# 論說報告

土木學會誌　第十七卷第八號　昭和六年八月

# 剛體上に於ける水平彈性層の應力及び變位の代數的解法(但し平面變形の場合)

准員 工學士 高橋憲雄

## Algebraic Solution of Stress-strain in an Elastic Layer on a Rigid Base (treated as plane strain)

By Norio Takahashi, C.E., Assoc. Member.

**內容梗概**

本文は剛體上に在る水平な彈性層の表面に垂直及び水平の荷重が載つた時の彈性層の變位と應力とを代數的に求め，併せて之れの二三の計算例を試みたものである。

水平彈性體の表面に原點を取り，其の平面上に $y$ 軸之れに直角に $z$ 軸を定め垂直線上に下方向を正として $x$ 軸を取り，夫々 $x$ 軸，$y$ 軸，$z$ 軸に垂直な平面上の直應力を夫々 $\sigma_x$, $\sigma_y$, $\sigma_z$ とし，剪應力を夫々 $\tau_{xy}$, $\tau_{yz}$, $\tau_{zx}$ とし，變位を夫々 $\xi$, $\eta$, $\zeta$ とする。

$h$ は剛體と彈性體との接觸面と彈性體の表面との距離，$E$ 彈性率，1/m ポアソン比，$X$ は彈性體の單位體積の重さとする。

**條　件**

**I.** $0<x<h$ のとき一樣な彈性體として取扱へる場合

**II.** $x=h$ のとき如何なる方向の變位もないこと

條件 I. から

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+X=0$$

$$\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}=\frac{1}{E}\left[\sigma_x-\frac{1}{m}(\sigma_y+\sigma_z)\right]$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial y}=\frac{1}{E}\left[\sigma_y-\frac{1}{m}(\sigma_x+\sigma_z)\right]$$

$$\sigma_z=\frac{1}{m}(\sigma_x+\sigma_y)$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial y}=\frac{2(m+1)}{Em}\tau_{xy}$$

$$\tau_{yz}=0,\qquad \tau_{xz}=0,\qquad \zeta=0,$$

今 $\sigma_y$ を次の樣に與へると他は前の式から出て來る。但し ${}_rA_s$ は係數, $r=0,1,2,3\cdots$, $s=0,1,2,3\cdots$。

$$\sigma_y=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}(q+1)\,{}_{p+2}A_{q+1}\,x^py^q$$

$$\tau_{xy}=-\int\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}dx=-\sum_{q=0}^{\infty}(q+1)(q+2)\,{}_2A_{q+2}\,y^q-\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{(q+1)(q+2)}{p}\,{}_{p+2}A_{q+2}\,x^py^q$$

$$\sigma_x=-\int Xdx-\int\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}dx=-Xx+\sum_{q=0}^{\infty}(q+1)(q+2)(q+3)\,{}_1A_{q+3}\,y^q$$

$$+\sum_{q=0}^{\infty}(q+1)(q+2)(q+3)\,{}_2A_{q+3}\,xy^q+\sum_{p=2}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{(q+1)(q+2)(q+3)}{(p-1)p}\,{}_{p+1}A_{q+3}\,x^py^q$$

$$\xi=\frac{1}{E}\int\Big[\Big(1-\frac{1}{m^2}\Big)\sigma_x-\Big(\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}\Big)\sigma_y\Big]dx$$

$$=\frac{1}{E}\Big(1-\frac{1}{m^2}\Big)\Big[-\frac{X}{2}x^2+\sum_{q=0}^{\infty}\Big\{(q+1)(q+2)(q+3)\,{}_0A_{q+3}-\frac{1}{m-1}(q+1)\,{}_2A_{q+1}\Big\}y^q$$

$$+\sum_{q=0}^{\infty}(q+1)(q+2)(q+3)\,{}_1A_{q+3}\,xy^q+\sum_{q=0}^{\infty}\frac{(q+1)(q+2)(q+3)}{2}\,{}_2A_{q+3}\,x^2y^q$$

$$+\sum_{p=3}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{(q+1)(q+2)(q+3)}{(p-2)(p-1)p}\,{}_pA_{q+3}\,x^py^q-\frac{1}{m-1}\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{q+1}{p}\,{}_{p+2}A_{q+1}\,x^py^q\Big]$$

$$\eta=\frac{1}{E}\int\Big[\Big(1-\frac{1}{m^2}\Big)\sigma_y-\Big(\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}\Big)\sigma_x\Big]dy$$

$$=\frac{1}{E}\Big(1-\frac{1}{m^2}\Big)\Big[\frac{1}{m-1}Xxy+\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}{}_{p+3}A_q\,x^py^q-\frac{1}{m-1}\sum_{q=0}^{\infty}(q+1)(q+2)\,{}_1A_{q+2}\,y^q$$

$$-\frac{1}{m-1}\sum_{q=0}^{\infty}(q+1)(q+2)\,{}_2A_{q+2}\,xy^q-\frac{1}{m-1}\sum_{p=2}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{(q+1)(q+2)}{(p-1)p}\,{}_{p+1}A_{q+2}\,x^py^q\Big]$$

之れ等を尚殘つてゐる關係式に代入すれば係數の間の關係が出る。

$$\frac{1}{E}\Big(1-\frac{1}{m^2}\Big)\Big[\frac{1}{m-1}Xy+\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}p\,{}_{p+3}A_q\,x^{p-1}y^q-\frac{1}{m-1}\sum_{q=0}^{\infty}(q+1)(q+2)\,{}_2A_{q+2}\,y^q$$

$$-\frac{1}{m-1}\sum_{p=2}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{(q+1)(q+2)}{p-1}\,{}_{p+1}A_{q+2}\,x^{p-1}y^q\Big]+\frac{1}{E}\Big(1-\frac{1}{m^2}\Big)\Big[\sum_{q=1}^{\infty}\Big\{q(q+1)(q+2)(q+3)\,{}_0A_{q+3}$$

$$-\frac{1}{m-1}q(q+1)\,{}_2A_{q+1}\Big\}y^{q-1}+\sum_{q=1}^{\infty}q(q+1)(q+2)(q+3)\,{}_1A_{q+3}\,xy^{q-1}$$

$$+\sum_{q=1}^{\infty}\frac{q(q+1)(q+2)(q+3)}{2}\,{}_2A_{q+3}\,x^2y^{q-1}+\sum_{p=3}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{q(q+1)(q+2)(q+3)}{(p-2)(p-1)p}\,{}_pA_{q+3}\,x^py^{q-1}$$

$$-\frac{1}{m-1}\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{q(q+1)}{p}\,{}_{p+2}A_{q+1}\,x^py^{q-1}\Big]$$

$$+\frac{1}{E}\left(1-\frac{1}{m^2}\right)\left[\left(2+\frac{2}{m-1}\right)\left\{\sum_{q=0}^{\infty}(q+1)(q+2)\,{}_{2}A_{q+2}\,y^q+\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{(q+1)(q+2)}{p}\,{}_{p+2}A_{q+2}\,x^py^q\right\}\right]=0$$

$$\frac{X}{m-1}y+\sum_{q=0}^{\infty}(q+1)(q+2)(q+3)(q+4)\,{}_{0}A_{q+4}\,y^q+\sum_{q=0}^{\infty}(q+1)(q+2)(q+3)(q+4)\,{}_{1}A_{q+4}\,xy^q$$
$$+\sum_{q=0}^{\infty}\frac{(q+1)(q+2)(q+3)(q+4)}{2}\,{}_{2}A_{q+4}\,x^2y^q+\sum_{p=3}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{(q+1)(q+2)(q+3)(q+4)}{(p-2)(p-1)p}\,{}_{p}A_{q+4}\,x^py^q$$
$$+2\sum_{q=0}^{\infty}(q+1)(q+2)\,{}_{2}A_{q+2}\,y^q+2\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{(q+1)(q+2)}{p}\,{}_{p+2}A_{q+2}\,x^py^q+\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}(p+1)\,{}_{p+4}A_q\,x^py^q=0$$

上の式は $0<x<h$ で $x$, $y$ の如何なる價に對しても常に成立するから其の係數は皆零である。係數を零と置いた式の中から $r+s=n$ なる係數を含むすべての式を取れば

$$\frac{(n-3)(n-2)(n-1)n}{1}\,{}_{0}A_n+2\frac{(n-3)(n-2)}{1}\,{}_{2}A_{n-2}+1\,{}_{4}A_{n-4}=0$$

$$\frac{(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)}{1}\,{}_{1}A_{n-1}+2\frac{(n-4)(n-3)}{1}\,{}_{3}A_{n-3}+2\,{}_{5}A_{n-5}=0$$

$$\frac{(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)}{1\cdot2}\,{}_{2}A_{n-2}+2\frac{(n-5)(n-4)}{2}\,{}_{4}A_{n-4}+3\,{}_{6}A_{n-6}=0$$

..................................

$$\frac{(n-p-3)(n-p-2)(n-p-1)(n-p)}{(p-2)(p-1)p}\,{}_{p}A_{n-p}$$
$$+2\frac{(n-p-3)(n-p-2)}{p}\,{}_{p+2}A_{n-p-2}+(p+1)\,{}_{p+4}A_{n-p-4}=0$$

..................................

$$\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4}{(n-6)(n-5)(n-4)}\,{}_{n-4}A_4+2\frac{1\cdot2}{n-4}\,{}_{n-2}A_2+(n-3)\,{}_{n}A_0=0$$

此處に ${}_{1}A_s=\alpha_{s+1}W/s!h^{s-1}$, ${}_{2}A_s=\beta_{s+2}W/s!h^s$ として彈性體の表面の荷重を示す係數で與へられるべきものであるから未知數は $(n-1)$ 個で方程式は $(n-3)$ 個あるから之れを解いても未知數は 2 個殘る，之れ等を $a_n$, $b_n$ として係數を求むれば

$${}_{r}A_s=(-1)^{\frac{r-1}{2}}\frac{W}{(r-3)!\,s!\,h^{r+s-2}}\left(\frac{r-1}{2}b_{r+s}+\alpha_{r+s}\right)\qquad r\ 奇數,\quad s\ 偶數のとき$$

$$=(-1)^{\frac{r-2}{2}}\frac{W}{(r-3)!\,s!\,h^{r+s-2}}\left(\frac{r-2}{2}b_{r+s}+\beta_{r+s}\right)\qquad r\ 偶數,\quad s\ 偶數のとき$$

$$=(-1)^{\frac{r-1}{2}}\frac{W}{(r-3)!\,s!\,h^{r+s-2}}\left(\frac{r-1}{2}a_{r+s}+\alpha_{r+s}\right)\qquad r\ 奇數,\quad s\ 奇數のとき$$

$$=(-1)^{\frac{r-2}{2}}\frac{W}{(r-3)!\,s!\,h^{r+s-2}}\left(\frac{r-2}{2}a_{r+s}+\beta_{r+s}\right)\qquad r\ 偶數,\quad s\ 奇數のとき$$

但し $r<4$ のときは分母にある $(r-3)!$ を取除き，自重の補正として ${}_{0}A_5$ に $-X/5!(m-1)$ を加へる。

次に條件 II. により $x=h$ で $\xi=0$ 即ち

$$-\frac{X}{2}h^2+\sum_{q=0}^{\infty}\left\{(q+1)(q+2)(q+3)\,{}_{0}A_{q+3}-\frac{1}{m-1}(q+1)\,{}_{2}A_{q+1}\right\}y^q+\sum_{q=0}^{\infty}(q+1)(q+2)(q+3)\,{}_{1}A_{q+3}\,hy^q$$

$$+\sum_{q=0}^{\infty}\frac{(q+1)(q+2)(q+3)}{2}\,{}_2A_{q+3}\,h^2y^q+\sum_{p=3}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{(q+1)(q+2)(q+3)}{(p-2)(p-1)p}\,{}_pA_{q+3}\,h^py^q-\frac{1}{m-1}$$
$$\times\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{q+1}{p}\,{}_{p+2}A_{q+1}\,h^py^q=0$$

此の式は $y$ の如何に關せず成立するから $y$ の係數は皆零である。前に求めた ${}_rA_s$ を此の零と置いた式の中に代入すれば未知數は $a_n$, $b_n$ だけになる。

$q=2k$ のとき $p=2l$ 又は $(2l+1)$, $k=0,1,2,3\cdots$, $l=0,1,2,3\cdots$

$$\sum_{l=0}^{\infty}\Big[-\frac{(-1)^l}{(2l)!}\Big\{\frac{(l-1)m+1}{m-1}a_{2k+2l+3}+\frac{m}{m-1}\beta_{2k+2l+3}\Big\}+\frac{(-1)^l}{(2l+1)!}\Big\{\frac{lm+1}{m-1}a_{2k+2l+4}$$
$$+\frac{m}{m-1}\alpha_{2k+2l+4}\Big\}\Big]=0$$

自重の補正として $k=0$ 及び 1 の式の左邊に夫々 $-Xh^3/2W$, $-Xh^3/(m-1)W$ を加へる。

$q=2k+1$ のときは

$$\sum_{l=0}^{\infty}\Big[-\frac{(-1)^l}{(2l)!}\Big\{\frac{(l-1)m+1}{m-1}b_{2k+2l+4}+\frac{m}{m-1}\beta_{2k+2l+4}\Big\}+\frac{(-1)^l}{(2l+1)!}\Big\{\frac{lm+1}{m-1}b_{2k+2l+5}$$
$$+\frac{m}{m-1}\alpha_{2k+2l+5}\Big\}\Big]=0$$

同じ條件により $x=h$ で $\eta=0$ から $q=2k$ のとき

$$\sum_{l=0}^{\infty}\Big[-\frac{(-1)^l}{(2l)!}\Big\{\frac{(l+1)m-1}{m-1}b_{2k+2l+3}+\frac{m}{m-1}\alpha_{2k+2l+3}\Big\}+\frac{(-1)^{l+1}}{(2l+1)!}\Big\{\frac{(l+1)m-1}{m-1}b_{2k+2l+4}$$
$$+\frac{m}{m-1}\beta_{2k+2l+4}\Big\}\Big]=0$$

$q=2k+1$ のときも同様に

$$\sum_{l=0}^{\infty}\Big[-\frac{(-1)^l}{(2l)!}\Big\{\frac{(l+1)m-1}{m-1}a_{2k+2l+4}+\frac{m}{m-1}\alpha_{2k+2l+4}\Big\}+\frac{(-1)^{l+1}}{(2l+1)!}\Big\{\frac{(l+1)m-1}{m-1}a_{2k+2l+5}$$
$$+\frac{m}{m-1}\beta_{2k+2l+5}\Big\}\Big]=0$$

自重の補正のため此の式の中 $k=0$ の左邊に $Xh^3/(m-1)W$ を加へる。

以上の四つの型の一次方程式は其の數が未知數 $a_n$, $b_n$ の數と等しいから解くことが出來る。從つて彈性體の變位及び應力が判る。

### 例題 I. 谷型荷重による地盤の隆起及び沈下

$m=3$, $\alpha_{2k+1}=0$, $\alpha_4=0$, $\alpha_{2k+6}=(-1)^{k+1}1/(2k+3)^2$

$\beta_k=0$, $X=0$

と置けば $b_n=0$, $a$ を求める方程式は

$$\sum_{l=0}^{\infty}\Big[-\frac{(-1)^l}{(2l)!}\Big\{\frac{3l-2}{2}a_{2k+2l+3}\Big\}+\frac{(-1)^l}{(2l+1)!}\Big\{\frac{3l+1}{2}a_{2k+2l+4}+\frac{3}{2}\alpha_{2k+2l+4}\Big\}\Big]=0$$

$$\sum_{l=0}^{\infty}\left[-\frac{(-1)^l}{(2l)!}\left\{\frac{3l+2}{2}a_{2k+2l+4}+\frac{3}{2}\alpha_{2k+2l+4}\right\}+\frac{(-1)^{l+1}}{(2l+1)!}\left\{\frac{3l+2}{2}a_{2k+2l+5}\right\}\right]=0$$

之れ等を解けば

$$a_{2k+2l+3}=-0.750\,\alpha_{2(k+l)+4}+0.125\,\alpha_{2(k+l)+6}+0.172\,\alpha_{2(k+l)+8}+0.211\,\alpha_{2(k+l)+10}+\ldots\ldots$$

$$a_{2k+2l+4}=-1.500\,\alpha_{2(k+l)+4}-0.375\,\alpha_{2(k+l)+6}-0.719\,\alpha_{2(k+l)+8}-0.940\,\alpha_{2(k+l)+10}-\ldots\ldots$$

$\therefore\quad a_3=-0.0095 \qquad a_4=0.0240 \qquad a_5=0.0863 \qquad a_6=0.1599$

$a_7=-0.0314 \qquad a_8=-0.0570 \qquad a_9=0.0161$

次に ${}_rA_s$ を求めると ${}_rA_{2k}=0$

$${}_{2l}A_{2k+1}=(-1)^{l-1}\frac{W}{(2l-3)!\,(2k+1)!\,h^{2k+2l-1}}(l-1)a_{2k+2l+1}$$

$${}_{2l+1}A_{2k+1}=(-1)^{l}\frac{W}{(2l-2)!\,(2k+1)!\,h^{2k+2l}}\left\{la_{2k+2l+2}+\alpha_{2k+2l+2}\right\}$$

| | | |
|---|---|---|
| | ${}_0A_3=-0.00158\ W/h$ | ${}_0A_5=+0.00072\ W/h^3$ |
| | | ${}_1A_5=-0.000926\ W/h^4$ |
| ${}_3A_1=-0.0240\ W/h^2$ | ${}_3A_3=-0.0081\ W/h^4$ | ${}_3A_5=+0.000142\ W/h^6$ |
| ${}_4A_1=-0.0863\ W/h^3$ | ${}_4A_3=+0.00523\ W/h^5$ | ${}_4A_5=-0.000134\ W/h^7$ |
| ${}_5A_1=+0.1043\ W/h^4$ | ${}_5A_3=-0.00617\ W/h^6$ | ${}_5A_5=+0.00014\ W/h^8$ |
| ${}_6A_1=-0.01047\ W/h^5$ | ${}_6A_3=+0.000895\ W/h^7$ | |
| ${}_7A_1=+0.00546\ W/h^6$ | ${}_7A_3=-0.00041\ W/h^8$ | |
| ${}_8A_1=-0.000403\ W/h^7$ | | |

他の係數は零又は之れに近いものである。$\xi,\ \eta$ を求めると

$$\begin{aligned}\xi=(W/Eh)(&-0.0084+0.0384\,y^2/h^2-0.0012\,y^4/h^4+0.0107\,x/h\\&-0.0385\,xy^2/h^3+0.0012\,xy^4/h^5+0.0192\,x^2/h^2-0.0035\,x^2y^2/h^4\\&+0.0001\,x^2y^4/h^6-0.0227\,x^3/h^3+0.0040\,x^3y^2/h^5-0.0001\,x^3y^4/h^7\\&+0.0024\,x^4/h^4-0.0006\,x^4y^2/h^6-0.0010\,x^5/h^5+\ldots\ldots\qquad)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta=(W/Eh)(&-0.0253y/h+0.00147\,y^3/h^3-0.000148\,y^5/h^5-0.0772\,xy/h^2\\&+0.00473\,xy^3/h^4+0.0998\,x^2y/h^3-0.00558\,x^2y^3/h^5-0.0119\,x^3y/h^4\\&+0.00082\,x^3y^3/h^6+0.0058\,x^4y/h^5-0.00037\,x^4y^3/h^7-0.0005\,x^5y/h^6+\ldots.)\end{aligned}$$

之れから各 $x,\ y$ の $\xi$ を求むれば，但し單位は $W/hE$

| | $y=0$ | $y=0.2\,h$ | $y=0.4\,h$ | $y=0.6\,h$ | $y=0.8\,h$ | $y=h$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x=0$ | $-0.0084$ | $-0.0069$ | $-0.0023$ | 0.0052 | 0.0157 | 0.0288 |
| $x=0.2\,h$ | $-0.0057$ | $-0.0045$ | $-0.0008$ | 0.0052 | 0.00135 | 0.0239 |
| $x=0.4\,h$ | $-0.0024$ | $-0.0015$ | 0.0012 | 0.0057 | 0.0118 | 0.0196 |
| $x=0.6\,h$ | 0.0002 | 0.0008 | 0.0026 | 0.0054 | 0.0095 | 0.0145 |
| $x=0.8\,h$ | 0.0016 | 0.0019 | 0.0028 | 0.0042 | 0.0062 | 0.0087 |

各 $x,\ y$ に對する $\eta$ を求めれば，單位は $W/Eh$

| | $y=0$ | $y=0.2\,h$ | $y=0.4\,h$ | $y=0.6\,h$ | $y=0.8\,h$ | $y=h$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x=0$ | 0 | −0.0051 | −0.0100 | −0.0149 | −0.0195 | −0.0240 |
| $x=0.2\,h$ | 0 | −0.0070 | −0.0138 | −0.0208 | −0.0270 | −0.0331 |
| $x=0.4\,h$ | 0 | −0.0076 | −0.0147 | −0.0219 | −0.0286 | −0.0351 |
| $x=0.6\,h$ | 0 | −0.0063 | −0.0128 | −0.0191 | −0.0247 | −0.0302 |
| $x=0.8\,h$ | 0 | −0.0040 | −0.0080 | −0.0117 | −0.0141 | −0.0187 |

### 例題 II. 山型荷重による地盤の動き

$$m=2.5,\qquad \alpha_{2k+1}=0,\qquad \alpha_{2k}=-(-1)^k\,1/(2k-3)(2k-2)$$
$$\beta_k=0,\qquad X=0$$

と置けば前と全く同樣に計算して $\xi$ を求める事が出來る，單位は $W/Eh$

| | $y=0$ | $y=h$ | $y=2\,h$ | $y=3\,h$ | $y=4\,h$ | $y=5\,h$ | $y=6\,h$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x=0$ | 0.250 | 0.228 | 0.173 | 0.103 | 0.044 | 0.006 | −0.006 |
| $x=0.2\,h$ | 0.198 | 0.181 | 0.137 | 0.082 | 0.034 | 0.006 | −0.003 |
| $x=0.4\,h$ | 0.147 | 0.134 | 0.102 | 0.062 | 0.025 | 0.004 | −0.002 |
| $x=0.6\,h$ | 0.096 | 0.088 | 0.067 | 0.041 | 0.020 | 0.008 | 0.008 |
| $x=0.8\,h$ | 0.045 | 0.041 | 0.031 | 0.019 | 0.007 | 0.000 | −0.003 |

單位を同じにして $\eta$ を求めれば

| | $y=0$ | $y=h$ | $y=2\,h$ | $y=3\,h$ | $y=4\,h$ | $y=5\,h$ | $y=6\,h$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x=0$ | 0 | 0.032 | 0.054 | 0.060 | 0.049 | 0.029 | 0.004 |
| $x=0.2\,h$ | 0 | 0.038 | 0.063 | 0.069 | 0.057 | 0.033 | 0.005 |
| $x=0.4\,h$ | 0 | 0.038 | 0.063 | 0.069 | 0.057 | 0.035 | 0.010 |
| $x=0.6\,h$ | 0 | 0.031 | 0.052 | 0.056 | 0.047 | 0.028 | 0.0[illegible]9 |
| $x=0.8\,h$ | 0 | 0.019 | 0.032 | 0.034 | 0.029 | 0.018 | 0.007 |

荷重曲線は（$x=0$）次の如き型を示す。

$$\sigma_x=\frac{W}{h^2}\left(-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}\frac{y^2}{h^2}-\frac{1}{6!}\frac{y^4}{h^4}+\frac{1}{8!}\frac{y^6}{h^6}-\frac{1}{10!}\frac{y^8}{h^8}+\dots\right)$$

### 例題 III. 荷重及び地盤を與へられた時の地面の沈下狀態

荷重は比重 0.74 の兩底邊夫々 1.5 米及び 38 米，高さ 15.3 米の山型梯形荷重で地盤は地面から 10 米迄粘土層以下砂層である。粘土は $m=2.5$, $E=40$ 噸/米$^2$

荷重曲線は梯形荷重と型の似たものとするため

$$\alpha_{2k+1}=0\qquad \beta_k=0\qquad X=0$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\alpha_4=-0.500$ | $\alpha_{10}=+\ 4.36$ | $\alpha_{16}=-\ 327$ | $\alpha_{22}=+38.3\times10^3$ | $\alpha_{28}=-\ 5.47\times10^6$ |
| $\alpha_6=+0.521$ | $\alpha_{12}=-16.96$ | $\alpha_{18}=+1\,552$ | $\alpha_{24}=-196.2\times10^3$ | $\alpha_{30}=+\ 29.3\times10^6$ |
| $\alpha_8=-1.301$ | $\alpha_{14}=+\ 72.3$ | $\alpha_{20}=-7\,610$ | $\alpha_{26}=+1.03\times10^6$ | $\alpha_{32}=-159.5\times10^6$ |

とすれば地面の壓力は，

$$\sigma_x=\frac{W}{h^2}\left(\frac{1}{2!}-\frac{2.5^2}{4!}\frac{y^2}{h^2}+\frac{2.5^4}{6!}\frac{y^4}{h^4}-\frac{2.5^6}{8!}\frac{y^6}{h^6}+\dots\right)$$

之れを積分して全荷重を求め之れを與へられた梯形荷重と等しと置き

$$2\int_0^h\int_0^{2.51h}\sigma x\,dy\,dz=\frac{1}{2}(1.5+38)\times 15.3\times 10\times 0.74\ \text{噸}$$

$$1.040\ W=2\,235\ \text{噸}\qquad W=2\,150\ \text{噸}$$

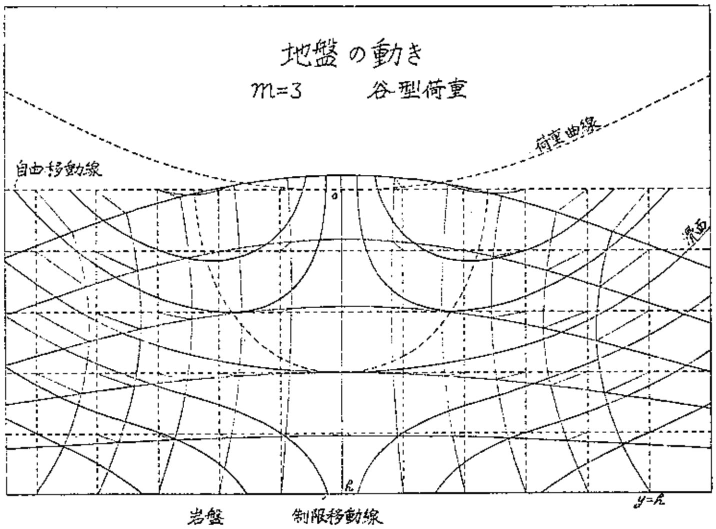
$\xi$ を求めると　$x=0$　に於て

$$\xi=(W/Eh)(0.315-0.222\,y^2/h^2+53.5\times 10^{-3}y^4/h^4-6.49\times 10^{-3}y^6/h^6$$
$$+475\times 10^{-6}y^8/h^8-23.3\times 10^{-6}y^{10}/h^{10}+823\times 10^{-9}y^{12}/h^{12}-21.9\times 10^{-9}y^{14}/h^{14}+454\times 10^{-12}y^{16}/h^{16}-\cdots\cdots)$$

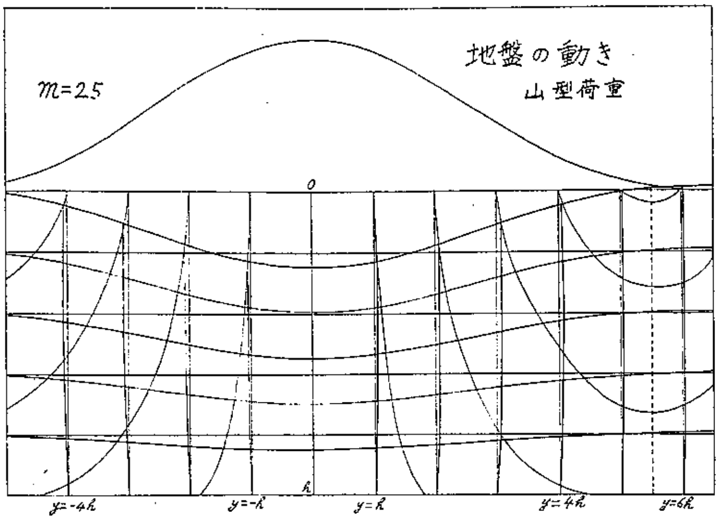
| | 單位 | $y=0$ | $y=5$ 米 | $y=10$ 米 | $y=15$ 米 | $y=20$ 米 | $y=25$ 米 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\xi$ | $W/Eh$ | 0.315 | 0.262 | 0.141 | 0.023 | −0.031 | −0.023 |
| $\xi$ | 米 | 1.69 | 1.41 | 0.76 | 0.12 | −0.17 | −0.12 |

之れ等の例題を圖示すれば**附圖第一**乃至**第三**となる。

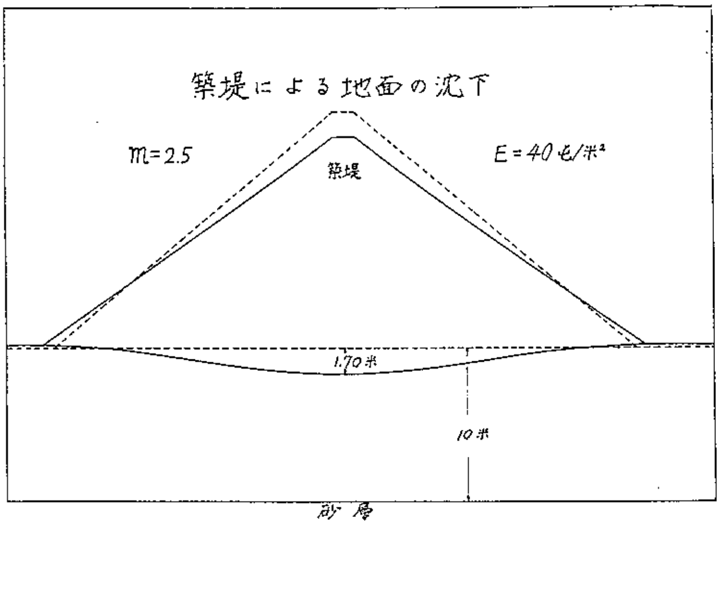
## 附圖第一




## 附圖第二

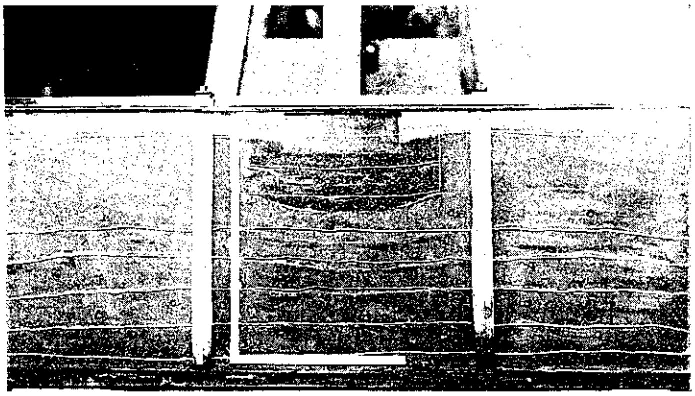



## 附圖第三




（土木學會誌第十七卷第八號附圖）

寫眞第一　粘土地盤中に於ける各點の移動を示す



實驗場　鐵道省熊本建設事務所

寫眞第二　同　上