

論 說 報 告

土木學會誌 第十七卷第八號 昭和六年八月

耐壓試験の際に生ずる圓筒形物体内の應力
分布及び其の破壊状態に就て

准 員 工 學 士 木 村 二 郎

On the Stress Distribution in the Cylinder under
Compression Test

By Jiro Kimura, C. E., Assoc. Member.

内 容 梗 概

此の論文は東京帝大工學部土木科に於て山口教授指導の下に著者が卒業論文として纏めたものゝ大要である。物體の耐壓試験を行ふ時試験器の壓縮面と試験材の兩端面との間に起る摩擦を考へた時に其の物体内に生ずる應力分布を彈性學によつて解く事は夫れが圓筒形なる場合に限り既に Filon によつて求められてゐる。著者は之れを色々な形の圓筒に就きて實際に計算し、それが一般に摩擦を考へない時の應力と何程の差違を示すかを見、一方試験材に色々な boundary conditions を與へて其の破壊状態を觀察して物體破壊に関する研究に資せんとしたものである。

目 次

第一章	緒 言	1
第二章	圓筒形耐壓試験體の解法	2
第三章	數計算例	8
	1 直徑約 5 糎, 長さ約 8 糎の試験體	8
	2 直徑約 5 糎, 長さ約 5 糎の試験體	11
	3 直徑約 5 糎, 長さ約 2 糎の試験體	12
	4 直徑約 5 糎, 長さ約 1 糎の試験體	12
第四章	破壊試験	13
第五章	結 論	16

第 一 章 緒 言

物體を試験器にかけて耐壓試験を行ふとき、此の物體の中には應力の分布が全く一樣なるものと一般に假定して其の強度とか種々の性質を考察してゐるが試験器の壓縮面と之れと接

する試験體の兩端面との間には相當に大なる摩擦がある爲に此の試験體の試験器と接する兩端面は横方の膨脹を妨げられる。即ち此の面に膨脹を妨げんとする方向に剪力が作用するのである。此の故に試験體の中にする應力の分布は全く一樣なるわけにはいかない。

そこで斯ういふ時に此の試験體の中に如何なる應力の分布を生ずるか又一般に摩擦なしと考へた時とどれ程の差違のあるものかといふ事を理論的に計算して延いては耐壓試験に表はるゝ強度と破壊する模様とを調べて見やうとしたのである。

弾性學より理論的に此の問題を解くには試験器に接する兩端面が全く膨脹を許されざるものと考へる、然し實際には或値の膨脹を許す譯であるから、斯くして解いた結果と一樣なる分布の時との中間と考へればよいであらう。此の應力分布は試験體の形により大いに異なるべきにより半径と長さとの比が 1:2, 1:1, 5:2, 5:1, なる四つの異なる長さに就て應力の値を算出して之れ等と比較し且つ實驗によつて其の強度を比較し尙又其の兩端面の boundary conditions を變じて破壊状態の比較をも行つたのである。

第二章 圓錐形耐壓試験體の解法 (Filon の方法)*

圓錐座標を用ひて物体内の平衡條件より基礎方程式を導く時は次の式を得る。(Föppl: Drang und Zwang, IIer Bd. S. 171)

$$\left. \begin{aligned} (D^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2})^2 \frac{\partial \xi}{\partial r} &= 0 \\ (D^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2})^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{但し } \left. \begin{aligned} D &= \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \\ D^2 &= \frac{\partial}{\partial r} D = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

ξ : x 方向の變位

ρ : r 方向の變位

應力は通常の stress strain の關係式を圓錐座標によつて表はせば (Föppl: Drang und Zwang IIer Bd.S. 139.)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2G \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{e}{m-2} \right) \\ \sigma_r &= 2G \left(\frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{e}{m-2} \right) \\ \sigma_t &= 2G \left(\frac{\rho}{r} + \frac{e}{m-2} \right) \\ \tau &= G \left(\frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

* Filon: Trans. Roy. Soc. A Vol. CXCVIII.

- 但し σ_x : x 方向の normal stress
 σ_r : radial の normal stress
 σ_t : tangential の normal stress
 τ : shear
 G : 剛性率 (rigidity modulus)
 m : Poisson's number

$$e = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{\rho}{r}$$

故に此の問題を解くに當つては

$$\left(D^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^2 y = 0 \dots\dots\dots (4)$$

を解くことに歸着するのである。

(4) を解いて displacement を得れば (3) によつて stress を求むることが出来る。

(4) の solution は

$$y = A \cos(kx + \alpha) I_1(kr) + B \cos(kx + \beta) K_1(kr) \\
+ C \cos(kx + \gamma) r I_0(kr) + D \cos(kx + \delta) r K_0(kr) \\
+ E x \cos(kx + \epsilon) I_1(kr) + F x \cos(kx + \theta) K_1(kr)$$

今本論文に取扱ふべき cylinder では $r=0$ に於て $\frac{\partial \rho}{\partial x}$ 及び $\frac{\partial \xi}{\partial r}$ が無限大となる事なきが故に K を含まず。

故に

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \sum \left\{ A_1 \cos(kx + \alpha_1) I_1(kr) + C_1 \cos(kx + \gamma_1) r I_0(kr) + E_1 x \cos(kx + \epsilon_1) I_1(kr) \right\} \dots\dots\dots (5)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial r} = \sum \left\{ A_2 \cos(kx + \alpha_2) I_1(kr) + C_2 \cos(kx + \gamma_2) r I_0(kr) + E_2 x \cos(kx + \epsilon_2) I_2(kr) \right\} \dots\dots\dots (6)$$

今問題の性質として ρ は x に對して偶函數なる事を要し ξ は x に関して奇函數なる事を要するが故に (5) 及び (6) を積分し

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = -\frac{\pi}{2}, \quad \epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$$

を入れれば

$$\rho = \chi(r) + \sum \left\{ -\frac{A_1}{k} \cos kx I_1(kr) - \frac{C_1}{k} \cos kx \cdot r I_0(kr) + \frac{E_1}{k} \left(x \sin kx + \frac{\cos kx}{k} \right) I_1(kr) \right\} \dots\dots\dots (7)$$

$$\xi = \theta(x) + \sum \left\{ \frac{A_2}{k} \sin kx I_0(kr) + \frac{C_2}{k} \sin kx \cdot r I_1(kr) + \frac{E_2}{k} x \cos kx I_0(kr) \right\} \dots\dots\dots (8)$$

圓筒彈性學の基本式は下の如し (Föppl: Drang und Zwang IIer Bd. S. 159)

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{m-2}{2(m-1)} D \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{m}{2(m-1)} \frac{\partial}{\partial x} D \rho = 0 \dots\dots\dots (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} D_{\theta} + \frac{m-2}{2(m-1)} \frac{\partial^2 \rho}{\partial r^2} + \frac{m}{2(m-1)} \frac{\partial^2 \xi}{\partial r \partial x} = 0 \quad \dots\dots\dots (10)$$

今 (9) に (7), (8) の値を入れ

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} I_0(kr) &= k I_1(kr) \\ \frac{d}{dr} I_1(kr) &= k \left\{ \frac{I_0(kr)}{2} + \frac{I_2(kr)}{2} \right\} \\ \frac{2}{kr} I_1(kr) &= I_0(kr) - I_2(kr) \end{aligned}$$

$$\text{従つて} \quad \frac{1}{2} I_2(kr) + \frac{1}{kr} I_1(kr) + \frac{1}{2} I_0(kr) = I_0(kr)$$

(Gray and Mathews: Bessel Functions, p. 20)

を用ひて簡単にすれば

$$\begin{aligned} (2m-2) \frac{d^2}{dx^2} \theta(x) + \sum \left[(A_1 - A_2) m k \sin kx I_0(kr) + C_1 m \sin kx \{ 2I_0(kr) + kr I_1(kr) \} \right. \\ \left. + C_2 \{ -mkr \sin kr I_1(kr) + 2(m-2) \sin kx I_0(kr) \} + E_1 m k \cos kx I_0(kr) \right. \\ \left. - E_2 \{ m k x \cos kx I_0(kr) + 4(m-1) \sin kx I_0(kr) \} \right] = 0 \end{aligned}$$

これが成立するためには先づ

$$\frac{d^2}{dx^2} \theta(x) = 0 \quad \dots\dots\dots (11)$$

而して又之れは r 及び x の如何なる値に對しても成立せねばならぬのであるから今假に

$r=0$, $x=\frac{\pi}{2k}$ を入れると

$$\begin{aligned} \sin kx &= 1 & \cos kx &= 0 \\ I_0(kr) &= 1 & I_1(kr) &= 0 \end{aligned}$$

なるを以て

$$(A_1 - A_2) mk + 2 \{ C_1 m + C_2 (m-2) - 2E_2 (m-1) \} = 0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

全く同様にして (10) に (7), (8) を入れ

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dr^2} I_1(kr) &= k^2 \left\{ \frac{3}{4} I_1(kr) + \frac{1}{4} I_3(kr) \right\} \\ \frac{d^2}{dr^2} r I_0(kr) &= 2k I_1(kr) + k^2 r \left\{ \frac{I_0(kr)}{2} + \frac{I_2(kr)}{2} \right\} \\ \frac{4}{kr} I_2(kr) &= I_1(kr) - I_3(kr) \end{aligned}$$

(Gray and Mathews: Bessel Functions, p. 20)

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} k I_1(kr) + \frac{1}{4} k I_3(kr) + \frac{I_0(kr)}{2r} + \frac{I_2(kr)}{2r} - \frac{1}{kr^2} I_1(kr) &= k I_1(kr) \\ 3I_1(kr) + \frac{kr}{2} I_0(kr) + \frac{kr}{2} I_2(kr) &= 2I_1(kr) + kr I_0(kr) \end{aligned}$$

なるが故に

$$\begin{aligned} 2(m-1)D^2\chi(r) + \sum \left[(A_2 - A_1)mk \cos kx I_1(kr) + C_1 \left\{ -mk \cos kx \cdot r I_0(kr) \right. \right. \\ \left. \left. - 4(m-1) \cos kx I_1(kr) \right\} + E_1 mk \left(x \sin kx + \frac{\cos kx}{k} \right) I_1(kr) \right. \\ \left. + C_2 mk \cos kx \cdot r I_0(kr) + E_2 mk \left(\frac{\cos kx}{k} + x \sin kx \right) I_1(kr) \right] = 0 \end{aligned}$$

之れが常に成立する爲には先づ

$$D^2\chi(r) = 0 \dots \dots \dots (13)$$

ならざるべからず。今假りに

$$C_1 = C_2 = C \dots \dots \dots (14)$$

$$E_1 = E_2 = E \dots \dots \dots (15)$$

とすると(12)式は

$$(A_1 - A_2)mk + 4(m-1)(C - E) = 0 \dots \dots \dots (16)$$

又(11), (13)より $\chi(r) = \rho_0 r$, $\theta(x) = \xi_0 x \dots \dots \dots (17)$

を得。如何となれば ξ は x に就て奇函数であり ρ は $r=0$ に於いて無限大になり得ないからである。

以上得た式を(3)に入れて stress の式を出すと

$$e = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{\rho}{r}$$

なるが故に之れに入れて簡単にすれば

$$\begin{aligned} \sigma_x = \frac{4G}{m-2} \rho_0 + \frac{2(m-1)G}{m-2} \xi_0 + \sum \left[\left\{ \frac{2(m-1)G}{m-2} A_2 - \frac{2G}{m-2} A_1 - \frac{2G}{m-2} \frac{2C}{k} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2mGE}{(m-2)k} \right\} \cos kx I_0(kr) + 2G \left\{ Cr \cos kx I_1(kr) - Er \sin kx I_0(kr) \right\} \right] \dots \dots \dots (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_r = \frac{2G}{m-2} \xi_0 + \frac{2mG}{m-2} \rho_0 + \sum \left[\frac{2G}{m-2} \left\{ (m-1)A_1 + A_2 + \frac{m}{k}(E - C) \right\} \cos kx I_0(kr) \right. \\ \left. + 2G \left\{ \left(A_1 - \frac{E}{k} \right) \cos kx \frac{I_2(kr)}{kr} + Er \sin kx \left\{ I_0(kr) - \frac{I_1(kr)}{kr} \right\} - C \cos kx \cdot r I_1(kr) \right\} \right] \\ \dots \dots \dots (19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_t = \frac{2G}{m-2} \xi_0 + \frac{2mG}{m-2} \rho_0 + \sum \left[\frac{2G}{m-2} \left\{ A_2 - A_1 - m \frac{C}{k} + 2 \frac{E}{k} \right\} \cos kx I_0(kr) \right. \\ \left. + 2G \left\{ \left(\frac{E}{k} - A_1 \right) \cos kx \frac{I_2(kr)}{kr} + Er \sin kx \frac{I_1(kr)}{kr} \right\} \right] \dots \dots \dots (20) \end{aligned}$$

$$\tau = G \sum \left[(A_1 + A_2) \sin kx I_1(kr) + 2C (\sin kx \cdot r I_0(kr) + 2Er \cos kx I_1(kr)) \right] \dots \dots \dots (21)$$

以上の式中に含まるゝ常数を boundary conditions によつて定めて行くのである。

Boundary conditions として

(i) 両端面に作用する全壓力 = $\pi a_0 Q$

a = 試験體の半徑, Q = 平均壓力(單位面積)

但し此の distribution は unknown である。

(ii) 壓縮せられる際両端面は平面の儘なるものとす。例へば鋼の間にコンクリート又はモルタル等を挟んで壓するときは鋼の剛度はモルタルの剛度に比し遙かに大であるから

$$\xi = \text{const} \quad \text{at} \quad x = \pm c$$

c : 試験體の全長の半分

(iii) $r = a, x = \pm c$ に於て $\rho = 0$

(iv) $r = a$ に於て $\sigma_r = 0$ 及び $r = 0$ 。

先づ (ii) の條件を (8) に入れ且つ (14), (15), (17) を用ひ且つ $x = \pm c$ を入れれば

$$\xi = \pm \xi_0 c + \sum \left\{ \frac{A_2}{k} \sin(\pm kc) I_0(kr) + \frac{C}{k} \sin(\pm kc) r I_1(kr) \pm \frac{E}{k} c \cos kc I_0(kr) \right\} = \text{const.}$$

r が如何なる値の時にも之れが成立する爲には $\sin(\pm kc)$ を零とするやうにしても $E = 0$ でなければならぬ、

又 (iv) の條件を (19), (21) に入れることにより

$$\frac{2G}{m-2} \xi_0 + \frac{2mG}{m-2} \rho_0 + \frac{2G}{m-2} \left\{ (m-1) A_1 + A_2 - m \frac{C}{k} \right\} I_0(ka) + 2G \left\{ A_1 \frac{I_1(ka)}{ka} - C a I_1(ka) \right\} = 0$$

及び $(A_1 + A_2) I_1(ka) + 2C a I_0(ka) = 0$

を得。之れと (16) とによりこゝに A_1, A_2, C の間に三つの linear homogeneous equations を得たのであるが之れは一般に $A_1 = 0, A_2 = 0, C = 0$ でない限り成立しないのであるから此の場合應力及び變形の式は純然たる x の periodic series で表はすことは出来ない。故に ξ 及び ρ が二つの部分より成るものと假定する。第一の部分は之れを U, W とし之れは前に得たる periodic solution である。第二の部分は r 及び x の finite power とする。

故に
$$\rho = \rho_0 r + \frac{\rho_1 r^3}{3} + \frac{\rho_2 r^5}{5} + \frac{D r x^2}{2} + \frac{E r^3 x^2}{2} + \frac{F r x^4}{4} + U \dots \dots \dots (22)$$

$$\xi = \xi_0 x + \frac{\xi_1 x^3}{3} + \frac{\xi_2 x^5}{5} + \frac{D' r^2 x}{2} + \frac{E' r^2 x^3}{2} + \frac{F' r^4 x}{4} + W \dots \dots \dots (23)$$

此の式の power series は 5 次であつて ρ は r に對して奇函數であり x に對して偶函數であり又 ξ は x に對して奇函數であり r に對して偶函數なりといふ條件を満足せしむる一般式である。

$$U = \sum \left\{ -\frac{A_1}{k} I_1(kr) - \frac{C}{k} r I_0(kr) \right\} \cos kx \dots \dots \dots (24)$$

$$W = \sum \left\{ \frac{A_2}{k} I_0(kr) + \frac{C}{k} r I_1(kr) \right\} \sin kx \dots \dots \dots (25)$$

斯くして上の boundary conditions によつて各常數を決定すれば

$$k = \frac{n\pi}{c}$$

$$F' = 0$$

$$\xi_1 = \left(a^2 - \frac{8c^2}{3} \right) \gamma E$$

$$\xi_2 = \frac{4}{3} \gamma E$$

$$\rho_1 = \frac{3}{8} \left[(1-\gamma)a^2 - \frac{4}{3}c^2 \right] E$$

$$\rho_2 = -\frac{5}{24}(1-\gamma)E$$

$$D = \left\{ \frac{4}{3}(1+\gamma)c^2 - a^2 \right\} E$$

$$F = -\frac{4}{3}(1+\gamma)E$$

$$D' = \frac{4}{3} \gamma c^2 E$$

$$E' = -\frac{4}{3} \gamma E$$

$$A_1 = (-1)^n \frac{8ac^3}{n^3 \pi^3} (2\gamma+1)E - \frac{C}{k} \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{kaI_0(ka)}{I_1(ka)} \right)$$

$$A_2 = (-1)^n \frac{8ac^3}{n^3 \pi^3} (2\gamma+1)E - \frac{C}{k} \left(\frac{kaI_0(ka)}{I_1(ka)} - \frac{1}{\gamma} \right)$$

$$C = (-1)^n \frac{2a^2 \gamma E}{k} \frac{\left\{ (2\gamma+1)ka + \frac{4}{ka}(8\gamma+1)I_1(ka) - 4I_0(ka)(2\gamma+1) \right\}}{\gamma k^2 a^2 I_3^2(ka) - (1+\gamma k^2 a^2)I_1^2(ka)}$$

$$E = \frac{-Q(2\gamma-1)}{G \{ h + (2\gamma-1)f + 2g(4\gamma-1) \}}$$

$$\rho_0 = \frac{Qg(2\gamma-1)}{G \{ h + (2\gamma-1)f + 2g(4\gamma-1) \}}$$

$$\xi_0 = \frac{-Q \{ h(1-\gamma) + 2g\gamma \}}{G \{ h + (2\gamma-1)f + 2g(4\gamma-1) \}}$$

茲に

$$\gamma = \frac{m}{2(m-1)}$$

$$f = (2\gamma-1) \frac{a^4}{6} + \frac{1}{3} a^2 c^2 - \frac{14}{45} (2\gamma+1) c^4$$

$$g = \frac{1}{12} (1-\gamma-\xi) a^4 - \frac{1}{6} a^2 c^2 + \frac{1}{3} \left\{ 1+\gamma - \frac{4}{15} (2\gamma+1) \right\} c^4$$

$$h = -\frac{14}{15} c^4 \gamma - \frac{a^4}{12} (2\gamma+1) + \frac{2a^2 c^2 \gamma}{3}$$

$$\xi = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{24}{k^2 a^3} \left[(2\gamma+1)ka + \frac{4}{ka} (8\gamma+1) \right] I_1^2(ka) - (8\gamma+4)I_0(ka)I_1(ka)}{\gamma k^2 a^2 I_3^2(ka) - I_1^2(ka)(1+\gamma k^2 a^2)}$$

之れ等の常數を入れれば

$$\sigma_r = GE \left\{ - \left[\frac{2\gamma+1}{12} a^4 - \frac{2\gamma}{3} a^2 c^2 + \frac{14}{15} \gamma c^4 \right] + r^2 \left[(1+\gamma) \frac{a^2}{4} - (4\gamma+1) \frac{c^2}{3} \right] + 2v^2 \gamma (2c^2 - a^2) \right. \\ \left. - r^4 \frac{\gamma+2}{12} + r^2 v^2 (4\gamma+1) - 2\gamma v^4 + \frac{16ac^3}{\pi^3} (2\gamma+1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3 I_1(\alpha)} \left\{ \frac{I_1(\rho)}{\rho} - I_0(\rho) \right\} \cos \frac{n\pi r}{c} \right.$$

$$-\frac{4c^2 a^2 \gamma}{\pi^2} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \left[\left\{ (2\gamma+1)c\alpha + \frac{4}{\alpha} (8\gamma+1) \right\} I_1 - (8\gamma+4)I_0 \right] \left[\left(\frac{cI_0}{I_1} + 1 \right) I_0(\rho) - \left(\frac{cI_0}{I_1} + \frac{1}{\gamma} \right) \frac{I_1(\rho)}{\rho} - \rho I_2(\rho) \right] \cos \frac{n\pi r}{c} \Bigg\} \\ \times \frac{\gamma c^2 (I_0^2 - I_1^2) - I_1^2}{\gamma c^2 (I_0^2 - I_1^2) - I_1^2} \cos \frac{n\pi r}{c} \quad (26)$$

$$\sigma_x = -Q + GE \left\{ - \left[\frac{2\gamma-1}{6} a^4 + \frac{1}{3} a^2 c^2 - \frac{14}{45} (2\gamma+1) c^4 \right] + r^2 \left[\frac{2\gamma-1}{2} a^2 + \frac{2}{3} c^2 \right] \right. \\ \left. - a^2 \left[\frac{4}{3} (2\gamma+1) c^2 - a^2 \right] - r^4 \frac{2\gamma-1}{4} - 2r^2 x^2 + \frac{2}{3} (2\gamma+1) x^4 + \frac{16ac^3}{\pi^3} (2\gamma+1) \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n I_0(\rho)}{n^3 I_1(c\alpha)} \cos \frac{n\pi r}{c} \right. \\ \left. - \frac{4c^2 a^2 \gamma}{\pi^2} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \left[\left\{ (2\gamma+1)c\alpha + \frac{4}{\alpha} (8\gamma+1) \right\} I_1 - (8\gamma+4)I_0 \right] \left[\rho I_1(\rho) - I_0(\rho) \left(\frac{cI_0}{I_1} - 2 \right) \right] \cos \frac{n\pi r}{c} \right\} \\ \times \frac{\gamma c^2 (I_0^2 - I_1^2) - I_1^2}{\gamma c^2 (I_0^2 - I_1^2) - I_1^2} \cos \frac{n\pi r}{c} \quad (27)$$

$$\sigma_t = GE \left\{ - \left(\frac{2\gamma+1}{12} a^4 - \frac{2}{3} \gamma a^2 c^2 + \frac{14}{15} \gamma c^4 \right) + r^2 \left[(3\gamma-1) \frac{a^2}{4} - (4\gamma-1) \frac{c^2}{3} \right] + 2\gamma x^2 (2c^2 - a^2) \right. \\ \left. - r^4 \frac{5\gamma-2}{12} + r^2 x^2 (4\gamma-1) - 2\gamma x^4 + \frac{16ac^3}{\pi^3} (2\gamma+1) \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n I_1(\rho)}{n^3 \rho I_1(c\alpha)} \cos \frac{n\pi r}{c} \right. \\ \left. - \frac{4c^2 a^2 \gamma}{\pi^2} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \left[\left\{ (2\gamma+1)c\alpha + \frac{4}{\alpha} (8\gamma+1) \right\} I_1 - (8\gamma+4)I_0 \right] \left[\frac{I_1(\rho)}{\rho} \left(\frac{cI_0}{I_1} + \frac{1}{\gamma} \right) - I_0(\rho) \left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right) \right] \right. \\ \left. \times \cos \frac{n\pi r}{c} \right\} \times \frac{\gamma c^2 (I_0^2 - I_1^2) - I_1^2}{\gamma c^2 (I_0^2 - I_1^2) - I_1^2} \cos \frac{n\pi r}{c} \quad (28)$$

$$\tau = GE \left\{ \left[\frac{4}{3} (2\gamma+1) c^2 - a^2 \right] r x + r^3 x - \frac{4}{3} (2\gamma+1) r c^3 + (2\gamma+1) \frac{16ac^3}{\pi^3} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n I_1(\rho)}{n^3 I_1(c\alpha)} \sin \frac{n\pi r}{c} \right. \\ \left. - \frac{4c^2 a^2 \gamma}{\pi^2} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \left[\left\{ (2\gamma+1)c\alpha + \frac{4}{\alpha} (8\gamma+1) \right\} I_1 - (8\gamma+4)I_0 \right] \left[\rho I_0(\rho) - \alpha \frac{I_0}{I_1} I_1(\rho) \right] \sin \frac{n\pi r}{c} \right\} \\ \times \frac{\gamma c^2 (I_0^2 - I_1^2) - I_1^2}{\gamma c^2 (I_0^2 - I_1^2) - I_1^2} \sin \frac{n\pi r}{c} \quad (29)$$

茲に $\rho = kr, \alpha = ka, I_0(ka) = I_0, I_1(ka) = I_1$

第三章 數計算例

1. 直徑約 5 糎, 長さ約 8 糎の試験體

普通用ひらるゝ圓錐形試験體の形に大體似たものである。

$\frac{\pi c}{c} = 1.9634 \div 2$ であるから計算を簡單にする爲に $ka = \frac{4\pi c}{c} = 2\pi$ とし従つて計算上では $c = 7.85\text{cm}$ とす。又 Poisson's number 4 とし従つて

$$\gamma = \frac{m}{2(m-1)} = \frac{2}{3}$$

之れ等の數値を入れれば (26)~(29) 式は次の如くなる。

$$\frac{\sigma_r}{GE} = -2.886a^4 - 2.599a^2 r^2 + 5.246a^2 r^2 - \frac{2}{9} r^4 + \frac{11}{3} r^2 x^2 - \frac{4}{3} r^4$$

$$+ \frac{14}{3} a^4 \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} c_n \cos \frac{n\pi r}{c} - \frac{2}{3} a^4 \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} e_n \cos \frac{n\pi x}{c} \dots\dots\dots (30)$$

$$\frac{\sigma_r + Q}{GE} = 3.541a^4 + 1.812a^2 r^2 - 6.676a^2 x^2 - \frac{1}{12} r^4 - 2r^2 x^2 + \frac{14}{9} x^4$$

$$+ \frac{14}{3} a^4 \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} f_n \cos \frac{n\pi x}{c} - \frac{2}{3} a^4 \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} g_n \cos \frac{n\pi x}{c} \dots\dots\dots (31)$$

$$\frac{\sigma_t}{GE} = -2.886a^4 - 1.121a^2 r^2 + 5.246a^2 x^2 - \frac{1}{9} r^4 + \frac{5}{3} r^2 x^2 - \frac{4}{3} x^4$$

$$- \frac{14}{3} a^4 \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} h_n \cos \frac{n\pi r}{c} - \frac{2}{3} a^4 \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} l_n \cos \frac{n\pi x}{c} \dots\dots\dots (32)$$

$$\frac{\tau}{GE} = 6.676a^2 r x + r^3 x - \frac{28}{9} r x^3 + \frac{14}{3} a^4 \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} p_n \sin \frac{n\pi r}{c}$$

$$- \frac{2}{3} a^4 \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} q_n \sin \frac{n\pi x}{c} \dots\dots\dots (33)$$

茲に $c_n, e_n, f_n, g_n, h_n, l_n, p_n, q_n$ は $ka = \alpha, I_0(ka) = I_0, I_1(ka) = I_1$ と書けば

$$c_n = \frac{I_0(\rho) - I_0(\alpha)}{I_1(\alpha)}$$

$$e_n = \frac{\left[\left\{ (2\gamma + 1)\alpha + \frac{4}{\alpha} (\delta\gamma + 1) \right\} I_1 - (\delta\gamma + 4) I_0 \right] \left[\left(\frac{\alpha I_0}{I_1} + 1 \right) I_0(\rho) - \left(\frac{\alpha I_1}{I_1} + \frac{1}{\gamma} \right) \frac{I_1(\rho)}{\rho} - \rho I_1(\rho) \right]}{\gamma \alpha^2 (I_0^2 - I_1^2) - I_1^2}$$

$$f_n = \frac{I_0(\rho)}{I_1(\alpha)}$$

$$g_n = \frac{\left[\left\{ (2\gamma + 1)\alpha + \frac{4}{\alpha} (\delta\gamma + 1) \right\} I_1(\alpha) - (\delta\gamma + 4) I_0(\alpha) \right] \left[\rho I_1(\rho) - I_0(\rho) \left(\frac{\alpha I_0(\alpha)}{I_1(\alpha)} - 2 \right) \right]}{\gamma \alpha^2 (I_0^2 - I_1^2) - I_1^2}$$

$$h_n = \frac{I_1(\rho)}{\rho I_1(\alpha)}$$

$$l_n = \frac{\left[\left\{ (2\gamma + 1)\alpha + \frac{4}{\alpha} (\delta\gamma + 1) \right\} I_1(\alpha) - (\delta\gamma + 4) I_0(\alpha) \right] \left[\frac{I_1(\rho)}{\rho} \left(\frac{\alpha I_0(\alpha)}{I_1(\alpha)} + \frac{1}{\gamma} \right) - I_0(\rho) \left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right) \right]}{\gamma \alpha^2 (I_0^2 - I_1^2) - I_1^2}$$

$$p_n = \frac{I_1(\rho)}{I_1(\alpha)}$$

$$q_n = \frac{\left[\left\{ (2\gamma + 1)\alpha + \frac{4}{\alpha} (\delta\gamma + 1) \right\} I_1(\alpha) - (\delta\gamma + 4) I_0(\alpha) \right] \left[\rho I_0(\rho) - \alpha \frac{I_0}{I_1} I_1(\rho) \right]}{\gamma \alpha^2 (I_0^2 - I_1^2) - I_1^2}$$

今之れ等の値を計算して應力を出せば良いわけであるが之れ等の係数は $r = a$ の時のみには converge しない性質を持つてゐる。

故に $r = a$ では特別な計算法を必要とする。

$r = a$ の時の計算法

各常数を α の降幂で表はさんが爲に先づ $I_0(\alpha)$ 及び $I_1(\alpha)$ を α の降幂で表はせば

$$I_n(\alpha) = \frac{e^\alpha}{\sqrt{2\pi\alpha}} \left\{ 1 - \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{1!(2\alpha)} + \frac{(n^2 - \frac{1}{4})(n^2 - \frac{3}{4})}{2!(2\alpha)^2} \dots \dots \dots \right\}$$

(佐野静雄, 應用數學. p. 328)

$$\begin{aligned} \therefore I_0(\alpha) &= \frac{e^\alpha}{\sqrt{2\pi\alpha}} \left(1 + \frac{1}{8\alpha} + \frac{9}{128\alpha^2} + \frac{75}{1024\alpha^3} + \dots \dots \dots \right) \\ I_1(\alpha) &= \frac{e^\alpha}{\sqrt{2\pi\alpha}} \left(1 - \frac{3}{8\alpha} + \frac{15}{128\alpha^2} - \frac{105}{1024\alpha^3} \dots \dots \dots \right) \\ I_0^2(\alpha) &= \frac{e^{2\alpha}}{2\pi\alpha} \left(1 + \frac{1}{4\alpha} + \frac{5}{32\alpha^2} + \frac{21}{128\alpha^3} + \dots \dots \dots \right) \\ I_1^2(\alpha) &= \frac{e^{2\alpha}}{2\pi\alpha} \left(1 - \frac{3}{4\alpha} - \frac{3}{32\alpha^2} - \frac{15}{128\alpha^3} \dots \dots \dots \right) \\ I_0^3(\alpha) &= \frac{e^{3\alpha}}{\sqrt{2\pi\alpha^3}} \left(1 + \frac{3}{8\alpha} + \frac{33}{128\alpha^2} + \frac{281}{1024\alpha^3} + \dots \dots \dots \right) \\ I_0^2(\alpha)I_1(\alpha) &= \frac{e^{2\alpha}}{2\pi\alpha} \left(1 - \frac{1}{4\alpha} - \frac{3}{32\alpha^2} - \frac{9}{128\alpha^3} \dots \dots \dots \right) \end{aligned}$$

今 $r=a$ では $\sigma_r=0, \tau=0$ であるから以上の値を f_n, g_n, h_n, l_n の値のみに入れ $\rho=\alpha$ と置きて簡単にすれば

$$\left. \begin{aligned} f_n(\alpha) &= 1 + \frac{1}{2\alpha} + \frac{3}{8\alpha^2} + \frac{3}{8\alpha^3} + \dots \dots \dots \\ g_n(\alpha) &= \frac{7}{2} - \frac{49}{4\alpha} + \frac{157}{8\alpha^2} + \frac{503}{32\alpha^3} + \dots \dots \dots \\ h_n(\alpha) &= \frac{1}{\alpha} \\ l_n(\alpha) &= \frac{7}{4} - \frac{165}{16\alpha^2} + \frac{335}{8\alpha^3} + \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (34)$$

今 $f_n^{(4)}(\alpha), g_n^{(4)}(\alpha), l_n^{(4)}(\alpha)$ で之れ等の最初の4項の和を示し $f_n'(\alpha), g_n'(\alpha), l_n'(\alpha)$ でその剰餘を示すものとすれば

$$\begin{aligned} \frac{(\sigma_x + Q)_{r=a}}{GE} &= 5.270a^4 - 8.676a^2x^2 + \frac{14}{9}x^4 + \frac{2}{3}a^4 \left\{ -\frac{7}{2} \sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{c} \right. \\ &\quad \left. - \frac{101}{32} \sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n^4} \cos \frac{n\pi x}{c} + \frac{21}{64} \sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n^6} \cos \frac{n\pi x}{c} \right\} \\ &\quad + \frac{2}{3}a^4 \sum_1^\infty (-1)^n \cos \frac{n\pi x}{c} \left\{ 7 \frac{f_n'}{n^3} - \frac{g_n'}{n^2} \right\} \\ &\quad + \frac{2}{3}a^4 \sum_1^\infty (-1)^n \cos \frac{n\pi x}{c} \left\{ \frac{105}{8} \frac{1}{n^3} - \frac{335}{256} \frac{1}{n^5} \right\} \\ \frac{(\sigma_t)_{r=a}}{GE} &= -4.118a^4 + 6.913a^2x^2 - \frac{4}{3}x^4 - \frac{2}{3}a^4 \left\{ \frac{7}{4} \sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{c} \right. \\ &\quad \left. + \frac{59}{64} \sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n^4} \cos \frac{n\pi x}{c} \right\} - \frac{2}{3}a^4 \sum_1^\infty (-1)^n \cos \frac{n\pi x}{c} \left\{ \frac{335}{64} \frac{1}{n^5} + \frac{l_n'}{n^2} \right\} \end{aligned}$$

此の式に $\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{c}, \sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n^4} \cos \frac{n\pi x}{c}, \sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n^6} \cos \frac{n\pi x}{c}$ の値を入れて

簡単にすれば

$$\frac{(\sigma_x+Q)_{r=a}}{GEa^3} = 8.966 - 14.057 \frac{x^2}{a^2} + 2.137 \frac{x^4}{a^4} + 0.010 \frac{x^6}{a^6} \\ + \sum_1^{\infty} (-1)^n \cos \frac{n\pi r}{c} \left\{ \frac{14}{3} \frac{f_n'}{n^3} - \frac{2}{3} \frac{g_n'}{n^2} + \frac{35}{4} \frac{1}{n^3} - \frac{335}{384} \frac{1}{n^5} \right\} \dots \dots \dots (35)$$

$$\frac{(\sigma_r)_{r=a}}{GEa^3} = -2.576 + 4.735 \frac{x^2}{a^2} - 1.128 \frac{x^4}{a^4} - \sum_1^{\infty} (-1)^n \cos \frac{n\pi x}{c} \left\{ \frac{2}{3} \frac{l_n'}{n^2} + \frac{335}{96} \frac{1}{n^5} \right\} \dots \dots (36)$$

今前に得たる f_n, g_n, l_n の値と之れを冪級数とした時の第四項までの和とにより f_n', g_n', l_n を計算すると之れは速かに converge するから計算が出来る。

之れ等より

$$\frac{(\sigma_x+Q)_{r=a}}{GEa^3} = 8.966 - 14.057 \frac{x^2}{a^2} + 2.137 \frac{x^4}{a^4} + 0.010 \frac{x^6}{a^6} \\ + \frac{14}{3} \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{f_n'}{n^3} \cos \frac{n\pi x}{c} - \frac{2}{3} \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{g_n'}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{c} \\ + \frac{35}{3} \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^3} \cos \frac{n\pi x}{c} - \frac{335}{384} \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^5} \cos \frac{n\pi x}{c} \\ \frac{(\sigma_r)_{r=a}}{GEa^3} = -2.576 + 4.735 \frac{x^2}{a^2} - 1.128 \frac{x^4}{a^4} - \frac{2}{3} \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2} l_n' \cos \frac{n\pi x}{c} \\ - \frac{335}{96} \sum_1^{\infty} (-1)^n \cos \frac{n\pi r}{c}$$

以上により全部の應力を計算したものを示せば附圖第一となる。

2. 直徑約 5 厘, 長さ約 5 厘の試験體

$$\frac{\pi a}{c} = 3.14 \div 3$$

故に簡單の爲に $\alpha = \frac{n\pi a}{c} = 3n$ とし従つて計算上では $c = 5.236 \text{cm}$ とす。

第一の場合と全く同様にして次の結果を得。

$$\frac{\sigma_r}{GE} = -0.455a^4 - 0.924a^2r^2 + 1.591x^2a^2 - \frac{2}{9}r^4 + \frac{11}{3}r^2x^2 - \frac{4}{3}x^4 \\ + \frac{112}{81}a^4 \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} c_n \cos \frac{n\pi r}{c} - \frac{8}{27}a^4 \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} e_n \cos \frac{n\pi r}{c} \\ \frac{\sigma_x+Q}{GE} = -0.452a^4 + 0.90cr^2a^2 - 2.412x^2a^2 - \frac{1}{12}r^4 - 2r^2x^2 + \frac{14}{9}x^4 \\ + \frac{112}{81}a^4 \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} f_n \cos \frac{n\pi x}{c} - \frac{8}{27}a^4 \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} g_n \cos \frac{n\pi x}{c} \\ \frac{\sigma_r'}{GE} = -0.455a^4 - 0.359a^2r^2 + 1.591a^2x^2 - \frac{r^4}{9} + \frac{5}{3}r^2x^2 - \frac{4}{3}x^4 \\ - \frac{112}{81}a^4 \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} l_n \cos \frac{n\pi r}{c} - \frac{8}{27}a^4 \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} l_n \cos \frac{n\pi x}{c}$$

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{GE} &= 2.412a^2 r r + r^3 x - \frac{28}{9} r r^3 + \frac{112}{81} a^4 \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} p_n \sin \frac{n\pi r}{c} \\ &\quad - \frac{8}{27} a^4 \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} q_n \sin \frac{n\pi r}{c} \\ \frac{(\sigma_r + Q)_{r=a}}{GEa^4} &= 2.494 - 8.202 \frac{x^2}{a^2} + 2.252 \frac{x^4}{a^4} + 0.010 \frac{x^6}{a^6} \\ &\quad + \sum_1^{\infty} (-1)^n \cos \frac{n\pi r}{c} \left\{ \frac{112}{81} \frac{f_n'}{n^3} - \frac{8}{27} \frac{g_n'}{n^2} + \frac{70}{27} \frac{1}{n^3} - \frac{335}{2916} \frac{1}{n^5} \right\} \\ \frac{(\sigma_t)_{r=a}}{GEa^4} &= -0.384 + 1.642 \frac{x^2}{a^2} - 1.128 \frac{x^4}{a^4} - \sum_1^{\infty} (-1)^n \cos \frac{n\pi r}{c} \left\{ \frac{8}{27} \frac{h_n'}{n^2} + \frac{335}{729} \frac{1}{n^5} \right\} \end{aligned}$$

以上により全部の應力を出せば附圖第二となる。

3. 直徑約 5 糎, 長さ約 2 糎の試験體

$$\frac{\pi a}{c} = 7.85 \div 8$$

故に簡單の爲に $\alpha = \frac{n\pi a}{c} = 8n$ とし従つて計算上では $c = 1.96 \text{ cm}$ とす。

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_r}{GEa^4} &= -0.141 + 0.228 \frac{x^2}{a^2} - 0.922 \frac{x^4}{a^4} - \frac{2}{9} \frac{x^6}{a^6} + \frac{11}{3} \frac{x^8}{a^8} - \frac{4}{3} \frac{x^{10}}{a^{10}} \\ &\quad + \frac{7}{96} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} e_n \cos \frac{n\pi x}{c} - \frac{1}{24} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} e_n \cos \frac{n\pi x}{c} \\ \frac{\sigma_r + Q}{GEa^4} &= -0.090 + 0.269 \frac{x^2}{a^2} + 0.520 \frac{x^4}{a^4} - \frac{1}{12} \frac{x^6}{a^6} - \frac{5}{9} \frac{x^8}{a^8} + \frac{14}{9} \frac{x^{10}}{a^{10}} \\ &\quad + \frac{7}{96} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} f_n \cos \frac{n\pi x}{c} - \frac{1}{24} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} g_n \cos \frac{n\pi x}{c} \\ \frac{\sigma_t}{GEa^4} &= -0.141 + 0.164 \frac{x^2}{a^2} - 0.922 \frac{x^4}{a^4} - \frac{1}{9} \frac{x^6}{a^6} + \frac{5}{3} \frac{x^8}{a^8} - \frac{4}{3} \frac{x^{10}}{a^{10}} \\ &\quad - \frac{7}{96} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} h_n \cos \frac{n\pi x}{c} - \frac{1}{24} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} l_n \cos \frac{n\pi x}{c} \\ \frac{\tau}{GEa^4} &= -0.520 \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} - \frac{28}{9} \frac{x^6}{a^6} + \frac{7}{96} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} p_n \sin \frac{n\pi x}{c} - \frac{1}{24} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} q_n \sin \frac{n\pi x}{c} \end{aligned}$$

此の場合は convergency 極めて速かなるを以て $n=2$ までとれば充分である。

$$\begin{aligned} \frac{(\sigma_r + Q)_{r=a}}{GEa^4} &= 0.224 - 4.028 \frac{x^2}{a^2} + 2.249 \frac{x^4}{a^4} + 0.097 \frac{x^6}{a^6} \\ &\quad + \sum_1^{\infty} (-1)^n \cos \frac{n\pi x}{c} \left\{ \frac{7}{96} \frac{f_n'}{n^3} - \frac{1}{24} \frac{g_n'}{n^2} + \frac{35}{256} \frac{1}{n^3} - \frac{335}{512 \times 32 \times 24} \frac{1}{n^5} \right\} \\ \frac{(\sigma_t)_{r=a}}{GEa^4} &= -0.025 - 0.485 \frac{x^2}{a^2} - 1.128 \frac{x^4}{a^4} - \sum_1^{\infty} (-1)^n \cos \frac{n\pi x}{c} \left\{ \frac{335}{512 \times 64 \times 3} \frac{1}{n^3} + \frac{1}{24} \frac{l_n'}{n^2} \right\} \end{aligned}$$

以上により全部の應力を計算すれば附圖第三となる。

4. 直徑約 5 糎, 長さ約 1 糎の試験體

$$\frac{\pi a}{c} = 15.708 \doteq 16$$

故に簡單の爲に $\alpha = \frac{\pi a}{c} = 16n$ とし従つて計算上では $c = 0.98 \text{ cm}$ とす

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_r}{GEa^4} = & -0.178 + 0.370 \frac{r^2}{a^2} - 1.231 \frac{r^4}{a^4} - \frac{2}{9} \frac{r^4}{a^4} + \frac{11}{3} \frac{r^2 r^2}{a^4} - \frac{4}{3} \frac{r^4}{a^4} \\ & + \frac{7}{768} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} c_n \cos \frac{n\pi r}{c} - \frac{1}{96} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} e_n \cos \frac{n\pi r}{c} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_x + Q}{GEa^4} = & -0.067 + 0.193 \frac{r^2}{a^2} + 0.880 \frac{r^4}{a^4} - \frac{1}{12} \frac{r^4}{a^4} - 2 \frac{r^2 r^2}{a^4} + \frac{14}{9} \frac{r^4}{a^4} \\ & + \frac{7}{768} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} f_n \cos \frac{n\pi r}{c} - \frac{1}{96} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} g_n \cos \frac{n\pi r}{c} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_t}{GEa^4} = & -0.178 + 0.229 \frac{r^2}{a^2} - 1.231 \frac{r^4}{a^4} - \frac{1}{9} \frac{r^4}{a^4} + \frac{5}{3} \frac{r^2 r^2}{a^4} - \frac{4}{3} \frac{r^4}{a^4} \\ & - \frac{7}{768} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} h_n \cos \frac{n\pi r}{c} - \frac{1}{96} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} l_n \cos \frac{n\pi r}{c} \end{aligned}$$

$$\frac{\tau}{GEa^4} = -0.880 \frac{r r}{a^2} + \frac{r^4 r}{a^4} - \frac{28}{9} \frac{r r^3}{a^4} + \frac{7}{768} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} p_n \sin \frac{n\pi r}{c} - \frac{1}{96} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} q_n \sin \frac{n\pi r}{c}$$

此の場合の convergency は更に速かであり $n=1$ のみとれば充分である。

$$\frac{(\sigma_x + Q)_{r=a}}{GEa^4} = 0.072 - 3.507 \frac{r^2}{a^2} + 2.255 \frac{r^4}{a^4} + 0.010 \frac{r^6}{a^6} + \frac{7}{768} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} f_n' \cos \frac{n\pi r}{c}$$

$$- \frac{1}{96} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} g_n' \cos \frac{n\pi r}{c} + \frac{35}{64 \times 32} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} c c s \frac{n\pi r}{c} - \frac{335}{32 \times 16^3 \times 96} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi r}{c}$$

$$\frac{(\sigma_t)_{r=a}}{GEa^4} = -0.046 - 0.746 \frac{r^2}{a^2} - 1.128 \frac{r^4}{a^4} - \frac{335}{96 \times 8 \times 16^3} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi r}{c} - \frac{1}{96} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} l_n' \cos \frac{n\pi r}{c}$$

以上により全部の應力を計算すれば附圖第四となる。

次に以上四つの場合の各對稱面に於ける principal stress の大き及び方向を圖示すれば附圖第五乃至第八となる。

第四章 破壊試験

以上理論上出した結果と比較する爲に實際に試験體を作つて其の破壊状態を觀測したのであるが材料は neat cement を用ひ實驗の目的上比較に用ふる試験體は等質の試験體なる事を要するが故に同時に使用する試験體は數個同一の材料より同時に作り此の型を 24 時間後に外して之れを水槽中に入れ常に徐々に水を流し 28 日後に實驗に供した。

試験體の形及び大きさ

形は其の半徑と長さとの比を理論上より出した結果と比較する爲實際に計算したものと即ち

1. 直径 5 糎, 長さ 10 糎
2. 直径 5 糎, 長さ 4 糎
3. 直径 5 糎, 長さ 3 糎

以上長さが 2 糎宛長いのは寫眞に示せし如く實驗に際して兩端面の膨脹をなくする爲に 1 糎宛の杵を嵌める爲に 2 糎づゝ餘裕を取つて置かねばならぬが故である。

試験體の製作

此の實驗の性質として比較觀測すべき數多の試験體は全く互に等質でなければならぬので型に入れて叩く様な硬いものを斷念し膠狀位の程度で之れをよく練つてドロドロの状態に型に流し込み重力のみで固める方法を取つた。尙第一回の試験體と第二回の試験體とは全く同質たるを要しないので其の度に最も適當なる水加減を與へたが水セメント比は約 40 % 前後である。

實驗の方法

行つた實驗は之れを 2 種に分つことが出来る。

第一の種類とは同じ形の數多の試験體を種々の end conditions の下に試験して其の破壊状態の比較觀察をなし end conditions の齎す影響を知らんとしたものであり其の end conditions の種類は次の 5 種とした。

- case I 普通何の束縛をも與へず其のまゝ壓したるもの
- case II 兩端面に鉛板を挟んだもの
- case III 兩端面にフェルトを挟んだもの
- case IV 兩端に幅 1 糎の輪を嵌めて其の膨脹を許さざるもの
- case V 兩端に幅 1 糎の輪を嵌め更に中央に幅 2 糎の輪を嵌めて其の膨脹を許さざるもの

番號 101~117 及び 201~218 は此の種の實驗に用ひた。寫眞第一は之れを示す。第二の種類の実験とは長さの異なる試験體に同じ end conditions を與へて其の破壊状態を比較觀察し長さの差違が應力に齎す影響を知らんとしたものでありその種類は

- case VI 長さ 10 糎のものを何等の束縛なく壓したるもの
- case VII 長さ 4 糎のものを同上せるもの
- case VIII 長さ 3 糎のものを同上せるもの

番號 301~303 は之れに用ひた。

- case IX 長さ 10 糎のものを兩端に 1 糎の輪を嵌めて其の膨脹を許さずして壓したるもの
- case X 長さ 4 糎のものを同上せるもの

401~403, 501~503, 601~603 は之れに用ひた。

寫眞第二は之れ等に用ひた輪と其の締め具である。

實驗の結果

第一回

試験體番號	重量 (gr.)	條件	破壊強度 (ton)	平均單位面積強度 (kg/cm ²)
105	421	case I	4.16	208
108	421	"	2.60	130
113	—	"	6.55	328
102	422	case IV	8.00	400
111	421	"	7.80	390
103	422	case V	10.40	520
104	423	"	7.90	395
106	422	"	9.90	495
109	423	兩面に木綿布を當つ	5.94	297
112	423	"	7.00	350
114	—	兩面にグリースを塗る	6.57	329
117	—	兩面に油を塗る	5.68	284

第二回

201	433	case I	7.52	376
206	433	"	6.15	308
211	433.5	"	4.34	217
202	433	case II	3.75	188
207	434	"	3.55	178
212	433	"	6.92	346
203	434	case III	8.55	428
208	432.5	"	8.02	401
213	432	"	8.30	415
204	434	case IV	9.39	470
209	433.5	"	7.30	365
214	432	"	7.90	395
205	433	case V	8.10	405
210	432.5	"	10.47	524
215	432	"	8.40	420
216	432.5	兩端にフェルトを3枚宛	7.23	362

第三回

試験體番號	長さ (cm)	直径 (mm)	重量 (gr)	條件	破壊強度 (ton)	平均單位面積強度 (kg/cm ²)
301	10.00	50.5	397.5	case VI	3.73	187
302	3.97	49.6	155.0	case VII	4.35	225
303	2.96	49.4	118.0	case VIII	5.23	273

第四回

401	—	—	380.5	case IX	2.85	143
402	—	—	149	case X	5.4	279
403	—	—	106	case VIII	4.6	240

第五回

試験體番号	長さ (cm)	直徑 (mm)	重量 (gr)	條件	破壊強度 (ton)	平均單位面積強度 (kg/cm ²)
501	10.01	50.4	354.5	case IX	5.18	260
502	3.97	49.4	140	case X	8.70	453

之れ等の結果を圖示すれば附圖第九乃至第十一の如し。

但し第四回に用ひたるものは嚴寒に製作したる爲凍結したるものゝ如く内部はやゝ plastic にして破壊前に側面より水滴を吹出すに至れり。故に ductile なる物質の實驗と見て可なり。又第五回に用ひたるものは 28 日目に水中より之れを出して空中に放置し 46 日目に實驗を行ひしものにて前回の如き現象なく充分なる強度を有してゐた。

破壊状況

寫眞第三より第十二までは之れを示す。但し寫眞第十二のものは實驗の途中一方の輪が破壊されて自由になつたが爲である。

第五章 結 論

以上出た結果から見て注意すべき事は長い物體では中央部近くでは σ_r が割合に一樣に分布し兩端面に近い所には非常に大なる差違を生じ理論上では平均壓力の 2 倍近いものが稜の所に起るが反對に短かい物體では中央部にも頗る大なる差違を生じ寧ろ兩端面よりもそれが大きくなつてゐる。又長いものでは兩端面の近くに大なる壓力 σ_r を生じてゐるが中央部では 2% に足りないものであるとはいへ張力が起つてゐるが短かいものでは中央部に至るも依然として大なる壓力となつて作用してゐる。 σ_r に就ても大體同様であるが、之れから見て長い形のものでは中央部では tangential 又は radial に裂けんとする傾向を有する事が判る。

實驗の結果はある程度まで之れを證明したものと云へる。長い形のものでは殆んど一律に兩端面に近い所は 45°~60° の角度で shear され中央部は皆縦に裂けてゐるが短かいものは全部 45° に近い角度で shear されてゐる。

Rös は物體の破壊を Trennungsbruch と Gleitungsbruch と Verschiebungsbruch とに分つて其の原因を材料の物質によるものであつて第一は brittle なる物質に現はれ第二は ductile な物質に現はれると言つてゐるが^(*)之れ等は單に物質のみによるのではなく試験材の形にもよるものである事が明かになつた。Trennungsbruch の原因は結局上述の結果のみで説明することは出來ないが此の種の材料に著しいと考へられる initial stress と前述の僅少なる張力とが相援けて此の現象を示したものでないかと考へられる。物體破壊に關する最大剪

* Stodola: Festschrift, S. 515.

應力説によれば主應力を σ_1 及び σ_2 とすれば

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$$

が或限界値に達すると其處から破壊が始まる即ち主應力の差によつて其の破壊を論ずる事が出来るのであるが此の場合には長い物體では中央部に於て主應力の一つは頗る大なる壓力であり一つは小なりと雖も張力である爲に其の主應力の差が頗る大であるに拘らず短かい物體では何れの部分も其の主應力が三つとも可成り大なる壓力となつて其の差は割合に小さなものであるが爲に其の破壊抵抗は比較的大なのであると考へる事が出来る。これは各試験體の強度の比較によく現はれてゐる。但し case II は鉛板の面が平でない爲に荷重が等布されなかつた爲に應力の集中を起したが爲か弱かつた。case III は之れと全く反對に應力が最もよく等布され従つて物質自身の破壊強度に最も近いものではないかと考へられる。従つて耐圧試験にはフェルトの如き物質を兩端面に當てゝ試験をするのが最も容易に均等にして信すべき結果を得るのではないかと考へる。

次に此の結果を更に進めて破壊理論から見て形態による試験體の差違が破壊に及ぼす影響を觀察して見る。先づ破壊理論中現在に於て或る程度まで妥當なりと考へられてゐる Mohr の最大剪應力説に第三章に得た結果を當て嵌めて見ると第一の場合として長い試験體（第三章第一例に用ひた直徑 5 種、長さ約 8 種の試験體）と第三の場合として短い試験體（同第三例に用ひた直徑 5 種、長さ約 2 種の試験體）との間に著しい差違のある事が判るのであつて一見明瞭ならしめんが爲に試験體内の各點に於て Mohr の圓を描いて之れを圖示すれば附圖第十二及び第十三となる。之れより見れば共に兩端面の稜は著しく早く破壊してふ事は明かであるが之れは試験體に對しては致命的破壊ではないから之れを無視すれば長き試験體にあつては中央に近き部分が全體一樣に先づ剪力によつて破壊せられ兩端面に近き部分は強かる可き事が明かに見られるが、之れに反して短き試験體にあつては周縁に近き部分が先づ剪力によつて破壊せられ中心部に行くに従つて著しく其の強度を増す可きことが一見して明瞭である。之れを實驗による破壊状態を示した寫眞第六と寫眞第十一と照し合せて考へれば短かき試験體にはよく當て嵌る事は肯定出来るが長き試験體には直ちに首肯出来ないものがある。

そこで長き試験體が Trennungsbruch によつて破壊される事より考へて Mesnager* 等によつて唱へられてゐる説によつて此の現象を説明して見やうと試みたのである。即ち脆い材料内には氣泡又は瑕等によつて極く微細な空隙のある事は想像出来るが然らば其の物體に等しく分布された應力 σ を作用せしめた場合に其の空隙の周邊には應力の集中が起り得るので

* Mesnager: Résistance des matériaux.

あるから其の應力によつて破壊が生ずるのではないかといふのである。今此の空隙を球形なりとすれば之れに σ なる壓應力が加つた場合に其の周邊に起る應力は球の大きさには無關係であつて附圖第十四の如くなる。但し $\frac{1}{m}$ は Poisson 比である。

今三軸的の場合を考へ $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ なる三つの主應力がある場合には空隙の周邊に起る張應力は σ_1 に對しての

$$A \text{ に於て } \frac{3}{2(7-5m)} \left\{ -(9-5m)\sigma_1 + (1+5m)\sigma_2 + (1-5m)\sigma_3 \right\}$$

$$B \text{ に於て } \frac{3}{2(7-5m)} \left\{ (1+5m)\sigma_1 - (9-5m)\sigma_2 + (1-5m)\sigma_3 \right\}$$

$$C \text{ に於て } \frac{3}{2(7-5m)} \left\{ (1-5m)\sigma_1 + (1+5m)\sigma_2 - (9-5m)\sigma_3 \right\}$$

セメント又はモルタルの如き脆き材料で壓力に對するよりも張力に對して著しく弱きものでは破壊は周邊應力の内、張力に支配される事は明かであるから今 $m=4$ として第三章の實例をとつて第一例及び第三例に就きて試験體內各部に起る周邊應力を計算し其の中の張力のみを擧ぐれば

第一の場合

	$r=0$	$r=\frac{a}{2}$		$r=a$
$x=0$	0.648 Q	0.648 Q	radial	0.574 Q radial
$x=\frac{c}{6}$	0.648 Q	0.649 Q	"	0.570 Q "
$x=\frac{c}{3}$	0.634 Q	0.644 Q	"	0.555 Q "
$x=\frac{c}{2}$	0.537 Q	0.651 Q	tangential	0.532 Q "
$x=\frac{2}{3}c$	0.363 Q	0.446 Q	"	0.486 Q tangential
$x=\frac{5}{6}c$	張力を生ぜず	0.063 Q	"	{ 0.317 Q tangential 0.009 Q radial
$x=c$	"	0.056 Q	radial	{ 0.150 Q radial 0.126 Q tangential

第三の場合

	$r=0$	$r=\frac{a}{2}$		$r=a$
$x=0$	張力を生ぜず	0.034 Q	tangential	0.233 Q tangential
$x=\frac{c}{6}$	"	0.016 Q	"	0.276 "
$x=\frac{c}{3}$	"	張力を生ぜず		{ 0.254 Q tangential 0.006 Q radial

	$r=0$	$r=\frac{a}{2}$	$r=a$
$x=\frac{c}{2}$	"	"	{ 0.220 Q tangential 0.024 Q radial
$x=\frac{2}{3}c$	"	"	{ 0.176 Q tangential 0.050 Q radial
$x=\frac{5}{6}c$	"	"	{ 0.134 Q tangential 0.084 Q radial
$x=c$	"	"	{ 0.125 Q radial 0.122 Q tangential

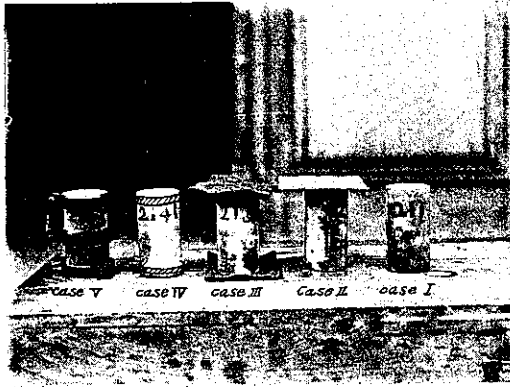
以上は實際空隙の周邊に起る張應力であるが判り易くする爲に之れを之れだけの張應力を生ずべき一軸的張力に直して之れを圖示すれば附圖第十五となる。

此の結果を寫眞第六及び第十一と照し合せて考へれば短かき試験體にはあまり大なる周邊張應力を生じないのであるから問題はないが長き試験體の破壊は此の説による方がより妥當性があり又説明し易き事が首肯し得るのである。之れ等の現象は兩端面の摩擦によつて生ずる差違である事は勿論であるから若し短かき試験體でも兩端面摩擦を取り除く事が出来れば *Trennungsbruch* を起すのではないかと思はれる。

即ち展延性材料は略最大剪應力説によるが比較的妥當であり脆弱材料の破壊は寧ろ *Messenger* 等による最大張力説によるのが妥當性の多い事は現今に於ける破壊理論で認められてゐると思はれるが更に材料の物理的或は力學的性質のみならず内部に起つてゐる應力分布状態をも考へなければならぬのではないかと思はれる。

以上の破壊理論に關する議論は之れだけの材料では勿論未だ斷定出来る程度には達してはゐないのであつて今後機會あれば更に研究して行きたいと思つてゐる。

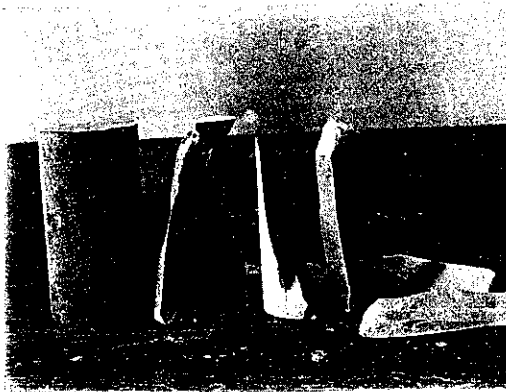
寫真第一



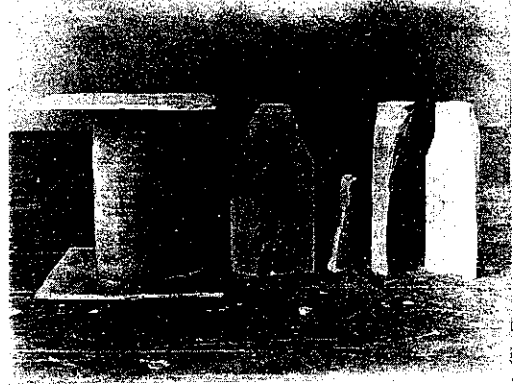
寫真第二



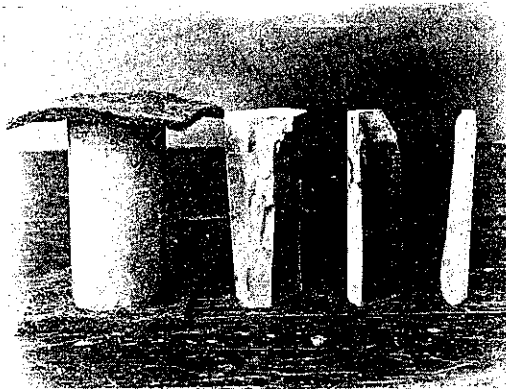
寫真第三



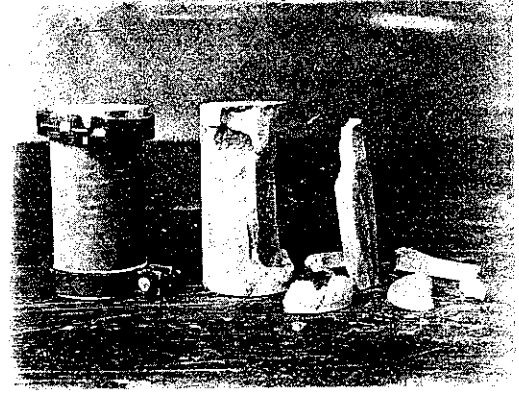
寫真第四



寫真第五



寫真第六



(土木學會誌第十七卷第八期製此)

寫真第七



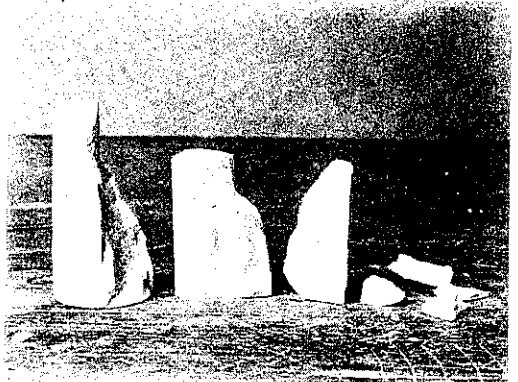
寫真第八



寫真第九



寫真第十



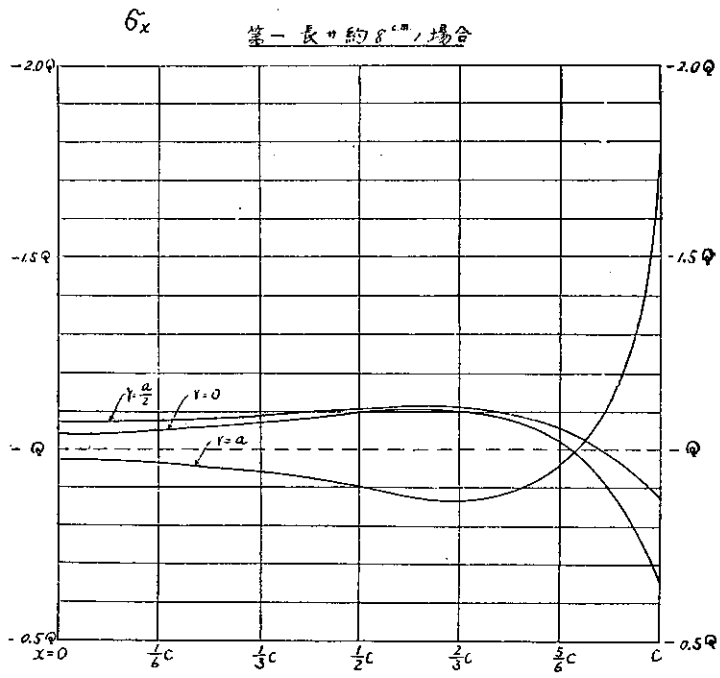
寫真第十一



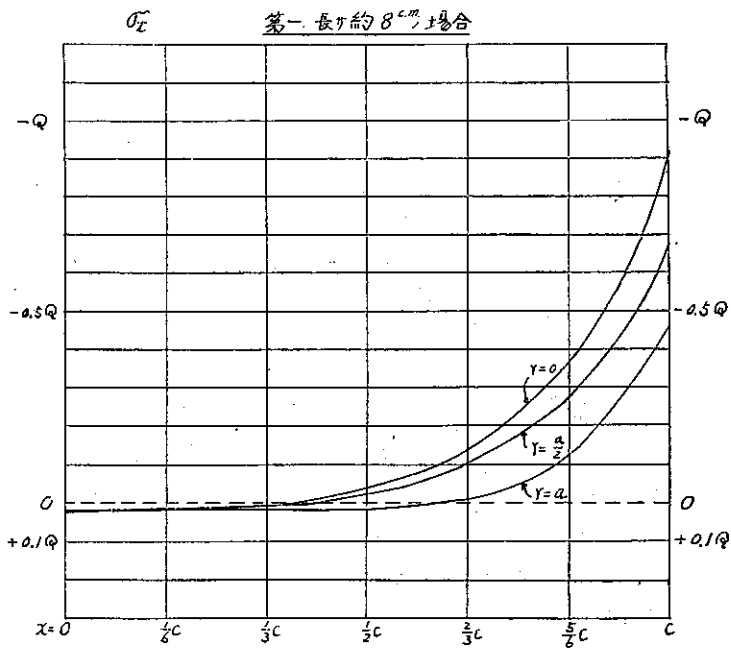
寫真第十二



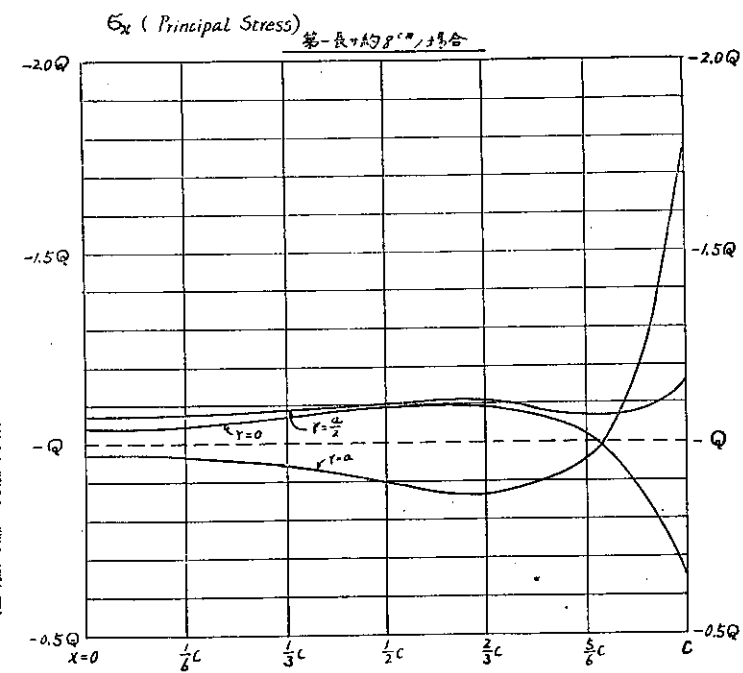
附圖第一 (其一)



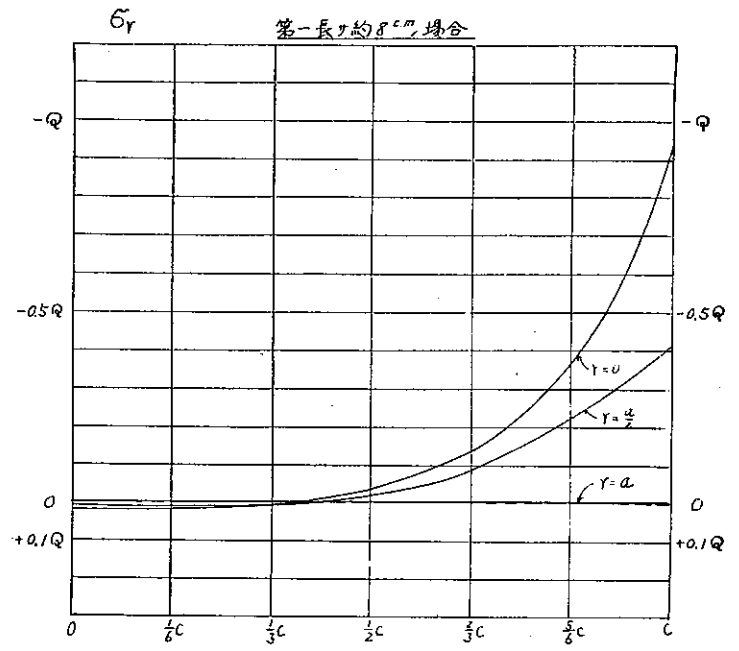
(其三)



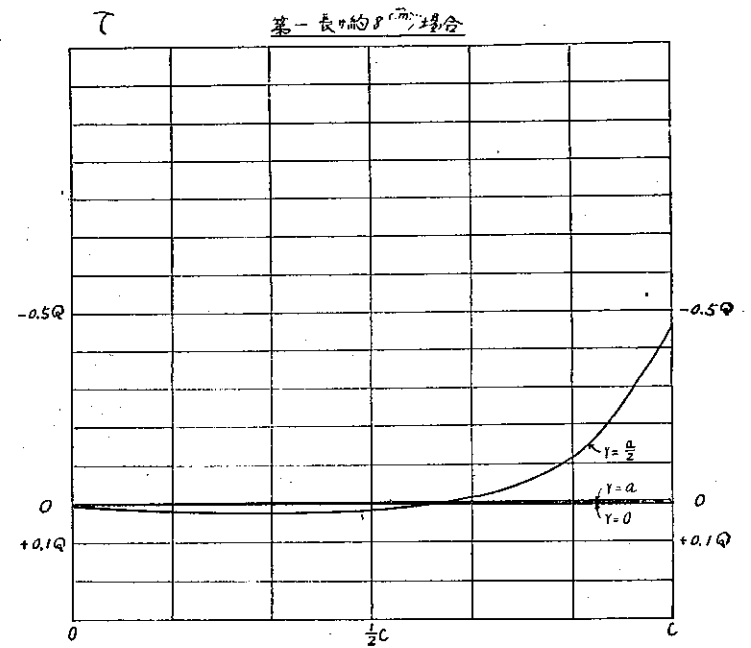
(其五)



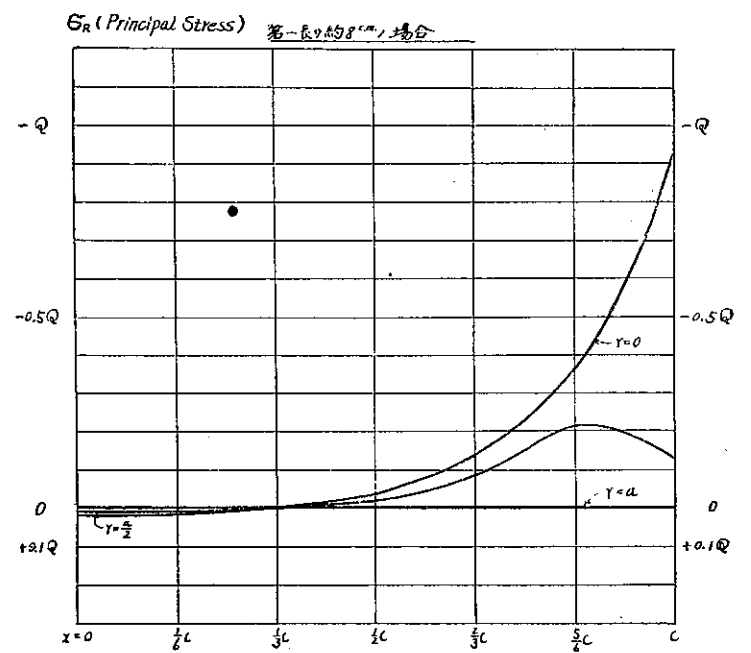
(其二)



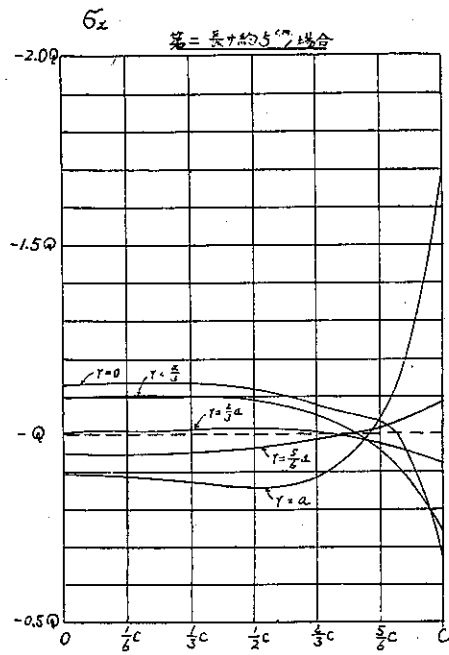
(其四)



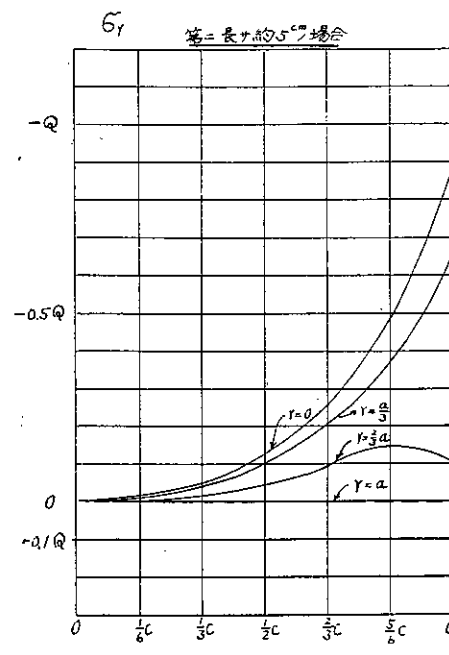
(其六)



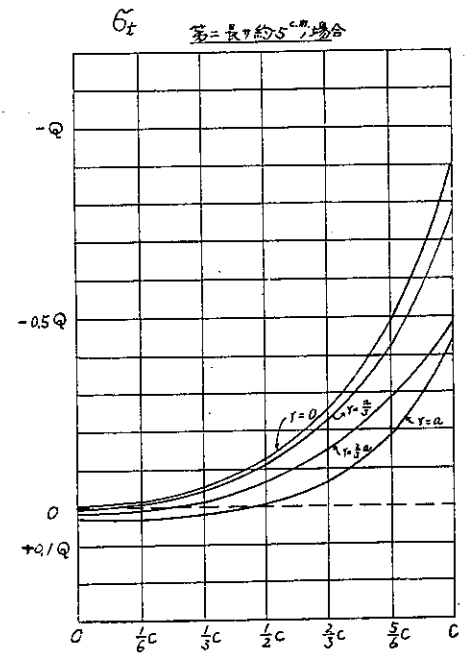
附圖第二 (其 一)



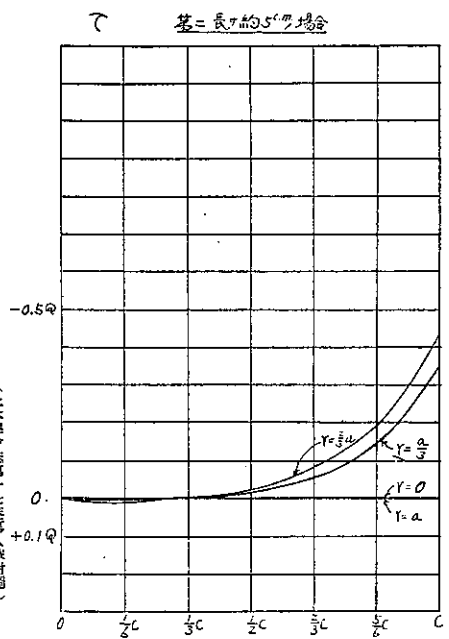
(其 二)



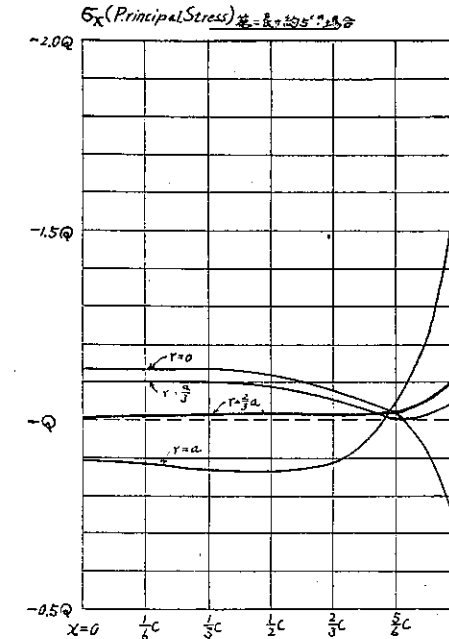
(其 三)



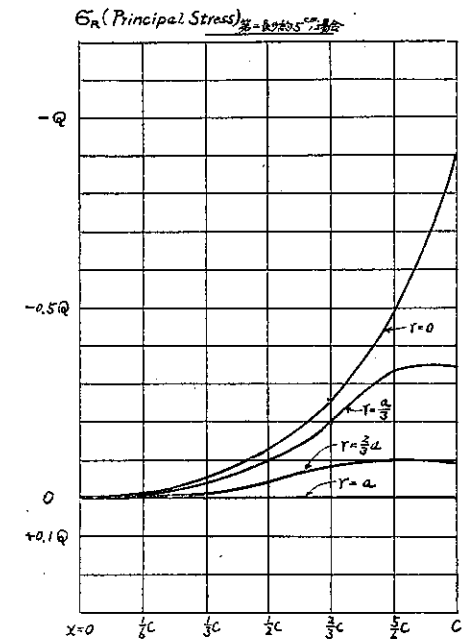
(其 四)



(其 五)



(其 六)

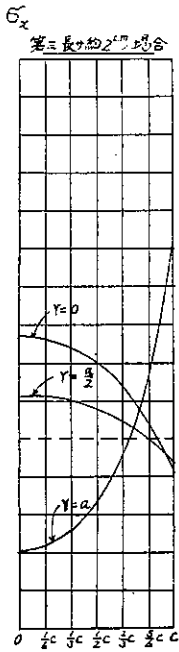


(土木學會誌第十七卷第八號附圖)

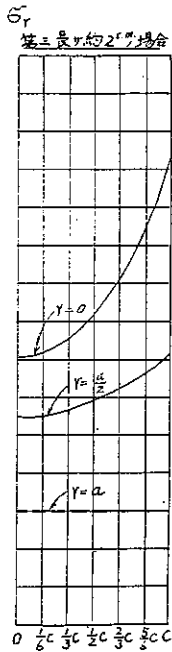
777-10

附圖第三

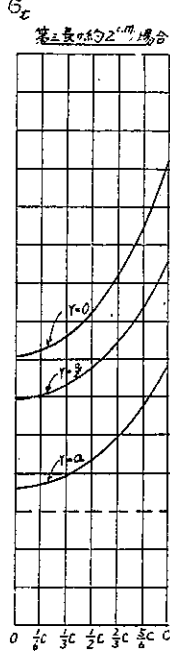
(其一)



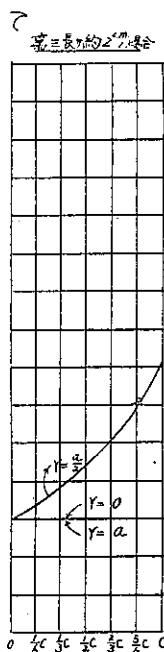
(其二)



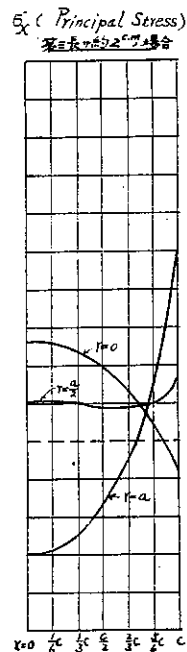
(其三)



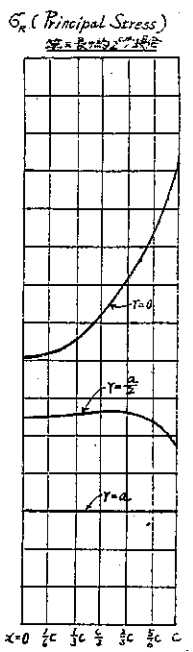
(其四)



(其五)

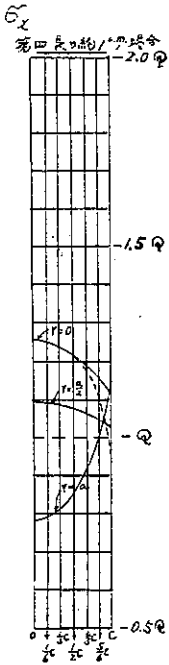


(其六)

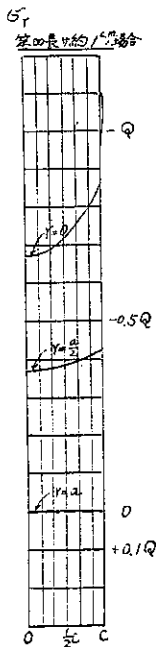


附圖第四

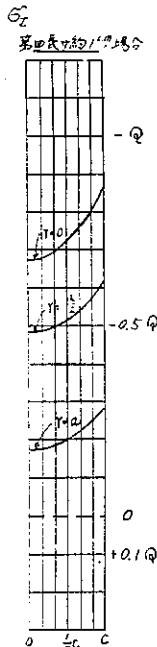
(其一)



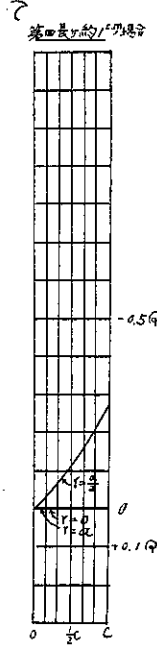
(其二)



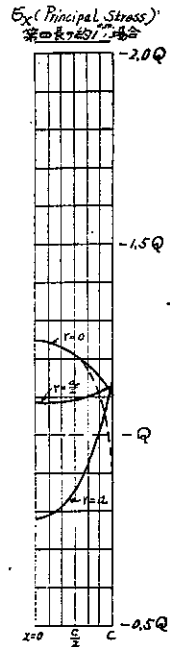
(其三)



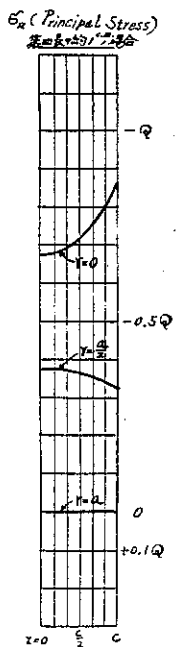
(其四)



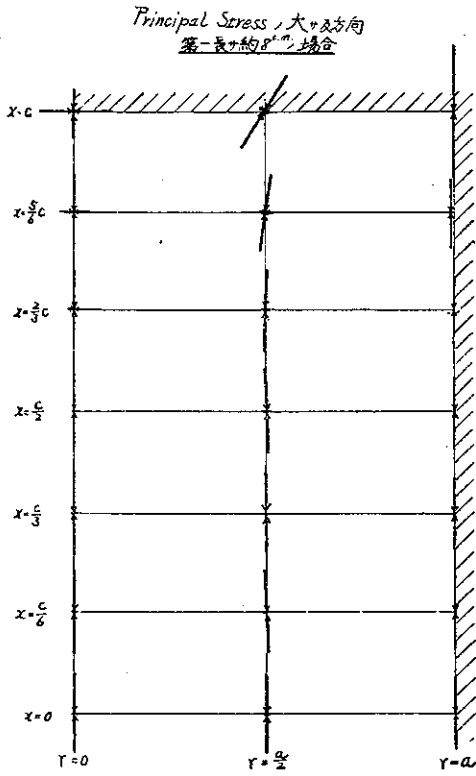
(其五)



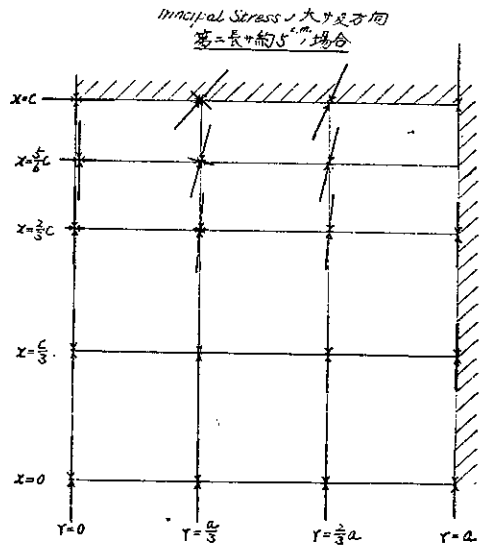
(其六)



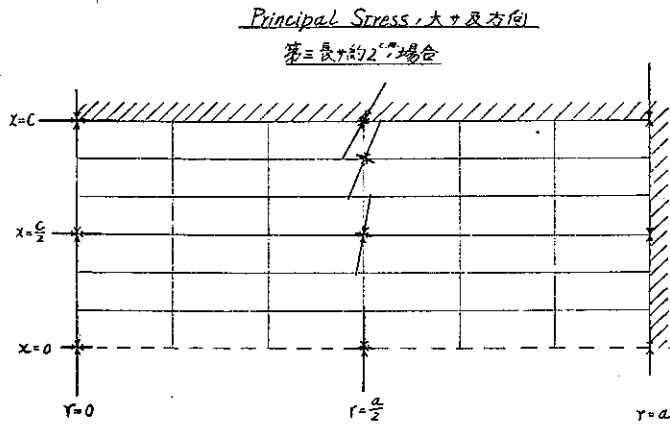
附圖第五



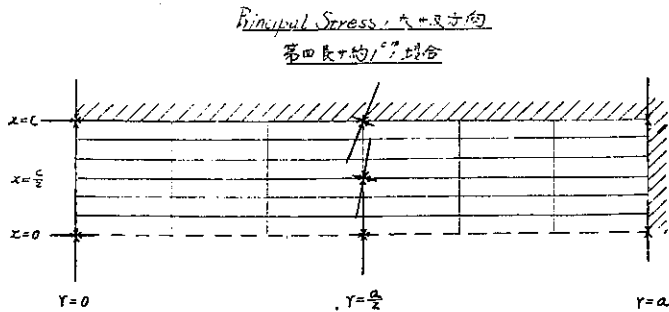
附圖第六



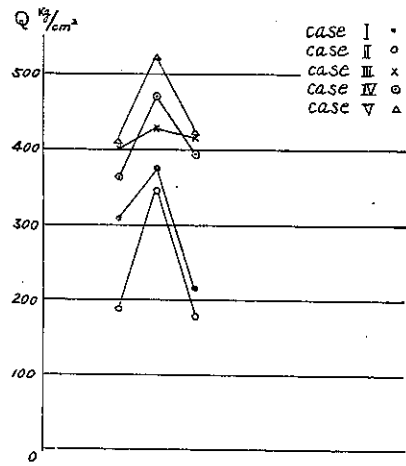
附圖第七



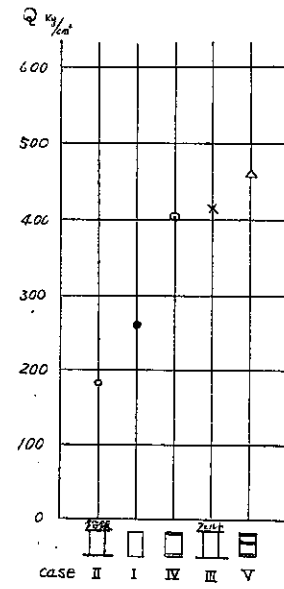
附圖第八



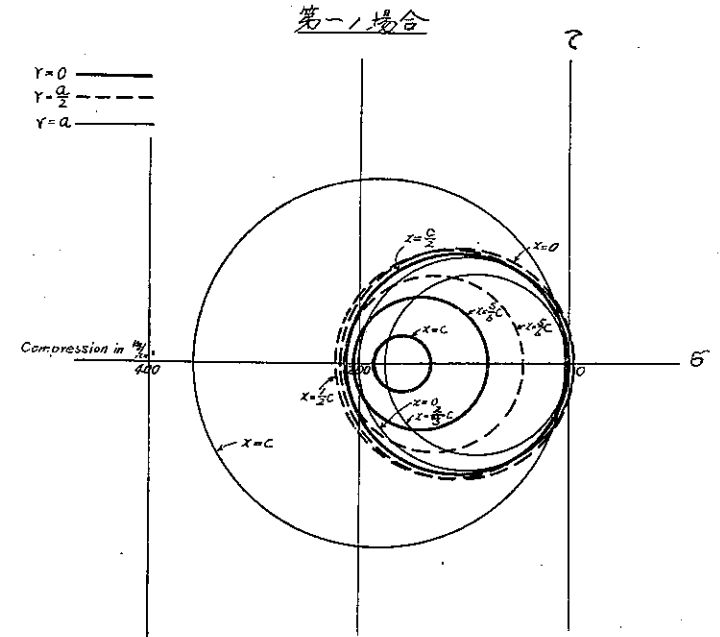
附圖第九 破壊強度比較の一例



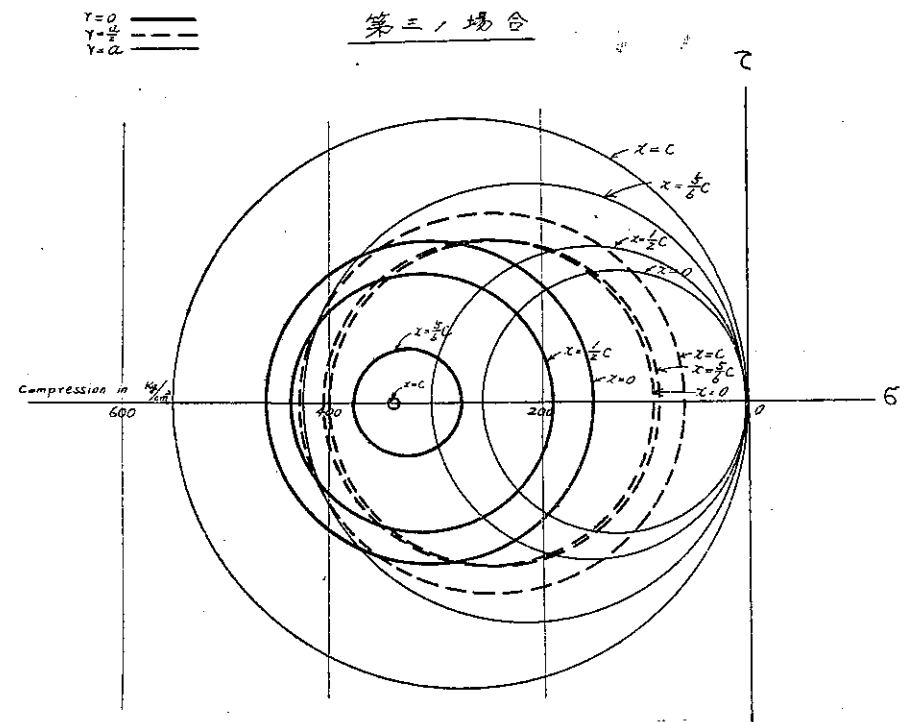
附圖第十 平均破壊速度比較



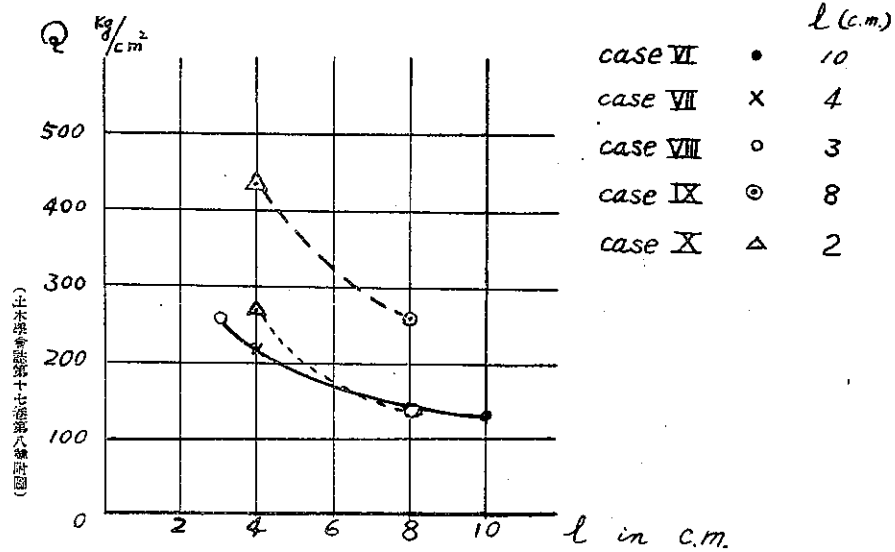
附圖第十二



附圖第十三



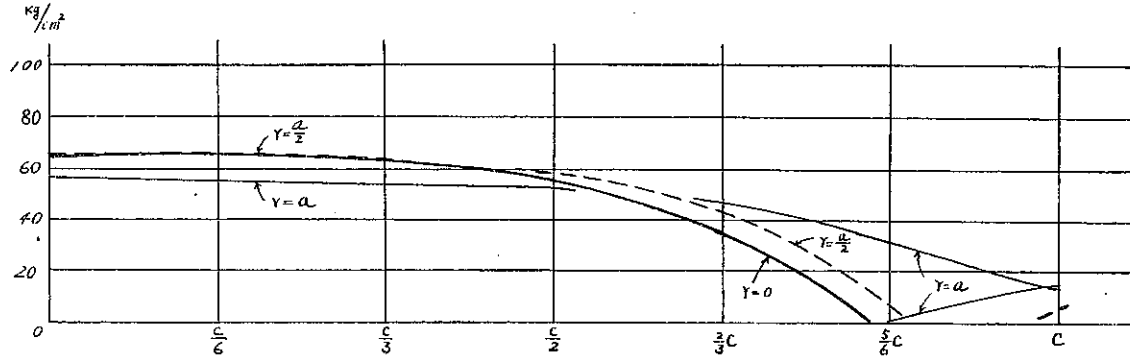
附圖十一 同一条件に於ける長さと強度との関係



土木学会標準第十七巻第八号附圖

附圖第十五 (其一)

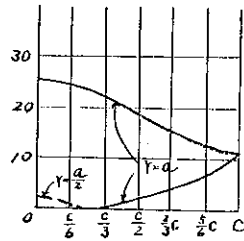
第一ノ場合



(其二)

附圖第十四

第三ノ場合



(土木學會誌第十七卷第八號附圖)

