^l - \overline{M}_{n-1}^l + \frac{2}{\alpha_n l}(\overline{S}_n^l + \overline{S}_{n-1}^r) \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (119)$$

übergeht, wobei unter δ_r dieselbe Abkürzung wie bei vorangehenden Fällen zu verstehen ist. Die Lösung dieser Gleichungen lautet:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{M}_0^r = -(1+\alpha_1)\sum_{i=1}^{n}\left[\prod_{\nu=1}^{i}\left(\frac{1}{\delta_\nu}\right) \cdot \left\{\delta_i \overline{M}_i^l - \overline{M}_{i-1}^l + \frac{2}{\alpha_i l}(\overline{S}_i^l + \overline{S}_{i-1}^r)\right\}\right], \\ \overline{M}_r^r = -\sum_{i=r+1}^{n}\left[\prod_{\nu=r+1}^{i}\left(\frac{1}{\delta_\nu}\right) \cdot \left\{\delta_i \overline{M}_i^l - \overline{M}_{i-1}^l + \frac{2}{\alpha_i l}(\overline{S}_i^l + \overline{S}_{i-1}^r)\right\}\right] \\ \qquad (r=1,\ 2, \ldots . n-1). \end{array}\right\} \quad \ldots (120)$$

Aus der zweien Gleichung von (30) erhalten wir:

$$\overline{R}_0 = \overline{P}_0 + \frac{1}{l}(\overline{M}_1^l - \overline{M}_0^r) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (121)$$

Es sei hier bemerkt werden, dass $\overline{R}_0$ nicht gleich mit der Summe der $\overline{P}_r$ ist. Stellen wir die Gl. (20) für $r=0$ bis n auf, so erhalten wir durch die

Addition der linken bzw. der rechten Seiten der so entstehenden Gleichungen und der zweiten Gleichung von (30)

$$-\frac{2l}{h}\sum_{i=1}^{n}\overline{L}_i=\left(\overline{R}_0-\sum_{i=0}^{n}\overline{P}\right)l,$$

aus der sich, mit Beachtung von (113),

$$\overline{R}_0=\sum_{i=0}^{n}\overline{P}_i-\frac{2}{h}\overline{X}_1 \qquad \text{(121a)}$$

ergibt, so dass wir erhalten:

$$R_0=\sum_{i=0}^{n}P_i-\frac{1}{h}\overline{X}_1,\quad R_0'=\sum_{i=0}^{n}P_i'+\frac{1}{h}\overline{X}_1 \qquad \text{(122)}$$

2) **Ermittelung der Biegungsmomente der Querträger.**

Aus der Gl. (22) erhalten wir, mit den Randwerten $X_{n+1,0}=0$,

$$X_{r,0}=+\sum_{i=r}^{n}L_{i,0}\ (r=1,2,\ldots n) \qquad \text{(123)}$$

Setzen wir diese Werte von $X_{r,0}$ in die Gl. (25) und ihre Randgleichung (31) ein, so ergeben sich

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}L_{i,0}=-\frac{\varepsilon_1}{2}L_{i,0}-\frac{\varepsilon_1}{h}T_{1,0},\\&\sum_{i=r}^{n}L_{i,0}=-\frac{\varepsilon_r}{2}(L_{r,0}-L_{r-1,0})-\frac{\varepsilon_r}{h}(T_{r,0}-T_{r-1,0})\\&\qquad\qquad(r=2,\ 3,\ldots n),\end{aligned}\right\}$$

aus denen wir erhalten:

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_2L_{2,0}-(2+\varepsilon_2+\varepsilon_1)L_{1,0}=-\frac{2}{h}[\varepsilon_2(T_{2,0}-T_{1,0})-\varepsilon_1T_{1,0}],\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&\varepsilon_{r+1}L_{r+1,0}-(2+\varepsilon_{r+1}+\varepsilon_r)L_{r,0}+\varepsilon_rL_{r-1,0}=-\frac{2}{h}[\varepsilon_{r+1}(T_{r+1,0}-T_{r,0})-\varepsilon_r(T_{r,0}-T_{r-1,0})],\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&-(2+\varepsilon_n)L_{n,0}+\varepsilon_nL_{n-1,0}=-\frac{2}{h}[-\varepsilon_n(T_{n,0}-T_{n-1,0})].\end{aligned}\right\} \qquad \text{(124)}$$

Wir setzen nun

$$L_{r,0}=-\frac{2}{h}T_{r,0}+L_r^* \qquad \text{(125)}$$

und erhalten damit

$$\varepsilon_{r+1}L^*_{r+1}-(2+\varepsilon_{r+1}+\varepsilon_r)L^*_r+\varepsilon_r L^*_{r-1}=-\frac{4}{h}T_{r,0}, \qquad (r=1,\ 2,\ldots n) \qquad (126)$$

mit den Randbedingungen:

$$L_0^*=0, \quad T_{0,0}=0, \quad \varepsilon_{n+1}=0.$$

Zur Bestimmung der $\overline{L}_r$ steht die erste Gleichung von (115):

$$\overline{L}_r=\frac{h}{2l}[\overline{M}^l_{r+1}-\overline{M}^r_r-\overline{M}^l_r+\overline{M}^r_{r-1}]+\frac{h}{2}\overline{P}_r \qquad (127)$$

zur Verfügung.

Nach der Berechnung von $L_{r,0}$ und $\overline{L}_r$ durch die Gl. (125), (126) und (127) können wir die eigentlichen Endmomente der Querträger durch

$$L_r=\frac{1}{2}(L_{r,0}+\overline{L}_r), \quad L_r'=\frac{1}{2}(L_{r,0}-\overline{L}_r)$$

bestimmen.

3) Ermittelung der Torsionsmomente.

a) Die Torsionsmomente in den Hauptträgern.

Es ist nun nach (15)

$$X_r=\frac{1}{2}(X_{r,0}+\overline{X}_r), \qquad X_r'=\frac{1}{2}(X_{r,0}-\overline{X}_r).$$

Nach der Berechnung von $L_{r,0}$ bzw. $\overline{L}_r$ werden $X_{r,0}$ und $\overline{X}_r$ durch die Gl. (123) bzw. (113) bestimmt werden.

b) Die Torsionsmomente in den Querträgern.

Für Y_r steht die Gl. (21):

$$Y_r=\frac{1}{2}(\overline{M}^l_r-\overline{M}^r_r)$$

zur Verfügung.

4) Ermittelung der Verschiebungen.

Aus der ersten Gleichung von (29) und der Gl. (17) ergeben sich

$$\left.\begin{aligned}&z_{1,0}=Z_{0,0},\\&z_{r+1,0}-2z_{r,0}+z_{r-1,0}=Z_{r,0}, \quad (r=1,2,\ldots n-1),\end{aligned}\right\} \qquad (128)$$

wenn wir dabei

$$\left.\begin{aligned} Z_{0,0} &= -\frac{l\mu_1}{6}(2M_0+M_1)-\mu_1 S_{0,0}^{r}, \\ Z_{r,0} &= -\frac{l}{6}[\mu_{r+1}M_{r+1}+2(\mu_{r+1}+\mu_r)M_r+\mu_r M_{r-1}]-U_{r,0}l \end{aligned}\right\}\quad\ldots(129)$$

setzen. Mit der Randbedingung $z_{0,0}=0$ erhalten wir

$$z_{r,0}=+\sum_{i=0}^{r-1}(r-i)Z_{i,0}\quad\ldots\ldots(130)$$

Setzen wir die Werte von M_r aus (108) in (129) ein, so ergeben sich

$$\left.\begin{aligned} Z_{0,0} &= +\frac{l^2\mu_1}{6}\cdot\sum_{i=1}^{n}(3i-1)P_{i,0}-\mu_1 S_{0,0}^{r}, \\ Z_{r,0} &= +\frac{l^2}{6}\left[3(\mu_r+\mu_{r+1})\sum_{i=r+1}^{n}(i-r)P_{i,0}+(\mu_r-\mu_{r+1})\sum_{i=r+1}^{n}P_{i,0}+\mu_r P_{r,0}\right]-U_{r,0}l. \end{aligned}\right\}(129a)$$

In gleicher Weise erhalten wir aus der zweiten Gleichung von (29) und der Gl. (18), mit dem Randwerte $\bar{z}_0=0$,

$$\bar{z}_r=+\sum_{i=0}^{r-1}(r-i)\bar{Z}_i,\quad\ldots\ldots(131)$$

wobei zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} \bar{Z}_0 &= -\frac{l\mu_1}{6}(2\overline{M}_0^r+\overline{M}_1^l)-\mu_1\overline{S}_0^r, \\ \bar{Z}_r &= -\frac{l}{6}[\mu_{r+1}(\overline{M}_{r+1}^l+2\overline{M}_r^r)+\mu_r(2\overline{M}_r^l+\overline{M}_{r-1}^r)]-\overline{U}_r l \end{aligned}\right\}\quad\ldots(132)$$

gesetzt sind.

IV. ABSCHNITT.
DER LEITERTRÄGER MIT KONSTANTEN HAUPTTRÄGER- UND QUERTRÄGERQUERSCHNITT BEI KONSTANTEN FELDWEITEN.

Im folgenden wird der Leiterträger untersucht werden, die Querschnitte dessen beiden Hauptträger bzw. dessen Querträger durchaus konstant sind, und der in n gleichlangen Feldern geteilt ist. Es ist nun:

$$I=I_r=I_r',\qquad H=H_r=H_r',\qquad J=J_r,\qquad K=K_r,$$

$$\mu=\mu_r=\mu_r'=\frac{l}{EI},\qquad \phi=\phi_r=\phi_r'=\frac{l}{GH},\qquad \lambda=\lambda_r=\frac{h}{EJ},\qquad \psi=\psi_r=\frac{h}{GK},$$

$$\alpha=\alpha_r=\alpha_r'=\frac{hEI}{lGK},\qquad \beta=\beta_r=\frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{h}{l}\right)^2=\frac{I}{J}\left(\frac{h}{l}\right)^3,\qquad \gamma=\gamma_r=\frac{\phi}{\mu}\left(\frac{h}{l}\right)^2=\frac{EI}{GH}\left(\frac{h}{l}\right)^2,$$

$$\delta=\delta_r=1+\frac{1}{\alpha}, \qquad \varepsilon=\varepsilon_r=\frac{\lambda}{\phi}=\frac{\beta}{\gamma}=\frac{hGH}{lEJ}.$$

1. Der einfache Leiterträger.

Zuerst betrachten wir einen einfachen Leiterträger, der in **Abb. 11** dergestellt ist.

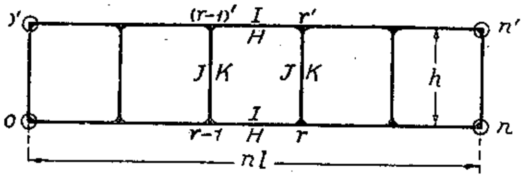


Abb. 11.

1) Ermittelung der Biegungsmomente beider Hauptträger und der Auflagerkräfte.

a) M_r, $R_{0,0}$ und $R_{n,0}$.

Aus Gl. (III, 32) und (III, 33) erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} M_r&=\frac{l}{n}\left[(n-r)\sum_{i=0}^{r-1} iP_{i,0}+r\sum_{i=r+1}^{n}(n-i)P_{i,0}+r(n-r)P_{r,0}\right],\\ R_{0,0}&=\frac{l}{n}\sum_{i=0}^{n}(n-i)P_{i,0}, \quad R_{n,0}=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} iP_{i,0}.\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots(1)$$

(i) Eine Einzellast P am Knoten m oder am m-ten Querträger (**Abb. 12**).

$$\left.\begin{aligned} M_r&=\frac{r(n-m)}{n}Pl \quad \text{für } r\leqq m,\\ &=\frac{m(n-r)}{n}Pl \quad \text{für } r\geqq m,\\ R_{0,0}&=\frac{n-m}{n}P, \quad R_{n,0}=\frac{m}{n}P.\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1a)$$

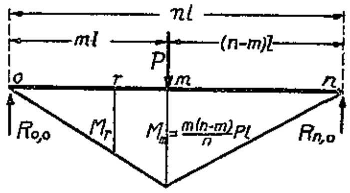


Abb. 12.

(ii) Eine Einzellast P an beliebiger Stelle eines Hauptträgers (**Abb. 13**).

$$\left.\begin{aligned} M_r&=\frac{r}{n}(n-m+1-\xi)\,Pl \quad \text{für } r\leqq m-1,\\ &=\frac{n-r}{n}(m-1+\xi)\,Pl \quad \text{für } r\geqq m,\\ R_{0,0}&=\frac{1}{n}(n-m+1-\xi)\,P,\\ R_{n,0}&=\frac{1}{n}(m-1+\xi)\,P.\end{aligned}\right\} \quad \ldots(1b)$$

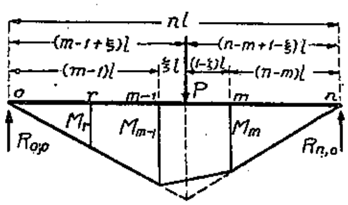


Abb. 13.

b) $\overline{M}_r^l$, $\overline{M}_r^r$, $\overline{R}_0$ und $\overline{R}_n$.

Durch das im vorigen Abschnitt erwähnte Verfahren, erhalten wir aus Gl. (III, 36) und (III, 43) oder aus (III, 36) und (III, 43a):

$$\left.\begin{array}{l}
\overline{M}_3 - k_{1,1}\overline{M}_2^l + k_{1,0}\overline{M}_1^l = B_1 + C_1 = B_1' + C_1', \\
\overline{M}_4^l - k_1 \overline{M}_3^l + k_0 \overline{M}_2^l - k_1 \overline{M}_1^l = B + C_2 = B' + C_2', \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\overline{M}_{r+2}^l - k_1 \overline{M}_{r+1}^l + k_0 \overline{M}_r^l - k_1 \overline{M}_{r-1}^l + \overline{M}_{r-2}^l = B + C_r = B' + C_r', \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
-k_1 \overline{M}_n^l + k_0 \overline{M}_{n-1}^l - k_1 \overline{M}_{n-2}^l + \overline{M}_{n-3}^l = B_{n-1} + C_{n-1} = B'_{n-1} + C'_{n-1}, \\
k_{n,0}\overline{M}_n^l - k_{n,1}\overline{M}_{n-1}^l + \overline{M}_{n-2}^l = B_n + C_n = B_n' + C_n'.
\end{array}\right\} \ldots (2)$$

Die Koeffizienten sind durch

$$\left.\begin{array}{lll}
k_0 = 2(a\delta + b), & k_{1,0} = k_0 - \dfrac{a+b\delta}{a-b\delta}, & k_{n,0} = k_0 - (2b+1), \\
k_1 = a + b\delta + \delta, & k_{1,1} = k_1 - \dfrac{1}{a-b\delta}, & k_{n,1} = k_1 - \dfrac{1}{\delta}
\end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (3)$$

zu berechnen, wobei nach (III, 44)

$$a = \frac{2}{\beta}(1 + 3\alpha + \beta + 3\gamma), \quad b = 1 - 6\frac{\alpha}{\beta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Die Belastungsglieder $B+C$ ergeben sich aus Gl. (III, 36) und (III, 43) sowohl wie sich $B'+C'$ aus Gl. (III, 36) und (III, 43a) ergeben. Sie sind:

$$\left.\begin{array}{ll}
B_1 = +\left[(1+c)\left(\delta - \dfrac{1}{a-b\delta}\right) - c\right]\overline{R}_0 l, & B_1' = -\left[(1+c)\left(\delta - \dfrac{1}{a-b\delta}\right) - c\right]\overline{R}_n l, \\
B = +c(\delta - 1)\overline{R}_0 l = +\dfrac{c}{\alpha}\overline{R}_0 l, & B' = -c(\delta-1)\overline{R}_n l = -\dfrac{c}{\alpha}\overline{R}_n l, \\
B_{n-1} = +\left(\dfrac{c}{\alpha} - 1\right)\overline{R}_0 l, & B'_{n-1} = -\left(\dfrac{c}{\alpha} - 1\right)\overline{R}_n l, \\
B_n = +(1+c)\delta\overline{R}_0 l, & B'_n = -(1+c)\delta\overline{R}_n l,
\end{array}\right\} (5)$$

wobei nach (III, 44) $c = 6\dfrac{\gamma}{\beta}$ ist;

$$\left.\begin{array}{l}
\text{und } C_1 = A_2 - \left(\delta - \dfrac{1}{a-b\delta}\right)A_1 + \dfrac{2}{\alpha l}\left[b(\overline{S}_2^l + \overline{S}_1^r) - \left(a - \dfrac{b}{a-b\delta}\right)(\overline{S}_1^l + \overline{S}_0^r)\right], \\
C_r = A_{r+1} - \delta A_r + \dfrac{2}{\alpha l}\left[b(\overline{S}_{r+1}^l + \overline{S}_r^r) - a(\overline{S}_r^l + \overline{S}_{r-1}^r) + (\overline{S}_{r-1}^l + \overline{S}_{r-2}^r)\right], \\
C_n = -\delta A_n - \dfrac{2}{\alpha l}\left[\left(a - \dfrac{1}{\delta}\right)(\overline{S}_n^l + \overline{S}_{n-1}^r) - (\overline{S}_{n-1}^l + \overline{S}_{n-2}^r)\right],
\end{array}\right\} (6)$$

wobei nach (III, 44)

$$\left.\begin{aligned}
A_r &= +cl\sum_{i=0}^{r-1}\overline{P}_i-(\overline{P}_r-\overline{P}_{r-1})l+\frac{12}{l\beta}(\overline{S}^l_r-\overline{S}^r_{r-1})-\frac{12}{l}\left(\frac{l}{h}\right)^2(\overline{T}_r-\overline{T}_{r-1}),\\
&\qquad (r=1,\ 2,\ \ldots\ldots n-1),\\
A_n &= (1+c)l\sum_{i=0}^{n-1}\overline{P}_i+\overline{P}_{n-1}l+\frac{12}{l\beta}(\overline{S}^l_n-\overline{S}^r_{n-1})-\frac{12}{l}\left(\frac{1}{h}\right)^2(\overline{T}_n-\overline{T}_{n-1})
\end{aligned}\right\}\ldots(7)$$

gesetzt sind. In diesen Ausdrücken (6) für C_r ersetzen wir A_r durch A_r':

$$\left.\begin{aligned}
A_1' &= -(1+c)l\sum_{i=1}^{n}\overline{P}_i-\overline{P}_1l+\frac{12}{l\beta}(\overline{S}^l_1-\overline{S}^r_0)-\frac{12}{l}\left(\frac{l}{h}\right)^2(\overline{T}_1-\overline{T}_0),\\
A_r' &= -cl\sum_{i=r}^{n}\overline{P}_i-(\overline{P}_r-\overline{P}_{r-1})l+\frac{12}{l\beta}(\overline{S}^l_r-\overline{S}^r_{r-1})-\frac{12}{l}\left(\frac{l}{h}\right)^2(\overline{T}_r-\overline{T}_{r-1}),\\
&\qquad (r=2,\ 3,\ \ldots n),
\end{aligned}\right\}\ldots(7a)$$

so ergeben sich damit die Ausdrücke für C_r'.

Aus (6), (7) und (7a) können wir

$$C_r=C_{r,0}+C_{r,1}+C_{r,2};\qquad C_r'=C_{r,0}'+C_{r,1}+C_{r,2}\ \ldots\ldots\ldots\ldots(8)$$

setzen, wenn wir dabei setzen:

$$\left.\begin{aligned}
C_{1,0} &= -\left[\overline{P}_2-\left(1+c+\delta-\frac{1}{a-b\delta}\right)\overline{P}_1+\left(\delta+\frac{c}{\alpha}-\frac{1+c}{a-b\delta}\right)\overline{P}_0\right]l,\\
C_{r,0} &= -\left[\overline{P}_{r+1}-(1+c+\delta)\overline{P}_r+\delta\overline{P}_{r-1}+\frac{c}{\alpha}\sum_{i=0}^{r-1}\overline{P}_i\right]l,\quad (r=2,\ldots\ n-2),\\
C_{n-1,0} &= -\left[-\left(1+c+\delta+\frac{c}{\alpha}\right)\overline{P}_{n-1}+\delta\overline{P}_{n-2}+\left(\frac{c}{\alpha}-1\right)\sum_{i=0}^{n-1}\overline{P}_i\right]l,\\
C_{n,0} &= -\delta\left[\overline{P}_{n-1}+(1+c)\sum_{i=0}^{n-1}\overline{P}_i\right]l;
\end{aligned}\right\}\ldots(9)$$

$$\left.\begin{aligned}
C_{1,0}' &= -\left[\overline{P}_2-\left(1+c+\delta-\frac{1}{a-b\delta}\right)\overline{P}_1-\left(\delta+\frac{c}{\alpha}-\frac{1+c}{a-b\delta}\right)\sum_{i=1}^{n}\overline{P}_i\right]l,\\
C_{r,0}' &= -\left[\overline{P}_{r+1}-(1+c+\delta)\overline{P}_r+\delta\overline{P}_{r-1}-\frac{c}{\alpha}\sum_{i=r}^{n}\overline{P}_i\right]l,\quad (r=2,\ \ldots n-1),\\
C_{n,0}' &= +\delta[(1+c)\overline{P}_n-\overline{P}_{n-1}]l;
\end{aligned}\right\}\ldots(9a)$$

$$\begin{aligned}
C_{1,1} &= \frac{2}{\alpha\beta l}\Bigg[(6\alpha+\beta b)\overline{S}^l_2-(6\alpha-\beta b)\overline{S}^r_1-\left\{6\alpha\delta+\beta a-\frac{6\alpha+\beta b}{a-b\delta}\right\}\overline{S}^l_1\\
&\qquad\qquad +\left\{6\alpha\delta-\beta a-\frac{6\alpha-\beta b}{a-b\delta}\right\}\overline{S}^r_0\Bigg]
\end{aligned}$$

$$
\left.\begin{aligned}
&=\frac{2}{\alpha l}\Big[\overline{S}_2^l+(2b-1)\overline{S}_1^r-\Big(a+\frac{6\alpha\delta}{\beta}-\frac{1}{a-b\delta}\Big)\overline{S}_1^l\\
&\qquad\qquad -\Big(a-\frac{6\alpha\delta}{\beta}-\frac{2b-1}{a-b\delta}\Big)\overline{S}_0^r\Big],\\
C_{r,1}&=\frac{2}{\alpha\beta l}\Big[(6\alpha+\beta b)\overline{S}_{r+1}^l-(6\alpha-\beta b)\overline{S}_r^r-(6\alpha\delta+\beta a)\overline{S}_r^l\\
&\qquad\qquad +(6\alpha\delta-\beta a)\overline{S}_{r-1}^r+\beta(\overline{S}_{r-1}^l+\overline{S}_{r-2}^r)\Big]\\
&=\frac{2}{\alpha l}\Big[\overline{S}_{r+1}^l+(2b-1)\overline{S}_r^r-\Big(a+\frac{6\alpha\delta}{\beta}\Big)\overline{S}_r^l-\Big(a-\frac{6\alpha\delta}{\beta}\Big)\overline{S}_{r-1}^r\\
&\qquad\qquad +\overline{S}_{r-1}^l+\overline{S}_{r-2}^r\Big],\quad (r=2,\ldots n-1),\\
C_{n,1}&=\frac{2}{\alpha\beta l}\Big[-\Big(6\alpha\delta+\beta a-\frac{\beta}{\delta}\Big)\overline{S}_n^l+\Big(6\alpha\delta-\beta a+\frac{\beta}{\delta}\Big)\overline{S}_{n-1}^r+\beta(\overline{S}_{n-1}^l+\overline{S}_{n-2}^r)\Big]\\
&=-\frac{2}{\alpha l}\Big[\Big(a+\frac{6\alpha\delta}{\beta}-\frac{1}{\delta}\Big)\overline{S}_n^l+\Big(a-\frac{6\alpha\delta}{\beta}-\frac{1}{\delta}\Big)\overline{S}_{n-1}^r-(\overline{S}_{n-1}^l+\overline{S}_{n-2}^r)\Big];
\end{aligned}\right\}\ \text{(10)}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
C_{1,2}&=-\frac{12}{l}\Big(\frac{l}{h}\Big)^2\Big[\overline{T}_2-\Big(1+\delta-\frac{1}{a-b\delta}\Big)\overline{T}_1+\Big(\delta-\frac{1}{a-b\delta}\Big)\overline{T}_0\Big],\\
C_{r,2}&=-\frac{12}{l}\Big(\frac{l}{h}\Big)^2\Big[\overline{T}_{r+1}-(1+\delta)\overline{T}_r+\delta\overline{T}_{r-1}\Big],\quad (r=2,\ldots n-1),\\
C_{n,2}&=+\frac{12\delta}{l}\Big(\frac{l}{h}\Big)^2(\overline{T}_n-\overline{T}_{n-1}).
\end{aligned}\right\}\ \ldots\text{(11)}
$$

Daraus erkennen wir leicht, dass

bei Knotenlasten:	$C_r=C_{r,0},\quad C'_r=C'_{r,0}$;
bei der Belastung der Hauptträger:	$C_r=C_{r,0}+C_{r,1}$,
	$C'_r=C'_{r,0}+C_{r,1}$;
bei der Belastung der Querträger:	$C_r=C_{r,0}+C_{r,2}$,
	$C'_r=C'_{r,0}+C_{r,2}$.

Durch Auflösung der Gleichungen (2) nach $\overline{M}_r^l$ werden wir nun die Lösung in der Form:

$$\overline{M}_r^l=f_r\overline{R}_0 l+F_r \quad\text{oder}\quad \overline{M}_r^l=-f_r\overline{R}_n l+F_r' \quad\ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

erhalten. Aus der Gl. (III, 52) erhalten wir dann

$$\overline{M}_r^r=-\delta^r\sum_{i=r+1}^{n}\frac{1}{\delta^i}\Big[\delta\overline{M}_i^l-\overline{M}_{i-1}^l+\frac{2}{\alpha l}(\overline{S}_i^l+\overline{S}_{i-1}^r)\Big],\quad\ldots\ldots\ldots (13)$$

aus der sich

$$\overline{M}_r^r=g_r\overline{R}_0 l+G_r \quad\text{oder}\quad \overline{M}_r^r=-g_r\overline{R}_n l+G_r' \quad\ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

ergibt.

Hierauf können wir $\overline{R}_0$ und $\overline{R}_n$ durch die Gl. (III, 48) oder (III, 48a):

$$\left.\begin{aligned}\overline{R}_0 &= -\frac{3\alpha(G_0-F_n)+\sum_{i=1}^{n}\left[(1+6\alpha)(F_i-G_{i-1})+\frac{6}{l}(\overline{S}_i^l-\overline{S}_{i-1}^r)\right]}{\left[3\alpha(g_0-f_n)+(1+6\alpha)\sum_{i=1}^{n}(f_i-g_{i-1})\right]l},\\ \overline{R}_n &= +\frac{3\alpha(G_0'-F_n')+\sum_{i=1}^{n}\left[(1+6\alpha)(F_i'-G_{i-1}')+\frac{6}{l}(\overline{S}_i^l-\overline{S}_{i-1}^r)\right]}{\left[3\alpha(g_0-f_n)+(1+6\alpha)\sum_{i=1}^{n}(f_i-g_{i-1})\right]l}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots(15)$$

bestimmen. Nach der Festsetzung von $\overline{R}_0$ oder von $\overline{R}_n$ können $\overline{M}_r^l$ und $\overline{M}_r^r$ mittels Gleichungen (12) und (14) bestimmt werden.

2) Die Lösung der vollständigen, symmetrischen Differenzengleichung vierter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Wenn die Felderzahl n gering ist, können wir die Gleichungen (2) unmittelbar als simultane Gleichungen nach n Unbekannten auflösen. Wir fassen aber hier diese Gleichungsgruppe als vollständige, symmetrische Differenzengleichung vierter Ordnung mit konstanten Koeffizienten auf und versuchen die allgemeine Lösung zu finden.

Wir betrachten zuerst den Fall, wo alle Belastungsglieder in Gl. (2) überall verschwinden; oder wir betrachten die homogene Gleichung

$$\overline{M}_{r+2}^l-k_1\overline{M}_{r+1}^l+k_0\overline{M}_r^l-k_1\overline{M}_{r-1}^l+\overline{M}_{r-2}^l=0\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(16)$$

Die allgemeine Lösung der vorgelegten Differenzengleichung ist[1]

$$\left.\begin{aligned}&\overline{M}_r^l=\eta_r=K_1\,e^{ur}+K_2\,e^{-ur}+K_3\,e^{vr}+K_4\,e^{-vr},\\ \text{oder}\quad&\overline{M}_r^l=\eta_r=K_1\cosh ur+K_2\sinh ur+K_3\cosh vr+K_4\sinh vr\,;\end{aligned}\right\}\ldots(17)$$

$$\text{oder}\quad \overline{M}_r^l=\eta_r=K_1w_1^r+K_2w_2^r+K_3w_3^r+K_4w_4^r,\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(18)$$

wobei u, v und w_1, w_2, w_3, w_4 die Wurzeln der charakteristischen Gleichungen:

$$\left(\cosh u+\frac{1}{4}\left[k_1+\sqrt{k_1^2-4k_0+8}\right]\right)\left(\cosh v+\frac{1}{4}\left[k_1-\sqrt{k_1^2-4k_0+8}\right]\right)=0\quad\ldots(17a)$$

bzw.

$$w^4-k_1w^3+k_0w^2-k_1w+1=0\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(18a)$$

und K_1, K_2, K_3, K_4 vier willkürliche Konstanten bedeuten.

Wir betrachten nun die vollständige Differenzengleichung

---

[1] Siehe: Bleich-Melan, Die gewöhnlichen und partiellen Differenzengleichungen der Baustatik. 1927.

$$\overline{M}_{r+2}^l - k_1\overline{M}_{r+1}^l + k_0\overline{M}_r^l - k_1\overline{M}_{r-1}^l + \overline{M}_{r-2}^l = B \text{ oder } B' \quad \ldots\ldots\ldots (19)$$

Die Partikularlösung dieser Gleichung ist

$$\overline{M}_r^l = \nu B \quad \text{bzw.} \quad \overline{M}_r^l = \nu B', \quad \ldots\ldots\ldots (20)$$

wobei

$$\nu = \frac{1}{k_0 - 2k_1 + 2} \quad \ldots\ldots\ldots (21)$$

gesetzt ist, und damit lautet die allgemeine Lösung

$$\overline{M}_r^l = \eta_r + \nu B \quad \text{bzw.} \quad \overline{M}_r^l = \eta_r + \nu B' \quad \ldots\ldots\ldots (22)$$

Zur Ermittelung der vier Konstanten in η_r stehen uns folgende vier Randbedingungsgleichungen zur Verfügung:

$$\left.\begin{aligned} \overline{M}_3^l - k_{1,1}\overline{M}_2^l + k_{1,0}\overline{M}_1^l &= B_1 \text{ oder } B_1', \\ \overline{M}_4^l - k_1\overline{M}_3^l + k_0\overline{M}_2^l - k_1\overline{M}_1^l &= B \quad ,, \quad B', \\ -k_1\overline{M}_n^l + k_0\overline{M}_{n-1}^l - k_1\overline{M}_{n-2}^l + \overline{M}_{n-3}^l &= B \quad ,, \quad B', \\ k_{n,0}\overline{M}_n^l - k_{n,1}\overline{M}_{n-1}^l + \overline{M}_{n-2}^l &= B_n \quad ,, \quad B_n'. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (23)$$

Nach der Bestimmung der willkürlichen Konstanten ergibt sich dann durch Gl. (22), mit Beachtung von (5),

$$\overline{M}_r^l = f_r\overline{R}_0 l \text{ oder } \overline{M}_r^l = -f_r\overline{R}_n l.$$

Wir betrachten schliesslich den Einfluss der Belastungsglieder C_r oder C_r'. Zunächst nehmen wir an, dass die Belastungsglieder C_r oder C_r' in den aufeinanderfolgenden Gleichungen durchweg Null seien ausgenommen die Gleichung für $r=i$,

$$\overline{M}_{i+2}^l - k_1\overline{M}_{i+1}^l + k_0\overline{M}_i^l - k_1\overline{M}_{i-1}^l + \overline{M}_{i-2}^l = C_i \text{ oder } C_i', \ldots\ldots\ldots (24)$$

die wir als Uebergangsgleichung betrachten, welche die zwei Gruppen der Gleichungen vor i und nach i miteinander verknüphen soll. Diese zwei Systeme der Gleichungen fassen wir als homogene Differenzengleichungen mit den Lösungen:

$$r \leqq i: \quad \overline{M}_r^l = \eta_r, \qquad r \geqq i: \quad \overline{M}_r^l = \eta_r'$$

auf, wobei unter η_r bzw. η_r' der Ausdruck für η_r von (17) oder (18) verständen wird und η_r vier Konstanten $K_1, \ldots K_4$, η_r' vier Konstanten $K_1' \ldots K_4'$ enthalten.

Zur Bestimmung der acht Konstanten stehen uns folgende Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} &\eta_3 - k_{1,1}\eta_2 + k_{1,0}\eta_1 = 0, \qquad k_{n,0}\eta_n' - k_{n,1}\eta_{n-1}' + \eta_{n-2}' = 0, \\ &\eta_4 - k_1\eta_3 + k_0\eta_2 - k_1\eta_1 = 0, \quad -k_1\eta_n' + k_0\eta_{n-1}' - k_1\eta_{n-2}' + \eta_{n-3}' = 0, \\ &\eta_{i+2}' - k_1\eta_{i+1}' + k_0\eta_i - k_1\eta_{i-1} + \eta_{i-2} = C_i \text{ oder } C_i', \\ &\eta_{i+3}' - k_1\eta_{i+2}' + k_0\eta_{i+1}' - k_1\eta_i + \eta_{i-1} = 0, \\ &\eta_{i+1}' - k_1\eta_i + k_0\eta_{i-1} - k_1\eta_{i-2} + \eta_{i-3} = 0, \\ &\eta_i = \eta_i' \end{aligned}\right\} \ldots (25)$$

zur Verfügung. Nach der Ermittelung der Konstanten ergibt sich, wie man sich überzeugen kann,

$$\overline{M}_r^l = d_{ri} C_i \text{ oder } \overline{M}_r^l = d_{ri} C_i',$$

wobei d_{ri} die von C_i bzw. von C_i' unabhängigen Koeffizienten bedeuten.

Dann erhalten wir für die Belastungsglieder $C_1, \ldots C_n$ oder $C_1', \ldots C_n'$ durch das Gesetz der Superposition

$$\overline{M}_r^l = \sum_{i=1}^{n} d_{ri} C_i \text{ oder } \overline{M}_r^l = \sum_{i=1}^{n} d_{ri} C_i' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (26)$$

Da C_i bzw. C_i' nur von den äusseren Belastungen abhangen, können wir die obigen Ausdrücke für $\overline{M}_r^l$ in

$$\overline{M}_r^l = F_r \text{ oder } \overline{M}_r^l = F_r'$$

umschreiben und durch Superposition der Teillösungen, welche wir für die Belastungsglieder B_r oder B_r' bzw. für C_r oder C_r' erhalten haben, ergeben sich die eindeutige Lösung für $\overline{M}_r^l$ in der Form von (12).

3) Ermittelung der Biegungsmomente der Querträger.

a) Allgemeiner Fall.

Mit Beachtung von (III, 15) und (III, 59):

$$L_r = \frac{1}{2}(L_r^* + \overline{L}_r) - \frac{1}{h} T_{r,0}\,; \quad L_r' = \frac{1}{2}(L_r^* - \overline{L}_r) - \frac{1}{h} T_{r,0} \ldots\ldots (27)$$

Für L_r^* erhalten wir aus der Gl. (III, 60):

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon L_1^* - (2+\varepsilon) L_0^* = -\dfrac{4}{h} T_{r,0}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varepsilon L_{r+1}^* - 2(1+\varepsilon) L_r^* + \varepsilon L_{r-1}^* = -\dfrac{4}{h} T_{r,0}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -(2+\varepsilon) L_n^* + \varepsilon L_{n-1}^* = -\dfrac{4}{h} T_{n,0}. \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (28)$$

Für $\overline{L}_r$ steht die Gl. (III, 40) zur Verfügung:

$$\overline{L}_r = \frac{h}{2l}[\overline{M}_{r+1}^l - \overline{M}_r^r - \overline{M}_r^l + \overline{M}_{r-1}^r] + \frac{h}{2}(\overline{P}_r - \overline{R}_r) \quad \ldots\ldots\ldots (29)$$

b) Bei Knotenlasten oder bei der Belastung der Hauptträger.

In diesem Falle verschwinden alle $T_{r,0}$, so dass auch L_r^* verschwinden. Es ist dann:

$$L_r = -L_r' = \frac{h}{4l}[\overline{M}^l_{r+1} - \overline{M}^r_r - \overline{M}^l_r + \overline{M}^r_{r-1}] + \frac{h}{4}(\overline{P}_r - \overline{R}_r) \quad \ldots.(30)$$

c) Bei der Belastung der Querträger.

Da $T_{r,0}$ in diesem Falle nicht verschwinden, so sollen L_r^* ermittelt werden, für die die Gleichungen (28) zur Verfügung.

Wir denken uns nun an, dass eine Einzellast P auf den m-ten Querträger im Abstand ηh von dem Knotenpunkt m wirkt, wie es in **Abb. 14** dargestellt ist, so verschwinden alle $T_{r,0}$ mit der Ausnahme von

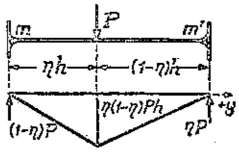


Abb. 14.

$$T_{m,0} = \frac{1}{2}\eta(1-\eta)Ph^2,$$

so dass wir hier mit ein oder zwei Systeme homogener Gleichungen zu tun, die wir als homogene Differenzengleichung zweiter Ordnung auffassen.

Die der Gl. (28) gehörige homogene Differenzengleichung

$$\varepsilon L^*_{r+1} - 2(1+\varepsilon)L^*_r + \varepsilon L^*_{r-1} = 0$$

hat die allgemeine Lösung

$$L_r^* = K_1 e^{ur} + K_2 e^{-ur} \text{ oder } L_r^* = K_1 \cosh ur + K_2 \sinh ur, \quad \ldots.(31)$$

oder

$$L_r^* = K_1 v_1^r + K_2 v_2^r. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(31a)$$

wobei u bzw. v_1, v_2 die Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$\cosh u - \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} = 0$$

bzw.

$$\varepsilon v^2 - 2(1+\varepsilon)v + \varepsilon = 0$$

vorstellen, d.h.

$$u = \cosh^{-1}\left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\right), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(32)$$

$$v_1, v_2 = \frac{1}{\varepsilon}[1+\varepsilon \pm \sqrt{1+2\varepsilon}] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(32a)$$

und K_1 und K_2 zwei willkürliche Konstanten bedeuten. Wir können die allgemeine Lösung in der Form:

$$L_r^* = K_1\varphi_1(r) + K_2\varphi_2(r) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(33)$$

setzen, wenn wir dabei unter $\varphi(r)$ ein Fundamentalsystem der Lösungen der homogenen Gleichung verstehen. Wir bestimmen die Konstanten wie folgt.

(i) $m=0$.

Setzen wir (33) in die Randgleichungen von (28) ein, so erhalten wir zur Bestimmung der zwei Konstanten:

$$K_1[\varepsilon\varphi_1(1)-(2+\varepsilon)\varphi_1(0)]+K_2[\varepsilon\varphi_2(1)-(2+\varepsilon)\varphi_2(0)]=-2\eta(1-\eta)Ph,$$
$$K_1[\varepsilon\varphi_1(n-1)-(2+\varepsilon)\varphi_1(n)]+K_2[\varepsilon\varphi_2(n-1)-(2+\varepsilon)\varphi_2(n)]=0.$$

(ii) $n-1 \geqq m \geqq 1$.

Wir betrachten die Gleichung

$$\varepsilon L^*_{m+1}-2(1+\varepsilon)L^*_m+\varepsilon L^*_{m-1}=-2\eta(1-\eta)Ph,$$

die sich für $r=m$ ergeben wird, als Übergangsbedingung, während wir die Gleichungsgruppen vor bzw. nach m als homogene Differenzengleichungen mit den Lösungen:

$$r \leqq m: \ L^*_r=K_1\varphi_1(r)+K_2\varphi_2(r), \quad r \geqq m: \ L^*_r=K_1'\varphi_1(r)+K_2'\varphi_2(r)$$

auffassen. Zur Bestimmung der vier Konstanten stehen uns

Randbedingung: $K_1[\varepsilon\varphi_1(1)-(2+\varepsilon)\varphi_1(0)]+K_2[\varepsilon\varphi_2(1)-(2+\varepsilon)\varphi_2(0)]=0,$

" $K_1'[\varepsilon\varphi_1(n-1)-(2+\varepsilon)\varphi_1(n)]+K_2'[\varepsilon\varphi_2(n-1)-(2+\varepsilon)\varphi_2(n)]=0,$

Übergangsbedingung:

$$\varepsilon[K_1'\varphi_1(m+1)+K_2'\varphi_2(m+1)]-2(1+\varepsilon)[K_1\varphi_1(m)+K_2\varphi_2(m)]$$
$$+\varepsilon[K_1\varphi_1(m-1)+K_2\varphi_2(m-1)]=-2\eta(1-\eta)Ph,$$

" $K_1\varphi_1(m)+K_2\varphi_2(m)=K_1'\varphi_1(m)+K_2'\varphi_2(m)$

zur Verfügung.

(iii) $m=n$.

Wie bei dem Falle $m=0$ erhalten wir

$$K_1[\varepsilon\varphi_1(1)-(2+\varepsilon)\varphi_1(0)]+K_2[\varepsilon\varphi_2(1)-(2+\varepsilon)\varphi_2(0)]=0,$$
$$K_1[\varepsilon\varphi_1(n-1)-(2+\varepsilon)\varphi_1(n)]+K_2[\varepsilon\varphi_2(n-1)-(2+\varepsilon)\varphi_2(n)]=-2\eta(1-\eta)Ph.$$

Nach der Bestimmung von L^*_r durch das im Obigen erwähnte Verfahren und $\overline{L}_r$ durch Gl. (29), können L_r und L'_r mittels Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} L_r &= \frac{1}{2}(L^*_r+\overline{L}_r), \quad L'_r=\frac{1}{2}(L^*_r-\overline{L}_r), \\ L_m &= \frac{1}{2}(L^*_m+\overline{L}_m)-\frac{\eta}{2}(1-\eta)Ph, \\ L'_m &= \frac{1}{2}(L^*_m-\overline{L}_m)-\frac{\eta}{2}(1-\eta)Ph \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(34)$$

bestimmt werden.

4) Ermittelung der Torsionsmomente.

a) X_r und X_r'.

Es ist nach Gl. (III, 61):

$$\left.\begin{aligned} X_r &= -\sum_{i=0}^{r-1} L_i = +\sum_{i=r}^{n} L_i, \\ X_r' &= -\sum_{i=0}^{r-1} L_i' = +\sum_{i=r}^{n} L_i'. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (35)$$

Bei der Knotenlasten oder bei der Belastung der Hauptträger wird.

$$X_r = -X_r'.$$

b) Y_r.

Es ist nach Gl. (III, 21): $\quad Y_r = \frac{1}{2}(\overline{M}_r^l - \overline{M}_r^r) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (36)$

5) Ermittelung der Verschiebungen.

Es ist $\qquad z_r = \frac{1}{2}(z_{r,0} + \tilde{z}_r), \quad z_r' = \frac{1}{2}(z_{r,0} - \tilde{z}_r),$

und aus den Gl. (III, 63) bis (III, 67) erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} z_{r,0} &= \frac{r}{n}\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)Z_{i,0} - \sum_{i=1}^{r-1}(r-i)Z_{i,0} \\ &= \frac{n-r}{n}\sum_{i=1}^{n-1} iZ_{i,0} - \sum_{i=r}^{n-1}(i-r)Z_{i,0}, \\ z_{1,0} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)Z_{i,0}, \\ z_{n-1,0} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} iZ_{i,0}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (37)$$

wobei

$$\left.\begin{aligned} Z_{r,0} &= +\frac{\mu l}{6}(M_{r+1} + 4M_r + M_{r-1}) + U_{r,0}\,l \\ &= +\mu l\left(M_r - \frac{1}{6}P_{r,0}\,l\right) + U_{r,0}\,l\,; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (38)$$

und

$$\left.\begin{aligned} \tilde{z}_r &= \frac{r}{n}\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)\overline{Z}_i - \sum_{i=1}^{r-1}(r-i)\overline{Z}_i \\ &= \frac{n-r}{n}\sum_{i=1}^{n-1} i\overline{Z}_i - \sum_{i=r}^{n-1}(i-r)\overline{Z}_i, \\ \tilde{z}_1 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)\overline{Z}_i, \\ \tilde{z}_{n-1} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} i\overline{Z}_i, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (39)$$

wobei

$$\bar{Z}_r = + \frac{\mu l}{6} [\bar{M}^l_{r+1} + 2(\bar{M}^r_r + \bar{M}^l_r) + \bar{M}^r_{r-1}] + \bar{U}_r l \quad \ldots\ldots\ldots (39\text{a})$$

2. Der beiderseits eingespannte Leiterträger.

Wir behandeln nun den Fall, wo der Leiterträger an beiden Enden fest eingespannt ist (**Abb. 15**).

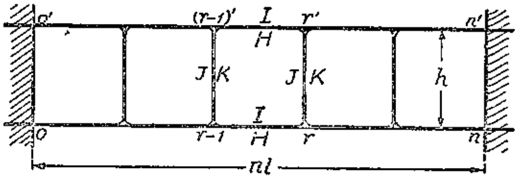


Abb. 15.

1) Ermittelung der Biegungsmomente beider Hauptträger und der Auflagerkräfte.

a) M_r, $R_{0,0}$ und $R_{n,0}$.

Es ist nach Gl. (III, 69a) und (III, 70):

$$\left.\begin{aligned} M_r &= \frac{n-r}{n} M_0 + \frac{r}{n} M_n + M^*_r, \\ R_{0,0} &= \frac{1}{nl}(M_n - M_0) + R^*_0, \\ R_{n,0} &= \frac{1}{nl}(M_0 - M_n) + R^*_n, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (40)$$

wobei

$$\left.\begin{aligned} M^*_r &= \frac{l}{n}\left[(n-r)\sum_{i=0}^{r-1} i P_{i,0} + r \sum_{i=r+1}^{n} (n-i) P_{i,0} + r(n-r) P_{r,0}\right] \\ &= \left[r R^*_0 - \sum_{i=0}^{r-1} (r-i) P_{i,0}\right] l = \left[(n-r) R^*_n - \sum_{i=r+1}^{n} (i-r) P_{i,0}\right] l, \\ R^*_0 &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} (n-i) P_{i,0}, \quad R^*_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} i P_{i,0}. \end{aligned}\right\} \ldots (41)$$

Wie es in **Abb. 16** dargestellt ist, sind M^*_r, R^*_0 und R^*_n das Biegungsmoment bzw. die Auflagerkräfte eines einfachen Balkens mit der Spannweite von nl, der durch $P_{r,0}$ belastet ist.

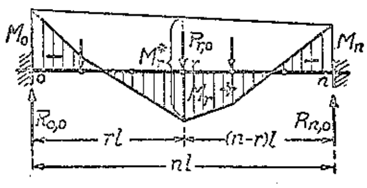


Abb. 16.

Zur Ermittelung von M_0 und M_n stehen uns die Gl. (III, 75) zur Verfügung. Da in diesem Falle μ konstant ist, so erhalten wir aus Gl. (III, 74):

$$m_0 = m_n = +2n\mu, \qquad m_{n,0} = +n\mu,$$

so dass sich aus Gl. (III, 75)

$$\left.\begin{aligned} M_0 &= -\frac{1}{3n}\left[\frac{6}{n\mu l}\sum_{i=1}^{n-1}(2n-3i)Z_i^* + 2M_1^* - M_{n-1}^* + \frac{6}{l}(2S_{0,0}^r - S_{n,0}^l)\right], \\ M_n &= -\frac{1}{3n}\left[\frac{6}{n\mu l}\sum_{i=1}^{n-1}(3i-n)Z_i^* - M_0^* + 2M_{n-1}^* + \frac{6}{l}(2S_{n,0}^l - S_{0,0}^r)\right] \end{aligned}\right\} \quad (42)$$

ergeben, wenn wir darin nach (III, 71a)

$$Z_i^* = \frac{\mu l}{6}(M_{i+1}^* + 4M_i^* + M_{i-1}^*) + U_{i,0}\,l \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (43)$$

setzen. Da gemäss (43)

$$\frac{6}{n\mu l}\sum_{i=1}^{n-1}(2n-3i)Z_i^*$$
$$= \frac{6}{n}\sum_{i=1}^{n-1}(2n-3i)M_i^* - 2M_1^* + M_{n-1}^* + \frac{6}{n\mu}\sum_{i=1}^{n-1}(2n-3i)U_{i,0},$$

$$\frac{6}{n\mu l}\sum_{i=1}^{n-1}(3i-n)Z_i^*$$
$$= \frac{6}{n}\sum_{i=1}^{n-1}(3i-n)M_i^* + M_1^* - 2M_{n-1}^* + \frac{6}{n\mu}\sum_{i=1}^{n-1}(3i-n)U_{i,0},$$

und $\qquad \dfrac{\mu}{l}S_{0,0}^r = U_{0,0}, \qquad \dfrac{\mu}{l}S_{n,0}^l = U_{n,0},$

so erhalten wir aus Gl. (42)

$$\left.\begin{aligned} M_0 &= -\frac{2}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{n-1}(2n-3i)M_i^* + \frac{1}{\mu}\sum_{i=0}^{n}(2n-3i)U_{i,0}\right], \\ M_n &= -\frac{2}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{n-1}(3i-n)M_i^* + \frac{1}{\mu}\sum_{i=0}^{n}(3i-n)U_{i,0}\right]. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (44)$$

Sind die M_0 und M_n gefunden, so können wir M_r, $R_{0,0}$ und $R_{n,0}$ durch Gl. (40) bestimmen.

(i) Eine Einzellast P am Knoten m oder am m-ten Querträger (**Abb. 17**).

$$\left.\begin{aligned} M_r^* &= \frac{r(n-m)}{n}\,Pl \text{ für } r \leqq m, \\ &= \frac{m(n-r)}{n}\,Pl \text{ für } r \geqq m, \\ R_0^* &= \frac{n-m}{n}\,P, \quad R_n^* = \frac{m}{n}\,P; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (41a)$$

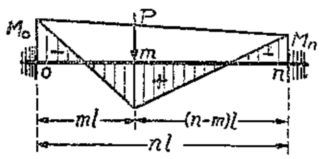


Abb. 17.

$$\left.\begin{aligned} M_0 &= -\frac{m}{n^2}(n-m)^2 Pl, \\ M_n &= -\frac{m^2}{n^2}(n-m)\,Pl\,; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(44a)}$$

$$\left.\begin{aligned} M_r &= M_r^* - \frac{m(n-m)}{n^3}[rm+(n-r)(n-m)]Pl, \\ R_{0,0} &= \frac{(n-m)^2}{n^3}(n+2m)P, \quad R_{n,0} = \frac{m^2}{n^3}(3n-2m)\,P. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \text{(45)}$$

Das grösste M_r tritt auf unter der Last P. Es ist

$$M_m = +2\,\frac{m^2(n-m)^2}{n^3}\,Pl \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(46)}$$

(ii) Eine Einzellast P an beliebiger Stelle eines Hauptträgers (**Abb. 18**).

$$\left.\begin{aligned} M_r^* &= \frac{r}{n}(n-m+1-\xi)\,Pl \text{ für } r \leqq m-1, \\ &= \frac{n-r}{n}(m-1+\xi)\,Pl \text{ für } r \geqq m, \\ R_0^* &= \frac{1}{n}(n-m+1-\xi)\,P, \\ R_n^* &= \frac{1}{n}(m-1+\xi)\,P\,; \end{aligned}\right\} \text{(41b)}$$

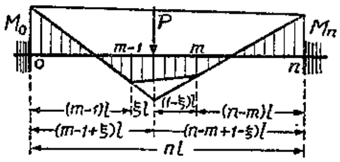


Abb. 18.

$$\left.\begin{aligned} M_0 &= -\frac{1}{n^2}(m-1+\xi)(n-m+1-\xi)^2 Pl, \\ M_n &= -\frac{1}{n^2}(m-1+\xi)^2(n-m+1-\xi)\,Pl\,; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(44b)}$$

$$\left.\begin{aligned} M_r = M_r^* - \frac{1}{n^3}&(m-1+\xi)(n-m+1-\xi)[r(m-1+\xi) \\ &+ (n-r)(n-m+1-\xi)]\,Pl, \\ R_{0,0} = \frac{P}{n^3}&(n-m+1-\xi)^2[n+2(m-1+\xi)], \\ R_{n,0} = \frac{P}{n^3}&(m-1+\xi)^2[3n-2(n-m+1-\xi)]. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \text{(47)}$$

b) $\overline{M}_r^l$, $\overline{M}_r^r$, $\overline{R}_0$ und $\overline{R}_n$.

Aus zwei Systemen der simultanen Gleichungen (III, 78) und (III, 85) oder (III, 78) und (III, 85a) erhalten wir ein System der Gleichungen für $\overline{M}_r^l$:

$$\left.\begin{aligned}
&\overline{M}_3^l - k_{1,1}\overline{M}_2^l + k_{1,0}\overline{M}_1^l &&= B_1 + C_1 = B_1' + C_1',\\
&\overline{M}_4^l - k_1\overline{M}_3^l + k_0\overline{M}_2^l - k_1\overline{M}_1^l &&= B + C_2 = B' + C_2',\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\overline{M}_{r+2}^l - k_1\overline{M}_{r+1}^l + k_0\overline{M}_r^l - k_1\overline{M}_{r-1}^l + \overline{M}_{r-2}^l &&= B + C_r = B' + C_r',\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&-k_1\overline{M}_n^l + k_0\overline{M}_{n-1}^l - k_1\overline{M}_{n-2}^l + \overline{M}_{n-3}^l &&= B + C_{n-1} = B' + C_{n-1}',\\
&k_{n,0}\overline{M}_n^l - k_{n,1}\overline{M}_{n-1}^l + \overline{M}_{n-2}^l &&= B_n + C_n = B_n' + C_n'.
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(48)$$

Die Koeffizienten sind durch

$$\left.\begin{aligned}
&k_0 = 2(a\delta + b), \qquad k_1 = a + b\delta + \delta,\\
&k_{1,0} = k_0 - \delta(a + b\delta) + \frac{(a + b\delta - 1)(a - b\delta - \alpha)}{\alpha[a + (2-\delta)b - 2]},\\
&k_{1,1} = k_1 - k_1', \qquad k_1' = \frac{k_1 + 1 - 3\delta}{a + (2-\delta)b - 2},\\
&k_{n,1} = k_1 - \frac{1+\delta}{\delta}, \quad k_{n,0} = \delta(a + b - 2) + \frac{1}{\alpha}\left(a - \frac{1+\delta}{\delta}\right)
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(49)$$

zu berechnen, wobei nach (III, 86) wie (4):

$$a = \frac{2}{\beta}(1 + 3\alpha + \beta + 3\gamma), \quad b = 1 - 6\frac{\alpha}{\beta} \ldots\ldots\ldots\ldots(50)$$

Die Belastungsglieder $B_r + C_r$ ergeben sich aus Gl. (III, 78) und (III, 85) sowohl wie sich $B_r' + C_r'$ aus Gl. (III. 78) und (III, 85a) ergeben. Sie sind:

$$\left.\begin{aligned}
&B_1 = c\left(\frac{1}{\alpha} - k_1'\right)\left[2\left(\frac{l}{h}\right)\overline{X}_1 + \overline{R}_0 l\right], && B_1' = c\left(\frac{1}{\alpha} - k_1'\right)\left[2\left(\frac{l}{h}\right)\overline{X}_n - \overline{R}_n l\right],\\
&B = \frac{c}{\alpha}\left[2\left(\frac{l}{h}\right)\overline{X}_1 + \overline{R}_0 l\right], && B_1' = \frac{c}{\alpha}\left[2\left(\frac{l}{h}\right)\overline{X}_n - \overline{R}_n l\right],\\
&B_n = c\delta\left[2\left(\frac{l}{h}\right)\overline{X}_1 + \overline{R}_0 l\right], && B_n' = c\delta\left[2\left(\frac{l}{h}\right)\overline{X}_n - \overline{R}_n l\right],
\end{aligned}\right\}\ldots(51)$$

wobei nach (III, 86) $c = 6\dfrac{\gamma}{\beta}$ ist; und

$$\left.\begin{aligned}
&C_1 = A_2 - (\delta - k_1')A_1 + \frac{2}{\alpha l}\left[b(\overline{S}_2^l + \overline{S}_1^r) - (a - bk_1')(\overline{S}_1^l + \overline{S}_0^r)\right],\\
&C_r = A_{r+1} - \delta A_r + \frac{2}{\alpha l}\left[b(\overline{S}_{r+1}^l + \overline{S}_r^r) - a(\overline{S}_r^l + \overline{S}_{r-1}^r) + (\overline{S}_{r-1}^l + \overline{S}_{r-2}^r)\right],\\
&C_n = -\delta A_n - \frac{2}{\alpha l}\left[\left(a - \frac{1+\delta}{\delta}\right)(\overline{S}_n^l + \overline{S}_{n-1}^r) - (\overline{S}_{n-1}^l + \overline{S}_{n-2}^r)\right],
\end{aligned}\right\}\ldots(52)$$

wobei nach (III, 86)

$$\left.\begin{aligned}
A_1 &= -\overline{P}_1 l + c\overline{P}_0 l + \frac{12}{\beta l}(\overline{S}_1^l - \overline{S}_0^r) - \frac{12}{l}\left(\frac{l}{h}\right)^2 \overline{T}_1,\\
A_r &= +cl\sum_{i=0}^{r-1}\overline{P}_i - (\overline{P}_r - \overline{P}_{r-1})l + \frac{12}{\beta l}(\overline{S}_r^l - \overline{S}_{r-1}^r) - \frac{12}{l}\left(\frac{l}{h}\right)^2 (\overline{T}_r - \overline{T}_{r-1}),\\
A_n &= +cl\sum_{i=0}^{n-1}\overline{P}_i + \overline{P}_{n-1} l + \frac{12}{\beta l}(\overline{S}_n^l - \overline{S}_{n-1}^r) + \frac{12}{l}\left(\frac{l}{h}\right)^2 \overline{T}_{n-1}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots(53)$$

gesetzt sind. In diesen Ausdrücken (52) für C_r ersetzen wir A_r durch A_r':

$$\left.\begin{aligned}
A_1' &= -\overline{P}_1 l - cl\sum_{i=1}^{n}\overline{P}_i + \frac{12}{\beta l}(\overline{S}_1^l - \overline{S}_0^r) - \frac{12}{l}\left(\frac{l}{h}\right)^2 \overline{T}_1,\\
A_r' &= -cl\sum_{i=r}^{n}\overline{P}_i - (\overline{P}_r - \overline{P}_{r-1})l + \frac{12}{\beta l}(\overline{S}_r^l - \overline{S}_{r-1}^r) - \frac{12}{l}\left(\frac{l}{h}\right)^2 (\overline{T}_r - \overline{T}_{r-1}),\\
A_n' &= -c\overline{P}_n l + \overline{P}_{n-1} l + \frac{12}{\beta l}(\overline{S}_n^l - \overline{S}_{n-1}^r) + \frac{12}{l}\left(\frac{l}{h}\right)^2 \overline{T}_{n-1},
\end{aligned}\right\} \quad (53a)$$

so ergeben sich damit die Ausdrücke für C_r'.

Aus (52), (53) und (53a) setzen wir, wie Gl. (8),

$$C_r = C_{r,0} + C_{r,1} + C_{r,2}; \qquad C_r' = C_{r,0}' + C_{r,1} + C_{r,2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(54)$$

wobei

$$\left.\begin{aligned}
C_{1,0} &= -\left[\overline{P}_2 - (1+c+\delta-k_1')\overline{P}_1 + c\left(\frac{1}{\alpha} - k_1'\right)\overline{P}_0\right] l,\\
C_{r,0} &= -\left[\overline{P}_{r+1} - (1+c+\delta)\overline{P}_r + \delta\overline{P}_{r-1} + \frac{c}{\alpha}\sum_{i=0}^{r-1}\overline{P}_i\right] l,\\
C_{n,0} &= -\delta\left[\overline{P}_{n-1} + c\sum_{i=0}^{n-1}\overline{P}_i\right] l;
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(55)$$

$$\left.\begin{aligned}
C_{1,0}' &= -\left[\overline{P}_2 - (1+c+\delta-k_1')\overline{P}_1 - c\left(\frac{1}{\alpha} - k_1'\right)\sum_{i=1}^{n}\overline{P}_i\right] l,\\
C_{r,0}' &= -\left[\overline{P}_{r+1} - (1+c+\delta)\overline{P}_r + \delta\overline{P}_{r-1} - \frac{c}{\alpha}\sum_{i=r}^{n}\overline{P}_i\right] l,\\
C_{n,0}' &= -\delta[\overline{P}_{n-1} - c\overline{P}_n]\, l;
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots(55a)$$

$$\begin{aligned}
C_{1,1} &= \frac{2}{\alpha\beta l}\Big[(6\alpha+\beta b)\overline{S}_2^l - (6\alpha-\beta b)\overline{S}_1^r - \left\{6\alpha\delta + \beta a - k_1'(6\alpha+\beta b)\right\}\overline{S}_1^l\\
&\qquad + \left\{6\alpha\delta - \beta a - k_1'(6\alpha-\beta b)\right\}\overline{S}_0^r\Big]\\
&= \frac{2}{\alpha l}\left[\overline{S}_2^l + (2b-1)\overline{S}_1^r - \left(a + \frac{6\alpha\delta}{\beta} - k_1'\right)\overline{S}_1^l - \left\{a - \frac{6\alpha\delta}{\beta} - k_1'(2b-1)\right\}\overline{S}_0^r\right],
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}
C_{r,1}&=\frac{2}{\alpha\beta l}\Big[(6\alpha+\beta b)\overline{S}^l_{r+1}-(6\alpha-\beta b)\overline{S}^r_r-(6\alpha\delta+\beta a)\overline{S}^l_r\\
&\qquad\qquad+(6\alpha\delta-\beta a)\overline{S}^r_{r-1}+\beta(\overline{S}^l_{r-1}+\overline{S}^r_{r-2})\Big]\\
&=\frac{2}{\alpha l}\Big[\overline{S}^l_{r+1}+(2b-1)\overline{S}^r_r-\Big(a+\frac{6\alpha\delta}{\beta}\Big)\overline{S}^l_r\\
&\qquad\qquad-\Big(a-\frac{6\alpha\delta}{\beta}\Big)\overline{S}^r_{r-1}+\overline{S}^l_{r-1}+\overline{S}^r_{r-2}\Big],\\
C_{n,1}&=\frac{2}{\alpha\beta l}\Big[-\Big(6\alpha\delta+\beta a-\frac{1+\delta}{\delta}\beta\Big)\overline{S}^l_n+\Big(6\alpha\delta-\beta a+\frac{1+\delta}{\delta}\beta\Big)\overline{S}^r_{n-1}\\
&\qquad\qquad+\beta(\overline{S}^l_{n-1}+\overline{S}^r_{n-2})\Big]\\
&=\frac{2}{\alpha l}\Big[-\Big(a+\frac{6\alpha\delta}{\beta}-\frac{1+\delta}{\delta}\Big)\overline{S}^l_n-\Big(a-\frac{6\alpha\delta}{\beta}-\frac{1+\delta}{\delta}\Big)\overline{S}^r_{n-1}\\
&\qquad\qquad+\overline{S}^l_{n-1}+\overline{S}^r_{n-2}\Big];
\end{aligned}\right\}\quad\ldots(56)$$

und

$$\left.\begin{aligned}
C_{1,2}&=-\frac{12}{l}\Big(\frac{l}{h}\Big)^2[\overline{T}_2-(1+\delta-k_1')\,\overline{T}_1],\\
C_{r,2}&=-\frac{12}{l}\Big(\frac{l}{h}\Big)^2[\overline{T}_{r+1}-(1+\delta)\,\overline{T}_r+\delta\overline{T}_{r-1}],\\
C_{n,2}&=-\frac{12\delta}{l}\Big(\frac{l}{h}\Big)^2\overline{T}_{n-1}.
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(57)$$

Bei Knotenlasten: $C_r=C_{r,0}$, $C_r'=C_{r,0}'$,
bei der Belastung der Hauptträger: $C_r=C_{r,0}+C_{r,1}$, $C_r'=C_{r,0}'+C_{r,1}$,
bei der Belastung der Querträger: $C_r=C_{r,0}+C_{r,2}$, $C_r'=C_{r,0}'+C_{r,2}$.

Durch Auflösung der Gl. (48) nach $\overline{M}^l_r$ werden wir dann die Lösungen in der Form:

$$\overline{M}^l_r=f_r\Big[2\Big(\frac{l}{h}\Big)\overline{X}_1+\overline{R}_0 l\Big]+F_r \quad\text{oder}\quad \overline{M}^l_r=f_r\Big[2\Big(\frac{l}{h}\Big)\overline{X}_n-\overline{R}_n l\Big]+F_r' \quad\ldots(58)$$

erhalten. Aus Gl. (III, 93) erhalten wir dann für $\overline{M}^r_r$:

$$\left.\begin{aligned}
\overline{M}^r_r&=-\delta^r\sum_{i=r+1}^{n}\frac{1}{\delta^i}\Big[\delta\overline{M}^l_i-\overline{M}^l_{i-1}+\frac{2}{\alpha l}(\overline{S}^l_i+\overline{S}^r_{i-1})\Big]+\frac{1}{\delta^{n-r}}\overline{M}^l_n,\\
\overline{M}^r_r&=-(1+\alpha)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\delta^i}\Big[\delta\overline{M}^l_i-\overline{M}^l_{i-1}+\frac{2}{\alpha l}(\overline{S}^l_i+\overline{S}^r_{i-1})\Big]+\frac{1+\alpha}{\delta^n}\overline{M}^l_n,
\end{aligned}\right\}\quad\ldots(59)$$

aus denen sich

$$\overline{M}^r_r=g_r\Big[2\Big(\frac{l}{h}\Big)\overline{X}_1+\overline{R}_0 l\Big]+G_r \quad\text{oder}\quad \overline{M}^r_r=g_r\Big[2\Big(\frac{l}{h}\Big)\overline{X}_n-\overline{R}_n l\Big]+G_r' \quad(60)$$

ergibt. Aus Gl. (III, 89) oder (III, 89a) ergeben sich

$$\left.\begin{aligned}
2\left(\frac{l}{h}\right)\overline{X}_1+\overline{R}_0 l&=-\frac{6\alpha(G_0-F_n)+\sum\limits_{i=1}^{n}\left[(1+6\alpha)(F_i-G_{i-1})+\frac{6}{l}(\overline{S}_i^l-\overline{S}_{i-1}^r)\right]}{6\alpha(g_0-f_n)+(1+6\alpha)\sum\limits_{i=1}^{n}(f_i-g_{i-1})},\\
2\left(\frac{l}{h}\right)\overline{X}_n-\overline{R}_n l&=-\frac{6\alpha(G_0'-F_n')+\sum\limits_{i=1}^{n}\left[(1+6\alpha)(F_i'-G_{i-1}')+\frac{6}{l}(\overline{S}_i^l-\overline{S}_{i-1}^r)\right]}{6\alpha(g_0-f_n)+(1+6\alpha)\sum\limits_{i=1}^{n}(f_i-g_{i-1})}.
\end{aligned}\right\}\quad(61)$$

Nach der Festsetzung von $2\left(\frac{l}{h}\right)\overline{X}_1+\overline{R}_0 l$ oder $2\left(\frac{l}{h}\right)\overline{X}_n+\overline{R}_n l$ durch obigen Gleichungen (61), können $\overline{M}_r^l$ und $\overline{M}_r^r$ mittels Gl. (58) bzw. (60) bestimmt werden.

Für $\overline{R}_0$ und $\overline{R}_n$ dienen die Gl. (III, 94), die aber in diesem Falle in

$$\overline{R}_0=\overline{P}_0+\frac{1}{l}(\overline{M}_1^l-\overline{M}_0^r),\quad \overline{R}_n=\overline{P}_n+\frac{1}{l}(\overline{M}_{n-1}^r-\overline{M}_n^l)\;\ldots\ldots\ldots\ldots(62)$$

übergehen.

2) **Ermittelung der Biegungsmomente der Querträger.**

Es ist nach Gl. (III, 15) und (III. 59):

$$\left.\begin{aligned}
L_r&=\frac{1}{2}(L_{r,0}+\overline{L}_r),\quad L_r'=\frac{1}{2}(L_{r,0}-\overline{L}_r),\\
L_{r,0}&=L_r-\frac{2}{h}T_{r,0}.
\end{aligned}\right\}\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(63)$$

Für L_r^* erhalten wir aus der Gl. (III, 99):

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon L_{r+1}^*-2(1+\varepsilon)L_r^*+\varepsilon L_{r-1}^*&=-\frac{4}{h}T_{r,0},\\
L_0^*=L_n^*=0,\quad T_{0,0}&=T_{n,0}=0.
\end{aligned}\right\}\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(64)$$

Für $\overline{L}_r$ steht die Gl. (III, 100) zur Verfügung:

$$\overline{L}_r=\frac{h}{2l}(\overline{M}_{r+1}^l-\overline{M}_r^r-\overline{M}_r^l+\overline{M}_{r-1}^r)+\frac{h}{2}\overline{P}_r.\;\ldots\ldots\ldots\ldots(65)$$

a) Bei Knotenlasten oder bei der Belastung der Hauptträger verschwinden alle $T_{r,0}$, so dass auch L_r^* verschwinden. Es ist dann

$$L_r=-L_r'=\frac{1}{2}\overline{L}_r.$$

b) Bei der Belastung der Querträger verschwinden $T_{r,0}$ nicht, und die L_r^* sollen ermittelt werden. Die Auflösung der Gleichungen (64) erfolgt wie beim einfachen Leiterträger und die Gleichungen (34) gelten auch in diesem Falle.

3) Ermittelung der Torsionsmomente.

a) X_r und X_r'. Es ist nach (III, 101):

$$\left.\begin{aligned} X_r &= \frac{1}{2}(X_{r,0}+\overline{X}_r), \quad X_r' = \frac{1}{2}(X_{r,0}-\overline{X}_r), \\ X_{r,0} &= X_{1,0} - \sum_{i=1}^{r-1} L_{i,0} = X_{n,0} + \sum_{i=r}^{n-1} L_{i,0}, \\ \overline{X}_r &= \overline{X}_1 - \sum_{i=1}^{r-1} \overline{L}_i = \overline{X}_n + \sum_{i=r}^{n-1} \overline{L}_i. \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots\dots(66)$$

und aus den Gleichungen (III, 95) bzw. (III, 102) erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} X_{1,0} &= -\varepsilon\left[\frac{1}{2}L_{1,0}+\frac{1}{h}T_{1,0}\right], \quad X_{n,0} = +\varepsilon\left[\frac{1}{2}L_{n-1,0}+\frac{1}{h}T_{n-1,0}\right], \\ \overline{X}_1 &= \frac{h}{2(g_0-f_1)}\left[\overline{P}_0+(f_1-g_0-1)\overline{R}_0+\frac{1}{l}(F_1-G_0)\right], \\ \overline{X}_n &= \frac{h}{2(f_n-g_{n-1})}\left[\overline{P}_n+(f_n-g_{n-1}-1)\overline{R}_n+\frac{1}{l}(G'_{n-1}-F_n')\right]. \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots(67)$$

Bei der Knotenlasten oder bei der Belastung der Hauptträger verschwinden alle $L_{r,0}$, so sind $X_{r,0}$ auch überall Null. Wir erhalten dann

$$X_r = -X_r' = \frac{1}{2}\overline{X}_r.$$

b) Y_r. Die Gl. (36) gilt auch in diesem Falle.

4) Ermittelung der Verschiebungen.

Es ist
$$z_r = \frac{1}{2}(z_{r,0}+\bar{z}_r), \quad z_r' = \frac{1}{2}(z_{r,0}-\bar{z}_r).$$

Für $z_{r,0}$ setzen wir nach (III, 103a)

$$z_{r,0} = z_r^* + z_r^{**}, \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(68)$$

wobei z_r^* die $z_{r,0}$ des einfachen Leiterträgers bedeuten, der die gleichen Abmessungen und Stabquerschnitte haben wie der beiderseits eingespannte Leiterträger, so dass wir z_r^* durch Gl. (37) und (38) bestimmen können.

Für z_r^{**} gilt es nach Gl. (III, 103) und (III, 104a)

$$z_r^{**} = \frac{r}{n}\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)Z_i^{**} - \sum_{i=1}^{r-1}(r-i)Z_i^{**}$$

$$\left.\begin{aligned} &= \frac{n-r}{n}\sum_{i=1}^{n-1} iZ_i^{**} - \sum_{i=r}^{n-1}(i-r)Z_i^{**}, \\ z_1^{**} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)Z_i^{**}, \quad z_{n-1}^{**} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} iZ_i^{**}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (69)$$

wobei
$$Z_r^{**} = +\frac{l\mu}{n}[(n-r)M_0 + rM_n] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (70)$$

Wirkt eine Einzellast P auf den Träger im Knotenpunkt m oder im m-ten Querträger, so erhalten wir durch Einsetzen von Gl. (44a) in (69) und (70)

$$z_r^{**} = -\frac{\mu Pl^2}{6n^3} mr(n-m)(n-r)[(n-m)(2n-r) + m(n+r)] \quad \ldots (69a)$$

für $r = 1, 2, \ldots n-1$.

Für die $\bar{z}_r$ gelten dieselben Gleichungen wie beim einfachen Leiterträger, d.h. die Gl. (39) und (39a).

3. Der einseitig eingespannte Leiterträger.

Wir betrachten schliesslich den in **Abb. 19** dargestellten, einseitig eingespannten Leiterträger.

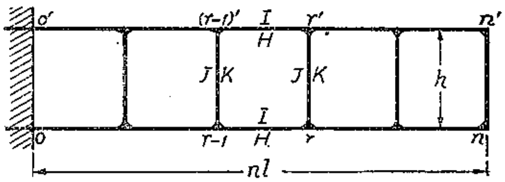


Abb. 19.

1) Ermittelung der Biegungsmomente beider Hauptträger und der Auflagerkräfte.

a) M_r und $R_{0,0}$.

Es ist nach Gl. (III, 108):

$$M_r = -\sum_{i=r+1}^{n}(i-r)P_{i,0}\, l, \qquad R_{0,0} = \sum_{i=0}^{n} P_{i,0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (71)$$

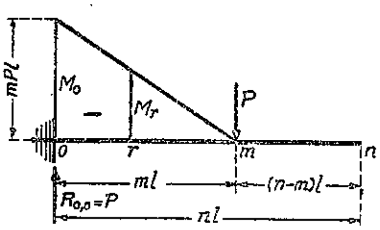


Abb. 20.

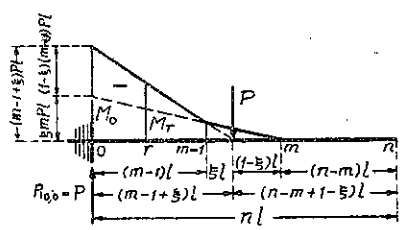


Abb. 21.

(i) Eine Einzellast P am Knoten m oder am m-ten Querträger (**Abb. 20**).

$M_r = -(m-r)\,Pl$ für $r < m$, $M_r = 0$ für $r \geqq m$ ……….(71a)

(ii) Eine Einzellast P an beliebieger Stelle eines Hauptträgers (**Abb. 21**).

$$M_r = -(m-r-1+\xi)pl \text{ für } r<m, \quad M_r=0 \text{ für } r\geqq m \text{ .... (71b)}$$

b) $\overline{M}_r^l$, $\overline{M}_r^r$ und $\overline{R}_0$.

Aus zwei Systemen der simultanen Gleichungen (III, 111) und (III, 116) erhalten wir ein einziges System der Gleichungen für $\overline{M}_r^l$:

$$\left.\begin{array}{l}
\overline{M}_3^l - k_{1,1}\overline{M}_2^l + k_{1,0}\overline{M}_1^l = C_1, \\
\overline{M}_4^l - k_1\overline{M}_3^l + k_0\overline{M}_2^l - k_1\overline{M}_1^l = C_2, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\overline{M}_{r+2}^l - k_1\overline{M}_{r+1}^l + k_0\overline{M}_r^l - k_1\overline{M}_{r-1}^l + \overline{M}_{r-2}^l = C_r, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
-k_1\overline{M}_n^l + k_0\overline{M}_{n-1}^l - k_1\overline{M}_{n-2}^l + \overline{M}_{n-3}^l = C_{n-1}, \\
k_{n,0}\overline{M}_n^l - k_{n,1}\overline{M}_{n-1}^l + \overline{M}_{n-2}^l = C_n.
\end{array}\right\} \text{ .... (72)}$$

Die Koeffizienten sind durch

$$\left.\begin{array}{l}
k_0 = 2(a\delta+b), \qquad k_1 = a+b\delta+\delta, \\
k_{1,0} = k_0 - \delta(a+b\delta) + \dfrac{(a+b\delta-1)(a-b\delta-\alpha)}{\alpha[a+(2-\delta)b-2]}, \\
k_{1,1} = k_1 - k_1', \text{ wobei } k_1' = \dfrac{k_1+1-3\delta}{a+(2-\delta)b-2}, \\
k_{n,0} = k_0-(1+2b), \quad k_{n,1} = k_1 - \dfrac{1}{\delta}
\end{array}\right\} \text{ .... (73)}$$

zu bestimmen, wobei nach (III, 117)

$$a = \frac{2}{\beta}(1+3\alpha+\beta+3\gamma), \quad b = 1-6\frac{\alpha}{\beta} \text{ .... (74)}$$

Die Belastungsglieder C_r in Gl. (72) sind:

$$\left.\begin{array}{l}
C_1 = A_2 - (\delta-k_1')A_1 + \dfrac{2}{\alpha l}[b(\overline{S}_2^l+\overline{S}_1^r) - (a-bk_1')(\overline{S}_1^l+\overline{S}_0^r)], \\
C_r = A_{r+1} - \delta A_r + \dfrac{2}{\alpha l}[b(\overline{S}_{r+1}^l+\overline{S}_r^r) - a(\overline{S}_r^l+\overline{S}_{r-1}^r) + \overline{S}_{r-1}^l+\overline{S}_{r-2}^r], \\
C_n = -\delta A_n - \dfrac{2}{\alpha l}\left[\left(a-\dfrac{1}{\delta}\right)(\overline{S}_n^l+\overline{S}_{n-1}^r) - (\overline{S}_{n-1}^l+\overline{S}_{n-2}^r)\right],
\end{array}\right\} \text{ .... (75)}$$

wobei nach Gl. (III, 117)

$$\left.\begin{array}{l}
A_1 = -cl\displaystyle\sum_{i=1}^n \overline{P}_i - \overline{P}_1 l + \frac{12}{\beta l}(\overline{S}_1^l - \overline{S}_0^r) - \frac{12}{l}\left(\frac{l}{h}\right)^2 \overline{T}_1, \\
A_r = -cl\displaystyle\sum_{i=r}^n \overline{P}_i - (\overline{P}_r - \overline{P}_{r-1})l + \frac{12}{\beta l}(\overline{S}_r^l - \overline{S}_{r-1}^r) - \frac{12}{l}\left(\frac{l}{h}\right)^2(\overline{T}_r - \overline{T}_{r-1}) \\
\qquad\qquad \text{für} \quad r\geqq 2,
\end{array}\right\} \text{ .... (76)}$$

und
$$c=6\frac{\gamma}{\beta}$$
gesetzt sind.

Wie Gl. (8) und (54) können wir

$$C_r=C_{r,0}+C_{r,1}+C_{r,2} \quad \ldots\ldots (77)$$

setzen, wenn wir dabei

$$\left.\begin{aligned}
C_{1,0}&=-\left[\overline{P}_2-(1+c+\delta-k_1')\overline{P}_1-c\left(\frac{1}{\alpha}-k_1'\right)\sum_{i=1}^{n}\overline{P}_i\right]l,\\
C_{r,0}&=-\left[\overline{P}_{r+1}-(1+c+\delta)\overline{P}_r+\delta\overline{P}_{r-1}-\frac{c}{\alpha}\sum_{i=r}^{n}\overline{P}_i\right]l\\
C_{n,0}&=+\delta[(1+c)\overline{P}_n-\overline{P}_{n-1}]l;
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (78)$$

$$\left.\begin{aligned}
C_{1,1}&=\frac{2}{\alpha\beta l}[(6\alpha+\beta b)\overline{S}_2^l-(6\alpha-\beta b)\overline{S}_1^r-\{6\alpha\delta+\beta a-(6\alpha+\beta b)k_1'\}\overline{S}_1^l\\
&\qquad+\{6\alpha\delta-\beta a-(6\alpha-\beta b)k_1'\}\overline{S}_0^r]\\
&=\frac{2}{\alpha l}\left[\overline{S}_2^l+(2b-1)\overline{S}_1^r-\left(a+\frac{6\alpha\delta}{\beta}-k_1'\right)\overline{S}_1^l-\left\{a-\frac{6\alpha\delta}{\beta}-(2b-1)k_1'\right\}\overline{S}_0^r\right],\\
C_{r,1}&=\frac{2}{\alpha\beta l}[(6\alpha+\beta b)\overline{S}_{r+1}^l-(6\alpha-\beta b)\overline{S}_r^r-(6\alpha\delta+\beta a)\overline{S}_r^l+(6\alpha\delta-\beta a)\overline{S}_{r-1}^r\\
&\qquad+\beta(\overline{S}_{r-1}^l+\overline{S}_{r-2}^r)]\\
&=\frac{2}{\alpha l}\left[\overline{S}_{r+1}^l+(2b-1)\overline{S}_r^r-\left(a+\frac{6\alpha\delta}{\beta}\right)\overline{S}_r^l-\left(a-\frac{6\alpha\delta}{\beta}\right)\overline{S}_{r-1}^r+\overline{S}_{r-1}^l+\overline{S}_{r-2}^r\right],\\
C_{n,1}&=-\frac{2}{\alpha\beta l}\left[\left(6\alpha\delta+\beta a-\frac{\beta}{\delta}\right)\overline{S}_n^l-\left(6\alpha\delta-\beta a-\frac{\beta}{\delta}\right)\overline{S}_{n-1}^r-\beta(\overline{S}_{n-1}^l+\overline{S}_{n-2}^r)\right]\\
&=-\frac{2}{\alpha l}\left[\left(a+\frac{6\alpha\delta}{\beta}-\frac{1}{\delta}\right)\overline{S}_n^l+\left(a-\frac{6\alpha\delta}{\beta}-\frac{1}{\delta}\right)\overline{S}_{n-1}^r-(\overline{S}_{n-1}^l+\overline{S}_{n-2}^r)\right];
\end{aligned}\right\}$$
$$\ldots\ldots (79)$$

$$\left.\begin{aligned}
C_{1,2}&=-\frac{12}{l}\left(\frac{l}{h}\right)^2[\overline{T}_2-(1+\delta-k_1')\overline{T}_1],\\
C_{r,2}&=-\frac{12}{l}\left(\frac{l}{h}\right)^2[\overline{T}_{r+1}-(1+\delta)\overline{T}_r+\delta\overline{T}_{r-1}],\\
C_{n,2}&=+\frac{12\delta}{l}\left(\frac{l}{h}\right)^2(\overline{T}_n-\overline{T}_{n-1})
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (80)$$

setzen.

Bei Knotenlasten: $C_r=C_{r,0}$,

bei der Belastung der Hauptträger: $C_r=C_{r,0}+C_{r,1}$,

bei der Belastung der Querträger: $C_r=C_{r,0}+C_{r,2}$.

Nach der Auflösung der Gleichungen (72) nach $\overline{M}_r^l$, können $\overline{M}_r^r$ mittels

Gl. (III, 120) ermittelt werden, die hier in

$$\left.\begin{aligned} \overline{M}_0^r &= -(1+\alpha)\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\delta^i}\left\{\delta\overline{M}_i^l-\overline{M}_{i-1}^l+\frac{2}{\alpha l}(\overline{S}_i^l+\overline{S}_{i-1}^r)\right\}\right], \\ \overline{M}_r^r &= -\delta^r\sum_{i=r+1}^{n}\left[\frac{1}{\delta^i}\left\{\delta\overline{M}_i^l-\overline{M}_{i-1}^l+\frac{2}{\alpha l}(\overline{S}_i^l+\overline{S}_{i-1}^r)\right\}\right] \\ &\qquad\qquad \text{für} \quad r\geqq 1 \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots\dots (81)$$

übergehen. Die $\overline{R}_0$ kann man durch Gl. (III, 121):

$$\overline{R}_0=\overline{P}_0+\frac{1}{l}(\overline{M}_1^l-\overline{M}_0^r) \quad \dots\dots\dots\dots (82)$$

bestimmen.

2) Ermittelung der Biegungsmomente der Querträger und der Torsionsmomente.

a) L_r und L_r'.

Mit Beachtung von (III, 15) und (III, 125):

$$\left.\begin{aligned} L_r=\frac{1}{2}(L_{r,0}+\overline{L}_r), \quad L_r'=\frac{1}{2}(L_{r,0}-\overline{L}_r), \\ L_{r,0}=L_r^*-\frac{2}{h}T_{r,0}. \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots\dots (83)$$

Für L_r^* stehen die Gl. (III, 126):

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon L_2^* \; -2(1+\varepsilon)L_1^* \qquad &= -\frac{4}{h}T_{1,0}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ \varepsilon L_{r+1}^*-2(1+\varepsilon)L_r^*+\varepsilon L_{r-1}^* &= -\frac{4}{h}T_{r,0}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ -(2+\varepsilon)L_n^* \; +\varepsilon L_{n-1}^* &= -\frac{4}{h}T_{n,0} \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots\dots (84)$$

zur Verfügung; für $\overline{L}_r$ gilt die Gl. (III, 127):

$$\overline{L}_r=\frac{h}{2l}[\overline{M}_{r+1}^l-\overline{M}_r^r-\overline{M}_r^l+\overline{M}_{r-1}^r]+\frac{h}{2}\overline{P}_r \quad \dots\dots\dots\dots (85)$$

Bei Knotenlasten oder bei der Belastung der Hauptträger verschwinden alle $T_{r,0}$, so dass auch $L_{r,0}$ und L_r^* verschwinden. Es ist dann:

$$L_r=-L_r'=\frac{1}{2}\overline{L}_r.$$

Bei der Belastung der Querträger können wir die Gleichungen (84) wie beim einfachen Leiterträger auflösen und die Gleichungen (34) gelten auch in diesem Falle.

b) X_r und X_r'.

Aus Gl. (III, 113) und (III, 123) erhalten wir

$$X_r = +\sum_{i=r}^{n} L_i, \quad X_r' = +\sum_{i=r}^{n} L_i' \quad \ldots\ldots (86)$$

c) Y_r. Die Gl. (36) gilt auch in diesem Falle.

3) Ermittelung der Verschiebungen.

Es ist
$$z_r = \frac{1}{2}(z_{r,0} + \bar{z}_r), \quad z_r' = \frac{1}{2}(z_{r,0} - \bar{z}_r).$$

und aus den Gl. (III, 130) bis (III, 132) erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} z_{r,0} &= +\sum_{i=0}^{r-1}(r-i)Z_{i,0}, \\ \text{worin} \quad Z_{0,0} &= +\frac{\mu l^2}{6}\sum_{i=1}^{n}(3i-1)P_{i,0} - \mu S_{0,0}^r, \\ Z_{r,0} &= +\frac{\mu l^2}{6}\left[6\sum_{i=r+1}^{n}(i-r)P_{i,0} + P_{r,0}\right] - U_{r,0}l\,; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (87)$$

und

$$\left.\begin{aligned} \bar{z}_r &= +\sum_{i=0}^{r-1}(r-i)\bar{Z}_i, \\ \text{worin} \quad \bar{Z}_0 &= -\frac{\mu l}{6}(2\bar{M}_0^r + \bar{M}_1^l) - \mu \bar{S}_0^r, \\ \bar{Z}_r &= -\frac{\mu l}{6}[\bar{M}_{r+1}^l + 2(\bar{M}_r^r + \bar{M}_r^l) + \bar{M}_{r-1}^r] - \bar{U}_r l. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (88)$$

4. Zahlenbeispiel zum einfachen Leiterträger.

Es soll hier der in **Abb. 22** gezeichnete fünffeldrige Leiterträger für die Knotenlasten untersucht werden. Die Querschnitte beider Hauptträger und der Querträger seien durchaus gleich und konstant. Setzen wir für den Querschnitt einen Rechteck mit der Breite b und der Höhe $2b$ voraus, so erhalten wir für das Trägheitsmoment und den Drillungswiderstand des Stabes:

$$I = J = \frac{2}{3}b^4, \quad H = K = \frac{1}{3}(2 - 0.63)b^4.$$

Mit der Poissonschen Zahl $m=4$ erhalten wir dann

$$\alpha=\frac{EI}{GH}=\frac{2(m+1)I}{mK}=\frac{2\times5\times2}{4(2-0.63)}=3.6496.$$

Setzen wir nun $\alpha=3.65$, so erhalten wir für die anderen Festwerte

$$\beta=1.0,$$

$$\gamma=\alpha=3.65,$$

$$\delta=1+\frac{1}{\alpha}=1.273\,973,$$

$$\varepsilon=\frac{1}{\gamma}=0.273\,973.$$

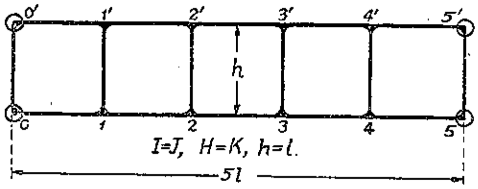


Abb. 22.

1) Die Biegungsmomente der Hauptträger sowie die Auflagerkräfte.

a) M_r, $R_{0,0}$ und $R_{5,0}$.

Zuerst erhalten wir aus Gl. (1a) folgende Werte für M_r, $R_{0,0}$ und $R_{5,0}$.

Tabelle 1. M_r, $R_{0,0}$ und $R_{5,0}$.

P in m:	$m=0$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	
M_1	0	0.8	0.6	0.4	0.2	0	$\times Pl$
M_2	0	0.6	1.2	0.8	0.4	0	„
M_3	0	0.4	0.8	1.2	0.6	0	„
M_4	0	0.2	0.4	0.6	0.8	0	„
$R_{0,0}$	1.0	0.8	0.6	0.4	0.2	0	$\times P$
$R_{5,0}$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	„

b) $\overline{M}_r^l$, $\overline{M}_r^{l'}$, $\overline{R}_0$ und $\overline{R}_5$.

Aus Gl. (3) und (4) erhalten wir:

$$a=\frac{2}{\beta}(1+3\alpha+\beta+3\gamma)=4(1+3\alpha)=+47.8,\quad b=1-6\frac{\alpha}{\beta}=-20.9;$$

$$k_0=2(a\delta+b)=+79.99178,\qquad k_1=a+b\delta+\delta=+22.44795,$$

$$k_{1,0}=k_0-\frac{a+b\delta}{a-b\delta}=+79.70728,\quad k_{1,1}=k_1-\frac{1}{a-b\delta}=+22.34986,$$

$$k_{5,0}=k_0-(1+2b)=+120.79178,\quad k_{5,1}=k_1-\frac{1}{\delta}=+21.66300.$$

Dann erhalten wir aus Gl. (2):

$$\begin{aligned}
&\overline{M}_3^l-22.34986\overline{M}_2^l+79.70728\,\overline{M}_1^l &&=B_1+C_1,\\
&\overline{M}_4^l-22.44795\overline{M}_3^l+79.99178\,\overline{M}_2^l-22.44795\overline{M}_1^l &&=B_2+C_2,\\
&\overline{M}_5^l-22.44795\overline{M}_4^l+79.99178\,\overline{M}_3^l-22.44795\overline{M}_2^l+\overline{M}_1^l&&=B_3+C_3,\\
&\quad-22.44795\overline{M}_5^l+79.99178\,\overline{M}_4^l-22.44795\overline{M}_3^l+\overline{M}_2^l&&=B_4+C_4,\\
&\qquad+120.79178\,\overline{M}_5^l-21.66300\overline{M}_4^l+\overline{M}_3^l&&=B_5+C_5.
\end{aligned}$$

Lösen wir diese Gleichungen nach $\overline{M}_r^l$ auf, so werden wir die Lösungen in der Form:

$$\overline{M}_r^l = \sum_{i=1}^{5} d_{ri}(B_i + C_i)$$

erhalten, so dass nach Gl (12)

$$f_r = \frac{1}{\overline{R}_0 l}\sum_{i=1}^{5} d_{ri}B_i, \quad F_r = \sum_{i=1}^{5} d_{ri}\,C_i.$$

Die Werte d_{ri} bezeichnen die Einflusszahlen des Belastungsgliedes $B_i + C_i$ in bezug auf $\overline{M}_r^l$ und sind in der **Tabelle 2** zusammengestellt.

Tabelle 2. Die Werte von d_{ri}.

	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$
$r=1$	0.013 69265	0.004 11887	0.001 05585	0.000 25529	0.000 03870
$r=2$	0.004 13719	0.014 88768	0.004 43372	0.001 10375	0.000 16841
$r=3$	0.001 06137	0.004 43406	0.014 93616	0.004 32000	0.000 67918
$r=4$	0.000 25658	0.001 10344	0.004 31873	0.014 41526	0.002 64318
$r=5$	0.000 03723	0.000 16118	0.000 65088	0.002 54949	0.008 74629

Aus Gl. (5) ergeben sich, unabhängig von der Lage der Lasten,

$$B_1 = +6.99628\,\overline{R}_0 l, \quad B_2 = B_3 = +6\,\overline{R}_0 l. \quad B_4 = +5\,\overline{R}_0 l, \quad B_5 = +29.17397\,R_0 l,$$

so erhalten wir mit Benutzung von der **Tabelle 2**:

$$f_1 = +0.128\,841, \quad f_2 = +0.155\,181, \quad f_3 = +0.165\,029,$$
$$f_4 = +0.183\,512, \quad f_5 = +0.273\,043.$$

Wir berechnen nun C_r durch Gl. (9) und erhalten:

Tabelle 3. Die Belastungsglieder C_r.

P in m	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	
$m=1$	$+24.16056$	-7.27397	-6.0	-5.0	-29.17397	$\times Pl$
$m=2$	-1.0	$+24.17397$	-7.27397	-5.0	-29.17397	„
$m=3$	0	-1.0	$+24.17397$	-6.27397	-29.17397	„
$m=4$	0	0	-1.0	$+25.17397$	-30.44795	„

Mit diesen Werten erhalten wir dann für F_r:

Tabelle 4. F_r.

P in m	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	
F_1	$+0.292\,121$	$+0.075\,791$	$+0.018\,675$	$+0.005\,192$	$\times Pl$
F_2	$-0.045\,370$	$+0.313\,974$	$+0.080\,455$	$+0.018\,224$	„
F_3	$-0.137\,641$	$-0.043\,932$	$+0.309\,714$	$+0.073\,136$	„
F_4	$-0.176\,928$	$-0.154\,185$	$-0.064\,256$	$+0.278\,091$	„
F_5	$-0.272\,090$	$-0.263\,793$	$-0.258\,004$	$-0.202\,777$	„

Zur Bestimmung von g_r und G_r in der Gl. (14) steht die Gl. (13) zur Verfügung; wir wollen aber sie folgenderweise durch Symmetriebedingungen bestimmen.

Da nun $\overline{R}_0 + \overline{R}_5 = P$ ist, so ergibt sich aus Gl. (14)

$$\overline{M}_r^r = -g_r\overline{R}_5 l + (G_r + g_r Pl).$$

Wegen der Symmetrie erhalten wir dann

$$-g_r = +f_{5-r},$$
$$[G_r + g_r Pl]_{P\text{ in }m} = [+F_{5-r}]_{P\text{ in }(5-m)}.$$

Tabelle 5. G_r.

P in m	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	
G_0	+0.070 267	+0.015 039	+0.004 250	+0.000 954	$\times Pl$
G_1	+0.461 603	+0.119 257	+0.029 327	+0.006 584	„
G_2	+0.238 166	+0.474 744	+0.121 097	+0.027 388	„
G_3	+0.173 405	+0.235 636	+0.468 256	+0.109 811	„
G_4	+0.134 033	+0.147 515	+0.204 632	+0.420 962	„

Setzen wir die vorstehenden Werte von F_r und G_r in Gl. (15) ein, so ergeben sich

P in m:	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$
$\overline{R}_0$:	$+0.808\,776\,P$,	$+0.602\,878\,P$,	$+0.397\,122\,P$,	$+0.191\,224\,P$.

Die Näherungslösung (III, 54) liefert dagegen

$$+0.8\,P, \qquad +0.6\,P, \qquad +0.4\,P, \qquad +0.2\,P,$$

und wir können uns überzeugen, dass wir uns ohne wesentlichen Fehlern mit der Näherungslösung behelfen können.

Mit den strengen Werten von $\overline{R}_0$ erhalten wir aus Gl. (12) und (14):

Tabelle 6. $\overline{M}_r^l$ und $\overline{M}_r^r$. (Multiplikator: Pl)

$\overline{M}_r^l$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	
$r=1$	+0.396 324	+0.153 466	+0.069 840	+0.029 930	$r=4$
$r=2$	+0.080 145	+0.406 630	+0.142 081	+0.047 899	$r=3$
$r=3$	−0.004 169	+0.055 560	+0.375 251	+0.104 694	$r=2$
$r=4$	−0.028 508	−0.043 550	+0.008 621	+0.313 183	$r=1$
$r=5$	−0.051 259	−0.104 182	−0.149 572	−0.150 564	$r=0$
	$m=4$	$m=3$	$m=2$	$m=1$	$\overline{M}_r^r$

c) M, M', R und R'.

Aus Gl. (III, 15) ergeben sich die folgenden Werte für die Knotenmomente und die Auflagerkräfte:

Tabelle 7. M_r^l und M_r^r. (Multiplikator: Pl)

M_r^l	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	
$r=1$	+0.598 162	+0.376 733	+0.234 920	+0.114 963	$r=4$
$r=2$	+0.340 072	+0.803 315	+0.471 040	+0.223 949	$r=3$
$r=3$	+0.197 915	+0.427 780	+0.787 626	+0.352 347	$r=2$
$r=4$	+0.085 746	+0.178 225	+0.304 311	+0.556 592	$r=1$
$r=5$	−0.025 629	−0.052 091	−0.074 786	−0.075 282	$r=0$
	$m=4$	$m=3$	$m=2$	$m=1$	M_r^r

Tabelle 7a. $M_r^{l\prime}$ und $M_r^{r\prime}$ (Multiplikator: Pl)

$M_r^{l\prime}$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	
$r=1$	+0.201 838	+0.223 267	+0.165 080	+0.085 035	$r=4$
$r=2$	+0.259 928	+0.396 685	+0.328 960	+0.176 051	$r=3$

$M_r^{l'}$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	
$r=3$	+0.202 085	+0.372 220	+0.412 374	+0.247 653	$r=2$
$r=4$	+0.114 254	+0.221 775	+0.295 689	+0.243 408	$r=1$
$r=5$	+0.025 629	+0.052 091	+0.074 786	+0.075 282	$r=0$
	$m=4$	$m=3$	$m=2$	$m=1$	$M_r^{r'}$

Tabelle 8. Die Auflagerkräfte. (Multiplikator: P)

P in m	$m=0$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	
R_0	+1.0	+0.804 388	+0.601 439	+0.398 561	+0.195 612	0	R_5
R_0'	0	−0.004 388	−0.001 439	+0.001 439	+0.004 388	+1.0	R_5'
	$m=5$	$m=4$	$m=3$	$m=2$	$m=1$	$m=0$	P in m

2) Die Biegungsmomente der Querträger und die Torsionsmomente.

Setzen wir die vorher erhaltenen Werte von $\overline{M}_r^l$, $\overline{M}_r^r$ und $\overline{R}_0$ in die Gl. (30) ein, so erhalten wir die Biegungsmomente an den Enden der Querträger, die in der folgenden Tabelle zusammengestellt sind.

Tabelle 9. L_r und L'_r. (Multiplikator: Pl)

P in m	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	
$L_0=-L_0'$	−0.065 472	−0.074 960	−0.055 775	−0.027 509	$L_5=-L_5'$
$L_1=-L_1'$	+0.055 018	+0.023 743	+0.002 902	−0.001 196	$L_4=-L_4'$
$L_2=-L_2'$	+0.031 044	+0.070 575	+0.033 515	+0.008 114	$L_3=-L_3'$
	$m=4$	$m=3$	$m=2$	$m=1$	P in m

Wir erhalten dann aus Gl. (35) für die Torsionsmomente in den Hauptträgern:

Tabelle 10. X_r und X_r'. (Multiplikator: Pl)

P in m	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	
$X_1=-X_1'$	+0.065 472	+0.074 960	+0.055 775	+0.027 509	$-X_5=X_5'$
$X_2=-X_2'$	+0.010 454	+0.051 217	+0.052 873	+0.026 313	$-X_4=X_4'$
$X_3=-X_3'$	−0.020 590	−0.019 358	+0.019 358	+0.020 590	$-X_3=X_3'$
	$m=4$	$m=3$	$m=2$	$m=1$	P in m

Die Torsionsmomente in den Querträgern ergeben sich aus Gl. (36) zu:

Tabelle 11. Y_r. (Multiplikator: Pl)

P in m	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	
Y_0	+0.075 282	+0.074 786	+0.052 091	+0.025 629	$-Y_5$
Y_1	+0.041 571	+0.072 422	+0.056 695	+0.029 219	$-Y_4$
Y_2	−0.012 274	+0.015 689	+0.043 260	+0.026 034	$-Y_3$
	$m=4$	$m=3$	$m=2$	$m=1$	P in m

3) Die Verschiebungen der Knotenpunkte.

Wir berechnen die Werte von $Z_{r,0}$ und $\overline{Z}_r$ durch Gl. (38) und (39a) und dann $z_{r,0}$ und $\overline{z}_r$ durch Gl. (37) und (39). Wir erhalten:

Tabelle 12. $z_{r,0}$. $\left(\text{Multiplikator: } \frac{Pl^3}{EJ}\right)$

P in m	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	
$z_{1,0}$	1.066 667	1.5	1.333 333	0.766 667	$z_{4,0}$
$z_{2,0}$	1.5	2.4	2.266 667	1.333 333	$z_{3,0}$
	$m=4$	$m=3$	$m=2$	$m=1$	P in m

Tabelle 12a. $\bar{z}_r$. $\left(\text{Multiplikator: } \frac{Pl^3}{EJ}\right)$

P in m	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	
$\bar{z}_1$	0.258 574	0.291 774	0.212 666	0.106 495	$\bar{z}_4$
$\bar{z}_2$	0.292 382	0.486 675	0.410 253	0.218 076	$\bar{z}_3$
	$m=4$	$m=3$	$m=2$	$m=1$	P in m

Damit erhalten wir für die Verschiebungen der Knotenpunkte:

Tabelle 13. $\left(\text{Multiplikator: } \frac{Pl^3}{EJ}\right)$

P in m	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	
z_1	0.662 620	0.895 887	0.773 000	0.436 581	z_4
z_1'	0.404 047	0.604 113	0.560 333	0.330 086	z_4'
z_2	0.896 191	1.443 338	1.338 460	0.773 204	z_3
z_2'	0.603 809	0.956 662	0.928 207	0.560 129	z_3'
	$m=4$	$m=3$	$m=2$	$m=1$	P in m

5. Zahlenbeispiel zum beiderseits eingespannten Leiterträger.

Es ist der in **Abb. 23** dargestellte, beiderseits eingespannte Leiterträger mit fünf gleichen Feldern für die Knotenlasten zu untersuchen. Der Abmessungen des Trägers und die Querschnitte der Stäbe seien gleich den des Leiterträgers, den wir als Beispiel zum einfachen Leiterträger behandelt haben.

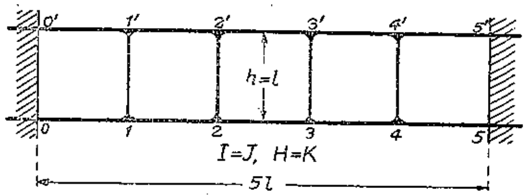


Abb. 23.

1) Die Biegungsmomente der Hauptträger und die Auflagerkräfte.

a) M_r, $R_{0,0}$ und $R_{5,0}$

Aus Gl. (45) mit Benutzung von Gl. (41a) und (44a) finden wir die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Werte, wobei die Zahlenwerte für M_r mit Pl und die für $R_{r,0}$ mit P zu vervielfachen sind.

Tabelle 14. M_r, $R_{0,0}$ und $R_{5,0}$.

P in m	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	
M_0	-0.640	-0.720	-0.480	-0.160	M_5
M_1	$+0.256$	-0.072	-0.128	-0.056	M_4
M_2	$+0.152$	$+0.576$	$+0.224$	$+0.048$	M_3
$R_{0,0}$	$+0.896$	$+0.648$	$+0.352$	$+0.104$	$R_{5,0}$
	$m=4$	$m=3$	$m=2$	$m=1$	P in m

b) $\overline{M}_r^l$, $\overline{M}_r^r$, $\overline{R}_0$ und $\overline{R}_5$.

Aus Gl. (49) erhalten wir

$$k_0=+79.99178,\quad k_{1,0}=+65.78975,\quad k_{5,0}=+44.32878,$$
$$k_1=+22.44795,\quad k_{1,1}=+21.80712,\quad k_{5,1}=+20.66300,$$
$$k_1'=+0.640\,828,$$

mit denen wir die folgenden Gleichungen aus Gl. (48) erhalten:

$$\overline{M}_3^l-21.80712\ \overline{M}_2^l+65.78975\ \overline{M}_1^l=B_1+C_1,$$
$$\overline{M}_4^l-22.44795\ \overline{M}_3^l+79.99178\ \overline{M}_2^l-22.44795\ \overline{M}_1^l=B_2+C_2,$$
$$\overline{M}_5^l-22.44795\ \overline{M}_4^l+79.99178\ \overline{M}_3^l-22.44795\ \overline{M}_2^l+\overline{M}_1^l=B_3+C_3,$$
$$-22.44795\ \overline{M}_5^l+79.99178\ \overline{M}_4^l-22.44795\ \overline{M}_3^l+\overline{M}_2^l=B_4+C_4,$$
$$44.32878\ \overline{M}_5^l-20.66300\ \overline{M}_4^l+M_3^l=B_5+C_5.$$

Die Belastungsglieder werden nach Gl. (51) und (55) zu:

$$B_1=-8.03413(2\overline{X}_1+\overline{R}_0l),\quad B_2=B_3=B_4=+6(2\overline{X}_1+\overline{R}_0l),\quad B_5=+27.9(2\overline{X}_1+\overline{R}_0l)$$

und

Tabelle 15. Die Belastungsglieder C_r.

P in m	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	
$m=1$	$+23.53315$	-7.27397	-6.0	-6.0	-27.9	$\times Pl$
$m=2$	-1.0	$+24.17397$	-7.27397	-6.0	-27.9	〃
$m=3$	0	-1.0	$+24.17397$	-7.27397	-27.9	〃
$m=4$	0	0	-1.0	$+24.17397$	-29.17397	〃

Durch Auflösung der vorstehenden Gleichungen mit den obigen Belastungsgliedern erhalten wir die Lösungen in der Form:

$$\overline{M}_r^l=f_r(2\overline{X}_1+\overline{R}_0l)+F_r$$

und dann nach Gl. (59)

$$\overline{M}_r^r=g_r(2\overline{X}_1+\overline{R}_0l)+G_r.$$

Die Werte von f_r, g_r, F_r und G_r sind in den folgenden Tabellen gegeben.

Tabelle 16. $f_r=-g_{5-r}$.

$$f_1=-g_4=-0.091\,452,\qquad f_2=-g_3=+0.101\,350,$$
$$f_3=-g_2=+0.192\,639,\qquad f_4=-g_1=+0.348\,836,$$
$$f_5=-g_0=+0.787\,644.$$

Tabelle 17. F_r.

P in m	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	
$r=1$	+0.342 258	+0.087 841	+0.019 499	+0.002 674	$\times Pl$
$r=2$	−0.046 364	+0.306 906	+0.071 127	+0.009 853	〃
$r=3$	−0.179 449	−0.086 315	+0.268 258	+0.038 962	〃
$r=4$	−0.345 464	−0.321 155	−0.224 191	+0.147 356	〃
$r=5$	−0.786 371	−0.777 141	−0.739 942	−0.590 319	〃

Tabelle 18. G_r.

P in m	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	
$r=0$	+0.197 326	+0.047 703	+0.010 504	+0.001 273	$\times Pl$
$r=1$	+0.496 193	+0.124 645	+0.027 682	+0.003 372	〃
$r=2$	+0.231 602	+0.460 397	+0.106 324	+0.013 190	〃
$r=3$	+0.111 202	+0.172 476	+0.408 255	+0.054 986	〃
$r=4$	−0.088 779	−0.071 954	−0.003 611	−0.250 806	〃

Mit den so tabulierten Werten von F_r und G_r erhalten wir aus Gl. (61):

Tabelle 19.

P in m:	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	
$2\overline{X}_1+R_0 l$:	+0.872 525	+0.627 218	+0.372 782	+0.127 475	$\times Pl$

Aus den worher ermittelten Resultaten können wir nun $\overline{M}_r^l$ und $\overline{M}_r^r$ leicht durch Gl. (58) und (60) gewinnen. Sie sind:

Tabelle 20. $\overline{M}_r^l$ und $\overline{M}_r^r$. (Multiplikator: Pl)

$\overline{M}_r^l$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	
$r=1$	+0.262 464	+0.030 481	−0.014 593	−0.008 984	$r=4$
$r=2$	+0.042 066	+0.370 474	+0.108 908	+0.022 772	$r=3$
$r=3$	−0.011 367	+0.034 511	+0.340 071	+0.663 519	$r=2$
$r=4$	−0.041 096	−0.102 358	−0.094 151	+0.191 825	$r=1$
$r=5$	−0.099 132	−0.283 116	−0.446 322	−0.489 913	$r=0$
	$m=4$	$m=3$	$m=2$	$m=1$	$\overline{M}_r^r$

Aus Gl. (62) erhalten wir

$$\overline{R}_0=\frac{1}{l}(\overline{M}_1^l-\overline{M}_0^r),\qquad \overline{R}_5=\frac{1}{l}(\overline{M}_4^r-\overline{M}_5^l),$$

und damit ergibt sich die folgende Tabelle.

Tabelle 21. $\overline{R}_0$.

P in m:	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	
$\overline{R}_0$:	+0.752 377	+0.476 803	+0.268 523	+0.090 148	$\times P$.

c) M, M', R und R'.

Wir erhalten jetzt die folgenden Tabellen durch Gl. (III, 15) mit den vorstehenden Resultaten.

Tabelle 22. M_r^l und M_r^r. (Multiplikator: Pl)

M_r^l	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	
$r=1$	+0.259 232	−0.020 760	−0.071 297	−0.032 492	$r=4$
$r=2$	+0.097 033	+0.473 237	+0.166 454	+0.035 386	$r=3$
$r=3$	+0.018 317	+0.129 256	+0.458 035	+0.107 760	$r=2$
$r=4$	−0.048 548	−0.115 179	−0.083 075	+0.223 912	$r=1$
$r=5$	−0.129 566	−0.382 558	−0.583 161	−0.564 957	$r=0$
	$m=4$	$m=3$	$m=2$	$m=1$	M_r^r

Tabelle 22a. $M_r^{l'}$ und $M_r^{r'}$. (Multiplikator: Pl)

$M_r^{l'}$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	
$r=1$	−0.003 232	−0.051 240	−0.056 703	−0.023 508	$r=4$
$r=2$	+0.054 967	+0.102 763	+0.057 546	+0.012 614	$r=3$
$r=3$	+0.029 683	+0.094 744	+0.117 964	+0.044 240	$r=2$
$r=4$	−0.007 452	−0.012 821	+0.011 075	+0.032 088	$r=1$
$r=5$	−0.030 434	−0.097 442	−0.136 839	−0.075 043	$r=0$
	$m=4$	$m=3$	$m=2$	$m=1$	$M_r^{r'}$

Tabelle 23. R_r und R_r'. (Multiplikator: P)

P in m	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	
R_0	0.824 188	0.562 402	0.310 262	0.097 074	R_5
R_0'	0.071 812	0.085 598	0.041 738	0.006 926	R_5'
	$m=4$	$m=3$	$m=2$	$m=1$	P in m

2) Die Biegungsmomente der Querträger und die Torsionsmomente.

Die Biegungsmomente an den Enden der Querträger können mittels Gl. (65) berechnet werden. Sie sind:

Tabelle 24. L_r und L_r', (Multiplikator: Pl)

P in m	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	
$L_1=-L_1'$	+0.024 466	−0.003 045	−0.014 314	−0.006 570	$L_4=-L_4'$
$L_2=-L_2'$	+0.071 812	+0.057 454	+0.023 573	+0.002 755	$L_3=-L_3'$
	$m=4$	$m=3$	$m=2$	$m=1$	P in m

Mit den in vorstehender Tabelle gegebenen Werten erhalten wir aus Gl. (66) und (67) für die Torsionsmomente in den Hauptträgern:

Tabelle 25. X_r und X_r'. (Multiplikator: Pl)

P in m	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	
$X_1=-X_1'$	+0.030 037	+0.037 604	+0.026 065	+0.009 332	$-X_5=X_5'$
$X_2=-X_2'$	+0.005 571	+0.050 648	+0.040 379	+0.015 902	$-X_4=X_4'$
$X_3=-X_3'$	−0.013 147	−0.016 806	+0.016 806	+0.013 147	$-X_3=X_3'$
	$m=4$	$m=3$	$m=2$	$m=1$	P in m

Aus Gl. (36) erhalten wir in der folgenden Tabelle zusammengestellte Werte für die Torsionsmomente in den Querträgern.

Tabelle 26. Y_r. (Multiplikator: Pl)

P in m	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	
Y_1	+0.035 320	+0.062 316	+0.043 883	+0.016 056	$-Y_4$
Y_2	−0.010 727	+0.015 202	+0.037 198	+0.017 069	$-Y_3$
	$m=4$	$m=3$	$m=2$	$m=1$	P in m

3) Die Verschiebungen der Knotenpunkte.

Zuerst erhalten wir aus Gl. (69a):

Tabelle 27. z_r^{**} $\left(\text{Multiplikator: } \frac{Pl^3}{EJ}\right)$

P in m	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	
z_1^{**}	−0.896	−1.248	−1.152	−0.704	z_4^{**}
z_2^{**}	−1.248	−1.824	−1.776	−1.152	z_3^{**}
	$m=4$	$m=3$	$m=2$	$m=1$	P in m

Für die z_r^* in der Gl. (68) gelten die in **Tabelle 12** zusammengesetzten Werte, und wir können nun die $z_{r,0}$ durch Addition der entsprechenden Werte von der **Tabelle 12** bzw. **27** berechnen.

Tabelle 28. $z_{r,0}$. $\left(\text{Multiplikator: } \frac{Pl^3}{EJ}\right)$

P in m	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	
$z_{1,0}$	+0.170 667	+0.252	+0.181 333	+0.062 667	$z_{4,0}$
$z_{2,0}$	+0.252	+0.476	+0.490 667	+0.181 333	$z_{3,0}$
	$m=4$	$m=3$	$m=2$	$m=1$	P in m

Aus Gl. (39) und (39a) ergibt sich für $\bar{z}_r$:

Tabelle 28a. $\bar{z}_r$. $\left(\text{Multiplikator: } \frac{Pl^3}{EJ}\right)$

P in m	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	
$\bar{z}_1$	+0.097 725	+0.130 420	+0.082 031	+0.040 106	$\bar{z}_4$
$\bar{z}_2$	+0.118 662	+0.294 603	+0.232 080	+0.109 632	$\bar{z}_3$
	$m=4$	$m=3$	$m=2$	$m=1$	P in m

Dann erhalten wir für die Verschiebungen der Knotenpunkte:

Tabelle 29. $\left(\text{Multiplikator: } \frac{Pl^3}{EJ}\right)$

P in m	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	
z_1	0.134 196	0.191 210	0.131 682	0.051 387	z_4
z_1'	0.036 471	0.060 790	0.049 651	0.011 280	z_4'

P in m	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	
z_2	0.185 331	0.435 302	0.361 374	0.145 483	z_3
z_2'	0.066 669	0.140 698	0.129 293	0.035 850	z_3'
	$m=4$	$m=3$	$m=2$	$m=1$	P in m

6. Zahlenbeispiel zum einseitig eingespannten Leiterträger.

Es ist der in **Abb. 24** dargestellte, an dem Ende $r=0$ eingespannte Leiterträger mit fünf gleichen Feldern für die Knotenlasten zu untersuchen. Die Abmessungen des Trägers und die Stabquerschnitte seien gleich den der Leiterträger, die wir als Beispiele zu einfachem bzw. beiderseits eingespanntem Leiterträger behandelt haben.

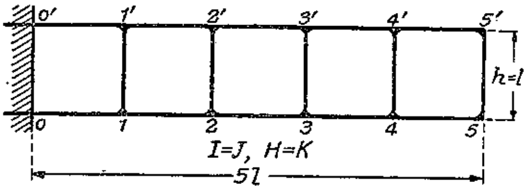


Abb. 24

1) Die Biegungsmomente der Hauptträger und die Auflagerkräfte.

a) M_r und $R_{0,0}$.

Aus Gl. (71) und (71a) finden wir

$$R_{0,0}=P,$$

und die in folgender Tabelle zusammengestellten Werte für M_r.

Tabelle 30. M_r.

P in m;	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	
M_0	-1	-2	-3	-4	-5	$\times Pl$
M_1	0	-1	-2	-3	-4	"
M_2	0	0	-1	-2	-3	"
M_3	0	0	0	-1	-2	"
M_4	0	0	0	0	-1	"

b) $\overline{M}_r^l$, $\overline{M}_r^r$ und $\overline{R}_0$.

Aus Gl. (73) erhalten wir

$$k_0=+79.99178,\qquad k_{1,0}=+65.78975,\qquad k_{5,0}=+120.79178,$$
$$k_1=+22.44795,\qquad k_{1,1}=+21.80712,\qquad k_{5,1}=+\ 21.66300,$$
$$k_1'=+0.640\,828,$$

mit denen wir die folgenden Gleichungen für $\overline{M}_r^l$ aus Gl. (72) erhalten:

$$\begin{aligned}
\overline{M}_3^l &-21.80712\,\overline{M}_2^l +65.78975\,\overline{M}_1^l &&=C_1,\\
\overline{M}_4^l &-22.44795\,\overline{M}_3^l +79.99178\,\overline{M}_2^l -22.44795\,M_1^l &&=C_2,\\
\overline{M}_5^l &-22.44795\,\overline{M}_4^l +79.99178\,\overline{M}_3^l -22.44795\,\overline{M}_2^l +\overline{M}_1^l &&=C_3,\\
&-22.44795\,\overline{M}_5^l +79.99178\,\overline{M}_4^l -22\,44795\,\overline{M}_3^l +\overline{M}_2^l &&=C_4,\\
&\qquad 120.79178\,\overline{M}_5^l -21.66300\,\overline{M}_4^l +\overline{M}_3^l &&=C_5.
\end{aligned}$$

Die Belastungsglieder C_r werden nach Gl. (75) und (78) zu:

Tabelle 31. Die Belastungsglieder C_r.

P in m:	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	
$m=1$	+14.49900	− 1.27397	0	0	0	$\times Pl$
$m=2$	− 9.03413	+30.17397	− 1.27397	0	0	〃
$m=3$	− 8.03413	+ 5.0	+30.17397	− 1.27397	0	〃
$m=4$	− 8.03413	+ 6.0	+ 5.0	+30.17397	− 1.27397	〃
$m=5$	− 8.03413	+ 6.0	+ 6.0	+ 5.0	+29.17397	〃

Mit den vorstehenden Belastungsgliedern ergibt die Auflösung der vorgelegten Gleichungen die folgenden Werte für $\overline{M}_r^l$.

Tabelle 32. $\overline{M}_r^l$.

P in m:	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	
$r=1$	+0.238 286	−0.004 662	−0.073 059	−0.090 371	−0.095 381	$\times Pl$
$r=2$	+0.054 616	+0.405 018	+0.168 993	+0.105 905	+0.089 434	〃
$r=3$	+0.013 228	+0.104 874	+0.457 646	+0.220 848	+0.147 649	〃
$r=4$	+0.003 158	+0.025 402	+0.115 120	+0.457 514	+0.179 307	〃
$r=5$	+0.000 457	+0.003 687	+0.016 857	+0.069 658	+0.272 458	〃

Mit diesen Werten erhalten wir aus Gl. (81):

Tabelle 33. $\overline{M}_r^r$.

P in m:	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	
$r=0$	−0.518 057	−0.688 865	−0.723 266	−0.738 298	−0.749 454	$\times Pl$
$r=1$	+0.161 637	−0.194 670	−0.291 230	−0.317 404	−0.326 843	× 〃
$r=2$	+0.036 680	+0.268 685	−0.083 925	−0.178 412	−0.209 820	× 〃
$r=3$	+0.008 838	+0.069 875	+0.302 709	−0.053 354	−0.187 676	× 〃
$r=4$	+0.002 014	+0.016 252	+0.073 506	+0.289 610	−0.131 711	× 〃

Die $\overline{R}_0$ berechnen wir durch Gl. (82) und erhalten die folgenden Werte.

Tabelle 34. $\overline{R}_0$.

P in m:	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	
$\overline{R}_0$:	+0.756 344	+0.684 203	+0.650 207	+0.647 927	+0.654 073	$\times P$.

c) M, M', R_0 und R_0'.

Aus den vorher ermittelten Resultaten erhalten wir durch Gl. (III, 15) die folgenden Tabellen.

Tabelle 35.

	P in m:	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	
M_r^r	$r=0$	−0.749 029	−1.344 433	−1.861 633	−2.369 149	−2.874 727	$\times Pl$
	$r=1$	+0.080 818	−0.597 335	−1.145 615	−1.658 702	−2.163 421	× 〃
	$r=2$	+0.018 340	+0.134 343	−0.541 963	−1.089 206	−1.604 910	× 〃
	$r=3$	+0.004 419	+0.034 937	+0.151 355	−0.526 677	−1.093 838	× 〃
	$r=4$	+0.001 007	+0.008 126	+0.036 753	+0.144 805	−0.565 856	× 〃

	P in m:	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	
$M_r^{r'}$	$r=0$	−0.240 971	−0.655 567	−1.138 367	−1.630 851	−2.125 273	$\times Pl$
	$r=1$	−0.080 818	−0.402 665	−0.854 385	−1.341 298	−1.836 579	× 〃
	$r=2$	−0.018 340	−0.134 343	−0.458 037	−0.910 794	−1.395 090	× 〃
	$r=3$	−0.004 419	−0.034 937	−0.151 355	−0.473 323	−0.906 162	× 〃
	$r=4$	−0.001 007	−0.008 126	−0.036 753	−0.144 805	−0.434 144	× 〃
M_r^{l}	$r=1$	+0.119 143	−0.502 331	−1.036 529	−1.545 186	−2.047 691	$\times Pl$
	$r=2$	+0.027 308	+0.202 509	−0.415 504	−0.947 048	−1.456 283	× 〃
	$r=3$	+0.006 614	+0.052 437	+0.228 823	−0.389 576	−0.926 175	× 〃
	$r=4$	+0.001 579	+0.012 701	+0.057 560	+0.228 757	−0.410 346	× 〃
	$r=5$	+0.000 228	+0.001 844	+0.008 429	+0.034 829	+0.136 229	× 〃
$M_r^{l'}$	$r=1$	−0.119 143	−0.497 669	−0.963 471	−1.454 814	−1.952 309	$\times Pl$
	$r=2$	−0.027 308	−0.202 509	−0.584 496	−1.052 952	−1.543 717	× 〃
	$r=3$	−0.006 614	−0.052 437	−0.228 823	−0.610 424	−1.073 825	× 〃
	$r=4$	−0.001 579	−0.012 701	−0.057 560	−0.228 757	−0.589 654	× 〃
	$r=5$	−0.000 228	−0.001 844	−0.008 429	−0.034 829	−0.136 229	× 〃
	R_0	+0.878 172	+0.842 102	+0.825 103	+0.823 964	+0.827 037	$\times P$
	R_0'	+0.121 828	+0.157 898	+0.174 897	+0.176 036	+0.172 963	× 〃

2) Die Biegungsmomente der Querträger und die Torsionsmomente.

Durch Gl. (83) und (85) erhalten wir die folgende Tabelle für die Biegungsmomente an den Enden der Querträger.

Tabelle 36. $L_r = -L_r'$.

P in m:	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	
$r=1$	+0.034 159	−0.021 129	−0.047 496	−0.056 155	−0.059 949	$\times Pl$
$r=2$	+0.020 892	+0.059 125	+0.020 437	−0.006 012	−0.014 203	× 〃
$r=3$	+0.004 443	+0.029 835	+0.067 710	+0.027 902	+0.002 379	× 〃
$r=4$	+0.001 031	+0.007 977	+0.032 735	+0.067 295	+0.009 297	× 〃
$r=5$	+0.000 389	+0.003 141	+0.011 662	+0.054 988	+0.148 958	× 〃

Mit diesen Werten finden wir durch Gl. (86) die Torsionsmomente in den Hauptträgern.

Tabelle 37. $X_r = -X_r'$.

P in m:	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	
$r=1$	+0.060 914	+0.078 949	+0.085 048	+0.088 018	+0.086 481	$\times Pl$
$r=2$	+0.026 755	+0.100 078	+0.132 544	+0.144 173	+0.146 430	× 〃
$r=3$	+0.005 863	+0.040 953	+0.112 107	+0.150 185	+0.160 633	× 〃
$r=4$	+0.001 420	+0.011 118	+0.044 397	+0.122 283	+0.158 254	× 〃
$r=5$	+0.000 389	+0.003 141	+0.011 662	+0.054 988	+0.148 958	× 〃

Die Torsionsmomente in den Querträgern werden durch Gl. (36) zu:

Tabelle 38. Y_r.

P in m:	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	
$r=1$	+0.038 325	+0.095 004	+0.109 086	+0.113 516	+0.115 731	$\times Pl$
$r=2$	+0.008 968	+0.068 166	+0.126 459	+0.142 158	+0.148 627	× 〃
$r=3$	+0.002 195	+0.017 500	+0.077 468	+0.137 101	+0.167 662	× 〃
$r=4$	+0.000 572	+0.004 575	+0.020 807	+0.083 952	+0.155 509	× 〃
$r=5$	+0.000 228	+0.001 844	+0.008 428	+0.034 829	+0.136 229	× 〃

3) Die Verschiebungen der Knotenpunkte.

Wir erhalten aus Gl. (87) und (88) die folgenden Tabellen.

Tabelle 39. $z_{r,0}$.

P in m:	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	
$r=1$	0.333 333	0.833 333	1.333 333	1.833 333	2.333 333	
$r=2$	0.833 333	2.666 667	4.666 667	6.666 667	8.666 667	
$r=3$	1.333 333	4.666 667	9.0	13.5	18.0	$\times \dfrac{Pl^3}{EJ}$
$r=4$	1.833 333	6.666 667	13.5	21.333 333	29.333 333	
$r=5$	2.333 333	8.666 667	18.0	29.333 333	41.666 667	

Tabelle 39a. $\bar{z}_r$.

P in m:	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	
$r=1$	0.173 138	0.230 399	0.253 265	0.261 161	0.265 715	
$r=2$	0.209 875	0.574 551	0.720 339	0.763 647	0.782 508	
$r=3$	0.227 203	0.709 102	1.131 321	1.301 394	1.369 962	$\times \dfrac{Pl^3}{EJ}$
$r=4$	0.230 535	0.736 388	1.283 657	1.746 792	1.975 844	
$r=5$	0.230 595	0.737 529	1.369 847	1.927 099	2.551 730	

Aus vorstehenden Tabellen erhalten wir nach Gl. (III, 15) durch entsprechende Addition und Subtraktion die folgenden Werte für die Verschiebungen der Knotenpunkte.

Tabelle 40. z_r.

P in m:	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	
$r=1$	0.233 236	0.531 866	0.793 299	1.047 247	1.299 524	
$r=2$	0.521 604	1.620 609	2.693 503	3.715 157	4.724 587	
$r=3$	0.780 263	2.687 884	5.065 660	7.400 697	9.684 981	$\times \dfrac{Pl^3}{EJ}$
$r=4$	1.031 934	3.701 527	7.391 828	11.540 063	15.655 422	
$r=5$	1.281 964	4.702 098	9.659 923	15.630 216	22.109 199	

Tabelle 41. z_r'.

P in m:	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	
$r=1$	0.100 097	0.301 467	0.540 034	0.786 086	1.033 809	
$r=2$	0.311 729	1.046 058	1.973 164	2.951 510	3.942 079	
$r=3$	0.553 065	1.978 783	3.934 340	6.099 303	8.315 019	$\times \dfrac{Pl^3}{EJ}$
$r=4$	0.801 399	2.965 140	6.108 172	9.793 270	13.677 911	
$r=5$	1.051 369	3.964 569	8.340 077	13.703 117	19.557 468	

Mittels der in den vorstehenden Beispielen ermittelten Resultate sind die Biegungs- und Torsionsmomentenverläufe für verschiedene Laststellungen und die Einflusslinien der Biegungs- und Torsionsmomente und der Knotenverschiebungen in den Abbildungen der Tafeln im Anhang aufgetragen.

(*Fortsetzung dieses Teiles folgt.*)

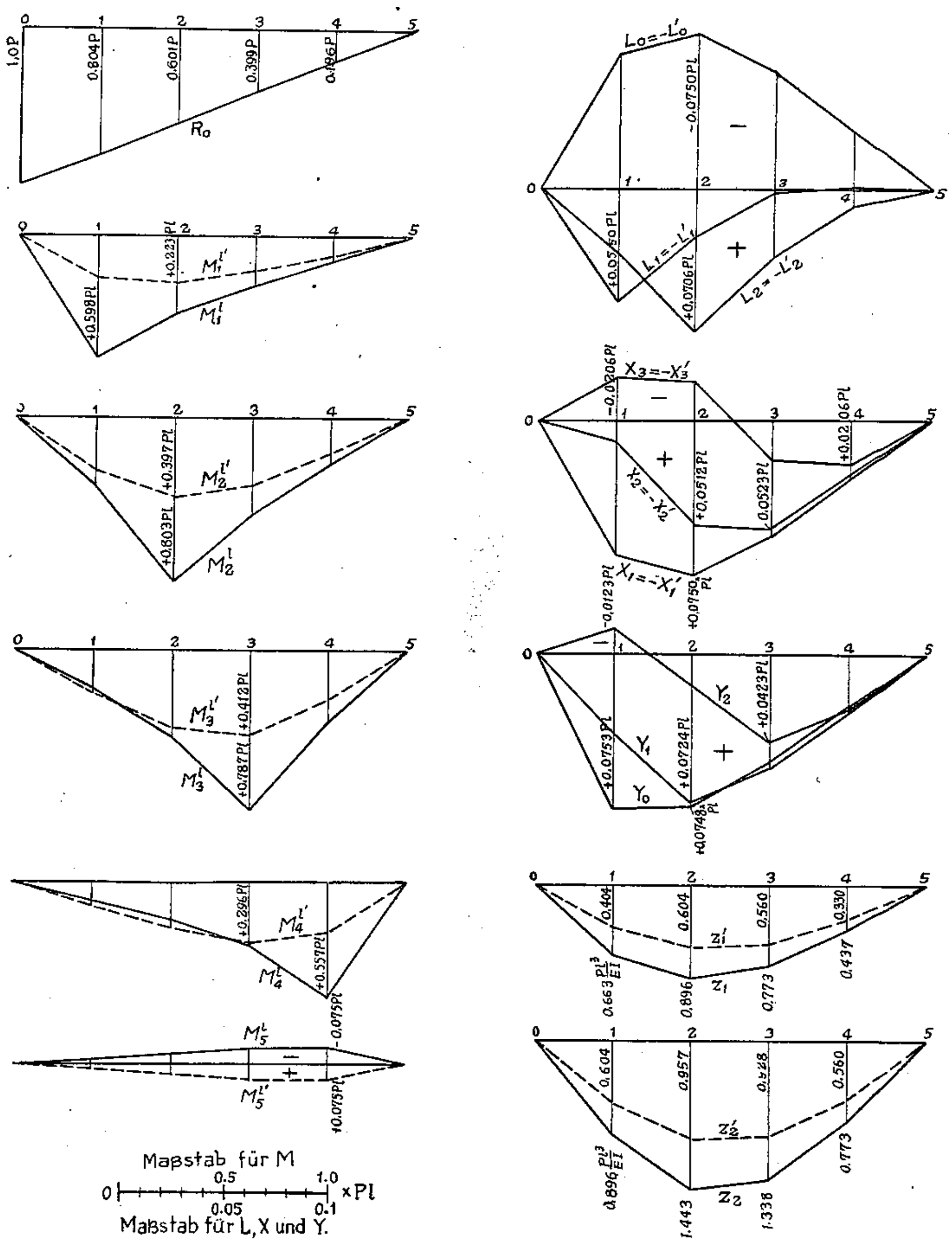
Druckfehlerberichtigung zum ersten Teil.

Seite 8, Zeile 6 von unten lies "zu den" statt "zur".

In der Gleichung (24, b) auf der Seite 20 lies T_{rs}^{o} statt T_{rs}^{r}.

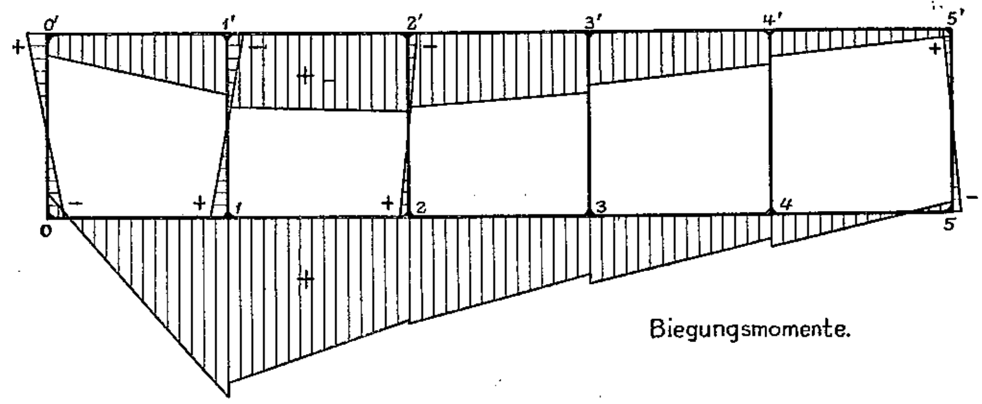
In den Gleichungen (31), (32) und (33) auf den Seiten 41 und 42 lies η statt μ.

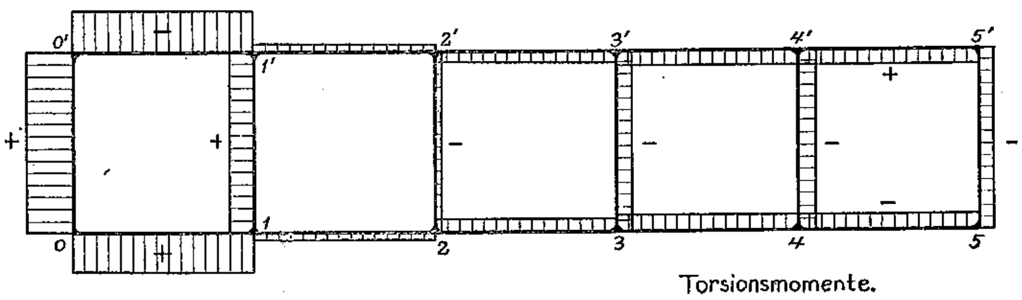
Tafel I. Beispiel zum einfachen Leiterträger. Einflusslinien.



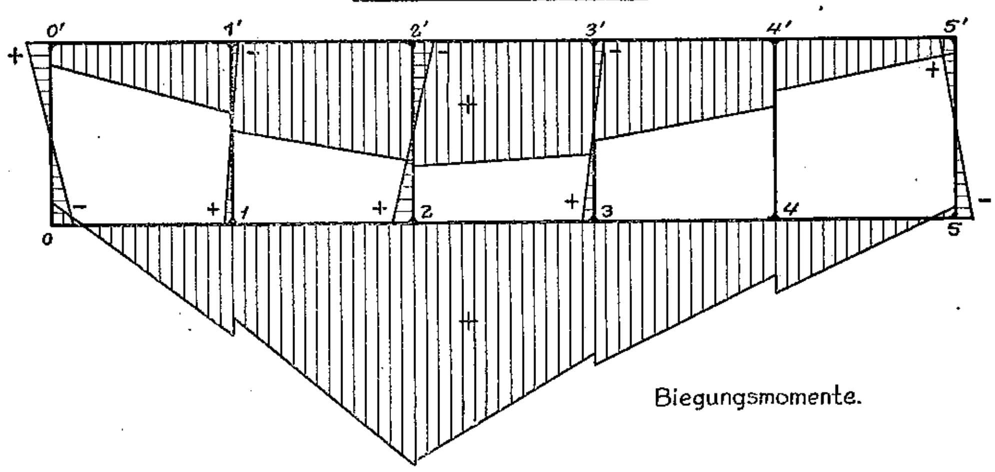
Tafel. II. Beispiel zum einfachen Leiterträger Momentenverlauf.

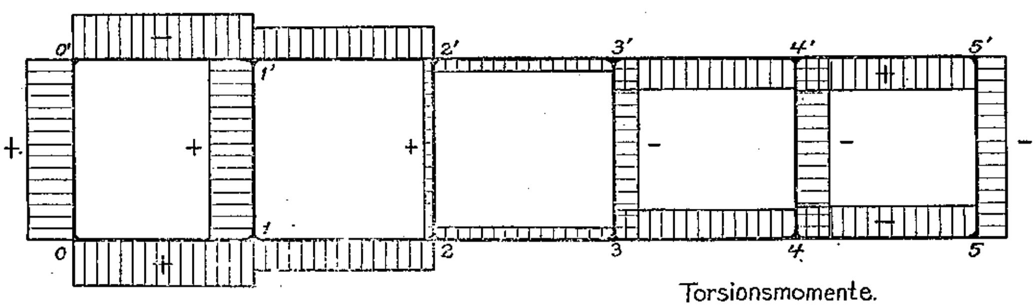
Einzellast P im Knoten ①

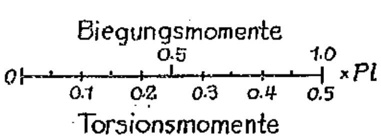




Einzellast P im Knoten ②

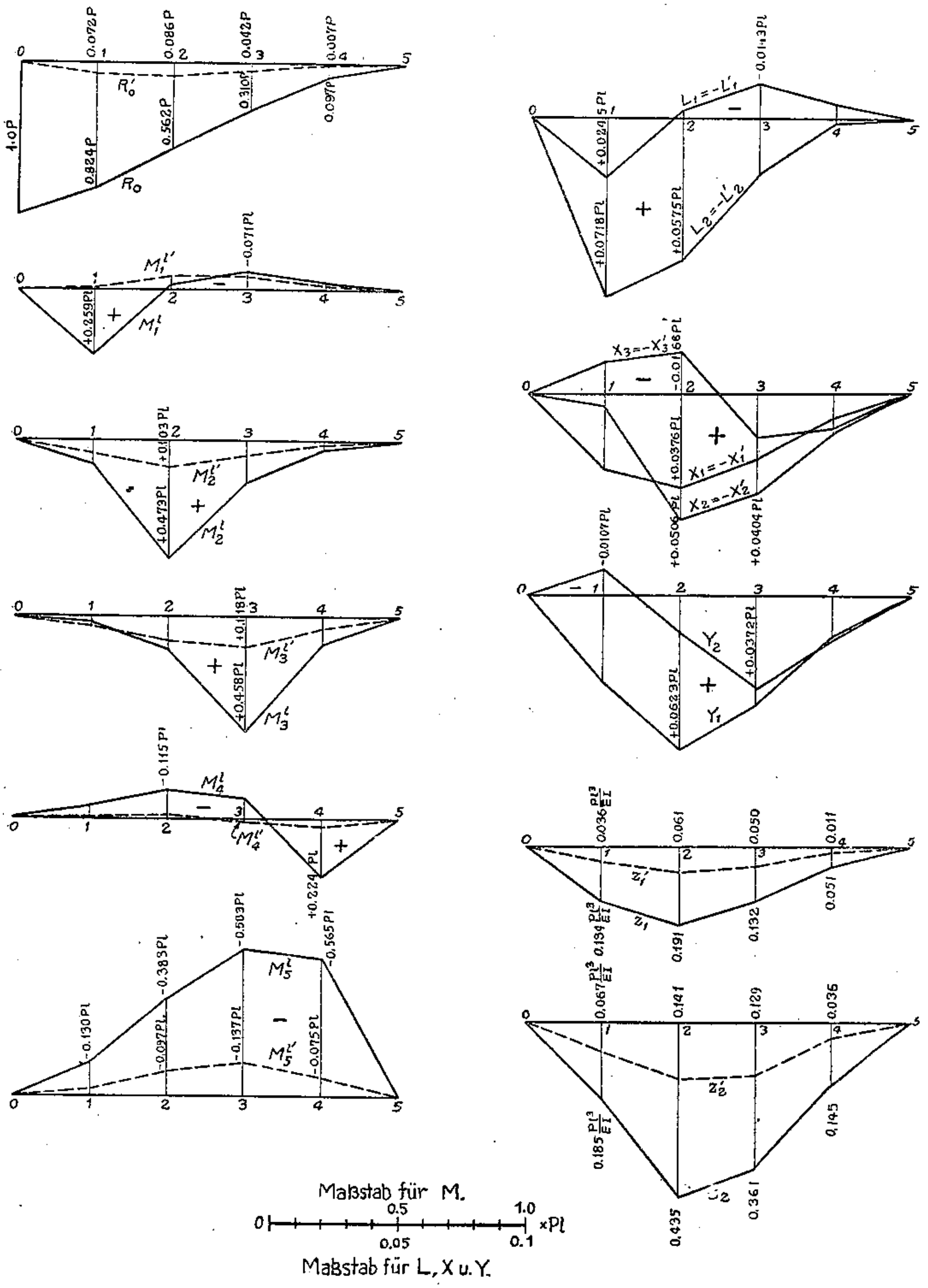






(土木學會誌第十七卷第十號附圖)

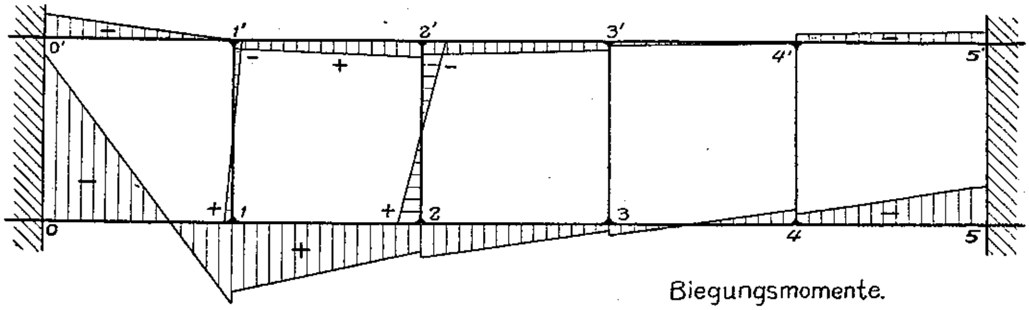
Tafel III. Beispiel zum beiderseits eingespannten Leiterträger. Einflusslinien.



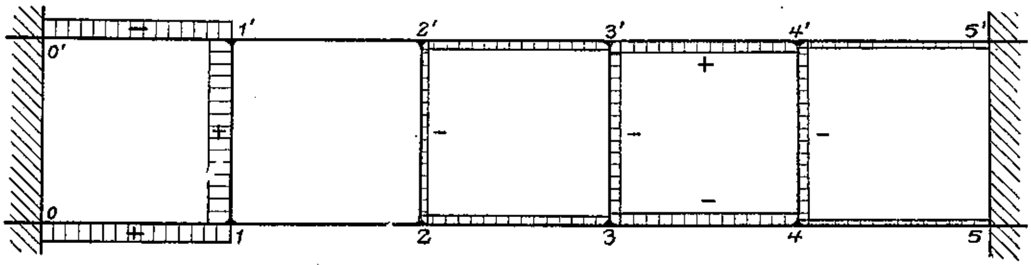
(土木學會誌第十七卷第十號附圖)

Tafel IV. Beispiel zum beiderseits eingespannten Leiterträger. Momentenverlauf.

Einzellast P im Knoten ①

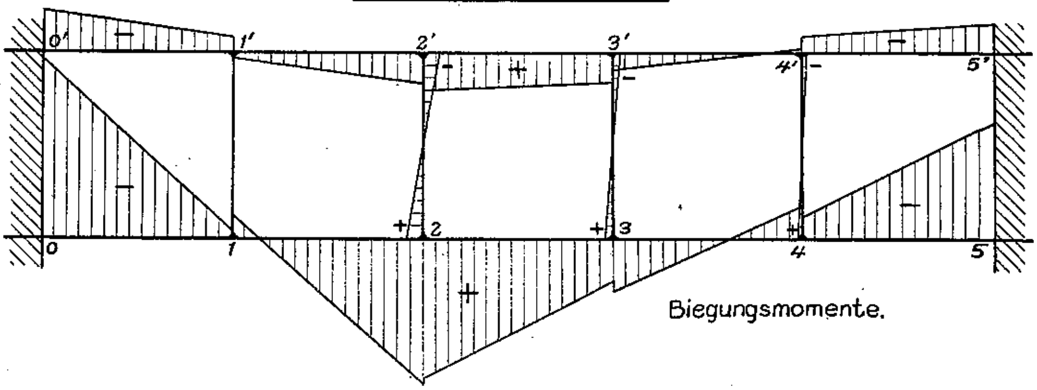


Biegungsmomente.

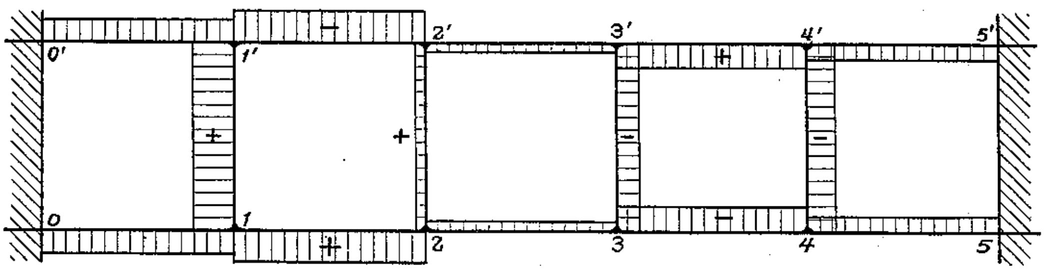


Torsionsmomente.

Einzellast P im Knoten ②

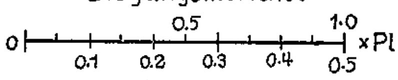


Biegungsmomente.



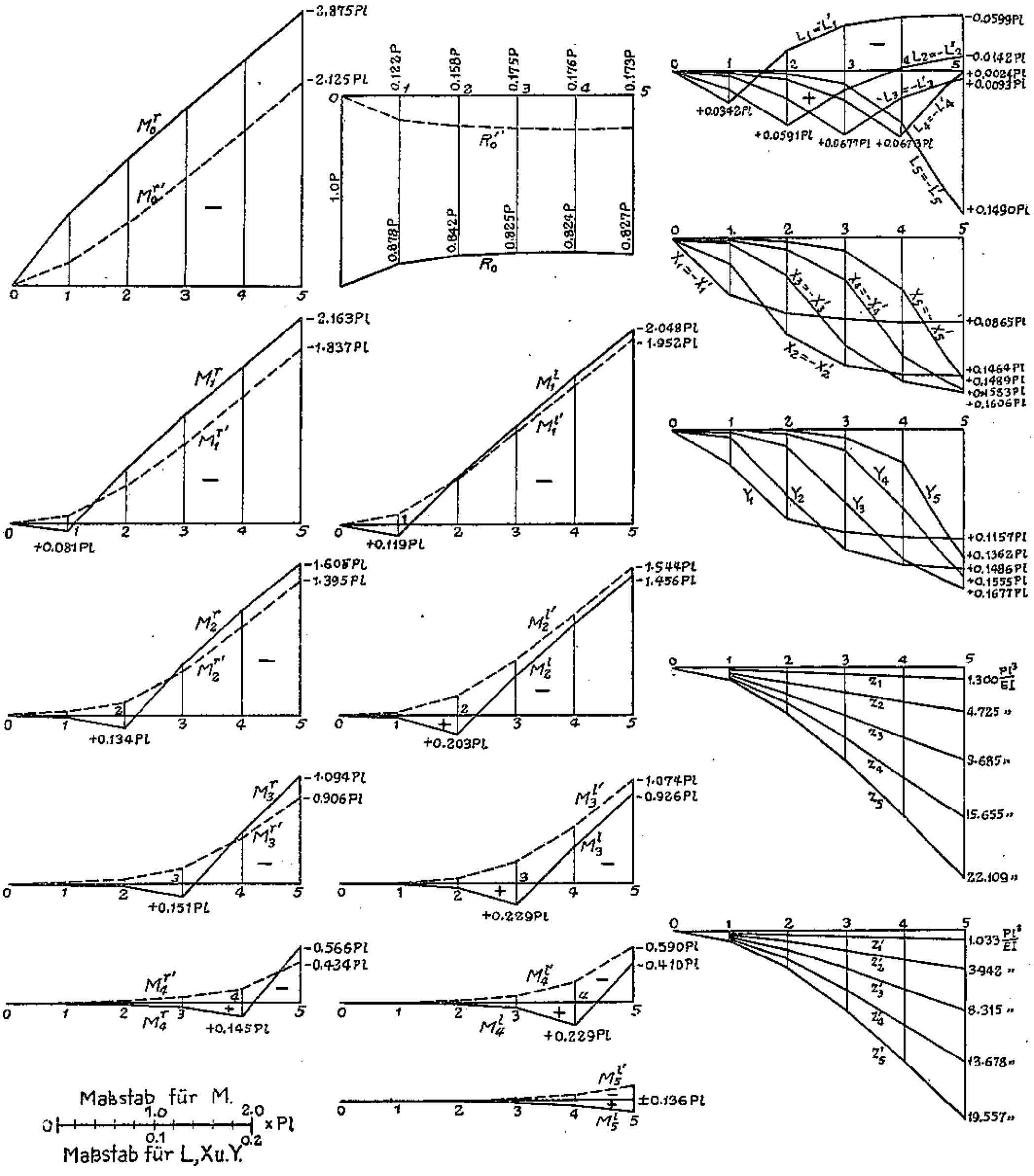
Torsionsmomente.

Biegungsmomente



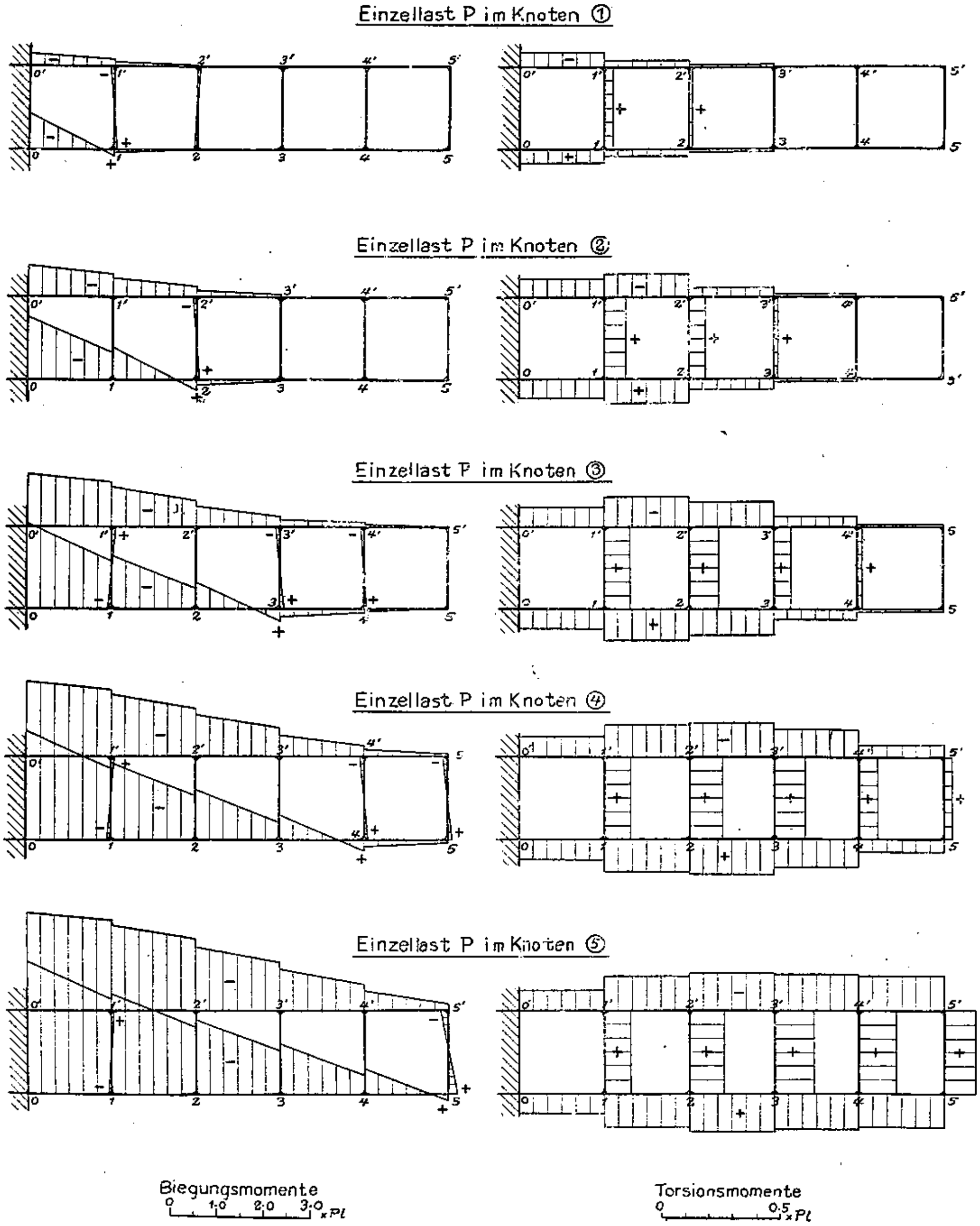
Torsionsmomente

Tafel V. Beispiel zum einseitig eingespannten Leiterträger. Einflusslinien.



(土木學會誌第十二卷第十號附圖)

Tafel VI. Beispiel zum einseitig eingespannten Leiterträger. Momentenverlauf.



(土木學會誌第十七卷第十號附圖)