

論 說 報 告

土木學會誌 第十七卷第六號 昭和六年六月

背水曲線の一般的解法

會員 工學博士 物 部 長 穂

General Solution of Backwater Curves

By Nagaho Mononobe, Dr. Eng., Member.

内 容 梗 概

現時の背水曲線公式は水理學上頗る不完全なるものなる事を指摘し、在來の方法に依ては實際上必要なる精度に改善する事の不可能なるを説き、新に一般的解法を提案して其の原理を解き尙實驗に依て其の精度を明かならしめたるものなり。

目 次

I. 在來の背水曲線公式	1
(1) 背水曲線の基礎方程式	1
(2) 背水曲線公式の種類	3
(3) 流速公式に因る誤差	4
(4) 流速水頭變化の影響	6
(5) 水路断面形の影響	8
II. 著者の一般的解法	10
(6) 一般的解法の原理	10
(7) 背水曲線の一般式	12
(8) 種々の断面形に於ける断面積、潤滑及び動水平均深	13
(9) 矩形断面に對する計算及び實驗	17
(10) 結 言	20

I. 在來の背水曲線公式

(1) 背水曲線の基礎方程式

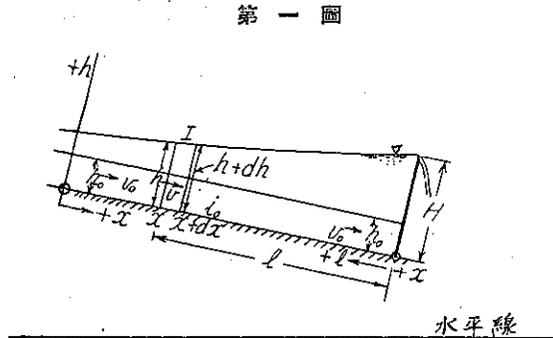
普通の uniform steady flow に於ては流速に影響する凡ての水理量が断面に依て變化せず、水面の縦斷線は水路底と平行なる直線にして、その勾配 i_0 は重力の分力と流動摩擦とが平衡する如きものにして、嚴密にこれに適合する場合は實在せぬが、prismatic 又は cylindrical の長き人工水路の中間部に於ては實地上この種の水流と看做し得る。

斯の如き水流の一断面に於て水理量（水深，勾配，幅員，粗度等）を變化せしむれば上流部は non-uniform flow（不等速流）に變じ，その影響は理論上無限の上流に及び，水深，流速，水面勾配等を變化せしむるが，工學上最も重要なるは水面の昇降にして，所謂背水曲線は斯の如き場合の水面縦斷曲線を意味し，水面の嵩上と低下との二場合あるもこれを表はす微分方程式の性質に於ては何等の差なく唯 boundary condition が異なるのみである。

Non-uniform flow を表はす一般的微分方程式は，背水影響圏内の任意の断面に原點を置き， x 軸を水路底の最低線上に下流向きに， h 軸をこれに垂直に上向にとれば

$$I = i_0 - \frac{dh}{dx} = i_0 + (1 + \eta + \xi) \frac{d}{dx} \left(\frac{v^2}{2g} \right)$$

但し水深は凡て鉛直に測るべきものなるも，水路の如く勾配數百分之一以下の場合には河底線に垂直に測りたるものを代用し得。 i_0 は x 断面に



於て v なる平均流速の uniform flow を生ずる爲に必要な水面勾配にして，動水平均深を R とし Chézy 公式を用ふれば

$$i_0 = \frac{v^2}{C^2 R} \quad \text{即ち} \quad v = C \sqrt{R i_0}$$

$\frac{d}{dx} \left(\frac{v^2}{2g} \right)$ は流速の變化に因る動勢の變化を流速水頭の變化に依て表はしたるものにして， η は微分断面の流速 u の二乗の平均値の代りに平均流速 v の二乗を用ふる爲の補正係數， ξ は u の方向が x 軸に平行ならざる爲の補正係數にして，何れも場合に依て多少異なるも平均 1.11 即ち 10/9 位にして，且 $(1 + \eta + \xi) \frac{d}{dx} \left(\frac{v^2}{2g} \right)$ の値は普通 i に比し少にして今日の背水曲線の多くはこの項を全然無視せるものが多い。今 $1 + \eta + \xi$ を α を以て表はせば前掲の方程式は

$$I = i_0 - \frac{dh}{dx} = \frac{v^2}{C^2 R} + \alpha \frac{d}{dx} \left(\frac{v^2}{2g} \right) \dots \dots \dots (1)$$

若し $v = CR^m i_0^{\frac{1}{2}}$ なる流速公式を用ふれば

$$i_0 - \frac{dh}{dx} = \frac{1}{C^2} v^2 R^{-2m} + \alpha \frac{d}{dx} \left(\frac{v^2}{2g} \right) \dots \dots \dots (2)$$

この微分方程式を解きて， h と x との關係を表はす爲には i_0 及び C は不變なる事を要するを以て，河川の場合には原則として應用し得ぬも i_0 及び C の略一樣なる多くの區間に分ち，その各區域毎に別々に h と x との關係を適用すれば直接 (1) 式より試算的に背水曲線を求むるに比し遙かに有利である。

(2) 背水曲線公式の種類

水路の流量 Q は不変なるを以て v は使用流速公式に對し, h に相當する斷面積 A 及び動水平均深 R , 並に粗度係數又は流速係數に依て表はされ, $\frac{d}{dx} \left(\frac{v^3}{2g} \right)$ は A を以て表はされ一定の斷面形に於ては A 及び R は水深 h に依て表はし得るを以て, 結局 (1) 式は h と x との關係を表はす微分方程式にしてその式形は使用流速公式及び斷面形に依て異なり, 従てその積分より得たる背水曲線も亦流速公式と斷面形とに依て當然異なるべき筈なるが, その影響の重要さに就ては全然考慮されて居らぬ。

次に普通使用さるゝ斷面形と流速公式及び流速水頭の變化との組合せに依て得らるべき種々の背水公式は次の諸場合の組合せより生ずる。

自由水面を有する水流に於て平均流速 v を表はす流速公式は大體下記の如き形にして, 一般指數公式に於ける i の指數は多少異なるものもあるも何れも 0.5 に極めて近きを以て凡て 0.5 に取る, 従て 2), 3), 4) 等は 5) の special case と看做すことを得。

A. 流速公式

- 1) $v = CR^{\frac{1}{2}} i^{\frac{1}{2}}$ C は R に依り異なる .. Chézy
- 2) $v = CR^{\frac{2}{3}} i^{\frac{1}{2}}$ $C = \frac{1}{n}$ Manning
- 3) $v = CR^{0.7} i^{\frac{1}{2}}$ $C = \frac{1}{n}$ Forchheimer or Modified Manning
- 4) $v = CR^{\frac{4}{3}} i^{\frac{1}{2}}$ C は常數 Hermanek
- 5) $v = CR^m i^{\frac{1}{2}}$, $0.5 < m < 1.0$, " 指數公式

B. 斷面形 但し, 廣は水深に比し幅員極て大にして背水計算に於て, 潤邊=水面幅と看做し得る場合,

- a 廣矩形
- b 普通の矩形
- c 普通の梯形
- d 廣拋物線斷面及び廣二次曲線斷面
- e 普通拋物線斷面
- f 其の他の形の廣斷面
- g 其の他の種々の斷面形

C. 流速水頭

- i. 流速水頭の變化を考慮せるもの,
- ii. " 無視せるもの。

水路の平均流速公式は一般に $v = CR^m i^s$, $\frac{1}{2} < m < 1$, $0.45 < s < 0.6$ なる形をとるも背水曲線の場合に於ては係數 C は R 及び i に無關係に, s は簡單なる數を以て表はさるゝ場合の外 (1) 式の積分は困難なるを以て前掲の式は 1) を除くの外, 粗度係數同一ならば C は略不變にして而も s を 0.5 に採り得るものゝみである。

斷面形に於て水深に對し幅の極めて廣き場合は wetted perimeter が水面幅に殆んど等し

き場合にして背水曲線の計算は著しく單化せらるゝ、 f 及び g には殆んど無数の断面形が含まるゝを以て暫くこれを除外し、 a より e 迄の種の断面と 1), 2), 3) 又は 1), 3), 4) の3種の流速公式との組合に依て 15 種の背水曲線を得、流速水頭の項を考慮すると否とに依り 30 種となり、更に水面の嵩上と低下とに依り 60 種となる。流速公式を 1 種に限るも尙 20 種の背水曲線を生じ、而も猶千態萬狀の水路断面に於て相當信頼し得る背水を計算する事は事實困難である。然るに今日迄に解決されたる背水曲線は極めて簡單なる場合に對する數種に過ぎぬ、即ち第一表の如し。

第一表

著者	發表年	流速公式	断面形	流速水頭	數 表	
					嵩上 (h/h_0) ¹⁾	低下 (h/h_0)
1° Grashof-Bresse (佛)	1860	Chézy	廣矩形	考慮	$\frac{1}{0.999} \sim \frac{1}{0.07}$	0.999~0.0
2° Dupuit-Masoni (佛, 伊)	1863(?)	Chézy	普通矩形	考慮	無	無
3° Rühlmann (獨)	1880	Chézy	廣矩形	無視	1.01~6.0	0.99~0.0
4° Tolkmitt (獨)	1881	Chézy	廣拋物線形	考慮	1.005~5.0	0.995~0.0
5° Schaffernak (奥)	1913	Hermanek	廣矩形	無視	1.013~5.0	$0.2 \sim \frac{1}{1.04}$
6° Baticle (佛)	1921	$Q = Iz^5 = i_0 z_0^5$		無視	1.001~10.0	無
7° Kozeny (奥)	1928	Forchheimer	廣矩形	考慮	無	0.1~0.95
8° Schoklitsch (奥)	1930	$CR^m z^{\frac{1}{2}}$	廣矩形	無視	1.01~5.0	無

1) h_0 ... 等速流即ち原水深, h ... 背水水深

2) Q ... 水路流量

Baticle 氏の公式に於ては z はある断面の背水最大水深, z_0 はその等速流の時の最大水深にして $v = CR^{\frac{1}{2}} I^{\frac{1}{2}} = C_0 z^m I^{\frac{1}{2}}$, $A = bz^n$ と置き, $m+n=2.5$ と採り水頭變化を無視し, (1) 式を積分して得たる無限級數の數表を作成して居るが, $Av = C_0 z^{2.5} I^{0.5}$ を以て Q を表はし得る如き水路に於ては 1°, 3°, 5° 等の諸式に比して廣き適應性を有するも, $m+n$ の値は 1° に於て 1.5, 3° に於て 1.75, 4° に於て 2.0 なるに比して著しく大である。

上記の外、屢々使用さるゝ近似公式は、

Flamant 式(佛)、實用上最も重要な普通の矩形断面に對し流速水頭の項を考慮したる近似式にして相當の價值ある公式である。次に

Poirée 式(佛)は背水曲線を拋物線と見做したるものにして何等水理學上の根據を有せぬを以て濫りに使用すべきものではない。

其他多くの近似式あるも、それ以後に發表されたる數表に依て存在の意義を失つたものが多い。

(3) 流速公式に因る誤差

水路の平均流速は一般に $v = CF^m i^{m'}$ にて現はされた普通 $m' = 0.5$ なるが、背水微分方程

式の積分に當りては凡て C を R 及び i に無關係なる係數として取扱ふが故に C が R 及び i を含まざる形の流速公式を用ふるを便とする。然るに在來の背水曲線中の多くは Chézy 式を用ひ $m=0.5$ とし、從て C は R の函數となり嵩上背水 (Stau) の場合の如く、水深從て R が數倍乃至十數倍の範圍に變化する時は C の變化も亦極めて著しい。今 Kutter 公式に依り $R=1\text{ m}$ 及び 5 m , $i_0=1:2500$ とし種々の粗度係數 (n) に對し R に依る C の變化の程度を見るに第二表の如くなる。

第二表

$n=$	0.013	0.017	0.020	0.025	0.030	
$R=1\text{ m}$	} $C=$ {	77	58	50	40	33
$R=5\text{ m}$		90	72	62	52	44
$\Delta C, \%$	16.9	24.1	24.0	30.0	33.4	

即ち $R=1\text{ m}$ なる等速流を $R=5\text{ m}$ に堰上ぐる場合 C の値は背水圏内に於て 30% 位迄の差を生じ、これを定數と看做す事の不合理なるは明かなるを以て Chézy 式は背水曲線の場合には不適當である。次に斯の如き C の變化が背水曲線に及ぼす影響を Chézy 式を用ひたる Rühlmann 公式と Hermanek 式を用ひたる Schaffernak 式とに依て比較するに、

$$\text{Rühlmann 公式} \quad \frac{i_0 l}{h_0} = \varphi\left(\frac{H-h_0}{h_0}\right) - \varphi\left(\frac{h-h_0}{h_0}\right) \dots\dots\dots (3)$$

$$\text{Schaffernak 公式} \quad \frac{i_0 l}{h_0} = \psi\left(\frac{H}{h_0}\right) - \psi\left(\frac{h}{h_0}\right) \dots\dots\dots (4)$$

但し同一の H 及び h に對し、 C の一定せる Schaffernak 公式の與ふる $i_0 l/h_0$ に對する Rühlmann 式の差を % にて表はす。(第三表)

第三表

	$H=5 h_0$		$H=2 h_0$	
	$h=1.1 h_0$	$h=2 h_0$	$h=1.05 h_0$	$h=1.1 h_0$
Rühlmann	$\frac{i_0 l}{h_0} = 4.5605$	3.112	1.7138	1.4486
Schaffernak	" = 4.393	3.066	1.557	1.327
差 %	+3.8	+1.5	+10.0	+9.2
$i_0=1:2500$	} の誤差 m,			
$h_0=4\text{ m}$				
$i_0=1:2500$	} "			
$h_0=2\text{ m}$				

即ち一定の水位上昇を生ずる點の距離に著しき差を生ずる事は明かである。從て背水の場合には $v=CR^m i^{0.5}$ に於て m 及び C を問題の水路に對し適當に撰定して使用すべきであるが、Manning 式は平滑なる人工水路に適し、Hermanek 式は粗度大なる急流河川に、Forchheimer 式はその中間の場合即ち河川及び大人工水路に適して居る。

(4) 流速水頭変化の影響

在來の背水曲線に於ては(1)式の右邊第二項即ち流速水頭變化の項は第一項に比し少なりと看做して無視せるものが多い、然し同一の h_0 に對し流速の大なる場合即ち C 及び i_0 の大なる水路に於ては曲線形に稍重大なる影響を及ぼすのみならず、斷面積が $A=ah^n$, ($2n =$ 任意の整数) なる式を以て表はし得る場合に於ては、背水曲線は流速水頭を無視せる場合と全く同一の無限級數を以て表はし得るが故に同一の數表を利用し得るを以て實計算に於て僅少の手數を増すのみである。例へば極めて廣き矩形水路に對し、流速水頭の變化を考慮せる Bresse 公式とこれを無視せる Rühlmann 式とを比較するに、Bresse 公式の微分方程式は

$$i_0 \frac{dx}{dh} = \frac{h^3 - \alpha \frac{C^2 i_0}{g} h_0^3}{h^3 - h_0^3} = \frac{h^3 - k^3}{h^3 - h_0^3}$$

茲に $k = h_0^3 \sqrt{\alpha \frac{C^2 i_0}{g}}$ = 限界水深 (critical depth)

上式を積分すれば

$$i_0 x = h + (h_0^3 - k^3) \int \frac{dh}{h^3 - h_0^3} + K_1 = h - h_0 \left(1 - \frac{k^3}{h_0^3}\right) B\left(\frac{h}{h_0}\right) + K_1 \dots \dots \dots (5)$$

茲に K_1 は積分常數

次に Rühlmann 公式の微分方程式は

$$i_0 \frac{dx}{dh} = \frac{h^3}{h^3 - h_0^3}$$

$$\therefore i_0 x = h + h_0^3 \int \frac{dh}{h^3 - h_0^3} + K_2 = h - h_0 B\left(\frac{h}{h_0}\right) + K_2 \dots \dots \dots (6)$$

$$\therefore \frac{i_0 x}{h_0} = \frac{h}{h_0} - B\left(\frac{h}{h_0}\right) + \frac{K_2}{h_0}$$

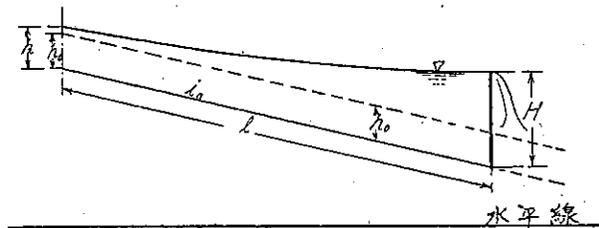
にして Rühlmann の表は $\frac{h-h_0}{h_0}$ の種々の値に對する $\frac{i_0 x}{h_0}$ 即ち $\frac{h}{h_0} - B\left(\frac{h}{h_0}\right) + \frac{K_2}{h_0}$, 但し $\frac{K_2}{h_0} = 0.4157$ の値を與へたるものである。而して Bresse 表は 1860 年に、Rühlmann 表は 1880 年に發表され而も後者の公式は前者の式の單なる近似的特殊場合に過ぎず、その數表も前者より直ちに書き下さるゝものなるを以て、當時の佛獨學術界の狀況より察すれば Rühlmann 氏の功績は洵に影の薄きものである。

次に Bresse 式を正しきものと假定し Rühlmann 式の誤差即ち流速水頭の變化を無視せるための誤差の程度を次の諸場合の背水高上に就て檢する。(第四表)

第四表

等速流の場合の 水面勾配 (i_0)	Bazin 公式の 粗度係数 (γ)	等速流の場合 の水深 (h_0)	堰上水深 (H)と 原水深 (h_0)との比
1 : 1000	0.16 (コンクリート水路)	6.0 m	1.5
1 : 3000			2.0
1 : 10000			5.0
	1.75 (河川)	1.0 m	10.0
			20.0

第二圖



之れ等の組合せより生ずる計 60 組の場合に就て、 $h/h_0=1.01$ なる點の、堰よりの距離 l を
兩式に依て比較するに、先づ便宜上 l の代りに $i_0 l/h_0$ を以て比較すれば第五表の如くなる。

第五表

$i_0 =$	Bresse 公式						Rühlmann 公式						
	1 : 1000		1 : 3000		1 : 10000								
$\gamma =$	0.16	1.75	0.16	1.75	0.16	1.75	↓						
$h_0 m =$	6	1	6	1	6	1							
H/h_0													
1.5	0.86	0.99	1.32	1.54	1.39	1.41	1.55	1.61	1.57	1.59	1.62	1.64	1.65
2.0	1.40	1.54	1.94	2.15	1.99	2.03	2.16	2.23	2.19	2.20	2.25	2.27	2.28
5.0	4.44	4.60	5.04	5.26	5.07	5.13	5.28	5.35	5.31	5.32	5.36	5.39	5.39
10.0	9.44	9.60	10.04	10.26	10.07	10.13	10.28	10.35	10.31	10.32	10.36	10.39	10.40
20.0	19.44	19.60	20.04	20.26	20.07	20.13	20.28	20.35	20.31	20.32	20.36	20.39	20.41

點線以下の場合には Rühlmann 式を以て計算せる $i_0 l/h_0$ の誤差が 5% 以内であるが、勾配
1 : 3000 以上にして堰上げ高割合に少なる場合には著しき差を示し最大 90% 以上に達する。

次に $H/h_0=1.5, 2.0$ 及び 5.0 の 3 場合に對し l の誤差を計算すれば、第六表の様になる。
但し γ は Bazin 流速公式の粗度係數である。

第六表

$i_0 =$		1 : 1000				1 : 3000				1 : 10000			
$\gamma =$		0.16		1.75		0.16		1.75		0.16		1.75	
$h_0 m =$		6	1	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1
1.5	H/h_0 の誤差 m	+4740	660	1980	110	4700	720	1800	120	3600	600	600	100
	同 %	+ 92	66.7	25	7.3	18.8	17.0	6.5	2.5	3.8	3.8	0.6	0.6
2.0	H/h_0 の誤差 m	5280	740	2040	140	5200	750	2160	150	5400	800	1800	100
	同 %	+ 63	48	17.6	6.5	19.6	12.3	5.5	2.2	4.1	3.6	1.3	0.4
5.0	H/h_0 の誤差 m	5260	790	780	130	4680	780	720	80	4200	700	0.0	0.0
	同 %	+ 19	17.2	2.5	2.5	5.1	5.1	0.75	0.5	1.3	1.3	0.0	0.0

即ち水深及び勾配大に、粗度小に即ち流速の大なる場合は著しき誤差を生じ、普通の水路河川の如く 1:3000 以上の勾配にして堰上げ水深 H が h_0 の數倍程度ならば誤差は 10~90 % 以上にも達する場合ありて常にこれを無視するは極めて不合理である。

(5) 水路断面形の影響

現存の背水曲線公式は矩形断面及び廣拋物線断面に對するものゝみにして、數表の備はれるは廣矩形と廣拋物線との 2 場合に限らるゝが、廣梯形断面にして水面幅と底幅と殆んど等しき場合は廣矩形、廣二次曲線断面は廣拋物線断面の式及び表を使用して支障ない。然し普通の水路の如く幅が水深の數倍程度の場合は勿論、等速流に於ては廣断面に近き水路に於ても堰上げ高大なる場合には潤邊長を水面幅に等しいとは看做されぬ。然るに從來背水の實際計算を見るに幅員の廣狹に關しては何等の注意を爲さず、中には矩形 (Bresse 公式) と拋物線形 (Tolkmitt 公式) との區別をさへ考へざるものがある。依て先づ幅員の廣狹が背水曲線に及ぼす影響を明かならしむる爲に廣矩形水路と普通の矩形水路とに就て背水の比較を爲さんとする。

廣矩形の場合は流速水頭の變化を考慮せる Bresse 數表を用ふるも、普通矩形の場合は數表なきを以て流速水頭を考慮せる Dupuit-Masoni 公式より直接計算する。同式は

$$\frac{v_0 x}{h_0} = \frac{h}{h_0} + \frac{1}{2} \frac{1 - \beta + 2\beta \frac{h_0}{w_0}}{3 - 2 \frac{h_0}{w_0}} \ln \frac{(h - h_0)^2}{h^2 + h_0 h + h_0^2 - 2 \frac{h_0^3}{w_0}}$$

$$+ \frac{1}{3 - 2 \frac{h_0}{w_0}} \frac{-3 + 3\beta + 12 \frac{h_0}{w_0} - 6\beta \frac{h_0}{w_0} - 8 \left(\frac{h_0}{w_0}\right)^2}{\sqrt{3 - 8 \frac{h_0}{w_0}}} \arctan \frac{2h + h_0}{h_0 \sqrt{3 - 8 \frac{h_0}{w_0}}} + K \dots \dots (7)$$

茲に $\beta = \alpha \frac{C^2 i_0}{g}$, w_0 は等速流の場合の潤邊長, 他は第三圖に示す。但し上式は $b_0 > \frac{2}{3} h_0$ の場合にの

み成立する。

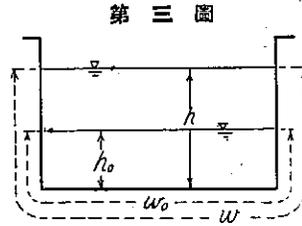
数計算を簡単ならしむる爲

$i_0=1:1000$, $h_0=2\text{ m}$, $\alpha=1.0$, $H=2h_0=4\text{ m}$ とし
 $h=1.01h_0$ なる断面の、堰よりの距離 l に於ける Bresse 式
 の誤差を求むる。

但し $A=b_0h$, $A_0=b_0h_0$, $w=b_0+2h$, $w_0=b_0+2h_0$

$$R = \frac{A}{w}, \quad R_0 = \frac{A_0}{w_0}, \quad \beta = \alpha \frac{C^2 i_0}{g} \div \frac{C^2}{10} i_0,$$

n : Kutter 粗度係数, C : n に相當する流速係数



第七表 普通矩形水路に對する Bresse 公式の誤差

b_0 m	n	C	β	(7) 式に依る l	Bresse 式に依る l	$\frac{b_0}{h_0}$	$\Delta\%$
4.0	0.010	100	1.0	$\frac{i_0 l}{h_0}$	1.998	0.99	
				l	3 996 m	1 980 m	2.0
	0.014	70.7	0.50	$\frac{i_0 l}{h_0}$	2.442	1.472	
				l	4 884 m	2 944 m	"
	0.020	50	0.25	$\frac{i_0 l}{h_0}$	2.66	1.95	
				l	5 320 m	3 900 m	"
8.0	0.0105	100	1.0	$\frac{i_0 l}{h_0}$	1.629	0.99	
				l	3 258 m	1 980 m	4.0
	0.022	50	0.25	$\frac{i_0 l}{h_0}$	2.536	1.953	
				l	5 072 m	3 906 m	"
36	0.011	100	1.0	$\frac{i_0 l}{h_0}$	1.169	0.99	
				l	2 338 m	1 980 m	18.0
	0.016	70.7	0.50	$\frac{i_0 l}{h_0}$	1.778	1.472	
				l	3 556 m	2 944 m	"
	0.024	50	0.25	$\frac{i_0 l}{h_0}$	2.224	1.953	
				l	4 448 m	3 906 m	"

上記の内 $\beta=1.0$ の場合は流速大にして射流と普通流との限界なるを以て、これ等を除外するも幅員廣狹の影響は極めて重大にして最大 50% 位迄の誤差を生ずべく、本例の如き勾配の水路にありては幅員が等速流水深の 18 倍に達する廣き水路に於ても尙 18% 程度の誤差を生じ而も背水距離を過少に與ふるを以て普通の矩形水路に對し Bresse 公式を用ふるは頗る不合理である。

上述の如く Chézy 流速公式を用ふる爲の誤差は常に + にして多く 10% 以下、流速水頭の變化を無視する爲の誤差は + にして普通堰上を爲す場合の多くは勾配急なるを以て實際距離の誤差は頗る顯著である。一方廣斷面の假定に因る誤差は常に - にして水深に對して幅員が極めて大なる場合の外重大なる程度に達する。而して + 誤差は背水影響を過大に見積る事となり多くの場合安全側であるが、- の場合は反對に過小に見積る事となる。

而して之れ等の誤差の原因は何れも個々獨立に入り得るのみならず之れ等の誤差の間には何等の因果關係の成立せざるに依り、或る場合には +、- 互に補正し合ふ場合もあり得べしと雖も一般的には顯著なる誤差を豫期せねばならぬ。

II. 著者の一般的解法

(6) 一般的解法の原理

I. の各節に於て數字的に示せるが如く現在の背水曲線の凡ては實用上充分なる精度を有せざるのみならず水理學上の根據頗る曖昧であるが、何れも相當煩雜なる計算の上斯の如き不完全の域を脱すること能はざりし理由は、

1. 背水函數を有限項の函數を以て表はさんが爲、 U の一定せざる Chézy 流速公式を用ひ廣斷面の場合のみを考慮せる事。 $v=CR^m I^{\frac{1}{2}}$ に於て $\frac{1}{m}$ が整数にして廣斷面又は矩形の場合の外有限項函數を以て表はし得ず、而も後者に於ては單一なる數表又は曲線を以て表はし得ぬ。
2. m が一般的値をとる時は背水函數は廣斷面の場合に限り無限級數に依て表はさるゝも數表の計算は 1 に比して著しく煩雜である。Schaffernak, Schoklitsch 等の式はこの最も簡單なる場合にして、Rühlmann 式は 1 に屬すべきものなるに拘らず無限級數を用ひて無用の手數を加へたるに過ぎぬ。

而して Chézy 式を用ひざるものとすれば背水函數は一般に無限級數となり、更に流速水頭の變化を考ふれば一つの斷面に對して二つの級數を生じ、従來の如く個々の斷面形に對して函數表を作成する事は殆んど望みがない。

次に述ぶる著者の方法は斷面積、潤邊及び動水平均深等を實用上充分なる精度に表はし得る一般式を用ひ、流速水頭の變化を考慮し、各水路に最も適當なる一般型流速公式を用ひて、

漸變する一組又は二組の級數群に依て背水曲線を表はさんとするものである。

i 最も一般的なる場合

斷面積 A , 潤邊長 w , 動水平均深 R , 平均流速 v 等を水路底最低線に於ける水深 h の函數として最も一般的に表はす, 但し上記諸量に尾字 0 を附したるものは等速流の場合を示す。

$$\left. \begin{aligned} A &= a_0 + ah^n, & w &= b_0 + bh^k \\ R &= \frac{A}{v} & v &= CR^m I^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

一方水路の流量 Q は不變なるを以て

$$Q = vA = v_0 A_0$$

$$\therefore i = \frac{1}{C^2} \left(\frac{v_0 A_0}{A} \right)^2 R^{-2m}, \quad \frac{v^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g} \left(\frac{A_0}{A} \right)^2$$

依て (2) 式の背水曲線微分方程式は次の形となる。

$$i_0 \frac{dh}{dx} = \frac{v_0^2}{C^2} \left(\frac{A_0}{A} \right)^2 R^{-2m} + \alpha \frac{v_0^2}{2g} \frac{d}{dx} \left(\frac{A_0}{A} \right)^2 \dots\dots\dots (9)$$

更に A, R, v 等に (8) 式を代入すれば

$$i_0 \frac{dh}{dx} = i_0 \left(\frac{1 + \frac{\alpha}{a_0} h_0^n}{1 + \frac{\alpha}{a_0} h^n} \right)^{2m+2} \left(\frac{1 + \frac{b}{b_0} h^k}{1 + \frac{b}{b_0} h_0^k} \right)^{2m} - \frac{\alpha C^2 i_0}{g} \left(\frac{1 + \frac{\alpha}{a_0} h_0^n}{1 + \frac{b}{b_0} h_0^k} \right)^{2m} \frac{\alpha}{a_0} \left(\frac{1 + \frac{\alpha}{a_0} h_0^n}{1 + \frac{\alpha}{a_0} h^n} \right)^2$$

$$\times \frac{h^{n-1}}{1 + \frac{\alpha}{a_0} h^n} \frac{dh}{dx} \dots\dots\dots (10)$$

(10)式は最も一般的の形なるも右邊の兩項共 h に関する double series となり積分並に數計算は極めて煩雜である。

ii 然るに普通の水路又は河川に於ては h を最低線より計れば $a_0 = 0$ と置きても斷面積を充分精確に表はす事が出来る, 即ち

$$A = ah^n, \quad w = b_0 + bh^k, \quad R = \frac{A}{v} = \frac{a}{b_0} \frac{h^n}{1 + ch^k} \quad \text{茲に} \quad c = \frac{b}{b_0} \dots\dots\dots (11)$$

$$\therefore \left(\frac{A_0}{A} \right)^2 = \left(\frac{h_0}{h} \right)^{2n}, \quad R^{-2m} = \left(\frac{b_0}{a} \frac{1 + ch^k}{h^n} \right)^{2m}, \quad I = \frac{v_0^2}{C^2} \left(\frac{A_0}{A} \right)^2 R^{-2m} = i_0 \left(\frac{h_0}{h} \right)^{2n(n+1)} \left(\frac{1 + ch_0^k}{1 + ch_0^k} \right)^{2m}$$

$$\frac{v_0^2}{2g} \frac{d}{dx} \left(\frac{A_0}{A} \right)^2 = -i_0 \frac{C^2 n}{g} \left(\frac{c_0 + cc_0 h_0^k}{h_0^n} \right)^{-2m} \left(\frac{h_0}{h} \right)^{2n} \frac{1}{h} \frac{dh}{dx}$$

茲に $c_0 = \frac{b_0}{a}$

然るに $i_0 \frac{\alpha C^2 n}{g} \left(\frac{c_0 + cc_0 h_0^k}{h_0^n} \right)^{-2m} = h_0$

と置けば (9) 式は

$$i_0 \frac{dh}{dx} = i_0 \left(\frac{h_0}{h}\right)^{2n(m+1)} \left(\frac{1+ch^k}{1+ch_0^k}\right)^{2m} - \frac{h_0}{h_0} \left(\frac{h_0}{h}\right)^{2n+1} \frac{dh}{dx} \dots\dots\dots(12)$$

又は
$$i_0 \left[1 - \left(\frac{h_0}{h}\right)^{2n(m+1)} \left(\frac{1+ch^k}{1+ch_0^k}\right)^{2m} \right] = \left[1 - \frac{h_0}{h_0} \left(\frac{h_0}{h}\right)^{2n+1} \right] \frac{dh}{dx}$$

$$\therefore i_0 dx = \frac{\left[1 - \frac{h_0}{h_0} \left(\frac{h_0}{h}\right)^{2n+1} \right] dh}{1 - \left(\frac{h_0}{h}\right)^{2n(m+1)} \left(\frac{1+ch^k}{1+ch_0^k}\right)^{2m}} = F(h) dh \dots\dots\dots(13)$$

(13)式の分母の第二項は一の convergent infinite series を以て表はさるゝを以て、結局各邊の h を含む函数 $F(h)$ は h の double series を以て表はされ従て $i_0 w/h_0$ は h 又は h/h_0 の double series を以て表はす事を得るも、數表計算の手數は次に述ぶる iii の方法に比すれば著しく大である。

iii 次に潤邊長 w をも単一項を以て近似的に表はせば微分方程式の積分は著しく簡單となる。

$$A = ah^n, \quad w = bh^k, \quad R = \frac{A}{w} = \frac{a}{b} h^{n-k}$$

w を単一項を以て表はす事は斷面積の場合に比すれば多少無理の點あるも、多くの場合 w/w_0 の形にて式の中に入るを以て實際の誤差は著しからず、從來の如く $w = w_0 = b$ と假定するものに比すれば精度に於て著しき懸隔がある。

(7) 背水曲線の一般式

$$A = ah^n, \quad w = bh^k, \quad R = \frac{A}{w} = \frac{a}{b} h^{n-k}$$

$$\frac{A}{A_0} = \left(\frac{h}{h_0}\right)^n, \quad \frac{w}{w_0} = \left(\frac{h}{h_0}\right)^k, \quad \frac{R}{R_0} = \left(\frac{h}{h_0}\right)^{n-k}, \quad v_0 = CR_0^{2m} \frac{1}{v_0}$$

$$\therefore \frac{v_0^2}{C^2} \left(\frac{A_0}{A}\right)^2 R^{-2m} = i_0 \left(\frac{h}{h_0}\right)^{-2n} \left(\frac{R_0}{R}\right)^{2m} = i_0 \left(\frac{h}{h_0}\right)^{-2n-2m(n-k)}$$

$$\alpha \frac{v_0^2}{2y} \frac{d}{dx} \left(\frac{A_0}{A}\right)^2 = -\alpha \frac{v_0^2}{y} n \left(\frac{h}{h_0}\right)^{-2n-1} \frac{d}{dx} \left(\frac{h}{h_0}\right) = -K h_0 \left(\frac{h}{h_0}\right)^{-2n-1} \frac{d}{dx} \left(\frac{h}{h_0}\right)$$

茲に $K = \alpha n \frac{v_0^2}{gh_0}$

之れ等の式を(9)式の一般微分方程式に代入すれば

$$i_0 \frac{dh}{dx} = i_0 \left(\frac{h}{h_0}\right)^{-2n-2m(n-k)} - K h_0 \left(\frac{h}{h_0}\right)^{-(2n+1)} \frac{d}{dx} \left(\frac{h}{h_0}\right)$$

今 $\frac{h}{h_0} = y$ と置けば, $d\left(\frac{h}{h_0}\right) = dy = \frac{dh}{h_0}$

故に
$$\frac{i_0}{h_0} dx = \frac{dy}{1-y^{-2n-2m(n-k)}} - K \frac{y^{-(2n+1)} dy}{1-y^{-2n-2m(n-k)}}$$

然るに m は使用流速公式に依り、 n 及び k は與へられたる断面形に依て定まるを以て

$$2n + 2m(n - k) = r \text{ と置けば}$$

$$\frac{i_0 dx}{h_0} = \frac{dy}{1 - y^{-r}} - K \frac{y^{-(2n+1)} dy}{1 - y^{-r}} = \frac{y^r}{y^r - 1} dy - K \frac{y^{r-(2n+1)}}{y^r - 1} dy \dots (14)$$

上式を $x = x_0$ より $x_0 + l$ 迄積分すれば

$$\frac{i_0 l}{h_0} = \Phi_1 \left(\frac{H}{h_0} \right) - \Phi_1 \left(\frac{h}{h_0} \right) - K \left[\Phi_2 \left(\frac{H}{h_0} \right) - \Phi_2 \left(\frac{h}{h_0} \right) \right] \dots (15)$$

茲に $H \dots x_0 + l$ に於ける水深、 $h \dots x_0$ に於ける水深

$$K \dots \alpha n \frac{v_0^2}{gh_0}, \quad \alpha = \frac{10}{9}$$

$$\Phi_1 = \int \frac{y^r}{y^r - 1} dy, \quad \Phi_2 = \int \frac{y^{r-(2n+1)}}{y^r - 1} dy$$

r は普通 2~5 なるを以て整数の場合には積分容易にして然らざる場合は級数に展開して積分するか又は求積器積分を行ふ。

$$y = \frac{h}{h_0} \text{ の代りに } z = \frac{h_0}{h} \text{ を変数と}$$

すれば (14) 式は

$$\frac{i_0 dx}{h_0} = -\frac{z^{-2} dz}{1 - z^r} + K \frac{z^{2n-1} dz}{1 - z^r} \dots (16)$$

$r > 1, z < 1$ なるを以て兩項を展開して積分すれば

$$\frac{i_0 l}{h_0} = \Psi_1 \left(\frac{h_0}{H} \right) - \Psi_1 \left(\frac{h_0}{h} \right) - K \left[\Psi_2 \left(\frac{h_0}{H} \right) - \Psi_2 \left(\frac{h_0}{h} \right) \right] \dots (17)$$

低下背水 (Absenkung) の場合は $z = \frac{h_0}{h} > 1$

$$\frac{i_0 dx}{h_0} = +\frac{z^{-2} dz}{z^r - 1} - K \frac{z^{2n-1}}{z^r - 1} dz \dots (18)$$

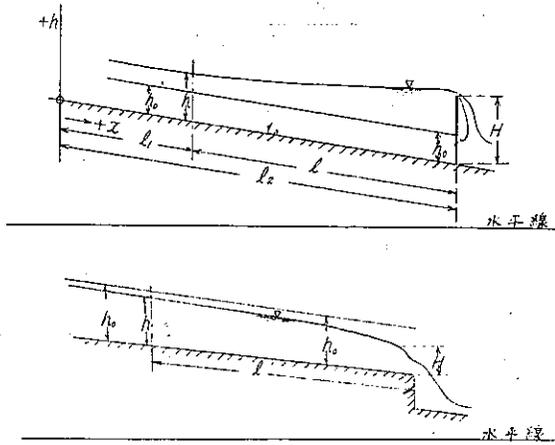
$$\therefore \frac{i_0 l}{h_0} = \Psi_1' \left(\frac{h_0}{H} \right) - \Psi_1' \left(\frac{h_0}{h} \right) - K \left[\Psi_2' \left(\frac{h_0}{H} \right) - \Psi_2' \left(\frac{h_0}{h} \right) \right] \dots (19)$$

$\Phi_1, \Psi_1, \Psi_1', \dots$ 等は n 及び r の數個の値に對して計算し、中間の n 及び r に對しては挿入法に依て曲線群を作成するを便とする。

(8) 種々の断面形に於ける断面積、潤邊及び動水平均深

前節に述べたる如く背水曲線の級数計算を簡單ならしむる爲 $A = ak^n, w = bh^k, R = \frac{a}{b} h^{n-k}$ と置きたるが、之れ等の式が断面の實際の A, w, R を如何なる程度に近似的に表はし得るやを検するに、上記の式形が凡て h と共に連続的に變化する形なるを以て、 w の急變する

第四圖



矩形及び梯形に於て誤差の最も著大なるべきは明かなるを以て之れ等の断面形に就てその程度を明かならしめんとす。

矩形及び梯形に於ては上記の諸量は一般に次の諸式を以て表はさる。(第五圖)

$$A = a_0 h + ah^2, \quad \Delta_0 = a_0 h_0 + ah_0^2, \quad \frac{\Delta_0}{A} = \frac{a_0 h_0 + ah_0^2}{a_0 h + ah^2}$$

今水路の形が等速流に於て最有効断面即ち断面積に對して潤邊長最少即ち動水平均深最大なる如き形狀を有するものとすれば、底幅 a_0 は

$$a_0 = 2h_0 \tan \frac{\theta}{2} = \mu h_0$$

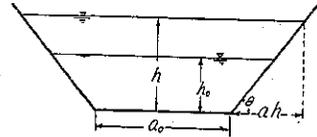
$$\therefore A = A_0 \frac{\mu h_0 h + ah^2}{\mu h_0^2 + ah_0^2} = \frac{A_0}{1 + \frac{a}{\mu}} \left(y + \frac{a}{\mu} y^2 \right)$$

$$\text{茲に } y = \frac{h}{h_0} = z^{-1}$$

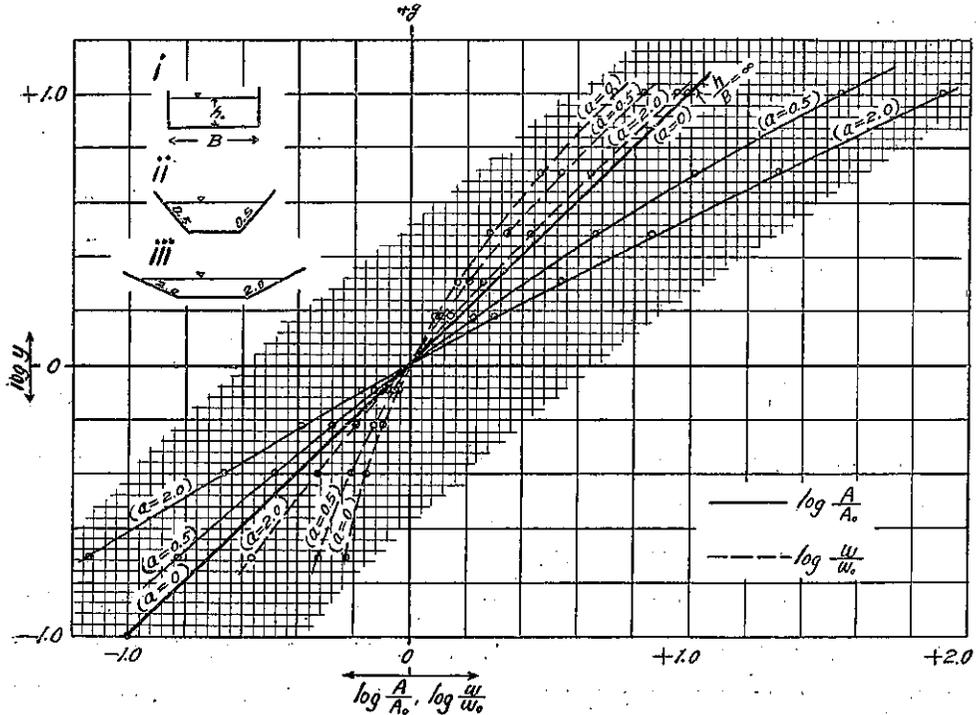
$$w = a_0 + 2\sqrt{1+a^2}h = \mu h_0 + 2\sqrt{1+a^2}h$$

$$= w_0 \frac{\mu h_0 + 2\sqrt{1+a^2}h}{\mu h_0 + 2\sqrt{1+a^2}h_0} = w_0 \frac{1 + \frac{2}{\mu}\sqrt{1+a^2}y}{1 + \frac{2}{\mu}\sqrt{1+a^2}}$$

第五圖



第六圖



之れ等の式に依り第六圖に示す如き3種断面形を取り

$$i \quad a=0 \text{ 矩形 } B=2h_0, \quad ii \quad a=0.5 \text{ 梯形}, \quad iii \quad a=2.0 \text{ 梯形}$$

之れ等の断面形に對し $\frac{h}{h_0}=y=z^{-1}$ に對する $\frac{A}{A_0}$, $\frac{w}{w_0}$, $\frac{R}{R_0}$

を算出し $\log y$ と $\log \frac{A}{A_0}$, $\log \frac{w}{w_0}$ 等との關係を曲線にて示せば第六圖の如し。

之れ等の曲線が直線なる場合は $A=ah^n$, $w=bh^k$ 中の n 及び k は常數にして之れ等の式は完全に断面の性質を表はし得るも、曲線を爲す時は n 及び k は y に依て異なる事を示し上記の式は近似的に表はし得るに過ぎぬ。

而して現今數表の備はり居る背水公式中 Tolkmitt 公式以外のものは凡て廣矩形即ち幅に比して水深を無視し得るが如き矩形断面に對するものなるを以て、底幅を a_0 とすれば

$$\begin{aligned} A &= a_0 h, & w &= a_0, & R &= h \\ \therefore \frac{A}{A_0} &= \frac{h}{h_0} = y, & \frac{w}{w_0} &= 1, & \frac{R}{R_0} &= y \\ \therefore \log y &= \log \frac{A}{A_0} = \log \frac{R}{R_0}, & \log \frac{w}{w_0} &= 0 \end{aligned}$$

即ち $\log \frac{A}{A_0}$ 及び $\log \frac{R}{R_0}$ は第六圖に太實線を以て示せる如く 45° の傾斜を爲す直線となり、 $\log \frac{w}{w_0}$ は $\log y$ 軸に一致し、之れ等の直線を、實際の断面を表はす諸曲線に比較すればその誤差は極めて著しく $a=2$ の場合の如きは誤差は 100% に近く、以て矩形、梯形に對し來の背水公式を適用する事の不合理的なる事を知るに足る。

第六圖に示せる實際の曲線を見るに $\log \frac{w}{w_0}$ は a 大なる場合は直線に近く k は殆んど不變なるも、その小なるに従ひ曲度大となり $a=0$ 即ち矩形断面に於て最も著しく、而も大體の傾斜は $y>1$ (堰上背水) と $y<1$ (低下背水) とに依て異なる、然し一の背水問題は y の或る範圍内に限られ、而も著者の方法に於てはその範圍内の n 及び k の値のみを必要とするを以て第六圖の示すが如き曲線中の必要なる範圍内の n 及び k の平均即ちその兩端を結ぶ直線の値を使用すれば足る。例へば $a=0.5$ の梯形断面に於て堰上背水の場合に於て $H=3h_0$ とすれば $y=1\sim 3$ 即ち $\log y=0\sim 0.477$ 間の平均 $n \doteq 1.41$, $k=0.75$ を用ふる。

今堰上と低下との兩場合に分ち上記3断面及び廣矩形に對する n 及び k の平均値を示せば、

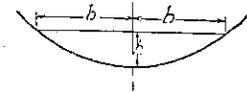
第八表		堰上背水		
		断面積指數 n	潤溼指數 k	動水平均深指數 $n-k$
$a=0$	矩形	1.000	0.740	0.260
$a=0.5$	梯形	1.555	0.833	0.722
$a=2.0$	梯形	1.919	0.961	0.958
$a=\infty$	廣梯形	2.000	1.000	1.000
$a=0$ } $\mu=\infty$ }	廣矩形	1.000	0	1.000

低下背水

	n	k	$n-k$
$a=0$	1.000	0.317	0.683
$a=0.5$	1.159	0.448	0.711
$a=2.0$	1.640	0.798	0.842
$a=\infty$	2.000	1.000	1.000
$a=0 \}$ $\mu=\infty \}$	1.000	0	1.000

一般的なる梯形及び矩形に對しては n 及び k は h_0 と H とに對する値の平均値を用ふれば可なるを以て任意の断面形に對してこれを定むる事は容易である。

第七圖



次に拋物線断面を考ふるに Tolkmitt 公式に於ては廣断面即ち w =水面幅と假定し、

$$A = \frac{4}{3}bh, \quad w = 2b, \quad R = \frac{2}{3}h$$

$$\therefore n = \frac{3}{2}, \quad k = 0.5$$

と置けるも實際は、

$$A = \frac{4}{3}bh$$

$$w = 2h_0 \sqrt{\left(\frac{h}{h_0}\right)^2 + \frac{b_0^2}{4h_0^2} \frac{h}{h_0}} + \frac{b_0^2}{2h_0} \log_e \frac{\sqrt{\frac{h}{h_0}} + \sqrt{\frac{h}{h_0} + \frac{b_0^2}{4h_0^2}}}{\frac{b_0}{2h_0}}$$

$$R = \frac{A}{w}$$

$$\frac{A}{A_0} = \left(\frac{h}{h_0}\right)^{\frac{3}{2}} = y^{\frac{3}{2}}, \quad \frac{w}{w_0} = y^{\frac{1}{2}}$$

但し尾字 0 を附したるは等速流の場合の量である。

而して常に $n=3/2$ にして k は多少の變化あるを以て等速流に於ける h_0/b_0 の 4 種の場合に對し、 w/w_0 と $h/h_0=y$ との關係を示せば(第八圖)、

$$i \quad \frac{h_0}{b_0} = 2.0, \quad ii \quad \frac{h_0}{b_0} = 1.0, \quad iii \quad \frac{h_0}{b_0} = 0.1, \quad iv \quad \frac{h_0}{b_0} = 0.02$$

尙拋物線断面に於ては斜軸の場合に對しては同一 h_0/b_0 の鉛直軸の n 及び k を近似的に使用し得る。

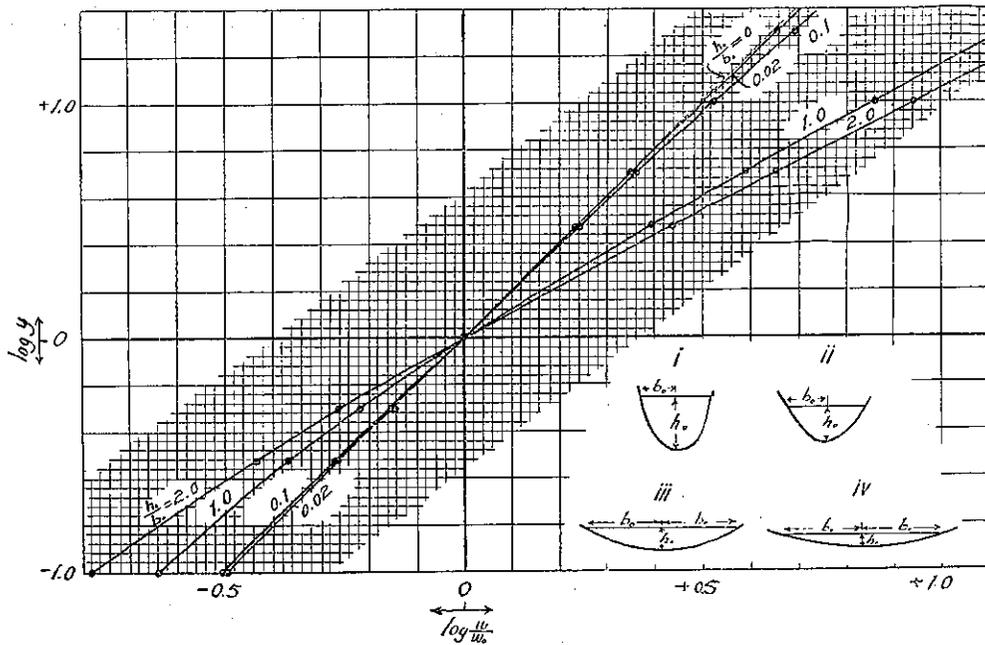
即ち $\log y$ と $\log \frac{w}{w_0}$ との線は殆んど直線に近く、 $\frac{h_0}{b_0} = 0.02$ 即ち等速流に於て幅が最大水深 h_0 の 100 倍なる廣き水路に於ては廣断面 ($\frac{h_0}{b_0} = 0$) の場合(第八圖中點線)と殆んど一致し唯堰上背水の場合に僅少の差あるのみである。

次に各場合に對し n 及び平均の k 及び $n-k$ の値を示せば第九表となる。

第九表

$\frac{h_0}{b_0}$	堰上背水			低下背水		
	n	k	$n-k$	n	k	$n-k$
2	1.50	0.945	0.555	1.50	0.780	0.720
1	1.50	0.861	0.639	1.50	0.644	0.856
0.1	1.50	0.524	0.976	1.50	0.506	0.994
0.02	1.50	0.502	0.998	1.50	0.500	1.000
0.0	1.50	0.500	1.000	1.50	0.500	1.000

第八圖



(9) 矩形断面に対する計算及び実験

著者の方法に於ては n 及び $r=2n+2m(n-k)$ の種々の組合に對して Φ_1, Φ_2 及び Ψ_1, Ψ_2 の數表又は曲線を作成するにあらざれば實用上の效果なきも、其の完成には猶相當の時日を要するを以て茲には單に一例として本方法に對して最も不利なる場合即ち有限幅矩形水路を採り、其の結果と Dupuit-Masoni 公式及び模型水路に於ける實驗結果とを比較する。但し該公式は矩形水路に對し在來公式中理論上最も精確なるものなるも Chézy 型流速公式 $v=C\sqrt{RI}$ を用ひ、 C は水深に依て變ぜざるものと假定せるを以て堰上げ高大なる場合には當然實測に比して多少の誤差を免れぬ。此の實驗水路に於ては等速流の場合 $v=CR^m I^{0.5}$ の C 及び m は R, I の如何に係らず殆んど不變にして C を不變と看做して實地上差支なしと雖も嚴密

に云へば C, m の何れかが微少の變化を免れぬ。然し曲線群の完取さるゝ場合は m の撰定は全く自由なるを以て理論上の誤差は避け得る。

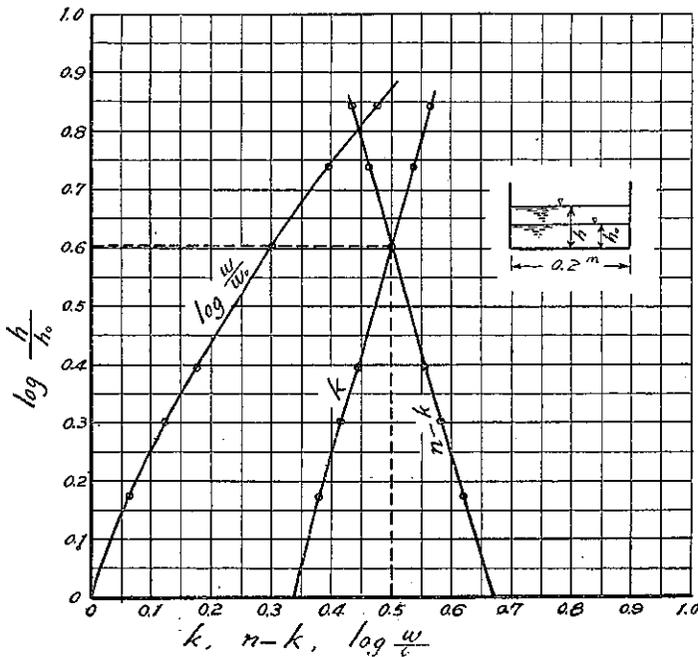
例 矩形水路、底幅 $b=20$ cm, 等速流水深 $h_0=5$ cm,

$$A=ah^n \quad \therefore n=1,$$

$$\frac{w}{w_0} = \left(\frac{h}{h_0}\right)^k, \quad \frac{R}{R_0} = \left(\frac{h}{h_0}\right)^{n-k}$$

$\log \frac{w}{w_0}, k$ 及び $n-k$ の値は第九圖に曲線を以て示せるが如く $\frac{h}{h_0}$ に依て多少異なるを以て、本例に於ては各場合に相當する値を用ひたるも其の影響微少なるを以て平均値を用ひても差支ない。若し従來の諸公式の如く廣矩形と假定すれば $\log \frac{w}{w_0}$ は縦軸と一致し $k=0, n=1$ となり實際の値に比し稍著しき誤差を生ずる。

第九圖



今 $n=1, k=0.333$ 及び $0.50, m=0.5$ 及び 0.7 とし r を求むれば

$$r=2.5 \text{ (Chézy 式) 及び } 2.93 \text{ (Forchheimer 式)}$$

依て (15) 式に依り $r=2.5, 2.7, 2.9$ 及び 3.0 の場合 $\frac{h}{h_0}=1.001 \sim 20$ に對し ϕ_1 及び ϕ_2 を計算すれば附圖第一の如き曲線となる。

種々の計算法の結果を比較するには充分に長き水路を要するも、現在は適當なる設備を有せざるため粗度試験の爲に假設せる幅 20 cm, 深 20 cm, 全長 13 m, 内面に 20 番亞鉛引

鐵線 3/8" 目の金網を張りたるものを一時利用した。背水區域の全長を同時に測定する事は勿論不可能なるも、理論上 $\frac{H}{h_0}=2$ の場合の背水は $\frac{H}{h_0}=2$ より $\frac{h}{h_0}=1.6$ 迄、 $\frac{H}{h_0}=1.6$ より $\frac{h}{h_0}=1.2$ 迄及び $\frac{H}{h_0}=1.2$ より以下の 3 場合の背水を継ぎ合せたるものと全く同一なるべきを以て、本實驗は此の 3 場合を各別に實驗し其の結果を接続せしめたるが、附圖第二に示すが如く充分に目的を達し得る事を確め得た。

水面高は 0.1 mm 讀みの needle gage を用ひ 40 cm 間隔に測定した。

等速度の場合 $v=CR^m i_0^{0.5}$ の C 及び m は水深 h_0 及び水面勾配 i_0 に由て多少異なるも $h_0=5\sim 10$ cm, $i_0=1:100\sim 1:1000$ に於ては實驗の結果 $m=0.7$, $1/C=0.0153$ にして變化は極めて微少である。背水の實驗に於ては $h_0=5$ cm, $i_0=1:500$ を用ひ、 $n=1$, $v=0.27$ m/sec. なるを以て (15) 式より

$$K = cn \frac{v_0^2}{gh_0} = \frac{10}{9} \times \frac{0.27^2}{9.8 \times 0.05} = 0.16$$

一般に斷面積漸増の場合は動勢力の損失あるも、其の割合は漸擴の角度小なる程小にして背水の場合は擴角極めて小なるを以て、動勢力が有効に壓力水頭に變ずるものとして差支ない。依て附圖第一の曲線 $r=2.9$ 及び 3.0 を利用し $r=2.92$ の場合 $\frac{H}{h_0}=2.0$, $\frac{h}{h_0}=1.9\sim 1.1$ に對する $\frac{i_0 l}{h_0}$ を求め、之れを實測値及び矩形水路に對する在來の種々の背水公式の結果とを比較すれば第十一表及び附圖第二に示す如くである。但し ϕ_1 及び ϕ_2 は計算に依り小數點以下三位迄の表を作成し、之より附圖第一の曲線を畫きたるも $\frac{h}{h_0}$ の 1 に近き場合は尺度の不充分のため充分に讀み取り難きを以て數表に依て $\frac{i_0 l}{h_0}$ を算出した。

第十表

$r=2.9$	$y = \frac{h}{h_0}$	1.01	1.1	1.2	1.3	1.5	1.7	2.0	2.5	3.0
	ϕ_1	0.808	1.672	1.982	2.194	2.519	2.789	3.151	3.706	4.236
	ϕ_2	0.798	1.568	1.774	1.883	2.004	2.071	2.129	2.181	2.208
$r=3.0$	ϕ_1	0.773	1.601	1.903	2.109	2.428	2.693	3.501	3.600	4.126
	ϕ_2	0.764	1.502	1.704	1.810	1.929	1.994	2.052	2.101	2.127

第十一表 背水曲線計算値と實驗との比較, $\frac{i_0 l}{h_0}$ の値

	水路 幅	20 cm, $h_0=5$ cm, $H=10$ cm, $i_0=1:500$, $v_0=0.27$ m/sec., $K=0.16$									
	$y = \frac{h}{h_0}$	1.9	1.8	1.7	1.6	1.5	1.4	1.3	1.2	1.1	1.0
	實驗值	0.113	0.231	0.355	0.485	0.619	0.764	0.922	1.106	1.388	
	物部	0.1154	0.2332	0.3551	0.4816	0.6146	0.7585	0.9193	1.1098	1.3835	
	Rühlmann	0.1156	0.2344	0.3593	0.4859	0.6228	0.7720	0.9411	1.1478	1.4486	
	Dupuit-Masoni	0.1191	0.2411	0.3676	0.5004	0.6401	0.7919	0.9633	1.1662	1.4644	
	Bresse	0.1117	0.2258	0.3430	0.4647	0.5924	0.7250	0.8812	1.0610	1.3116	
	實測 1/I	3320	2810	2340	1960	1620	1330	1075	872	670	500

一般に Chézy 式の C を不變とする事並に流速水頭 $\frac{v^2}{2g}$ の變化を考慮する事は $\frac{i_0 l}{h_0}$ 大にし、

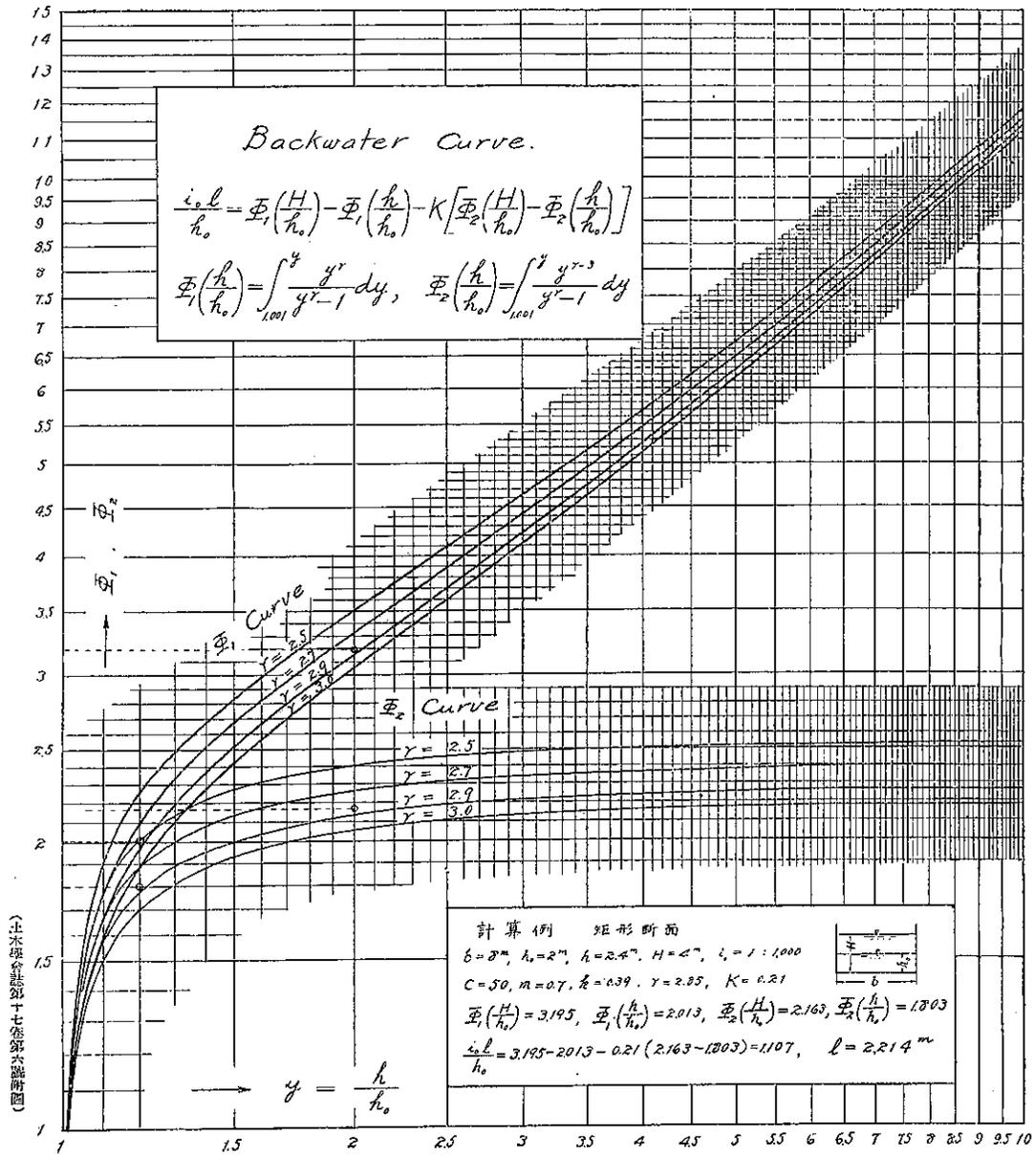
側壁の影響を無視すれば反對に過小となる。Rühlmann 公式は本例の場合に於ては C の變化、 $\frac{v^2}{2g}$ 及び側壁の影響を共に無視せる結果、 $+$ 、 $-$ の誤差が都合よく消し合ひ割合に實驗に合致するも、一般的に斯の如き幸運を期待する事は科學上到底不可能にして、而も $\frac{h}{h_0}$ の 1 に近き場合は本例に於ても既に著しき誤差を生じ従て背水區域の限度に關する問題に對しては適用困難である。Dupuit-Masoni は $\frac{v^2}{2g}$ 及び側壁の影響を共に考慮せるも、 $v=C\sqrt{RI}$ の C は本例に於ても 35~45 の間に變ずるを以て其の結果著しく過大の數値を示して居る。Bresse 式は $\frac{v^2}{2g}$ のみを考慮し C 及び側壁の影響を無視せるため過小の結果を與へて居る。

Rühlmann の公式は理論上最も不完全なるものなるも本實驗の場合には著しき誤差が互に消合ひ他の二公式より好結果を示せるも、背水圈の上流程誤差大にして著しき誤差を現はすべき場合も存在すべく、之れ等の點に關しては種々断面形の異なる水路に就て更に實驗を要するを以て之れを他日に譲る事とする。

(10) 結 言

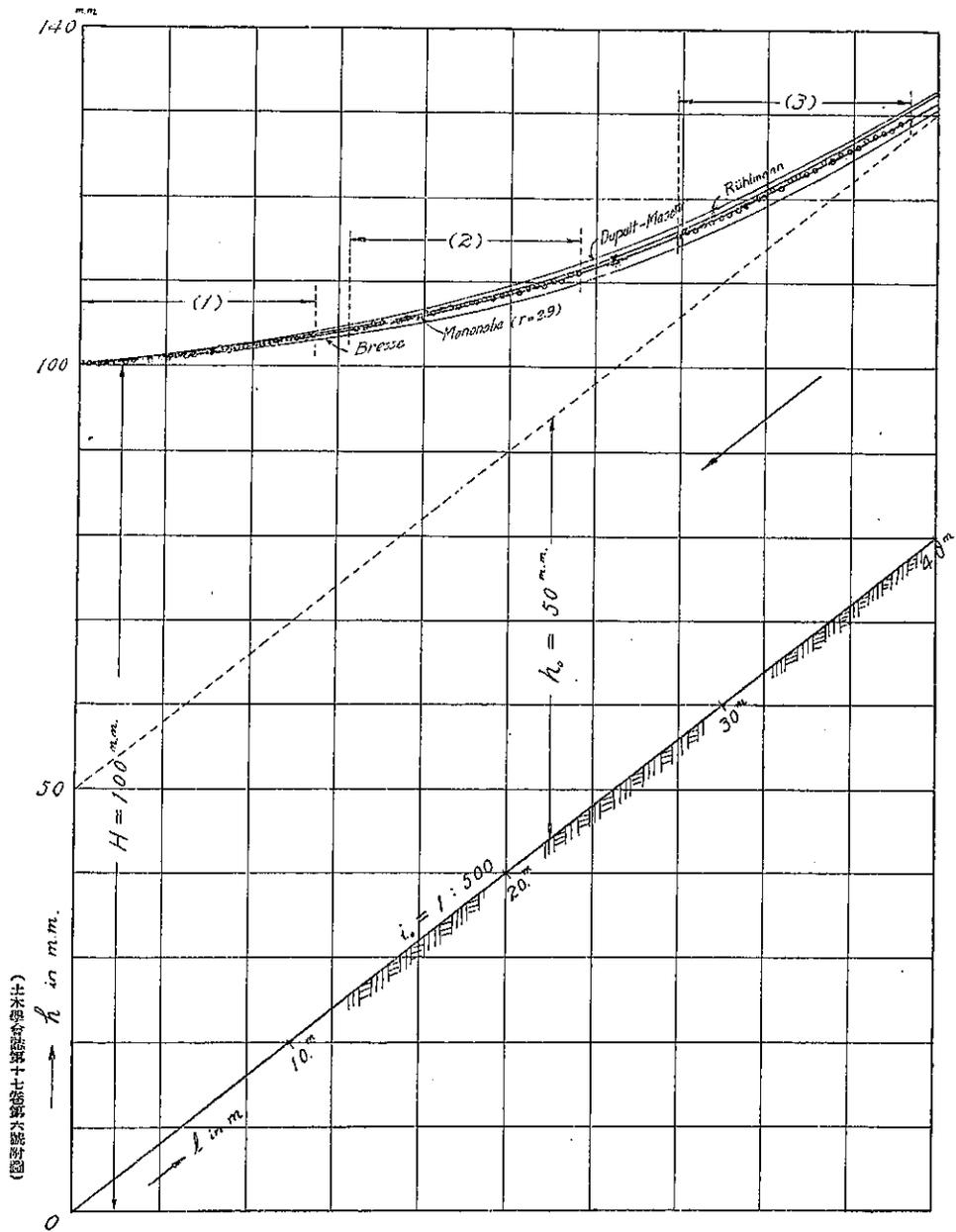
在來の背水曲線公式の凡てが、等速流を不等速流に變じたるが爲に水路床に何等の變化を及ぼさぬと云ふ假定に立脚せると同様本論に於て提案せる一般解法も亦同様の假定の下にのみ成立する。従て嚴密に云へば河床に洗掘(背水低下)又は堆積(背水嵩上)の作用が全然なき場合にのみ適用し得るが、實地上は流砂の少なき用水路、又は多少これ有るも堰上げ又は放水の水深が原水深と著しき差なく且つ充分なる排砂門に依て洪水の際流下する土砂の殆んど凡てを排出し得る場合には河川に對しても近似的に適用し得る。然し普通の水電取入堰の如く流下砂礫量多大に、堰上高も相當大なる場合は堰上に依り背水影響圈内は水深増大のため流速激減し、而も流速は圈内の上流部より堰に至る間に漸次に減少する。然るに礫粒大なる場合は排砂門の效力はその附近の局部に止まり上流部より流下する砂礫は大小相混するを以て堰上げ後の初期に於ては大粒のものは先づ圈上端に堆積し小粒のものは下流に堆積して河底を漸昇せしめ、河底上昇するに従ひ $\frac{H}{h_0}$ は少となり圈内の流速は増大するを以て大粒のものも漸次下流に下るに到り、且つ圈内の河床の漸昇は圈外の上流に迄背水影響を及ぼし惹いてはその部分の河床にも變化を生ずる。然し之れ等の作用は漸衰的なるを以て數回の大洪水の後には略々平衡状態に達するも之れ等の關係を理論上より豫め推算する事は現在の水理學に依ては困難であるが、斯る場合にも Sternberg 法則又は類似の法則が成立するものと考えれば終局の河床面は堰溢流頂又は充分有效なる排砂門を備ふる場合はその敷線を基點とし、原河床と漸近的關係を保ち、exponential 函數又は近似的にはこれに近似の双曲線にて表はさるゝを以て、背水曲線の終局の形も亦略々推定し得る。之れ等の問題は將來開拓さるべき水理學上の重要問題なるもその解決は極めて困難なるを以て今後の研究を期する事としてこゝに本論を終る。(完)

附圖第一



(止水域合流第十七卷第六圖附圖)

附圖第二



(圖中數字均係以十釐米為單位)

400-10