

論 說 報 告

土木學會誌 第十七卷 第五號 昭和六年五月

THEORIE DER ROSTE UND IHRE ANWENDUNGEN.

ERSTER TEIL.

ALLGEMEINE UNTERSUCHUNGEN DER ROSTE.

Von Takeo Fukuda, Mitglied.

Synopsis.

Die vorliegende Abhandlung befasst sich mit der Theorie und Berechnung der rostförmigen Tragwerke, welche wie Rahmen aus zwei Scharen biegungs- und verdrehungssteifer Stäbe bestehen, die an den Knoten ebenfalls biegungs- und verdrehungssteif verbunden sind. Es ist vorausgesetzt dabei, dass die zwei Scharen aus den in einer Ebene liegenden, parallelen Geraden bestehen und an den Knoten sich rechtwinkelig kreuzen. Die Belastung wirkt senkrecht zu der Ebene der Stäbe, so dass zwischen Rost und Rahmen derselbe Unterschied wie zwischen Platte und Scheibe besteht.

Der erste Teil der Abhandlung gliedert sich in zwei Abschnitte. Im I. Abschnitt werden die Eigenschaften der Roststäbe untersucht und die allgemeinen Elastizitätsgleichungen für Roste in der Form von simultanen partiellen Differenzgleichungen aufgestellt. Der II. Abschnitt ist der Anwendung der Grundgleichungen auf die Roste gewidmet, die aus gleichen, quadratischen Feldern bestehen und deren Stabquerschnitte überall konstant sind.

Die zweite und nachfolgenden Teile dieser Abhandlung sind in Vorbereitung.

Inhaltsverzeichnis.

| | Seite |
|--|-------|
| I. Abschnitt. Die Grundlagen der Berechnung der Roste. | 2 |
| 1. Einleitung. | 2 |
| 2. Der Roststab. | 4 |
| 1) Auflagerkräfte, Querkräfte und Biegemomente des Roststabes | 4 |
| 2) Die Biegelinie des Roststabes. | 5 |
| 3) Verdrehung des Roststabes. | 5 |
| 4) Der Drillungswiderstand des Stabquerschnitts. | 6 |
| 3. Aufstellung der Grundgleichungen. | 8 |
| 1) Die Biegesteifigkeit des Knotens. | 9 |
| 2) Das Gleichgewicht des Knotens senkrecht zur Ebene des Rostes. | 12 |
| 3) Das Gleichgewicht der Momente an dem Knoten. | 13 |
| 4) Die Drehwinkel und die Torsionsmomente. | 13 |
| 5) Die Anzahl der Unbekannten und Gleichungen. | 14 |
| 4. Die Randbedingungen. | 16 |
| 1) Der freie Rand. | 16 |
| 2) Der frei aufliegende Rand. | 17 |
| 3) Der fest eingespannte Rand. | 18 |

| | |
|---|----|
| II. Abschnitt. Der Rost mit quadratischen Feldern bei konstantem Stabquerschnitt. | 22 |
| 1. Die Bezeichnungen und die Grundgleichungen | 22 |
| 2. Der an den vier Ecken unterstützte, quadratische Rost mit vier gleichen Feldern | 23 |
| 1) Die Rand- und Symmetriebedingungen und die Unbekannten .. | 23 |
| 2) Einzellast im Mittelknoten | 25 |
| 3) Gleichmässig verteilte Last | 27 |
| 4) Einzellast im Knoten des Randträgers..... | 29 |
| 5) Einzellast am Mittelträger..... | 37 |
| 6) Gleichmässig verteilte Last am Mittelträger zwischen den Knoten (10)-(11)..... | 44 |
| 3. Der an den vier Ecken unterstützte, symmetrisch belastete, quadratische Rost mit 3×3 gleichen Feldern | 48 |
| 1) Die Rand- und Symmetriebedingungen und die Unbekannten | 48 |
| 2) Gleiche Einzellasten an den vier Innenknoten..... | 49 |
| 3) Gleichmässig verteilte Last über dem ganzen Rost..... | 51 |
| 4. Der an den vier Seiten eingespannte, quadratische Rost mit 3×3 gleichen Feldern | 54 |
| 1) Die Unbekannten | 54 |
| 2) Gleiche Einzellasten an den vier Innenknoten | 54 |
| 3) Einzellast in einem Innenknoten | 56 |
| 5. Der an den vier Ecken unterstützte, quadratische Rost mit 4×4 gleichen Feldern. Einzellast in Mittelknoten | 62 |
| 1) Die Rand- und Symmetriebedingungen und die Unbekannten.... | 62 |
| 2) Aufstellung der Gleichungen..... | 63 |
| 3) Auflösung der Gleichungen | 64 |
| 4) Sonderfälle | 67 |
| 6. Der an den vier Seiten eingespannte, quadratische Rost mit 4×4 gleichen Feldern. Einzellast in Mittelknoten | 68 |
| 1) Die Rand- und Symmetriebedingungen und die Unbekannten .. | 68 |
| 2) Aufstellung der Gleichungen..... | 69 |
| 3) Auflösung der Gleichungen | 70 |
| 4) Sonderfälle | 72 |

I. ABSCHNITT.

DIE GRUNDLAGEN DER BERECHNUNG DER ROSTE.

1. Einleitung.

Unter einem Roste ist ein Tragwerk zu verstehen, welches wie ein Rahmen aus zwei Scharen biegungs- und verdrehungssteifer Stäbe besteht, die an den Kreuzungsstellen oder Knoten ebenfalls biegungs- und verdrehungsfest verbunden sind.

Mit Rücksicht auf die in der Technik gebräuliche Anordnung und auf die praktische Anwendung, beschränken wir uns im folgenden darauf, dass

die zwei Scharen aus den in einer Ebene liegenden, parallelen Geraden bestehen und an den Knoten sich rechtwinklig kreuzen. Wir werden ein solches System als Rost bezeichnen, wenn die Belastung senkrecht zu der Ebene der Stäbe wirkt. Wenn die Belastung in der Ebene der Stäbe wirkt, ist es als Rahmen zu bezeichnen, so dass zwischen Rahmen und Rost derselbe grundlegende Unterschied wie zwischen Scheibe und Platte besteht. In **Abb. 1** ist ein Teil eines Rostes in perspektiver Ansicht dargestellt.

Das Fahrbahngerippe der Eisernenbrücke, die Deckenkonstruktion im Hochbau, der Aufsatz des Entwässerungschacht, sowie alle rostförmige Tragwerke, die durch die senkrecht zu ihrer Ebene gerichteten Kräfte belastet sind, sind alle als Roste zu betrachten. Obwohl die Theorie des Rostes solch eine mannig-

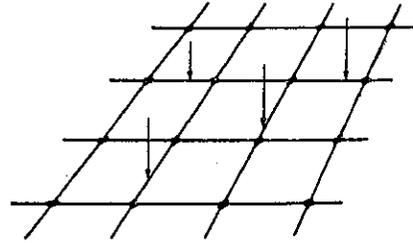


Abb. 1.

fache Anwendung auf technische Aufgabe finden kann, ist die Erforschung der Roste bis zum heutigen Tage ganz zurückgelassen und steht weit entfernt den fast vollkommenen Ergebnissen der Erforschung des Rahmens nach.

In diesen Umständen ist es sehr belehrend zu bezeichnen, dass Bleich und Melan in ihrem gemeinsamen Werk über Differenzgleichungen¹⁾ die ersten Schritte zu diesem Problem genommen haben. Aber Bleich und Melan haben vorerst vorausgesetzt, dass keinerlei Torsionsmomente in den Stäben auftreten, d.h., dass die Knotenverbindung der Stäbe keine Torsionsmomente überträgt und die Verbiegung der Stäbe ungehindert vor sich gehen kann. Jedoch ist diese Voraussetzung bei praktischen Ausführungen wohl nie vollkommen erfüllt, und deshalb stellt die Lösung von Bleich und Melan eine angenäherte Lösung dar.

Diese Tatsache, sowie der Wunsch, die Aufmerksamkeit des Ingenieurkreises auf die für die Bautechnik so wichtige Aufgabe der Roste, die bis heutigen Tage von jemanden fast gar nicht beachtet worden ist, zu lenken, waren das Leitmotiv der vorliegenden Abhandlung.

1) Bleich-Melan: Die gewöhnlichen und partiellen Differenzgleichungen der Baustatik, 1927, S. 282.

2. Der Roststab.

Denken wir uns aus einem Roste einen Stab AB knapp neben den Knoten A und B durchschnitten, so erhalten wir einen frei aufliegenden Träger AB , der durch die äusseren Belastung P und an den beiden Enden A und B durch die Biegemomente M_A und M_B belastet ist. Bezüglich der Vorzeichen von Belastung, Verschiebung und Biegemoment treffen wir dieselben Regeln, wie bei einem einfachen Balken über zwei Stützen.

1) **Auflagerkräfte, Querkräfte und Biegemomente des Roststabes.**

Der so frei aufliegend gedachten Roststab AB ist, wie in **Abb. 2** dargestellt ist, durch die äusseren Lasten P und die Knotenmomente M_A und M_B belastet. Die Auflagerkräfte A, B und die Querkraft Q_x und das Biegemoment M_x für einen Querschnitt x des Roststabes sind durch

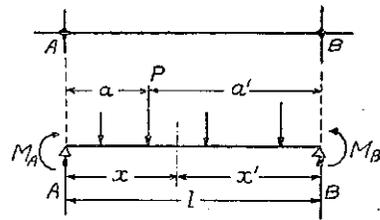


Abb. 2.

$$\left. \begin{aligned} A &= A_0 - \frac{1}{l} (M_A - M_B), \\ B &= B_0 + \frac{1}{l} (M_A - M_B), \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

$$Q_x = Q_{x,0} - \frac{1}{l} (M_A - M_B) \dots \dots \dots (2)$$

und

$$M_x = M_{x,0} + \frac{1}{l} (M_A x' + M_B x) \dots \dots \dots (3)$$

gegeben, worin $A_0, B_0, M_{x,0}$ und $Q_{x,0}$ die Auflagerkräfte, das Biegemoment bzw. die Querkraft des einfachen Balkens AB infolge der äusseren Lasten P bedeuten, d. h.

$$A_0 = \frac{1}{l} \sum P \cdot a', \quad B_0 = \frac{1}{l} \sum P \cdot a, \quad \dots \dots \dots (1a)$$

$$Q_{x,0} = A_0 - \sum_A^x P \quad \dots \dots \dots (2a)$$

und

$$M_{x,0} = A_0 x - \sum_A^x P(x-a) \quad \dots \dots \dots (3a)$$

2) Die Biegelinie des Roststabes.

Unter dem Einfluss der äusseren Kräfte erleiden die Punkte der Achse des Roststabes Verschiebungen in der Richtung der äusseren Lasten, bei deren Ermittlung vorausgesetzt wird, dass der Einfluss der Querkräfte auf die Verbiegung des Stabes unberücksichtigt bleiben darf, und die Verschiebungsordinaten sehr kleine Werte haben. Die Differentialgleichung der elastischen Linie lautet dann

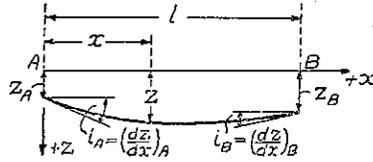


Abb. 3.

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{M_x}{EJ} \dots \dots \dots (4)$$

wobei z die Ordinate der elastischen Linie des gebogenen Stabes angibt und E den Elastizitätsmodul und J das Trägheitsmoment des Stabes bedeuten. Bezeichnet man mit z_A und z_B die Verschiebungen der Stützen A und B , so bekommt man

$$\int_0^l \frac{d^2z}{dx^2} x dx = l \left(\frac{dz}{dx} \right)_B + (z_A - z_B)$$

und

$$\int_0^l \frac{d^2z}{dx^2} (l-x) dx = -l \left(\frac{dz}{dx} \right)_A - (z_A - z_B).$$

Daraus bekommt man, mit Beachtung von Gl. (4), für die Neigungswinkel der Endtangenden des Roststabes

$$i_A = \left(\frac{dz}{dx} \right)_A = -\frac{1}{l} \int_0^l \frac{M_x}{EJ} x dx - \frac{1}{l} (z_A - z_B), \dots \dots \dots (5)$$

$$i_B = \left(\frac{dz}{dx} \right)_B = +\frac{1}{l} \int_0^l \frac{M_x}{EJ} (l-x) dx - \frac{1}{l} (z_A - z_B) \dots \dots \dots (5a)$$

3) Verdrehung des Roststabes.

Unter der Voraussetzung der biege- und verdrehungsfesten Knoten wird der Roststab im allgemeinen durch ein Torsionsmoment beansprucht, durch dessen Einfluss die Achse des Roststabes eine Verdrehung erleidet. Bezeichnet man mit X das Torsionsmoment, so bekommt man für den auf die Länge

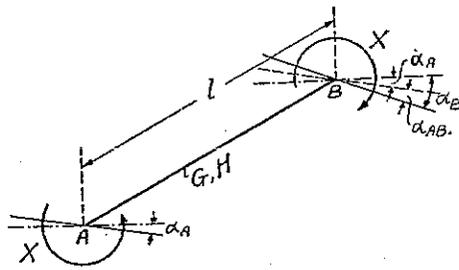


Abb. 4.

des Stabes bezogene Verdrehungswinkel

$$\alpha_{AB} = \alpha_B - \alpha_A = \frac{X \cdot l}{G \cdot H}, \dots \dots \dots (6)$$

worin G den Schubmodul und H den Drillungswiderstand des Querschnitts des Roststabes bedeuten.

4) Der Drillungswiderstand des Stabquerschnitts.

Ueber den Drillungswiderstand H werden wir uns hier im wesentlichen an die Arbeit von August und Ludwig Föppl halten¹⁾.

Die Grösse H ist eine rein geometrische Grösse, die ein Mass für die Widerstandsfähigkeit gegen Verdrehung bildet und die nur von der Gestalt und von den Abmessungen des Querschnitts abhängig und der Dimension nach wie ein Flächenträgheitsmoment eine Länge zur vierten Potenz ist.

a) Die Näherungsformel von de Saint-Venant.

Die in der Technik häufig benutzte Näherungsformel von de Saint-Venant für den Drillungswiderstand eines beliebigen Querschnitts lautet

$$H = \frac{F^4}{40 \Theta_p}$$

worin unter F der Flächeninhalt und unter Θ_p , das polare Trägheitsmoment der Querschnittsfläche zu verstehen ist. Diese Formel stimmt mit den strengen Lösungen für die Fälle des kreisförmigen und des rechteckigen Querschnitts hinreichend und mit den Versuchsergebnissen für die meisten Walzeisenquerschnitte wenigstens ungefähr überein. Sie liefert aber ganz falsche Ergebnisse bei einem kreuzförmigen Querschnitt, bei einem Hohlquerschnitt und in anderen vielen Fällen; man muss also bei ihrer Anwendung sehr vorsichtig sein.

b) Der kreisförmige Querschnitt.

Im Falle des kreisförmigen Querschnitts mit dem Halbmesser a

$$H = \frac{\pi a^4}{2}$$

c) Der elliptische Querschnitt.

Im Falle des elliptischen Querschnitts mit den Halbachsen a und b

1) Aug. Föppl: Vorlesungen über Technische Mechanik, V. Bd., 1922.
A. und L. Föppl: Drang und Zwang, II. Bd., 1928.

$$H = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}.$$

d) Der regelmässigdreieckige Querschnitt.

Im Falle des regelmässigdreieckigen Querschnitts mit der Seite a und mit der Höhe h

$$H = \frac{ah^3}{30} = \frac{\sqrt{3} a^4}{80}.$$

e) Der rechteckige Querschnitt.

Im Falle des rechteckigen Querschnitts mit den Seiten a und b

$$H = \frac{1}{3} a^3 b - \frac{64a^4}{\pi^5} \left(\operatorname{tgh} \frac{\pi b}{2a} + \frac{1}{3^5} \operatorname{tgh} \frac{3\pi b}{2a} + \frac{1}{5^5} \operatorname{tgh} \frac{5\pi b}{2a} + \dots \right)$$

oder

$$H = \frac{1}{3} ab^3 - \frac{64b^4}{\pi^5} \left(\operatorname{tgh} \frac{\pi a}{2b} + \frac{1}{3^5} \operatorname{tgh} \frac{3\pi a}{2b} + \frac{1}{5^5} \operatorname{tgh} \frac{5\pi a}{2b} + \dots \right).$$

Diese beiden Formeln müssen stets zu denselben Werte führen. Bei der Ausrechnung wird man im einzelnen Falle jene benutzen, bei der die Reihe am schnellsten konvergiert.

Beim quadratischen Querschnitt, also für $a=b$, stimmen beide Formeln miteinander überein und man findet

$$H = a^4 \left[\frac{1}{3} - \frac{64}{\pi^5} \left(\operatorname{tgh} \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3^5} \operatorname{tgh} \frac{3\pi}{2} + \frac{1}{5^5} \operatorname{tgh} \frac{5\pi}{2} + \dots \right) \right] \\ = 0,1426 a^4.$$

Beim schmalen Rechteck mit der grossen Seite a und der kleinen Seite b erhält man, da sich die hyperbolische Tangente einer grossen Zahl nicht mehr merklich von der Einheit unterscheidet,

$$H = \frac{1}{3} ab^3 - \frac{64b^4}{\pi^5} \left(1 + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} + \dots \right) \\ = \frac{b^3}{3} (a - 0,63b).$$

Wenn b gegen a sehr klein ist, kommt man auf die Näherungsformel

$$H = \frac{1}{3} ab^3,$$

die die Grundlage für die Berechnung des Drillungswiderstandes der Walzeisensträger bildet.

f) Die Walzeisenprofile.

Bei den offenen Querschnitten, die aus Rechtecken zusammengesetzt sind, wie z. B. \perp , \square , Γ , \top , \mathbf{I} , $\mathbf{+}$ -Profile, ist der Drillungswiderstand des ganzen Querschnitts nahezu gleich der Summe der Drillungswiderstände der einzelnen Rechtecke, in die sich der Querschnitt zerlegen lässt, so dass man eine Näherungsformel

$$H = \frac{1}{3} \sum ab^3$$

erhält. Dabei ist unter b die Schmalseite und unter a die Langseite eines einzelnen Rechtecks zu verstehen und die Summe ist über alle Rechtecke zu erstrecken. Dass der sich aus der obigen Formel ergebende Drillungswiderstand von dem tatsächlichen Werte abweichen kann, wird niemand bezweifeln.

A. Föppl setzte daher

$$H = \frac{\mu}{3} \sum ab^3,$$

worin μ ein aus den Versuchen zu entnehmender Berichtigungsfaktor ist.

Er fand die folgenden Werte für μ :

| | | | |
|-------------------------|--------------|------------------|------|
| Winkelisen..... | 0,86~1,08 | Mittelwert | 1,03 |
| \square -Eisen..... | 0,98~1,25 | " | 1,12 |
| T-Eisen..... | 0,92~1,25 | " | 1,15 |
| Z-Eisen..... | 1,13 u. 1,20 | (nur zwei Stück) | |
| I-Eisen..... | 1,16~1,44 | " | 1,31 |
| Breitflanschträger..... | 1,21~1,47 | " | 1,29 |

3. Aufstellung der Grundgleichungen.

Der Rost ist irgendwie unterstützt, doch wollen wir voraussetzen, dass die Knoten keine Verschiebungen in der Ebene des Rostes, sondern lediglich Verschiebungen senkrecht zu der Ebene des Rostes erfahren können, wenn der Rost unter den äusseren Lasten eine Deformation erleidet. Dies setzt weiter voraus, dass diese senkrecht zu der Ebene des Rostes entstehenden Verschiebungen klein im Vergleich zur Abmessungen des Rostes sind und dass wir den Einfluss der axialen Kräfte, die in der einzelnen Stäben auftreten mögen, auf die Förmänderung des Systems vernachlässigen, was wegen der Geringfügigkeit derselben gegenüber dem von der Biegung der Stäbe herrührenden Anteil stets als zulässig betrachtet werden kann. Ebenso wird der Einfluss der Querkräfte auf die Verbiegung des Stabes unberücksichtigt.

Wie es in **Abb. 5** dargestellt ist, beziehen wir uns auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen x - und y -Achse in den Richtungen beider Stabscharen und die z -Achse in der Richtung der positiven Verschiebung liegen.

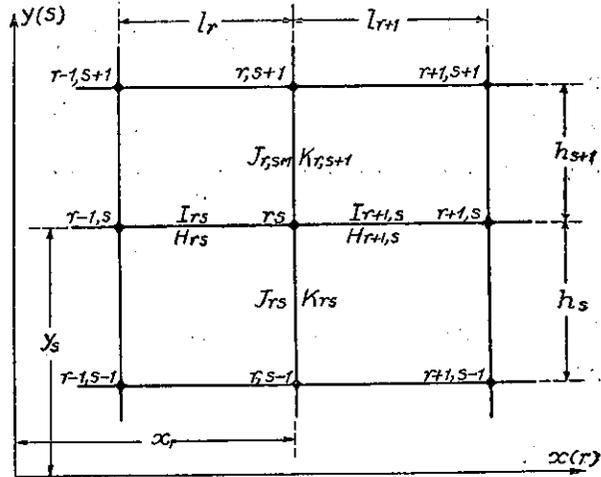


Abb. 5.

Für die Folge bezeichnen allgemein :

- r,s das Kennzeichen eines Knotenpunktes,
- x_r und y_s die Koordinaten des Knotenpunktes (r,s) ,
- z_{rs} die Verschiebung des Knotenpunktes (r,s) ,
- l_r und h_s die Feldlänge parallel zur x - bzw. y -Achse,
- I_{rs} und J_{rs} die um die in der xy -Ebene gelegene Achse bezogenen Trägheitsmomente der Stäbe $(r-1, s) - (r, s)$ bzw. $(r, s-1) - (r, s)$,
- H_{rs} und K_{rs} die Drillungswiderstände der Stäbe $(r-1, s) - (r,s)$ bzw. $(r, s-1) - (r, s)$.

1) Die Biegesteifigkeit des Knotens.

Durchschneiden wir die Roststäbe knapp neben jedem Knoten, so entstehen frei aufliegende Träger, die durch die äusseren Lasten, die Torsionsmomente und die Endmomente belastet sind.

Wir betrachten nun diese Biegemomente und, wie aus der **Abb. 6** ersichtlich ist, bezeichnen mit M'_{rs} und M''_{rs} die Biege-

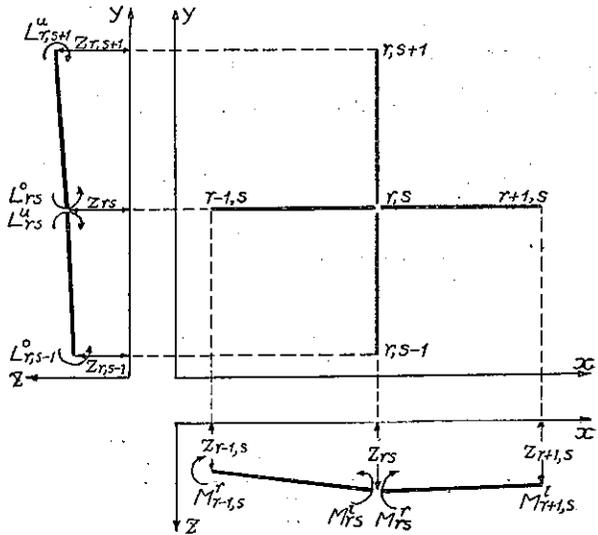


Abb. 6.

momente, die im Knoten (r, s) auf die Stäbe $(r-1, s)-(r, s)$ bzw. $(r, s)-(r+1, s)$ wirken,

L_{rs}^u und L_{rs}^o die Biegemomente, die im Knoten (r, s) auf die Stäbe $(r, s-1)-(r, s)$ bzw. $(r, s)-(r, s+1)$ wirken.

Bezeichnet man ferner mit i_{rs}^l und i_{rs}^r die Neigungswinkel der Endtangente der frei aufliegend gedachten Roststäbe $(r-1, s)-(r, s)$ bzw. $(r, s)-(r+1, s)$ am Knoten (r, s) , wie in **Abb. 7** dargestellt ist, so erhält man aus Gl. (5) und (5a)

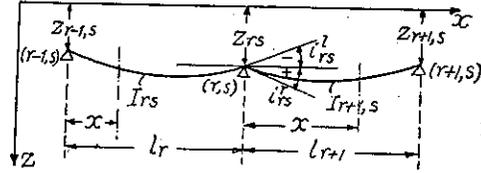


Abb. 7.

$$i_{rs}^l = -\frac{1}{EI_{rs}l_r} \int_0^{l_r} M_{rs} dx + \frac{1}{l_r} (z_{rs} - z_{r-1,s})$$

$$i_{rs}^r = +\frac{1}{EI_{r+1,s}l_{r+1}} \int_0^{l_{r+1}} M_{r+1,s}(l_{r+1}-x) dx + \frac{1}{l_{r+1}} (z_{r+1,s} - z_{rs}),$$

wobei M_{rs} und $M_{r+1,s}$ die Biegemomente an Stelle x der betreffenden Roststäbe bedeuten. Da gemäss Gl. (3)

$$M_{rs} = M_{rs,o} + \frac{1}{l_r} [M_{r-1,s}^r(l_r-x) + M_{rs}^l \cdot x]$$

$$M_{r+1,s} = M_{r+1,s,o} + \frac{1}{l_{r+1}} [M_{r,s}^r(l_{r+1}-x) + M_{r+1,s}^l \cdot x],$$

wobei $M_{rs,o}$ und $M_{r+1,s,o}$ die Biegemomente an Stelle x der einfachen Balken $(r-1, s)-(r, s)$ bzw. $(r, s)-(r+1, s)$ bedeuten, so ergeben sich

$$i_{rs}^l = \frac{1}{l_r} (z_{rs} - z_{r-1,s}) - \frac{l_r}{6EI_{rs}} (M_{r-1,s}^r + 2M_{rs}^l) - \frac{1}{EI_{rs}l_r} \int_0^{l_r} M_{rs,o} x dx \dots (7)$$

$$i_{rs}^r = \frac{1}{l_{r+1}} (z_{r+1,s} - z_{rs}) + \frac{l_{r+1}}{6EI_{r+1,s}} (2M_{rs}^r + M_{r+1,s}^l) + \frac{1}{EI_{r+1,s}l_{r+1}} \int_0^{l_{r+1}} M_{r+1,s,o}(l_{r+1}-x) dx \dots (7a)$$

Wegen der biegeungssteifen Knotenverbindung müssen aber diese beiden Endtangente auf dieselbe Richtung i_{rs}^z zusammenfallen, also besteht zwischen den Neigungswinkeln die Verknüpfung

$$i_{rs}^z \equiv i_{rs}^l = i_{rs}^r,$$

so dass man aus Gl. (7) und (7a)

$$\begin{aligned} & \frac{l_r}{EI_{rs}} (M_{r-1,s}^r + 2M_{rs}^l) + \frac{l_{r+1}}{EI_{r+1}} (2M_{rs}^r + M_{r+1,s}^l) \\ &= -6 \left[\frac{z_{r+1,s} - z_{r,s}}{l_{r+1}} - \frac{z_{rs} - z_{r-1,s}}{l_r} \right] \\ & -6 \left[\frac{1}{EI_{rs} l_r} \int_0^{l_r} M_{rs,o}^l x dx + \frac{1}{EI_{r+1,s} l_{r+1}} \int_0^{l_{r+1}} M_{r+1,s,o}^r (l_{r+1} - x) dx \right] \dots (8) \end{aligned}$$

erhält.

In gleicher Weise erhält man für die Neigungswinkel i_{rs}^u und i_{rs}^o der Endtangenten der frei aufliegend gedachten Rostsäbe $(r, s-1) - (r, s)$ und $(r, s) - (r, s+1)$ an Knoten (r, s) , **Abb. 8**,

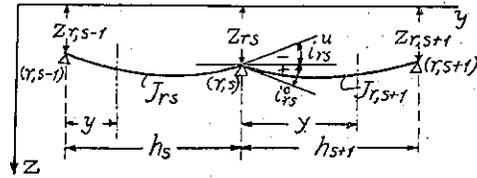


Abb. 8.

$$i_{rs}^u = \frac{1}{h_s} (z_{rs} - z_{r,s-1}) - \frac{h_s}{6EJ_{rs}} (L_{r,s-1}^o + 2L_{rs}^u) - \frac{1}{EJ_{rs} h_s} \int_0^{h_s} L_{rs,o}^o y dy \dots (9)$$

$$\begin{aligned} i_{rs}^o &= \frac{1}{h_{s+1}} (z_{r,s+1} - z_{rs}) + \frac{h_{s+1}}{6EJ_{r,s+1}} (2L_{rs}^o + L_{r,s+1}^u) \\ & + \frac{1}{EJ_{r,s+1} h_{s+1}} \int_0^{h_{s+1}} L_{r,s+1,o}^u (h_{s+1} - y) dy, \dots (9a) \end{aligned}$$

wobei $L_{rs,o}$ und $L_{r,s+1,o}$ die Biegemomente an Stelle y der einfachen Balken $(r, s-1) - (r, s)$ bzw. $(r, s) - (r, s+1)$ bedeuten. Aus der Bedingung der Biegesteifigkeit am Knoten

$$i^u = i_{rs}^u = i_{rs}^o$$

folgt

$$\begin{aligned} & \frac{h_s}{EJ_{rs}} (L_{r,s-1}^o + 2L_{rs}^u) + \frac{h_{s+1}}{EJ_{r,s+1}} (2L_{rs}^o + L_{r,s+1}^u) \\ &= -6 \left[\frac{z_{r,s+1} - z_{rs}}{h_{s+1}} - \frac{z_{rs} - z_{r,s-1}}{h_s} \right] \\ & -6 \left[\frac{1}{EJ_{rs} h_s} \int_0^{h_s} L_{rs,o}^o y dy + \frac{1}{EJ_{r,s+1} h_{s+1}} \int_0^{h_{s+1}} L_{r,s+1,o}^u (h_{s+1} - y) dy \dots (10) \end{aligned}$$

Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} \mu_{rs} &= \frac{l_r}{EI_{rs}}, & \lambda_{rs} &= \frac{h_s}{EJ_{rs}}, \\ \Delta_x z_{rs} &= z_{r+1,s} - z_{rs}, & \Delta_y z_{rs} &= z_{r,s+1} - z_{rs} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}
 S_{rs}^i &= \frac{1}{l_r} \int_0^{l_r} M_{rs,o} x dx, & T_{rs}^u &= \frac{1}{h_s} \int_0^{h_s} L_{rs,o} y dy, \\
 S_{rs}^r &= \frac{1}{l_{r+1}} \int_0^{l_{r+1}} M_{r+1,s,o} (l_{r+1} - x) dx, & T_{rs}^o &= \frac{1}{h_{s+1}} \int_0^{h_{s+1}} L_{r,s+1,o} (h_{s+1} - y) dy, \\
 U_{rs} &= \frac{\mu_{rs}}{l_r} S_{rs}^i + \frac{\mu_{r+1,s}}{l_{r+1}} S_{rs}^r, & V_{rs} &= \frac{\lambda_{rs}}{h_s} T_{rs}^u + \frac{\lambda_{r,s+1}}{h_{s+1}} T_{rs}^o,
 \end{aligned} \right\} \dots (11)$$

worin S_{rs}^i , S_{rs}^r , T_{rs}^u , T_{rs}^o die Auflagerreaktionen im Knoten (r, s) der vier in diesem Knoten zusammentreffenden, frei aufliegend gedachten Träger, die durch die infolge der äusseren Kräfte entstehenden Momentenflächen belastet sind, bedeuten, erhält man aus den Gl. (8) und (10) die beiden Gleichungen

$$\mu_{rs}(M_{r-1,s}^r + 2M_{rs}^i) + \mu_{r+1,s}(2M_{rs}^r + M_{r+1,s}^i) + 6\left(\frac{1}{l_{r+1}} \Delta_x z_{rs} - \frac{1}{l_r} \Delta_x z_{r-1,s}\right) + 6U_{rs} = 0, \dots (12)$$

$$\lambda_{rs}(L_{r,s-1}^o + 2L_{rs}^u) + \lambda_{r,s+1}(2L_{rs}^o + L_{r,s+1}^u) + 6\left(\frac{1}{h_{s+1}} \Delta_y z_{rs} - \frac{1}{h_s} \Delta_y z_{r,s-1}\right) + 6V_{rs} = 0 \dots (13)$$

2) Das Gleichgewicht des Knotens senkrecht zur Ebene des Rostes.

Nun denken wir uns an das Gleichgewicht der Kräfte am Knoten (r, s) in der Richtung der äusseren Kraft. Die Knotenmomente M des zur x -Achse parallelen Stabes geben gemäss der Gl. (1) den Betrag

$$\frac{1}{l_{r+1}} (M_{r+1,s}^i - M_{rs}^r) - \frac{1}{l_r} (M_{rs}^i - M_{r-1,s}^r),$$

die Knotenmomente L des zur y -Achse parallelen Stabes geben ebenso den Betrag

$$\frac{1}{h_{s+1}} (L_{r,s+1}^u - L_{rs}^o) - \frac{1}{h_s} (L_{rs}^u - L_{r,s-1}^o),$$

und die äussere Belastung gibt den Betrag P_{rs} .

Wenn irgendeine Auflagerreaktion R_{rs} am Knoten (r, s) vorhanden ist, so entsteht wegen des Gleichgewichtes die folgende Gleichung

$$\frac{M_{r+1,s}^i - M_{rs}^r}{l_{r+1}} - \frac{M_{rs}^i - M_{r-1,s}^r}{l_r} + \frac{L_{r,s+1}^u - L_{rs}^o}{h_{s+1}} - \frac{L_{rs}^u - L_{r,s-1}^o}{h_s} = R_{rs} - P_{rs}. (14)$$

Wenn es kein Auflager in diesem Knoten gibt, so verschwindet R_{rs} , und man erhält an Stelle der Gl. (14) die folgende Gleichung

$$\frac{M_{r+1,s}^i - M_{rs}^r}{l_{r+1}} - \frac{M_{rs}^i - M_{r-1,s}^r}{l_r} + \frac{L_{r,s+1}^u - L_{rs}^o}{h_{s+1}} - \frac{L_{rs}^u - L_{r,s-1}^o}{h_s} = -P_{rs} \dots (14a)$$

3) Das Gleichgewicht der Momente an dem Knoten.

Zum nächsten Schritte untersuchen wir das Gleichgewicht des Knotens (r, s) gegen Verdrehung. Wir bezeichnen mit X_{rs} das Torsionsmoment des zur x -Achse parallelen Stabes zwischen den Knoten $(r-1, s)$ und (r, s) ,

Y_{rs} das Torsionsmoment des zur y -Achse parallelen Stabes zwischen den Knoten $(r, s-1)$ und (r, s) ;

die positive Richtung dieser Torsionsmomente ist aus der **Abb. 9a** zu verstehen.

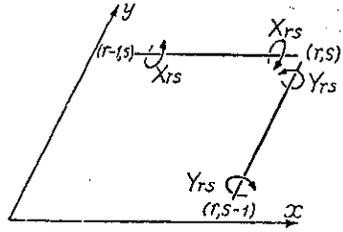


Abb. 9a.

Wie in **Abb. 9b** und **9c** dargestellt ist, erzeugen am Knoten (r, s) die Torsionsmomente X ein Moment $X_{r+1,s} - X_{rs}$ in der Richtung von L_{rs}^o und die Y ein Moment $Y_{r,s+1} - Y_{rs}$ in der Richtung von M_{rs}^r , so dass man aus der Gleichgewichts-

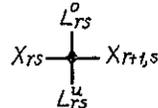


Abb. 9b.

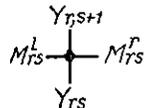


Abb. 9c.

bedingung, dass die Summe der an einem Knoten angreifenden Momente verschwindet, die folgenden Gleichungen

$$Y_{r,s+1} - Y_{rs} = M_{rs}^l - M_{rs}^r, \dots (15)$$

$$X_{r+1,s} - X_{rs} = L_{rs}^u - L_{rs}^o \dots (16)$$

erhält.

4) Die Drehwinkel und die Torsionsmomente.

Gemäss Gl. (6) bestehen zwischen den Drehwinkeln und den Torsionsmomenten die folgenden Verknüpfungen

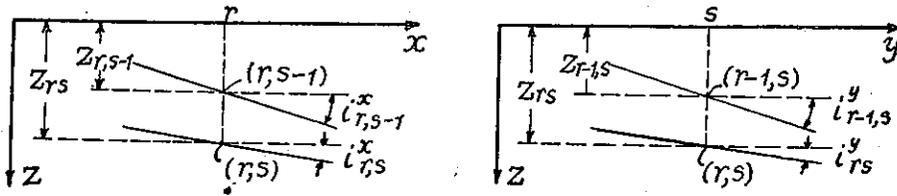


Abb. 10.

$$i_{r,s-1}^x - i_{r,s}^x = \psi_{rs} Y_{rs}, \dots (17)$$

$$i_{r-1,s}^y - i_{r,s}^y = \phi_{rs} X_{rs}, \dots (18)$$

$$\phi_{rs} = \frac{l_r}{GH_{rs}}, \psi_{rs} = \frac{l_{rs}}{GK_{rs}} \dots (19)$$

worin

Aus obigen Gleichungen erhält man unter Benutzung von Gl. (7) bzw.

(9) die folgenden zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} \psi_{rs} Y_{rs} &= -\frac{1}{l_r} (z_{rs} - z_{r-1,s} - z_{r,s-1} + z_{r-1,s-1}) + \frac{\mu_{rs}}{6} (2M_{rs}^l + M_{r-1,s}^r) \\ &\quad - \frac{\mu_{r,s-1}}{6} (2M_{r,s-1}^l + M_{r-1,s-1}^r) + \frac{1}{l_r} (\mu_{rs} S_{rs}^l - \mu_{r,s-1} S_{r,s-1}^l) \\ &= -\frac{1}{l_r} \Delta_x \Delta_y (z_{r-1,s-1}) + \frac{1}{6} \Delta_y [\mu_{r,s-1} (2M_{r,s-1}^l + M_{r-1,s-1}^r)] \\ &\quad + \frac{1}{l_r} \Delta_y [\mu_{r,s-1} S_{r,s-1}^l], \end{aligned} \quad \dots (20)$$

$$\begin{aligned} \phi_{rs} X_{rs} &= -\frac{1}{h_s} (z_{rs} - z_{r-1,s} - z_{r,s-1} + z_{r-1,s-1}) + \frac{\lambda_{rs}}{6} (2L_{rs}^u + L_{r,s-1}^o) \\ &\quad - \frac{\lambda_{r-1,s}}{6} (2L_{r-1,s}^u + L_{r-1,s-1}^o) + \frac{1}{h_s} (\lambda_{rs} T_{rs}^u - \lambda_{r-1,s} T_{r-1,s}^u) \\ &= -\frac{1}{h_s} \Delta_x \Delta_y (z_{r-1,s-1}) + \frac{1}{6} \Delta_x [\lambda_{r-1,s} (2L_{r-1,s}^u + L_{r-1,s-1}^o)] \\ &\quad + \frac{1}{h_s} \Delta_x [\lambda_{r-1,s} T_{r-1,s}^u]. \end{aligned} \quad \dots (21)$$

Benutzt man Gl. (7a) und (9a) anstatt (7) und (9), so bekommt man

$$\begin{aligned} \psi_{rs} Y_{rs} &= -\frac{1}{l_{r+1}} \Delta_x \Delta_y (z_{r,s-1}) - \frac{1}{6} \Delta_y [\mu_{r+1,s-1} (2M_{r,s-1}^r + M_{r+1,s-1}^l)] \\ &\quad - \frac{1}{l_{r+1}} \Delta_y [\mu_{r+1,s-1} S_{r,s-1}^r], \end{aligned} \quad \dots (20a)$$

$$\begin{aligned} \phi_{rs} X_{rs} &= -\frac{1}{h_{s+1}} \Delta_x \Delta_y (z_{r-1,s}) - \frac{1}{6} \Delta_x [\lambda_{r-1,s+1} (2L_{r-1,s}^o + L_{r-1,s+1}^u)] \\ &\quad - \frac{1}{h_{s+1}} \Delta_x [\lambda_{r-1,s+1} T_{r-1,s}^o]. \end{aligned} \quad \dots (21a)$$

5) Die Anzahl der Unbekannten und Gleichungen.

Wir haben nun für einen Knotenpunkt (r, s) neun Gleichungen (12) bis (16) und (20) bis (21a). Jedoch leitet sich die Gl. (20a) aus Gl. (12) und (20) her und ebenso ist die Gl. (21a) nicht unabhängig von den Gl. (13) und (21), so dass wir für einen Knotenpunkt sieben unabhängigen Gleichungen haben.

Andererseits gibt es für einen Knoten im allgemeinen acht Unbekannten, $M_{rs}^l, M_{rs}^r, L_{rs}^u, L_{rs}^o, X_{rs}, Y_{rs}, z_{rs}, R_{rs}$. Aber bei starrem Auflager ist die Verschiebung z_{rs} Null und bei freiem Knoten verschwindet die Auflagerreaktion R_{rs} , so dass die Anzahl der Unbekannten im allgemeinen sieben ist und im

Einklang mit der der Gleichungen steht.

Wenn ein Knoten (r, s) elastisch senkbar unterstützt ist, so kann man immer annehmen, dass R_{rs} eine Funktion von z_{rs} sei, und so ist die Anzahl der unabhängigen Unbekannten sieben.

Es stehen also in der Tat im allgemeinen zur Ermittlung der Unbekannten der Aufgabe ebensoviele Bestimmungsgleichungen zur Verfügung. Mit Hilfe dieser Gleichungen können die Unbekannten eindeutig bestimmt werden, sofern die Nennerdeterminante des Gleichungssystems einen von Null verschiedenen Wert hat, was hier vorausgesetzt wird. Die unbekanntenen Grössen ergeben sich als linearen Funktionen der Lasten, so dass es also das Gesetz der Superposition gilt.

Der Uebersicht halber werden hier die Grundgleichungen zusammengestellt.

$$\begin{aligned} \mu_{rs}(M_{r-1,s}^r + 2M_{rs}^l) + \mu_{r+1,s}(2M_{rs}^r + M_{r+1,s}^l) \\ + 6\left(\frac{1}{l_{r+1}} \Delta_x z_{rs} - \frac{1}{l_r} \Delta_y z_{r-1,s}\right) + 6U_{rs} = 0, \end{aligned} \dots\dots\dots (12)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{rs}(L_{r,s-1}^o + 2L_{rs}^u) + \lambda_{r,s-1}(2L_{rs}^o + L_{r,s+1}^u) \\ + 6\left(\frac{1}{h_{s+1}} \Delta_y z_{rs} - \frac{1}{h_s} \Delta_x z_{r,s-1}\right) + 6V_{rs} = 0, \end{aligned} \dots\dots\dots (13)$$

$$\Delta_x \left[\frac{1}{l_r} (M_{rs}^l - M_{r-1,s}^r) \right] + \Delta_y \left[\frac{1}{h_s} (L_{rs}^u - L_{r,s-1}^o) \right] = R_{rs} - P_{rs}, \dots\dots\dots (14)$$

$$Y_{r,s+1} - Y_{rs} = M_{rs}^l - M_{rs}^r, \dots\dots\dots (15)$$

$$X_{r+1,s} - X_{rs} = L_{rs}^u - L_{rs}^o, \dots\dots\dots (16)$$

$$\begin{aligned} \psi_{rs} Y_{rs} = -\frac{1}{l_r} \Delta_x \Delta_y (z_{r-1,s-1}) + \frac{1}{6} \Delta_y \left[\mu_{r,s-1} (2M_{r,s-1}^l + M_{r-1,s-1}^r) \right] \\ + \frac{1}{l_r} \Delta_y [\mu_{r,s-1} S_{r,s-1}^u], \end{aligned} \dots\dots\dots (20)$$

$$\begin{aligned} \psi_{rs} Y_{rs} = -\frac{1}{l_{r+1}} \Delta_x \Delta_y (z_{r,s-1}) - \frac{1}{6} \Delta_y [\mu_{r+1,s-1} (M_{r+1,s-1}^l + 2M_{r,s-1}^r)] \\ - \frac{1}{l_{r+1}} \Delta_y [\mu_{r+1,s-1} S_{r,s-1}^r], \end{aligned} \dots\dots\dots (20a)$$

$$\begin{aligned} \phi_{rs} X_{rs} = -\frac{1}{h_s} \Delta_x \Delta_y (z_{r-1,s-1}) + \frac{1}{6} \Delta_x [\lambda_{r-1,s} (2L_{r-1,s}^u + L_{r-1,s-1}^o)] \\ + \frac{1}{h_s} \Delta_x [\lambda_{r-1,s} T_{r-1,s}^u], \end{aligned} \dots\dots\dots (21)$$

$$\begin{aligned} \phi_{rs} X_{rs} = & -\frac{1}{h_{s+1}} \Delta_x \Delta_y (z_{r-1,s}) - \frac{1}{6} \Delta_x [\lambda_{r-1,s+1} (L_{r-1,s+1}^u + 2L_{r-1,s}^o)] \\ & - \frac{1}{h_{s+1}} \Delta_x [\lambda_{r-1,s+1} T_{r-1,s}^o]. \dots\dots\dots (21a) \end{aligned}$$

4. Die Randbedingungen.

Während das vorstehende Grundgleichungssystem für die Innenknoten eines irgendwie begrenzten Rostes gilt, gilt es im allgemeinen für die Randknoten nicht mehr, wie man sich leicht aus der Herstellungsweise dieser Gleichungen überzeugen kann. So erkennt man, dass man für die Randknoten besondere Randbedingungen anschreiben muss.

1) Der freie Rand.

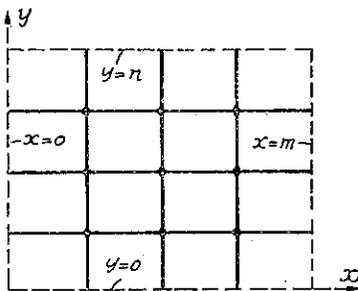


Abb. 11.

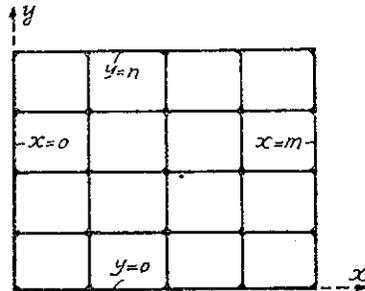


Abb. 12.

a) Fall I. Dieser Fall ist der, dass die Stäbe am Rande frei sind, wie es in **Abb. 11** für den Rand $x=0$, $x=m$, $y=0$ und $y=n$ dargestellt ist. An diesen Rändern können die Randknoten ohne Einschränkungen die Verschiebungen und Verdrehungen erfahren. Die Randbedingung für solchen Randknoten (r, s) ist:

$$R_{rs} = M_{rs}^i = M_{rs}^r = L_{rs}^u = L_{rs}^o = X_{rs} = X_{r+1,s} = Y_{rs} = Y_{r,s+1} = 0.$$

Also bleibt die lotrechte Verschiebung z_{rs} als einzige Unbekannte übrig.

Die Grundgleichungen gelten hier nicht, mit der Ausnahme von der Gl. (14), die aber, wie man leicht bestätigt findet,

für $x=0$ $M_{r+1,s}^i = -P_{rs} \cdot l_{r+1}, \dots\dots\dots (22a)$

für $x=m$ $M_{r-1,s}^r = -P_{rs} \cdot l_r, \dots\dots\dots (22b)$

für $y=0$ $L_{r,s+1}^u = -P_{rs} \cdot h_{s+1} \dots\dots\dots (22c)$

für $y=n$ $L_{r,s-1}^o = -P_{rs} \cdot h_s \dots\dots\dots (22d)$

und ergibt.

b) Fall II. Dieser Fall ist der, dass drei Roststäbe am Randknoten T-förmig zusammentreffen und der Knoten frei ist, wie es in **Abb. 12** dargestellt ist.

Die Randbedingung für solchen Randknoten (r, s) ist:

$$\begin{aligned} \text{für } x=0 \quad R_{rs} &= M_{rs}^l = X_{rs} = 0, \\ \text{für } x=m \quad R_{rs} &= M_{rs}^r = X_{r+1,s} = 0, \\ \text{für } y=0 \quad R_{rs} &= L_{rs}^u = Y_{rs} = 0 \\ \text{und für } y=n \quad R_{rs} &= L_{rs}^o = Y_{r,s+1} = 0. \end{aligned}$$

Wie es sich aus der Herstellungsweise ergibt, gelten die Grundgleichungen auch für diesen Randknoten, ausgenommen

$$\begin{aligned} \text{für } x=0 \quad & \text{Gl. (12), (20), (21), (21a),} \\ \text{für } x=m \quad & \text{Gl. (12), (20a),} \\ \text{für } y=0 \quad & \text{Gl. (13), (20), (20a), (21),} \\ \text{und für } y=n \quad & \text{Gl. (13), (21a),} \end{aligned}$$

so dass man sich leicht überzeugt, dass die Anzahl der an diesem Randknoten aufstellbaren Gleichungen mit der der dem Randknoten zugehörigen Unbekannten übereinstimmt.

2) Der frei aufliegende Rand.

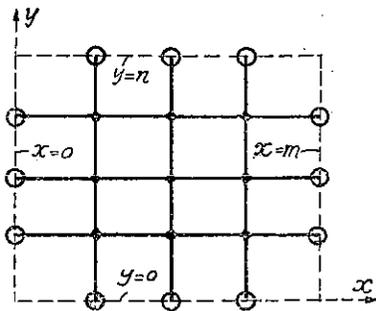


Abb. 13.

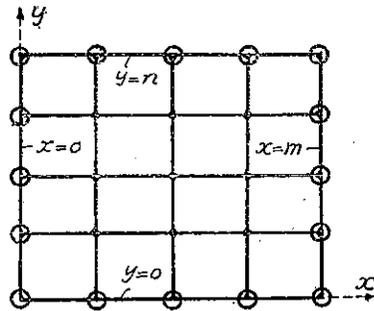


Abb. 14.

○ bedeutet Auflager.

a) Fall I. Wie es in **Abb. 13** dargestellt ist, sind die Stäbe an ihren Randknoten einfach aufgelegt. Die Randbedingung für solchen Randknoten (r, s) ist:

$$z_{rs} = M_{rs}^l = M_{rs}^r = L_{rs}^u = L_{rs}^o = X_{rs} = X_{r+1,s} = Y_{rs} = Y_{r,s+1} = 0.$$

Die Grundgleichungen gelten hier nicht, mit der Ausnahme von der Gl. (14), die aber

$$\text{für } x=0 \quad M_{r+1,s}^l = (R_{rs} - P_{rs}) l_{r+1}, \dots \dots \dots (23a)$$

für $x=m$ $M_{r-1,s}^r = (R_{rs} - P_{rs}) l_r, \dots \dots \dots (23b)$

für $y=0$ $L_{r,s+1}^u = (R_{rs} - P_{rs}) h_{s+1} \dots \dots \dots (23c)$

und für $y=n$ $L_{r,s-1}^o = (R_{rs} - P_{rs}) h_s \dots \dots \dots (23d)$

ergibt. Diese Gleichungen bestimmen die dem Randknoten (r, s) zugehörige, einzige Unbekannte R_{rs} . Die anderen sämtlichen Unbekannten, die den Innenknoten gehören, kann man durch die Aufstellung des Grundgleichungssystems für jeden Innenknoten bestimmen.

b) Fall II. Am Randknoten treffen drei Roststäbe T-förmig zusammen und der Randknoten sei durch starren Auflager unterstützt. Die Randbedingung für solchen Randknoten (r, s) ist:

für $x=0$ $z_{rs} = M_{rs}^l = X_{rs} = 0,$

für $x=m$ $z_{rs} = M_{rs}^r = X_{r+1,s} = 0,$

für $y=0$ $z_{rs} = L_{rs}^u = Y_{rs} = 0$

und für $y=n$ $z_{rs} = L_{rs}^o = Y_{r,s+1} = 0.$

Ueber die Gültigkeit der Grundgleichungen an diesen Randknoten gelten dieselben Erwähnungen, wie wir sie bei dem Fall II des freien Randes getan haben.

3) Der fest eingespannte Rand.

Wir wollen schliesslich den Fall untersuchen, dass die Stäbe am Rande fest eingespannt sind, wie dies z.B. in **Abb. 15** für den Rand $x=0, x=m, y=0$ und $y=n$ dargestellt ist.

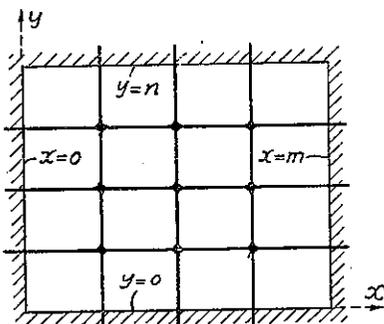


Abb. 15.

Zunächst ist für diesen Rändern $z_{rs} = 0$. Ausserdem muss der Randknoten keine Verdrehung erfahren. Im folgenden wird es noch ausführlicher erwähnt werden.

a) Für $x=0$. Es ist hier

$z_{rs} = i_{rs}^r = i_{rs}^y = 0,$

und die zu diesem Rande gehörigen, unbekanntenen Grössen sind R_{rs} und M_{rs}^r . Wenn man, gemäss der zweiten Randbedingung $i_{rs}^r = 0$, den Ausdruck für i_{rs}^r von (7a) gleich Null setzt und $z_{rs} = 0$ berücksichtigt, bekommt man die erste Gleichung für die zwei Unbekannten

$$\mu_{r+1,s}(2M_{rs}^r + M_{r+1,s}^l) + \frac{6}{l_{r+1}} z_{r+1,s} + 6 \frac{\mu_{r+1,s}}{l_{r+1}} S_{rs}^r = 0, \dots (24)$$

die der Grundgleichung (12) entspricht. Aus dem Gleichgewichte der Kräfte an diesem Rande erhält man die zweite Gleichung

$$\frac{M_{r+1,s}^l - M_{rs}^r}{l_{r+1}} = R_{rs} - P_{rs}, \dots (25)$$

die der Grundgleichung (14) entspricht.

Die letzte Randbedingung $i_{rs}^y = 0$ bedingt für den Randknoten (r, s) keine Gleichung, sondern sie ergibt aus Gl. (18) für den nächst liegenden Knoten $(r+1, s)$

$$-i_{r+1,s}^y = \phi_{r+1,s} X_{r+1,s}$$

Setzt man die sich aus Gl. (9) bzw. (9a) ergebenden Ausdrücke für $i_{r+1,s}^y$ in die obige Gleichung ein, so bekommt man

$$\phi_{r+1,s} X_{r+1,s} = -\frac{1}{h_s} \Delta_y(z_{r+1,s-1}) + \frac{\lambda_{r+1,s}}{6} (2L_{r+1,s}^u + L_{r+1,s-1}^o) + \frac{\lambda_{r+1,s}}{h_s} T_{r+1,s}^u \dots (26)$$

$$\phi_{r+1,s} X_{r+1,s} = -\frac{1}{h_{s+1}} \Delta_y(z_{r+1,s}) - \frac{\lambda_{r+1,s+1}}{6} (L_{r+1,s+1}^u + 2L_{r+1,s}^o) - \frac{\lambda_{r+1,s+1}}{h_{s+1}} T_{r+1,s}^o \dots (26a)$$

welche man für den Knoten $(r+1, s)$ an der Stelle der Grundgleichungen (21) bzw. (21a) aufzustellen braucht. Es sei noch erwähnt werden, dass man diese zwei Gleichungen aus Gl. (21) bzw. (21a) durch Ersetzen von Zeiger r durch $r+1$ und mit Berücksichtigung von $z_{r,s+1} = z_{rs} = z_{r,s-1} = \lambda_{rs} = \lambda_{r,s+1} = 0$ herleiten kann.

b) Für $x = m$. Es ist hier

$$z_{rs} = i_{rs}^l = i_{rs}^y = 0.$$

Zu diesem Randknoten gehören drei Unbekannten R_{rs} , M_{rs}^l , und X_{rs} . Man erhält durch Einsetzen von $z_{rs} = i_{rs}^l = 0$ in Gl. (7)

$$\mu_{rs}(M_{r-1,s}^r + 2M_{rs}^l) + \frac{6}{l_r} z_{r-1,s} + 6 \frac{\mu_{rs}}{l_r} S_{rs}^l = 0 \dots (24a)$$

und aus dem Gleichgewichte der Kräfte an diesem Randknoten

$$\frac{M_{r-1,s}^r - M_{rs}^l}{l_r} = R_{rs} - P_{rs} \dots (25a)$$

Gemäss der letzten Randbedingung $i_{rs}^y = 0$ ergibt sich aus Gl. (18)

$$i_{r-1,s}^y = \phi_{rs} X_{rs}$$

Setzt man die Ausdrücke für $i_{r-1,s}^y$ aus Gl. (9) bzw. (9a) in die obige Gleichung ein, so bekommt man

$$\phi_{rs} X_{rs} = \frac{1}{h_s} \Delta_y(z_{r-1, s-1}) - \frac{\lambda_{r-1, s}}{6} (2L_{r-1, s}^u + L_{r-1, s-1}^o) - \frac{\lambda_{r-1, s}}{h_s} T_{r-1, s}^u \dots (27)$$

$$\phi_{rs} X_{rs} = \frac{1}{h_{s+1}} \Delta_y(z_{r-1, s}) + \frac{\lambda_{r-1, s+1}}{6} (L_{r-1, s+1}^u + 2L_{r-1, s}^o) + \frac{\lambda_{r-1, s+1}}{h_{s+1}} T_{r-1, s}^o \dots (27a)$$

Die Gl. (27) und (27a) sind einander nicht unabhängig und die Gleichungen (24a), (25a), (27) bzw. (27a) sind an dem Randknoten (r, s) an der Stelle der Grundgleichungen (12), (14), (21) bzw. (21a) für die drei Unbekannten aufzustellen.

c) Für $y=0$. Es ist hier

$$z_{rs} = i_{rs}^o = i_{rs}^x = 0.$$

Zu diesem Randknoten gehören zwei Unbekannten R_{rs} und L_{rs}^o .

Wie bei $x=0$, erhält man für den Randknoten (r, s)

$$\lambda_{r, s+1} (2L_{rs}^o + L_{r, s+1}^u) + \frac{6}{h_{s+1}} z_{r, s+1} + 6 \frac{\lambda_{r, s+1}}{h_{s+1}} T_{rs}^r = 0 \dots (24b)$$

und

$$\frac{L_{r, s+1}^u - L_{rs}^o}{h_{s+1}} = R_{rs} - P_{rs} \dots (25b)$$

die den Gleichungen (13) und (14) entsprechen. Aus der letzten Randbedingung erhält man für den nächst liegenden Knoten (r, s+1)

$$\psi_{r, s+1} Y_{r, s+1} = -\frac{1}{l_r} \Delta_x(z_{r-1, s+1}) + \frac{\mu_{r, s+1}}{6} (M_{r-1, s+1}^r + 2M_{r, s+1}^l) + \frac{\mu_{r, s+1}}{l_r} S_{r, s+1}^i \dots (28)$$

$$\psi_{r, s+1} Y_{r, s+1} = -\frac{1}{l_{r+1}} \Delta_x(z_{r, s+1}) - \frac{\mu_{r+1, s+1}}{6} (M_{r+1, s+1}^l + 2M_{r, s+1}^r) - \frac{\mu_{r+1, s+1}}{l_{r+1}} S_{r, s+1}^r \dots (28a)$$

die man an der Stelle der Gl. (20) bzw. (20a) aufzustellen braucht.

d) Für $y=n$. Es ist hier

$$z_{rs} = i_{rs}^u = i_{rs}^x = 0.$$

Zu diesem Randknoten gehören drei Unbekannten R_{rs} , L_{rs}^u und Y_{rs} .

Wie bei $x=m$, erhält man aus den obigen Randbedingungen

$$\lambda_{rs} (L_{r, s-1}^o + 2L_{rs}^u) + \frac{6}{h_s} z_{r, s-1} + 6 \frac{\lambda_{rs}}{h_s} T_{rs}^u = 0 \dots (24c)$$

$$\frac{L_{r, s-1}^o - L_{rs}^u}{h_s} = R_{rs} - P_{rs} \dots (25c)$$

$$\psi_{rs} Y_{rs} = \frac{1}{l_r} \Delta_x(z_{r-1, s-1}) - \frac{\mu_{r, s-1}}{6} (2M_{r, s-1}^l + M_{r-1, s-1}^r) - \frac{\mu_{r, s-1}}{l_r} S_{r, s-1}^l \dots (29)$$

und

$$\psi_{rs} Y_{rs} = \frac{1}{l_{r+1}} \Delta_w(z_{r,s-1}) + \frac{\mu_{r+1,s-1}}{6} (M_{r+1,s-1}^l + 2M_{r,s-1}^r) + \frac{\mu_{r+1,s-1} S_{r,s-1}^o}{l_{r+1}}, \quad (29a)$$

die man an der Stelle der Grundgleichungen (13), (14), (20) bzw. (20a) für den Randknoten (r, s) aufzustellen braucht.

Damit ist die Aufgabe, die wir uns gestellt hatten, im wesentlichen gelöst, da wir die sämtlichen Unbekannten mit Hilfe der Elastizitätsgleichungen und Randbedingungen eindeutig bestimmen können. Die Auflösung dieser Gleichungen, die wir als simultane partielle Differenzgleichungen auffassen können, ist jedoch nicht einfach und es muss überhaupt unmöglich sein, die Lösung in geschlossener Form zu geben. Im folgenden werden einige wichtige Fälle aufgegriffen und untersucht werden, die in der Technik nicht als unbedeutend betrachtet werden sollen und durch die Anwendung der Grundgleichungen ohne besonderen Schwierigkeiten auflösbar sind. Dagegen soll auf die allgemeine Lösung dieses Gleichungssystems verzichtet werden.

Es sei noch hier erwähnt werden, dass wir bei der Aufstellung der Grundgleichungen die verdrehungsfesten Knotenverbindungen vorausgesetzt haben. Ist dagegen die Verbindung der Stäbe in den Knoten so ausgebildet, dass keinerlei Torsionsmomente in den Stäben auftreten, oder ist der Drillungswiderstand des Stabquerschnitts gegen das Trägheitsmoment sehr klein und zu vernachlässigen, so verschwinden die Torsionsmomente X und Y und verlieren die Gl. (20), (20a), (21), (21a) ihre Existenzberechtigung. Wenn X und Y überall verschwinden, so ergibt sich aus Gl. (15) und (16)

$$M_{rs}^r = M_{rs}^l; \quad I_{rs}^o = L_{rs}^u.$$

Dieser Fall ist, wie wir es vorher erwähnt haben, von Bleich und Melan behandelt worden¹⁾.

1) Siehe Fussnote auf S. 3.

Die Gl. (12), (13) und (14) stimmen in diesem Falle mit den von Bleich-Melan abgeleiteten Gl. (2a), (2b) und (2c) überein.

II. ABSCHNITT.

DER ROST MIT QUADRATISCHEN FELDERN BEI KONSTATEM STABQUERSCHNITT.

1. Die Bezeichnungen und die Grundgleichungen.

Wir betrachten nun einen Rost mit gleichen, quadratischen Feldern, der Querschnitt dessen Stabes überall konstant ist.

Es ist nun

$$l_r = l_s = l,$$

$$I_{rs} = J_{rs} = I$$

und

$$H_{rs} = K_{rs} = H,$$

so dass wir

$$\mu_{rs} = \lambda_{rs} = \mu = \frac{l}{EI}, \quad \phi_{rs} = \psi_{rs} = \phi = \frac{l}{GH}$$

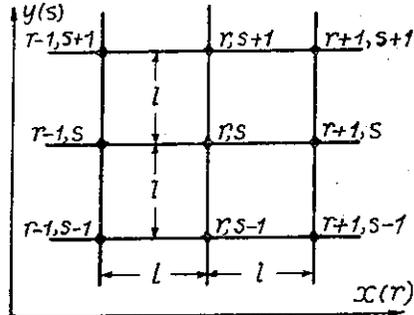


Abb. 16.

schreiben können.

In diesem Falle vereinfacht sich das Grundgleichungssystem des vorigen Abschnittes zu der Gestalt:

$$M_{r+1,s}^i + 2(M_{rs}^r + M_{rs}^l) + M_{r-1,s}^r + \frac{6}{l\mu} \Delta_x^2(z_{r-1,s}) + \frac{6}{\mu} U_{rs} = 0, \dots (1)$$

$$L_{r,s+1}^u + 2(L_{rs}^o + L_{rs}^u) + L_{r,s-1}^o + \frac{6}{l\mu} \Delta_y^2(z_{r,s-1}) + \frac{6}{\mu} V_{rs} = 0, \dots (2)$$

$$\Delta_x(M_{rs}^l - M_{r-1,s}^r) + \Delta_y(L_{rs}^u - L_{r,s-1}^o) = (R_{rs} - P_{rs})l, \dots (3)$$

$$\Delta_y Y_{rs} = M_{rs}^l - M_{rs}^r, \dots (4)$$

$$\Delta_x X_{rs} = L_{rs}^u - L_{rs}^o, \dots (5)$$

$$\alpha Y_{rs} = -\frac{1}{l\mu} \Delta_x \Delta_y(z_{r-1,s-1}) + \frac{1}{6} \Delta_y(2M_{r,s-1}^l + M_{r-1,s-1}^r) + \frac{1}{l} \Delta_y S_{r,s-1}^l, \dots (6)$$

$$\alpha Y_{rs} = -\frac{1}{l\mu} \Delta_x \Delta_y(z_{r,s-1}) - \frac{1}{6} \Delta_y(M_{r+1,s-1}^l + 2M_{r,s-1}^r) - \frac{1}{l} \Delta_y S_{r,s-1}^r, \dots (6a)$$

$$\alpha X_{rs} = -\frac{1}{l\mu} \Delta_x \Delta_y(z_{r-1,s-1}) + \frac{1}{6} \Delta_x(2L_{r-1,s}^u + L_{r-1,s-1}^o) + \frac{1}{l} \Delta_x T_{r-1,s}^u, \dots (7)$$

$$\alpha X_{rs} = -\frac{1}{l\mu} \Delta_x \Delta_y(z_{r-1,s}) - \frac{1}{6} \Delta_x(L_{r-1,s+1}^u + 2L_{r-1,s}^o) - \frac{1}{l} \Delta_x T_{r-1,s}^o, \dots (7a)$$

worin α durch

$$\alpha = \frac{\phi}{\mu} = \frac{EI}{GH} = \frac{2(m+1)}{m} \cdot \frac{I}{H} \dots\dots\dots (8)$$

gegeben ist, wenn m die Poissonsche Zahl des Roststabes bedeutet.

Die Konstanten, die von der äusseren Belastung herrühren, sind wie (I, 11)¹⁾ durch

$$\left. \begin{aligned} S_{rs}^u &= \frac{1}{l} \int_0^l M_{rs,0} x dx, & T_{rs}^u &= \frac{1}{l} \int L_{rs,0} y dy, \\ S_{rs}^r &= \frac{1}{l} \int_0^l M_{r+1,s,0} (l-x) dx, & T_{rs}^r &= \frac{1}{l} \int_0^l L_{r,s+1,0} (l-y) dy, \\ U_{rs} &= \frac{\mu}{l} (S_{rs}^u + S_{rs}^r), & V_{rs} &= \frac{\mu}{l} (T_{rs}^u + T_{rs}^r) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

gegeben.

Das obige Gleichungssystem (1) bis (7a) gilt im allgemeinen für die Innenknoten des Rostes. Dabei ist es zu beachten, dass wir die Gl. (6a) und die Gl. (7a) aus den Gl. (1) und (6) bzw. aus den Gl. (2) und (7) herleiten können, und dass

für den freien Knoten $R_{rs} = 0,$

für den unterstützten Knoten $z_{rs} = 0$

und für den elastisch senkbar unterstützten Knoten $R_{rs} = k_{rs} z_{rs}$ sein muss, wenn k_{rs} eine von den elastischen Eigenschaften der Unterlage abhängige Konstante bedeutet.

Für die Randbedingungen gelten die Erwähnungen, die wir in dem Paragraphen 4 des vorigen Abschnittes gemacht haben, wenn wir in die darin entstehenden Gleichungen die vereinfachenden Bezeichnungen der Koeffizienten einsetzen.

2. Der an den vier Ecken unterstützte, quadratische Rost mit vier gleichen Feldern.

1) Die Rand-und Symmetriebedingungen und die Unbekannten.

Als einfachstes Beispiel wollen wir vorerst einen Rost mit 2×2 gleichen, quadratischen Feldern untersuchen, der, wie in der **Abb. 17** dargestellt ist, an den vier Eckknoten unterstützt ist. Da dieser Rost $3 \times 3 = 9$ Knoten hat,

1) (I, 11) bedeutet das Gleichungssystem (11) des ersten Abschnittes. Von jetzt an werden wir von dieser Bezeichnung Gebrauch machen.

sind im allgemeinen $8 \times 9 = 72$ unbekannte Grössen vorhanden. Aber da 27 Unbekannten

- z_{rs} für Knoten (00), (20), (02), (22),
- R_{rs} für Knoten (10), (01), (11), (21), (12),
- M_{rs}^i und X_{rs} für $r=0$,
- M_{rs}^r für $r=2$,
- L_{rs}^u und Y_{rs} für $s=0$,
- L_{rs}^o für $s=2$

verschwinden sollen, so haben wir $72 - 27 = 45$ Unbekannten zu ermitteln.

Ist die Belastung symmetrisch um den Mittelknoten (11), so ergeben sich die Symmetriebedingungen

$$\left. \begin{aligned}
 R_{00} &= R_{20} = R_{02} = R_{22}, \\
 z_{10} &= z_{01} = z_{21} = z_{12}, \\
 M_{10}^i &= M_{10}^r = M_{12}^i = M_{12}^r = L_{01}^u = L_{01}^o = L_{21}^u = L_{21}^o, \\
 M_{00}^i &= M_{20}^i = M_{02}^r = M_{22}^r = L_{00}^u = L_{02}^u = L_{20}^o = L_{22}^o, \\
 M_{01}^i &= M_{21}^i = L_{10}^u = L_{12}^u, \\
 M_{11}^i &= M_{11}^r = L_{11}^u = L_{11}^o, \\
 X_{11} &= X_{21} = Y_{11} = Y_{12} = 0
 \end{aligned} \right\} \dots\dots(10)$$

und $X_{10} = -X_{20} = -X_{12} = X_{22} = Y_{01} = -Y_{02} = -Y_{21} = Y_{22}$,

so dass wir in diesem Falle nur acht unbekannte Grössen R_{00} , z_{10} , z_{11} , M_{00}^r , M_{10}^i , M_{01}^i , M_{11}^i und X_{10} zu bestimmen brauchen. In diesem Falle können wir ohne etwaige Verwickelungen die obigen Unbekannten der Reihe nach mit R , z_{10} , z_{11} , M_{00} , M_{10} , M_{01} , M_{11} und X bezeichnen.

Ist die Belastung nun um einen Mittelträger, z.B. um (10)–(12) symmetrisch, so ergeben sich die Symmetriebedingungen

$$\left. \begin{aligned}
 R_{00} &= R_{20}, & R_{02} &= R_{22}, & z_{01} &= z_{21}, \\
 M_{00}^r &= M_{20}^i, & M_{01}^r &= M_{21}^i, & M_{02}^r &= M_{22}^i. \\
 M_{10}^i &= M_{10}^r, & M_{11}^i &= M_{11}^r, & M_{12}^i &= M_{12}^r, \\
 L_{00}^u &= L_{20}^o, & L_{01}^u &= L_{21}^o, & L_{02}^u &= L_{22}^o, \\
 X_{10} &= -X_{20}, & X_{11} &= -X_{21}, & X_{12} &= -X_{22}, \\
 Y_{01} &= -Y_{21}, & Y_{02} &= -Y_{22}, & Y_{11} &= Y_{12} = 0,
 \end{aligned} \right\} \dots\dots(11)$$

so dass wir in diesem Falle mit 25 Unbekannten

- R_{00} , R_{02} , z_{01} , z_{10} , z_{11} , z_{12} ,
- M_{00}^r , M_{01}^r , M_{02}^r , M_{10}^i , M_{11}^i , M_{12}^i ,

$$L_{00}^0, L_{01}^u, L_{01}^0, L_{02}^u, L_{10}^0, L_{11}^u, L_{11}^0, L_{12}^u,$$

$$X_{10}, X_{11}, X_{12}, Y_{01}, Y_{02}$$

zu tun haben.

2) **Einzellast im Mittelknoten.**

Wie es in der **Abb. 17** dargestellt ist, wirkt eine Einzellast P am Mittelknoten. Wegen der bestehenden Symmetrie haben wir mit acht Unbekannten $R, z_{10}, z_{11}, M_{00}, M_{10}, M_{01}, M_{11}$ und X zu tun. Da sowohl S auch T verschwinden, so erhalten wir mit Beachtung von den Symmetriebedingungen (10)

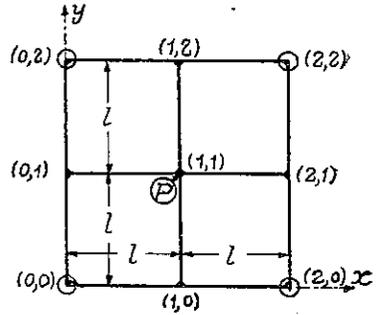


Abb. 17.

aus Gl. (1)

für (11): $2M_{11} + M_{01} + \frac{6}{l\mu} (z_{10} - z_{11}) = 0 \dots\dots\dots (i)$

für (10): $2M_{10} + M_{00} - \frac{6}{l\mu} z_{10} = 0 \dots\dots\dots (ii)$

aus Gl. (3)

für (11): $M_{01} - M_{11} = -\frac{Pl}{4} \dots\dots\dots (iii)$

für (10): $M_{00} - M_{10} + M_{11} - M_{01} = 0 \dots\dots\dots (iv)$

für (00): $2(M_{10} - M_{00}) = Rl \dots\dots\dots (v)$

aus Gl. (5)

für (10): $2X = M_{01} \dots\dots (vi),$ für (00): $X = -M_{00} \dots\dots (vii)$

aus Gl. (7a) für (10):

$$6\alpha X = \frac{6}{l\mu} (2z_{10} - z_{11}) + 2(M_{00} - M_{01}) + (M_{10} - M_{11}) \dots\dots\dots (viii)$$

Damit haben wir acht miteinander unabhängige Gleichungen aufgestellt. Eliminiert man z_{10} und z_{11} aus den Gl. (i), (ii) und (viii), so ergibt sich

$$2\alpha X = M_{00} - M_{01} + M_{10} - M_{11},$$

die mit Hilfe der Gl. (vii) in

$$(1 + 2\alpha)M_{00} - M_{01} + M_{10} - M_{11} = 0 \dots\dots\dots (ix)$$

übergeht. Aus den Gl. (vi) und (vii) erhält man

$$2M_{00} + M_{01} = 0 \dots\dots\dots (x)$$

Löst man vier Gl. (iii), (iv), (ix) und (x) nach den vier Unbekannten M auf, so bekommt man

$$\left. \begin{aligned} M_{00} &= +\frac{Pl}{16(3+\alpha)}, & M_{01} &= -\frac{Pl}{8(3+\alpha)}, \\ M_{10} &= +\frac{(7+2\alpha)Pl}{16(3+\alpha)}, & M_{11} &= +\frac{(5+2\alpha)Pl}{8(3+\alpha)}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

Aus den Gl. (i), (ii), (v) und (vii) erhält man dann für die anderen Unbekannten:

$$\left. \begin{aligned} R &= +\frac{P}{4}, & X &= -\frac{Pl}{16(3+\alpha)}, \\ z_{10} &= \frac{15+4\alpha}{96(3+\alpha)} \cdot \frac{Pl^3}{EI} = \frac{Pl^3}{96EI} \left(5 - \frac{\alpha}{3+\alpha}\right), \\ z_{11} &= \frac{11+4\alpha}{32(3+\alpha)} \cdot \frac{Pl^3}{EI} = \frac{Pl^3}{96EI} \left(11 + \frac{\alpha}{3+\alpha}\right). \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

a) Sonderfall $\alpha = \infty$.

Wenn der Drillungswiderstand H gegen das Trägheitsmoment I sehr klein ist, wie es bei einem Vollwandträger mit grösser Höhe vorkommen wird, kann man $H/I = 0$ also $\alpha = \infty$ annehmen. Setzt man $\alpha = \infty$ in die Gl. (12) und (13) ein, so bekommt man

$$\left. \begin{aligned} M_{00} = M_{01} = X = 0, & & R &= \frac{P}{4}, \\ M_{10} &= +\frac{Pl}{8}, & M_{11} &= +\frac{Pl}{4}, \\ z_{10} &= \frac{Pl^3}{24EI}, & z_{11} &= \frac{Pl^3}{8EI}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

b) Sonderfall $\alpha = 0$.

Wenn, wie z.B. bei einem sehr flachen Stabquerschnitt, I gegen H klein ist, kann man $\alpha = 0$ annehmen. Für $\alpha = 0$ erhält man aus Gl. (12) und (13)

$$\left. \begin{aligned} R &= \frac{1}{4}P, & M_{00} &= -X = +\frac{1}{48}Pl, \\ M_{10} &= +\frac{7}{48}Pl, & M_{01} &= -\frac{1}{24}Pl, & M_{11} &= +\frac{5}{24}Pl, \\ z_{10} &= \frac{5Pl^3}{96EI}, & z_{11} &= \frac{11Pl^3}{96EI}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

Der Verlauf der Biegemomente für beide Fälle ist in **Abb. 18** zur Darstellung gebracht. Daraus erkennt man, dass die beiden Fälle sich nicht wesentlich voneinander unterscheiden, und der Rost möge für diese Belastung mit der üblichen Berechnungsmethode, also mit $\alpha = \infty$, berechnet werden.

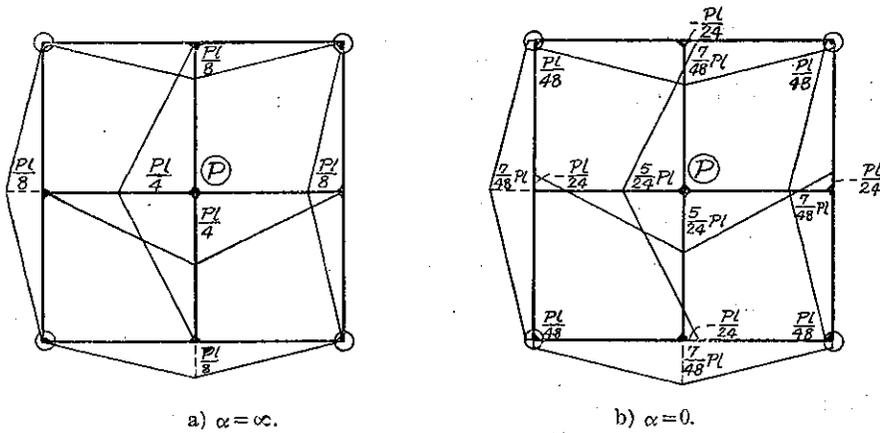


Abb. 18.

3) Gleichmässig verteilte Last.

Auf alle Stäben des Rostes möge eine gleichmässig verteilte Last q pro Längeneinheit wirken. Da die aus Gl. (10) bedingte Symmetrie vorhanden ist, haben wir auch in diesem Falle mit acht Unbekannten zu tun.

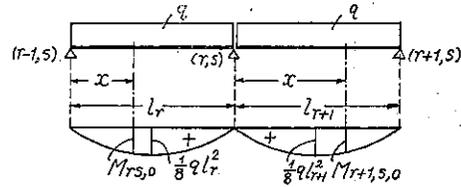


Abb. 19.

Das Biegemoment des frei aufliegend gedachten Stabes ist, wie **Abb. 19**,

$$M_{rs,0} = \frac{1}{2} q x (l - x),$$

so dass sich

$$\int_0^l M_{rs,0} x dx = \int_0^l M_{r+1,s} (l-x) dx = \frac{1}{24} q l^3$$

ergibt. Damit erhält man durch Gl. (9)

$$\text{für } r=0 \quad S_{rs}^l = 0, \quad S_{rs}^r = \frac{1}{24} q l^3,$$

$$\text{für } r=1 \quad S_{rs}^l = S_{rs}^r = \frac{1}{24} q l^3,$$

$$\text{und für } r=2 \quad S_{rs}^l = \frac{1}{24} q l^3, \quad S_{rs}^r = 0,$$

$$\text{und deshalb für } r=0, 2 \quad U_{rs} = \frac{\mu}{24} q l^2,$$

$$\text{für } r=1 \quad U_{rs} = \frac{\mu}{12} ql^2.$$

Ferner ergibt die Belastung die Knotenlasten :

$$P_{rs} = 2ql \quad \text{für (11),}$$

$$P_{rs} = \frac{3}{2} ql \quad \text{für (10), (01), (21), (12),}$$

und $P_{rs} = ql \quad \text{für (00), (20), (02), (22).}$

Dann erhalten wir mit Beachtung von den Symmetriebedingungen (10) aus Gl. (1)

$$\text{für (11):} \quad 2M_{11} + M_{01} + \frac{6}{l\mu} (z_{10} - z_{11}) + \frac{1}{2} ql^2 = 0 \dots\dots\dots (i)$$

$$\text{für (10):} \quad 2M_{10} + M_{00} - \frac{6}{l\mu} z_{10} + \frac{1}{2} ql^2 = 0 \dots\dots\dots (ii)$$

aus Gl. (3)

$$\text{für (11):} \quad M_{01} - M_{11} = -\frac{1}{2} ql^2 \dots\dots\dots (iii)$$

$$\text{für (10):} \quad 2(M_{00} - M_{10}) + M_{11} - M_{01} = -\frac{3}{2} ql^2 \dots\dots\dots (iv)$$

$$\text{für (00):} \quad 2(M_{10} - M_{00}) = R - ql \quad l \dots\dots\dots (v)$$

aus Gl. (5)

$$\text{für (10):} \quad 2X = M_{01} \dots\dots (vi), \quad \text{für (00):} \quad X = -M_{00} \dots\dots\dots (vii)$$

und aus Gl. (7a) für (10), da $T_{10}^0 = T_{00}^0 = \frac{1}{24} ql^3$

$$6\alpha X = \frac{6}{l\mu} (2z_{10} - z_{11}) + 2(M_{00} - M_{01}) + M_{10} - M_{11} \dots\dots\dots (viii)$$

Löst man diese Gleichungen auf, was keine Schwierigkeiten bietet, bekommt man :

$$\left. \begin{aligned} R &= 3ql, \\ M_{00} &= -X = -\frac{ql^2}{4(3+\alpha)}, \quad M_{01} = +\frac{ql^2}{2(3+\alpha)}, \\ M_{10} &= +\frac{(11+4\alpha)ql^2}{4(3+\alpha)}, \quad M_{11} = +\frac{(4+\alpha)ql^2}{2(3+\alpha)}, \\ z_{10} &= \frac{27+10\alpha}{24(3+\alpha)} \cdot \frac{ql^4}{EI} = \frac{ql^4}{24EI} \left(9 + \frac{\alpha}{3+\alpha} \right), \\ z_{11} &= \frac{51+16\alpha}{24(3+\alpha)} \cdot \frac{ql^4}{EI} = \frac{ql^4}{24EI} \left(17 - \frac{\alpha}{3+\alpha} \right). \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

a) Sonderfall $\alpha = \infty$.

Für $\alpha = \infty$ erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} M_{00} = M_{01} = X = 0, \quad M_{10} = +ql^2, \quad M_{11} = +\frac{1}{2}ql^2, \\ R = 3ql, \quad z_{10} = \frac{5}{12} \cdot \frac{ql^4}{EI}, \quad z_{11} = \frac{2}{3} \cdot \frac{ql^4}{EI}. \end{aligned} \right\} \dots\dots(16a)$$

b) Sonderfall $\alpha = 0$.

Für $\alpha = 0$ erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} R = 3ql, \quad M_{00} = -X = -\frac{1}{12}ql^2, \quad M_{01} = +\frac{1}{6}ql^2, \\ M_{10} = +\frac{11}{12}ql^2, \quad M_{11} = +\frac{2}{3}ql^2, \\ z_{10} = \frac{3}{8} \cdot \frac{ql^4}{EI}, \quad z_{11} = \frac{17}{24} \cdot \frac{ql^4}{EI}. \end{aligned} \right\} \dots\dots(16b)$$

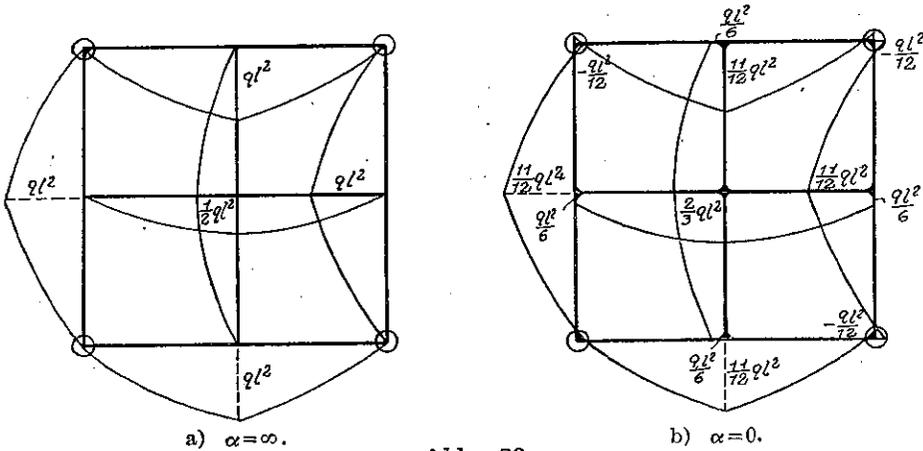


Abb. 20.

4) Einzellast im Knoten des Randträgers.

Wie es in der **Abb. 21** dargestellt ist, wirkt eine Einzellast P am Knoten (10) des Randträgers. Wegen der durch Gl. (11) bedingten Symmetrie haben wir mit 25 Unbekannten zu tun. Die Unbekannten sind:

$$\begin{aligned} R_{00}, R_{02}, z_{01}, z_{10}, z_{11}, z_{12}, \\ M_{00}^i(M_{00}), M_{01}^i(M_{01}), M_{02}^i(M_{02}), \\ M_{10}^i(M_{10}), M_{11}^i(M_{11}), M_{12}^i(M_{12}), \end{aligned}$$

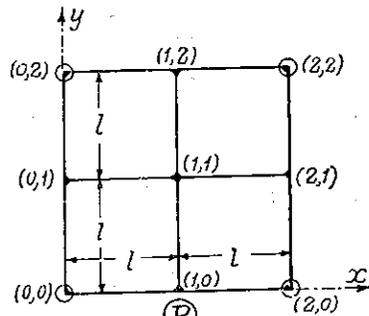


Abb. 21.

$$L_{00}^0(L_{00}), L_{01}^u, L_{01}^0, L_{02}^u(L_{02}),$$

$$L_{10}^0(L_{10}), L_{11}^u, L_{11}^0, L_{12}^u(L_{12}),$$

$$X_{10}, X_{11}, X_{12}, Y_{01}, Y_{02},$$

wobei die obere Zeiger einigen Unbekannten weggelassen werden, wenn dadurch keine Verwickelungen entstehen, wie sie in Klammern gesetzt sind.

a) Aufstellung der Gleichungen.

Bei der Anwendung der Grundgleichungen (1) bis (7a) auf die Knoten der linken Hälfte des Rostes müssen wir auf ihrer Gültigkeit an den Randknoten beachten, wie sie in dem Paragraphen 4 des vorigen Abschnittes erwähnt worden ist.

Mit Beachtung von diesen Randbedingungen und von den Symmetriebedingungen (11) erhalten wir:

aus Gl. (1)

$$\text{für (10): } M_{00} + 2M_{10} = \frac{6}{l\mu} z_{10} \dots\dots\dots (1_1)$$

$$\text{„ (11): } M_{01} + 2M_{11} = \frac{6}{l\mu} (z_{11} - z_{01}) \dots\dots\dots (1_2)$$

$$\text{„ (12): } M_{02} + 2M_{12} = \frac{6}{l\mu} z_{12} \dots\dots\dots (1_3)$$

aus Gl. (2)

$$\text{für (01): } L_{00} + 2(L_{01}^u + L_{01}^0) + L_{02} = \frac{12}{l\mu} z_{01} \dots\dots\dots (2_1)$$

$$\text{„ (11): } L_{10} + 2(L_{11}^u + L_{11}^0) + L_{12} = -\frac{6}{l\mu} (z_{10} - 2z_{11} + z_{12}) \dots\dots\dots (2_2)$$

aus Gl. (3)

$$\text{für (00): } M_{10} - M_{00} + L_{01}^u - L_{00} = R_{00} \cdot l \dots\dots\dots (3_1)$$

$$\text{„ (01): } M_{11} - M_{01} + L_{02} - L_{01}^0 - L_{01}^u + L_{00} = 0 \dots\dots\dots (3_2)$$

$$\text{„ (02): } M_{12} - M_{02} - L_{02} + L_{01}^0 = R_{02} \cdot l \dots\dots\dots (3_3)$$

$$\text{„ (10): } 2(M_{10} - M_{00}) - L_{11}^u + L_{10} = Pl \dots\dots\dots (3_4)$$

$$\text{„ (11): } 2(M_{11} - M_{01}) - L_{12} + L_{11}^0 + L_{11}^u - L_{10} = 0 \dots\dots\dots (3_5)$$

$$\text{„ (12): } 2(M_{12} - M_{02}) + L_{12} - L_{11}^0 = 0 \dots\dots\dots (3_6)$$

aus Gl. (4)

$$\text{für (00): } Y_{01} = -M_{00} \dots\dots\dots (4_1)$$

$$\text{„ (01): } Y_{02} - Y_{01} = -M_{01} \dots\dots\dots (4_2)$$

$$\text{„ (02): } Y_{02} = +M_{02} \dots\dots\dots (4_3)$$

aus Gl. (5)

$$\text{für (00): } X_{10} = -L_{00} \dots\dots\dots (5_1)$$

$$\text{„ (01): } X_{11} = L_{01}'' - L_{01}^0 \dots\dots\dots (5_2)$$

$$\text{„ (02): } X_{12} = +L_{02} \dots\dots\dots (5_3)$$

$$\text{„ (10): } X_{10} = +\frac{1}{2}L_{10} \dots\dots\dots (5_4)$$

$$\text{„ (11): } X_{11} = \frac{1}{2}(L_{11}^0 - L_{11}'') \dots\dots\dots (5_5)$$

$$\text{„ (12): } X_{12} = -\frac{1}{2}L_{12} \dots\dots\dots (5_6)$$

aus Gl. (6)

$$\text{für (11): } 2(M_{11} - M_{10}) + M_{01} - M_{00} = \frac{6}{l\mu}(z_{11} - z_{10} - z_{01}) \dots\dots\dots (6_1)$$

$$\text{„ (12): } 2(M_{12} - M_{11}) + M_{02} - M_{01} = \frac{6}{l\mu}(z_{12} - z_{11} + z_{01}) \dots\dots\dots (6_2)$$

aus Gl. (6a):

$$\text{für (01): } 2(M_{01} - M_{00}) + M_{11} - M_{10} = -6\alpha Y_{01} - \frac{6}{l\mu}(z_{11} - z_{10} - z_{01}) \dots\dots (6_3)$$

$$\text{„ (02): } 2(M_{02} - M_{01}) + M_{12} - M_{11} = -6\alpha Y_{02} - \frac{6}{l\mu}(z_{12} - z_{11} + z_{01}) \dots\dots (6_4)$$

aus Gl. (7)

$$\text{für (12): } 2(L_{12} - L_{02}) + L_{11}^0 - L_{01}^0 = 6\alpha X_{12} + \frac{6}{l\mu}(z_{12} - z_{11} + z_{01}) \dots\dots\dots (7_1)$$

$$\text{„ (11): } 2(L_{11}'' - L_{01}'') + L_{10} - L_{00} = 6\alpha X_{11} + \frac{6}{l\mu}(z_{11} - z_{10} - z_{01}) \dots\dots\dots (7_2)$$

aus Gl. (7a)

$$\text{für (11): } 2(L_{11}^0 - L_{01}^0) + L_{12} - L_{02} = -6\alpha X_{11} - \frac{6}{l\mu}(z_{12} - z_{11} + z_{01}) \dots\dots\dots (7_3)$$

$$\text{„ (10): } 2(L_{10} - L_{00}) + L_{11}'' - L_{01}'' = -6\alpha X_{10} - \frac{6}{l\mu}(z_{11} - z_{10} - z_{01}) \dots\dots\dots (7_4)$$

Damit haben wir 28 Gleichungen aufgestellt. Die beiden Gleichungen (6₁) und (6₂) leiten sich jedoch aus der Gleichungsgruppe (1) her, was aber die Folge der Symmetriebedingungen ist, und von den drei Gleichungen (2₂), (7₂) und (7₃) ist eine Gleichung die Folge der übrigen zwei Gleichungen, so dass wir in Uebereinstimmung mit der Unbekannten 25 voneinander unabhängige Gleichungen erhalten.

b) Auflösung der Gleichungen.

Eliminiert man M aus der Gleichungsgruppe (3), so bekommt man nämlich

aus $2(3_1)-(3_4)$: $2(L_{01}^n - L_{00}) + L_{11}^n - L_{10} = (2R_{00} - P)l$,
 „ $2(3_2)-(3_5)$: $2(L_{02} - L_{01}^0 - L_{01}^n + L_{00}) + L_{12} - L_{11}^0 - L_{11}^n + L_{10} = 0$,
 „ $2(3_3)-(3_6)$: $-2(L_{02} - L_{01}^0) - L_{12} + L_{11}^0 = R_{02} \cdot l$.

Aus der Gleichungsgruppe (5) erhält man

$$\begin{aligned} L_{10} + 2L_{00} &= 0, & L_{12} + 2L_{02} &= 0, \\ L_{11}^0 - L_{11}^n + 2(L_{01}^0 - L_{01}^n) &= 0. \end{aligned}$$

Löst man diese sechs Gleichungen nach R_{00} , R_{02} , L_{10} , L_{12} , L_{11}^0 und L_{11}^n auf, so bekommt man

$$R_{00} = \frac{1}{2}P, \quad R_{02} = 0, \quad \dots \dots \dots (17)$$

$$\left. \begin{aligned} L_{10} &= -2L_{00}, & L_{12} &= -2L_{02}, \\ L_{11}^0 &= -2L_{01}^0, & L_{11}^n &= -2L_{01}^n. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (a)$$

Aus der Gleichungsgruppe (4) erhält man

$$M_{00} = -Y_{01}, \quad M_{01} = Y_{01} - Y_{02}, \quad M_{02} = +Y_{02} \dots \dots \dots (b)$$

Setzt man (17), (a) und (b) in die Gleichungsgruppe (3) ein, so bekommt man:

$$\left. \begin{aligned} M_{10} &= L_{00} - L_{01}^n - Y_{01} + \frac{1}{2}Pl, \\ M_{11} &= -L_{00} + L_{01}^n + L_{01}^0 - L_{02} + Y_{01} - Y_{02}, \\ M_{12} &= L_{02} - L_{01}^0 + Y_{02}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (c)$$

Setzt man (5₁), (5₂), (5₃), (a), (b) und (c) in die Gleichungsgruppen (6) und (7) ein, und eliminiert man aus den dadurch entstehenden acht Gleichungen die zwei Glieder $(z_{11} - z_{10} - z_{01})$ und $(z_{12} - z_{11} + z_{01})$, so bekommt man die folgenden sechs Gleichungen

$$(6_1) + (6_3) : \quad -2(L_{00} - L_{01}^n) + L_{01}^0 - L_{02} + 2(2 + \alpha)Y_{01} - 2Y_{02} = \frac{1}{2}Pl \quad \dots (i)$$

$$(6_2) + (6_4) : \quad L_{00} - L_{01}^n - 2(L_{01}^0 - L_{02}) - 2Y_{01} + 2(2 + \alpha)Y_{02} = 0 \quad \dots (ii)$$

$$(7_1) + (7_3) : \quad 2\alpha L_{01}^n - (3 + 2\alpha)(L_{01}^0 + L_{02}) = 0 \quad \dots (iii)$$

$$(7_2) + (7_4) : \quad -(3 + 2\alpha)(L_{00} + L_{01}^n) + 2\alpha L_{01}^0 = 0 \quad \dots (iv)$$

$$(6_1) + (7_4) : \quad -2(5 + 3\alpha)L_{00} + L_{01}^n + 2(L_{01}^0 - L_{02}) + 6Y_{01} - 3Y_{02} = Pl \quad \dots (v)$$

$$(6_2) - (7_1) : \quad 2(L_{00} - L_{01}^n) - L_{01}^0 + 2(5 + 3\alpha)L_{02} - 3Y_{01} + 6Y_{02} = 0 \quad \dots (vi)$$

Die Auflösung dieser Gleichungen erfolgt ohne Schwierigkeiten und die

Lösungen lauten, mit der Abkürzung

$$N = (1 + \alpha)(3 + \alpha)(1 + 4\alpha + 2\alpha^2) \dots \dots \dots (18)$$

$$\left. \begin{aligned} L_{00} &= -\frac{Pl}{96N} (15 + 81\alpha + 100\alpha^2 + 28\alpha^3), \\ L_{01}^u &= +\frac{Pl}{96N} (3 + 2\alpha)(5 + 23\alpha + 16\alpha^2 + 4\alpha^3), \\ L_{01}^0 &= -\frac{Pl}{96N} (3 + 2\alpha)(1 + 3\alpha - 8\alpha^2 - 4\alpha^3), \\ L_{02} &= +\frac{Pl}{96N} (3 + 21\alpha + 28\alpha^2 + 4\alpha^3), \\ Y_{01} &= +\frac{Pl}{32N} (11 + 49\alpha + 48\alpha^2 + 12\alpha^3), \\ Y_{02} &= +\frac{Pl}{32N} (7 + 29\alpha + 24\alpha^2 + 4\alpha^3). \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (19)$$

Die anderen unbekanntenen Biegemomente und Torsionsmomente können durch Einsetzen von (19) in (5₁), (5₂), (5₃), (a), (b) und (c) ermittelt werden. Wir erhalten also

$$\left. \begin{aligned} L_{10} &= -2L_{00}, \quad L_{11}^u = -2L_{01}^u, \quad L_{11}^0 = -2L_{01}^0, \quad L_{12} = -2L_{02}, \\ M_{00} &= -Y_{01}, \quad M_{02} = +Y_{02}, \quad M_{01} = Y_{01} - Y_{02} = +Pl/8(3 + \alpha), \\ M_{10} &= +\frac{Pl}{96N} (81 + 461\alpha + 766\alpha^2 + 468\alpha^3 + 88\alpha^4), \\ M_{11} &= +\frac{Pl}{24} \cdot \frac{9 + 2\alpha}{3 + \alpha}, \\ M_{12} &= +\frac{Pl}{96N} (27 + 119\alpha + 82\alpha^2 - 12\alpha^3 - 8\alpha^4), \\ X_{10} &= -L_{00}, \quad X_{12} = +L_{02}, \\ X_{11} &= L_{01}^u - L_{01}^0 = +\frac{Pl}{48} \cdot \frac{(1 + 4\alpha)(3 + 2\alpha)}{(1 + \alpha)(1 + 4\alpha + 2\alpha^2)}. \end{aligned} \right\} \dots \dots (20)$$

Aus beiden Gleichungen (19) und (20) erhalten wir zwischen den Biege- und Torsionsmomente einige Zusammenhänge:

$$\left. \begin{aligned} M_{00} + M_{01} + M_{02} &= 0, \\ M_{10} + M_{11} + M_{12} &= \frac{1}{2} Pl, \\ X_{10} + X_{11} + X_{12} &= +\frac{Pl}{8} \cdot \frac{1 + 4\alpha}{1 + 4\alpha + 2\alpha^2}, \end{aligned} \right\} \dots \dots (21)$$

$$\left. \begin{aligned} L_{00} + L_{02} &= -\frac{1}{2} (L_{10} + L_{12}) = -M_{01} = Y_{02} - Y_{01} = -\frac{Pl}{8(3 + \alpha)}, \\ L_{01}'' + L_{01}' &= -\frac{1}{2} (L_{11}'' + L_{11}') = +\frac{Pl}{24} \cdot \frac{3 + 2\alpha}{3 + \alpha}. \end{aligned} \right\}$$

Löst man die Gleichungen (1₁), (1₂), (1₃) und (2₁) nach vier Unbekannten auf, so bekommt man mit Beachtung von (19) und (20)

$$\left. \begin{aligned} z_{10} &= \frac{Pl^3}{576EI} (129 + 775\alpha + 1\,388\alpha^2 + 900\alpha^3 + 176\alpha^4), \\ z_{12} &= \frac{Pl^3}{576EI} (75 + 325\alpha + 236\alpha^2 - 12\alpha^3 - 16\alpha^4), \\ z_{01} &= \frac{(3 + 4\alpha)Pl^3}{288(3 + \alpha)EI}, \quad z_{11} = \frac{(15 + 4\alpha)Pl^3}{96(3 + \alpha)EI}, \end{aligned} \right\} \dots (22)$$

und

$$z_{10} + z_{11} + z_{12} - z_{01} = \frac{Pl^3}{6EI}.$$

c) Sonderfall $\alpha = \infty$.

Für $\alpha = \infty$ erhalten wir, wie in der **Abb. 22** dargestellt ist,

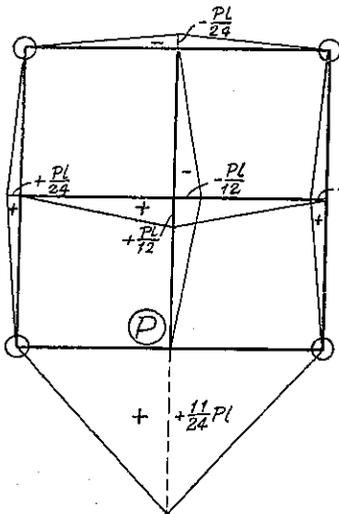


Abb. 22.

$$\left. \begin{aligned} M_{10} &= +\frac{11}{24} Pl, \\ M_{11} &= -L_{11} = +\frac{1}{12} Pl, \\ M_{12} &= -L_{01} = -\frac{1}{24} Pl, \\ z_{10} &= \frac{11 Pl^3}{72 EI}, \\ z_{11} &= \frac{Pl^3}{48 EI}, \\ z_{12} &= -\frac{Pl^3}{72 EI}, \\ z_{01} &= \frac{Pl^3}{72 EI}. \end{aligned} \right\} \dots (23)$$

Wie in der **Abb. 22** dargestellt ist, verschwinden in diesem Falle, wie es so sein muss, sowohl die Biegemomente an allen Stabenden auch die Torsionsmomente, während die Biegemomente L_{01} , L_{11} , M_{11} , M_{12} nicht verschwinden. Die übliche Berechnungsmethode, bei welcher der Randstab (00)–(20) als einfacher Balken mit der Spannweite von $2l$ berechnet werden

und die Last P nur auf diesem Balken zu wirken angenommen wird, liefert das Knotenmoment $M_{10} = \frac{1}{2}P$.

Daraus erkennt man, dass die äussere Belastung P auch bei verschwindendem Drillungswiderstande nicht nur durch den Randträger (00)–(20) sondern auch durch den übrigen Teil des Rostes getragen wird, so dass das Knotenmoment M_{10} kleiner ist, als das die übliche Berechnung liefert. Die Verbreitung der Lasten, die eine Eigenschaft des Rostes ist, kommt bei den folgenden Fälle noch deutlicher zur Erscheinung.

d) Sonderfall $\alpha=0$.

Für $\alpha=0$ erhalten wir:

$$\left. \begin{aligned} M_{10} &= +\frac{9}{32}Pl, & M_{11} &= +\frac{1}{8}Pl, & M_{12} &= +\frac{3}{32}Pl, \\ M_{00} &= -\frac{11}{96}Pl, & M_{01} &= +\frac{1}{24}Pl, & M_{02} &= +\frac{7}{96}Pl, \\ L_{00} &= -L_{01}^u = -\frac{5}{96}Pl, & L_{01}^0 &= -L_{02} = -\frac{1}{96}Pl, \\ L_{10} &= -L_{11}^u = +\frac{5}{48}Pl, & L_{11}^0 &= -L_{12} = +\frac{1}{48}Pl, \\ X_{10} &= +\frac{5}{96}Pl, & X_{11} &= +\frac{1}{12}Pl, & X_{12} &= +\frac{1}{96}Pl, \\ Y_{01} &= +\frac{11}{96}Pl, & Y_{02} &= +\frac{7}{96}Pl, \\ z_{01} &= \frac{43Pl^3}{576EI}, & z_{12} &= \frac{25Pl^3}{576EI}, \\ z_{11} &= \frac{5Pl^3}{96EI}, & z_{01} &= \frac{Pl^3}{288EI}. \end{aligned} \right\} \dots\dots(24)$$

Diese Werte sind in den **Abb. 23** übertragen.

e) Beispiel. Bei quadratischem Querschnitt mit $m=4$.

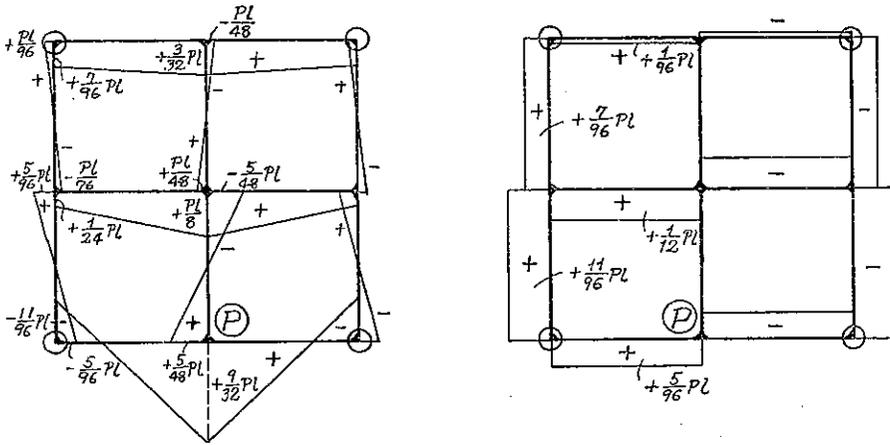
Für den quadratischen Querschnitt des Roststabes mit der Seite a wird

$$I = \frac{1}{12}a^4 \quad \text{und} \quad H = 0.1426a^3,$$

so dass man mit der Poissonschen Zahl $m=4$ (d.h. für Stahl)

$$\alpha = \frac{2(m+1)}{m} \cdot \frac{I}{H} = \frac{2(4+1)}{4 \times 12 \times 0.1426} = 1.4613$$

erhält. Mit diesem Werte von α erhält man:



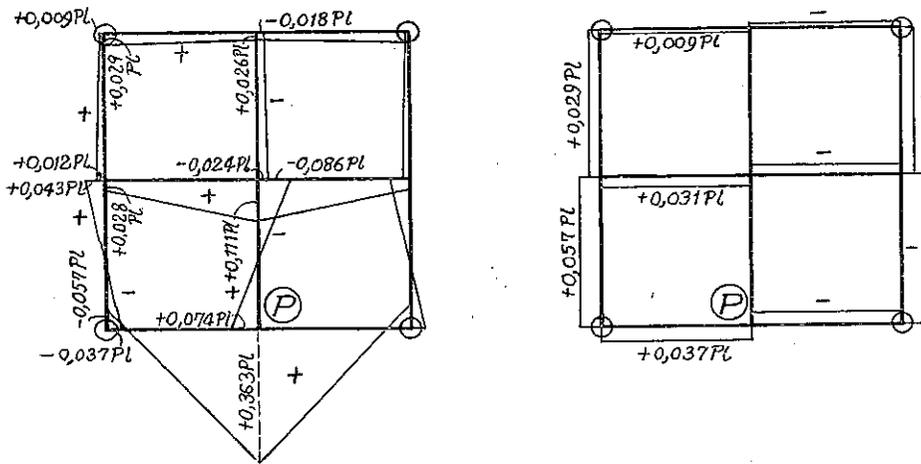
a) Biegemomente.

b) Torsionsmomente.

Abb. 23.

$$\begin{aligned}
 M_{10} &= +0.36287 Pl, & M_{11} &= +0.11135 Pl, & M_{12} &= +0.02578 Pl, \\
 M_{00} &= -0.05698 Pl, & M_{01} &= +0.02802 Pl, & M_{02} &= +0.02896 Pl, \\
 L_{10} &= +0.07412 Pl, & L_{11}^* &= -0.08618 Pl, & L_{11}^o &= -0.02444 Pl, & L_{12} &= -0.01808 Pl, \\
 L_{00} &= -0.03706 Pl, & L_{01}^* &= +0.04309 Pl, & L_{01}^o &= +0.01222 Pl, & L_{02} &= +0.00904 Pl, \\
 X_{01} &= +0.03706 Pl, & X_{11} &= +0.03087 Pl, & X_{12} &= +0.00904 Pl, \\
 Y_{01} &= +0.05698 Pl, & Y_{02} &= +0.02896 Pl, \\
 z_{10} &= +1.34408 \frac{Pl^3}{Ea^4}, & z_{11} &= +0.52406 \frac{Pl^3}{Ea^4}, \\
 z_{01} &= +0.01852 \frac{Pl^3}{Ea^4}, & z_{12} &= +0.15447 \frac{Pl^3}{Ea^4}.
 \end{aligned}
 \tag{25}$$

Diese Werte sind in den **Abb. 24** übertragen.



a) Biegemomente.

b) Torsionsmomente.

Abb. 24.

5) Einzellast am Mittelträger.

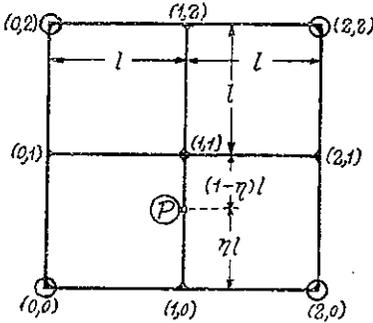


Abb. 25.

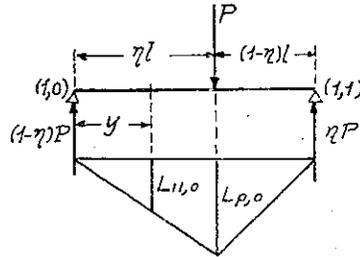


Abb. 26.

Wie es in der **Abb. 25** dargestellt ist, wirkt eine Einzellast P auf einen Mittelträger zwischen den Knoten (10) und (11). Wegen der Symmetrie haben wir wie bei dem letzten Falle mit 25 Unbekannten zu tun.

a) Aufstellung der Gleichungen.

Wie aus den **Abb. 25** und **26** ersichtlich ist, erhalten wir in diesem Falle

$$P_{11} = \eta P, \quad P_{10} = (1 - \eta) P,$$

$$L_{2,0} = \eta (1 - \eta) P l,$$

für $0 \leq y \leq \eta l$: $L_{11,0} = (1 - \eta) P y,$

für $\eta l \leq y \leq (1 - \eta)l$: $L_{11,0} = \eta P (l - y),$

so dass sich

$$\left. \begin{aligned} T_{10}^n &= \frac{1}{l} \int_0^l L_{11,0} (l - y) dy = \eta (1 - \eta) (2 - \eta) \frac{Pl^2}{6}, \\ T_{11}^n &= \frac{1}{l} \int_0^l L_{11,0} y dy = \eta (1 - \eta) (1 + \eta) \frac{Pl^2}{6} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (26)$$

und deswegen

$$\left. \begin{aligned} V_{11} &= \frac{\mu}{l} T_{11}^n = \eta (1 - \eta) (1 + \eta) \frac{\mu Pl}{6}, \\ V_{10} &= \frac{\mu}{l} T_{10}^n = \eta (1 - \eta) (2 - \eta) \frac{\eta Pl}{6} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (26a)$$

ergeben.

Anstatt der unmittelbaren Ermittlung der Unbekannten wollen wir sie durch die Zusammensetzung der drei Teillösungen erhalten. Wir bezeichnen nämlich im allgemeinen mit Z die unbekannte statische Grösse und wollen sie durch

$$Z = \eta Z_I + (1 - \eta) Z_{II} + \eta(1 - \eta) Z_{III} \dots \dots \dots (27)$$

ermitteln, wobei

Z_I die statische Grösse infolge der Last P in dem Knoten (11),
 Z_{II} die statische Grösse infolge der Last P in dem Knoten (10)
 und Z_{III} die statische Grösse, die nur von den Belastungskonstanten
 $T_{10}'' = (2 - \eta) \frac{Pl^2}{6}$ und $T_{11}'' = (1 + \eta) \frac{Pl^2}{6}$ herrührt. Die Z_I und Z_{II} sind schon in
2) und **4)** ermittelt worden, so dass wir nur noch die Z_{III} zu ermitteln
 brauchen. Die Richtigkeit dieses Verfahrens kann man durch die unmittel-
 bare Ermittlung der Unbekannten nachweisen.

Zur Ermittlung von 25 unbekanntem Z_{III} erhalten wir aus den Grund-
 gleichungen 28 Gleichungen (1_I) bis (7_I), wie sie in **4)** aufgestellt worden
 sind, und dabei sind drei Gleichungen überzählig.

Ausgenommen vier folgende Gleichungen, die sich
 aus Gl. (2) für den Knoten (11):

$$L_{10, III} + 2(L_{11, III}'' + L_{11, III}') + L_{12, III} \\ = -\frac{6}{l\mu} (z_{10, III} - 2z_{11, III} + z_{12, III} - (1 + \eta)Pl) \dots \dots \dots (2_2)$$

aus Gl. (3) für den Knoten (10):

$$2(M_{10, III} - M_{00, III}) - L_{11, III}'' + L_{10, III} = 0 \dots \dots \dots (3_4)$$

aus Gl. (7) für den Knoten (11):

$$2(L_{11, III}'' - L_{01, III}'') + L_{10, III} - L_{00, III} = 6\alpha X_{11, III} + \frac{6}{l\mu} (z_{11, III} - z_{10, III} - z_{01, III}) \\ - (1 + \eta)Pl \dots \dots \dots (7_2)$$

und aus Gl. (7a) für den Knoten (10):

$$2(L_{10, III} - L_{00, III}) + L_{11, III}'' - L_{01, III}' \\ = -6\alpha X_{10, III} - \frac{6}{l\mu} (z_{11, III} - z_{10, III}'' + z_{01, III}) - (2 - \eta)Pl \dots \dots \dots (7_4)$$

ergeben, sind die Gleichungen genau dieselben, wie sie in **4)** gegeben sind,
 so dass wir sie hier der Kürze halber nicht wieder anschreiben.

b) Ermittlung der Unbekannten.

Durch dasselben Verfahren wie in **4)** erhalten wir aus den Gleichungsgruppen
 (3), (4) und (5):

$$R_{00, III} = R_{02, III} = 0,$$

$$\left. \begin{aligned} L_{10, III} &= -2L_{00, III}, & L_{12, III} &= -2L_{02, III}, \\ L_{11, III}^0 &= -2L_{01, III}^0, & L_{11, III}^u &= -2L_{01, III}^u, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (a)$$

$$M_{00, III} = -Y_{01, III}, \quad M_{01, III} = Y_{01, III} - Y_{02, III}, \quad M_{02, III} = +Y_{02, III} \dots\dots (b)$$

und

$$\left. \begin{aligned} M_{10, III} &= L_{00, III} - L_{01, III}^u - Y_{01, III}, \\ M_{11, III} &= -L_{00, III} + L_{01, III}^u + L_{01, III}^0 - L_{02, III} + Y_{01, III} - Y_{02, III}, \\ M_{12, III} &= L_{02, III} - L_{01, III}^0 + Y_{02, III}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (c)$$

Setzen wir (5₁), (5₂), (5₃), (a), (b) und (c) in die Gleichungsgruppen (6) und (7) ein, und eliminieren wir aus den dadurch entstehenden acht Gleichungen die zwei Glieder ($z_{11} - z_{10} - z_{01}$) und ($z_{12} - z_{11} + z_{01}$), so bekommen wir

$$(6_1) + (6_3): -2(L_{00, III} - L_{01, III}^u) + L_{01, III}^0 - L_{02, III} + 2(2 + \alpha)Y_{01, III} - 2Y_{02, III} = 0 \quad (i)$$

$$(6_2) + (6_4): L_{00, III} - L_{01, III}^u - 2(L_{01, III}^0 - L_{02, III}) - 2Y_{01, III} + 2(2 + \alpha)Y_{02, III} = 0 \dots (ii)$$

$$(7_1) + (7_3): 2\alpha L_{01, III}^u - (3 + 2\alpha)(L_{01, III}^0 + L_{02, III}) = 0 \dots\dots\dots (iii)$$

$$(7_2) + (7_4): -(3 + 2\alpha)(L_{00, III} + L_{01, III}^u) + 2\alpha L_{01, III}^0 = -Pl \dots\dots\dots (iv)$$

$$(6_1) + (7_4): -2(5 + 3\alpha)L_{00, III} + L_{01, III}^u + 2(L_{01, III}^0 - L_{02, III}) + 6Y_{01, III} - 3Y_{02, III} \\ = -(2 - \eta)Pl \dots\dots\dots (v)$$

$$(6_2) - (7_1): 2(L_{00, III} - L_{01, III}^u) - L_{01, III}^0 + 2(5 + 3\alpha)L_{02, III} - 3Y_{01, III} + 6Y_{02, III} \\ = 0 \dots\dots\dots (vi)$$

Löst man diese Gleichungen auf, bekommt man mit den Abkürzungen

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= (1 + \alpha)(3 + \alpha)(3 + 4\alpha)(1 + 4\alpha + 2\alpha^2) \\ &= 9 + 60\alpha + 133\alpha^2 + 128\alpha^3 + 54\alpha^4 + 8\alpha^5, \\ N_2 &= (3 + 4\alpha)(1 + 4\alpha + 2\alpha^2) = 3 + 16\alpha + 22\alpha^2 + 8\alpha^3, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

$$\left. \begin{aligned} L_{00, III} &= + \frac{Pl}{48} \cdot \left[\begin{aligned} &\frac{1}{N_1}(117 + 645\alpha + 1\,066\alpha^2 + 668\alpha^3 + 136\alpha^4) \\ &-\frac{2\eta}{N_2}(15 + 48\alpha + 28\alpha^2) \end{aligned} \right], \\ L_{02, III} &= - \frac{Pl}{48} \cdot \left[\frac{1}{N_1}(9 + 33\alpha + 58\alpha^2 + 20\alpha^3 - 8\alpha^4) - \frac{2\eta}{N_2}(3 + 4\alpha^2) \right], \\ L_{01, III}^u &= + \frac{(3 + 2\alpha)Pl}{48} \cdot \left[\begin{aligned} &\frac{1}{N_1}(9 + 69\alpha + 126\alpha^2 + 68\alpha^3 + 8\alpha^4) \\ &+\frac{2\eta}{N_2}(1 + 2\alpha)(5 + 2\alpha) \end{aligned} \right], \\ L_{01, III}^0 &= + \frac{2\alpha Pl}{3(3 + 4\alpha)} \end{aligned} \right\} (29)$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{(3+2\alpha)Pl}{48} \cdot \left[\begin{array}{l} \frac{1}{N_1}(-3+17\alpha+94\alpha^2+92\alpha^3+24\alpha^4) \\ + \frac{2\eta}{N_2}(1-4\alpha-4\alpha^2) \end{array} \right], \\
 Y_{01,III} &= + \frac{Pl}{16} \cdot \left[\frac{1}{N_1}(15+59\alpha+50\alpha^2-4\alpha^3-8\alpha^4) - \frac{2\eta}{N_2}(1+2\alpha)(5+2\alpha) \right], \\
 Y_{02,III} &= + \frac{Pl}{16} \cdot \left[\frac{1}{N_1}(3+7\alpha+18\alpha^2+20\alpha^3+8\alpha^4) - \frac{2\eta}{N_2}(1-4\alpha-4\alpha^2) \right],
 \end{aligned}$$

mit den Zusammenhängen:

$$\begin{aligned}
 L_{00,III} + L_{02,III} &= + \frac{Pl}{4} \cdot \frac{3(3+2\alpha) - 2(3+\alpha)\eta}{(3+\alpha)(3+4\alpha)}, \\
 L_{01,III}^n + L_{01,III}^0 &= + \frac{2\alpha Pl}{3(3+4\alpha)} + \frac{Pl}{12} \cdot \frac{(3+2\alpha)[(3-2\alpha) + 2(3+\alpha)\eta]}{(3+\alpha)(3+4\alpha)}, \\
 Y_{01,III} - Y_{02,III} &= + \frac{Pl}{4} \cdot \frac{(3-2\alpha) - (3+\alpha)\eta}{(3+\alpha)(3+4\alpha)},
 \end{aligned} \quad (30)$$

welche nötigenfalls als Mittel zur Nachprüfung der aus (29) berechneten Zahlenwerten dienen mögen.

Nach der Ermittlung von den obigen sechs Unbekannten können wir die übrigen unbekanntenen Knotenmomente M_{III} und L_{III} durch die Gleichungen (a), (b) und (c) bestimmen. Die Torsionsmomente X_{III} werden durch die Gleichungen (5₁), (5₂) und (5₃) bestimmt und die z_{III} werden durch

$$\begin{aligned}
 z_{10,III} &= \frac{1}{6} \mu l (M_{00,III} + 2M_{10,III}), \quad z_{12,III} = \frac{1}{6} \mu l (M_{02,III} + 2M_{12,III}), \\
 z_{01,III} &= \frac{1}{12} \mu l (L_{00,III} + 2L_{01,III}^0 + 2L_{01,III}^n + L_{02,III}), \\
 z_{11,III} &= z_{01,III} + \frac{1}{6} \mu l (M_{01,III} + 2M_{11,III})
 \end{aligned}$$

bestimmt.

Damit sind alle unbekanntenen Grössen, die nur von $T_{10}^0 = (2-\eta) \frac{Pl^2}{6}$ und $T_{11}^n = (1+\eta) \frac{Pl^2}{6}$ herrühren, bestimmt werden, so dass wir die eigentlichen Unbekannten durch die Gl. (27) bestimmen können.

Endlich können wir das Biegemoment L_P im Querschnitt, an dem

die Last P wirkt, durch

$$L_P = \mu(1-\mu)Pl + \mu L_{11}^u + (1-\eta)L_{10} \dots \dots \dots (31)$$

bestimmen.

c) Sonderfall $\alpha = \infty$.

Bei verschwindendem Drillungswiderstande, also für $\alpha = \infty$, erhalten wir:

$$\left. \begin{aligned} L_{01}^u = L_{01}^0 &= + \frac{Pl}{24} (1 + 3\mu - \mu^3), & M_{10} &= + \frac{Pl}{24} (11 - 9\mu + \mu^3), \\ L_{11}^u = L_{11}^u &= - \frac{Pl}{12} (1 - 3\mu - \mu^3), & M_{11} &= + \frac{Pl}{12} (1 + 3\mu - \mu^3), \\ L_P &= + \frac{Pl}{12} \mu (11 - 9\mu + \mu^3), & M_{12} &= - \frac{Pl}{24} (1 - 3\mu - \mu^3), \\ z_{10} &= + \frac{Pl^3}{72EI} (11 - 9\mu + \mu^3), & z_{12} &= - \frac{Pl^3}{72EI} (1 - 3\mu - \mu^3), \\ z_{01} &= + \frac{Pl^3}{72EI} (1 + 3\mu - \mu^3), & z_{11} &= + \frac{Pl^3}{24EI} (1 + 3\mu - \mu^3), \\ L_{00} = L_{02} = L_{10} = L_{12} = M_{00} = M_{01} = M_{02} = X = Y &= 0. \end{aligned} \right\} (32)$$

d) Sonderfall $\alpha = 0$.

Für $\alpha = 0$ erhalten wir:

$$\left. \begin{aligned} L_{00} &= - \frac{1}{2} L_{10} = - X_{10} = - \frac{Pl}{96} (5 - 33\mu + 46\mu^2 - 20\mu^3), \\ & & M_{10} &= + \frac{Pl}{96} (27 - 3\mu - 30\mu^2 + 20\mu^3), \\ L_{02} &= - \frac{1}{2} L_{12} = + X_{12} = + \frac{Pl}{96} (1 - \mu + 6\mu^2 - 4\mu^3), \\ & & M_{11} &= + \frac{Pl}{24} (3 + 6\mu^2 - 4\mu^3), \\ L_{01}^u &= + \frac{Pl}{96} (5 + 15\mu + 14\mu^2 - 20\mu^3), & M_{12} &= + \frac{Pl}{96} (9 + 3\mu + 6\mu^2 - 4\mu^3), \\ L_{01}^0 &= - \frac{Pl}{96} (1 - 17\mu + 6\mu^2 - 4\mu^3), & M_{01} &= + \frac{Pl}{24} (1 - 6\mu^2 + 4\mu^3), \\ L_{11}^u &= - \frac{Pl}{48} (5 - 9\mu + 14\mu^2 - 20\mu^3), & Y_{01} &= + \frac{Pl}{96} (11 - 3\mu - 30\mu^2 + 20\mu^3), \\ L_{11}^0 &= + \frac{Pl}{48} (1 + 7\mu + 6\mu^2 - 4\mu^3), & Y_{02} &= + \frac{Pl}{96} (7 - 3\mu - 6\mu^2 + 4\mu^3), \\ X_{11} &= + \frac{Pl}{48} (3 - \mu + 10\mu^2 - 12\mu^3), & M_{00} &= - Y_{01}, & M_{02} &= Y_{02}, \end{aligned} \right\} (33)$$

$$z_{10} = + \frac{Pl^3}{576EI} (43 - 3\mu - 30\mu^2 + 20\mu^3),$$

$$z_{11} = + \frac{Pl^3}{288EI} (1 + 24\mu - 6\mu^2 - 4\mu^3),$$

$$z_{12} = + \frac{Pl^3}{576EI} (25 + 3\mu + 6\mu^2 - 4\mu^3),$$

$$z_{11} = + \frac{Pl^3}{96EI} (5 + 8\mu + 2\mu^2 - 4\mu^3),$$

$$L_P = + \frac{5}{48} [1 + \mu + 8\mu^2(1 - \mu)^2] Pl.$$

e) Beispiel. Einzellast in der Mitte des Stabes (10)–(11).

Als Beispiel betrachten wir den Fall, wo eine Last P an der Mitte des Stabes (10)–(11) liegt.

Nun ist

$$\eta = 1 - \eta = \frac{1}{2}$$

und die Unbekannten werden durch

$$Z = \frac{1}{2} (z_{10} + z_{11} + \frac{1}{2} z_{III}) \dots \dots \dots (27a)$$

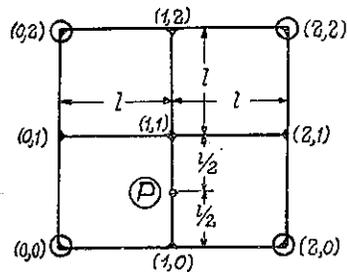


Abb. 27.

bestimmt. Unter Benutzung von den in 2) und 4) erhaltenen Ergebnissen erhalten wir die folgenden Werte:

$$L_{00} = - \frac{1}{2} L_{10} = - X_{10} = + \frac{Pl}{192N_1} (45 + 252\alpha + 379\alpha^2 + 204\alpha^3 + 44\alpha^4),$$

$$L_{02} = - \frac{1}{2} L_{12} = + X_{12} = + \frac{Pl}{192N_1} (27 + 168\alpha + 353\alpha^2 + 300\alpha^3 + 76\alpha^4),$$

$$L_{00} + L_{02} = - \frac{1}{2} (L_{10} + L_{12}) = - X_{10} + X_{12} = + \frac{(6 + 5\alpha)Pl}{16(3 + \alpha)(3 + 4\alpha)},$$

$$L_{01}^0 = + \frac{Pl}{192N_1} (243 + 1554\alpha + 3245\alpha^2 + 2849\alpha^3 + 1124\alpha^4 + 152\alpha^5),$$

$$L_{01}^2 = + \frac{Pl}{192N_1} (117 + 858\alpha + 2127\alpha^2 + 2258\alpha^3 + 1012\alpha^4 + 152\alpha^5),$$

$$X_{11} = L_{01}^0 - L_{01}^2 = + \frac{Pl}{96N_1} (63 + 348\alpha + 559\alpha^2 + 318\alpha^3 + 56\alpha^4),$$

$$L_{01}^0 + L_{01}^2 = + \frac{(90 + 153\alpha + 38\alpha^2) Pl}{48(3 + \alpha)(3 + 4\alpha)},$$

$$L_{11}^0 = - \frac{Pl}{96N_1} (27 + 114\alpha + 53\alpha^2 - 178\alpha^3 - 172\alpha^4 - 40\alpha^5),$$

$$L_{11}^2 = + \frac{Pl}{96N_1} (99 + 582\alpha + 1065\alpha^2 + 814\alpha^3 + 284\alpha^4 + 40\alpha^5),$$

$$\begin{aligned}
 L_{11}^n + I_{11}^n &= + \frac{(3+2\alpha)(6+5\alpha)Pl}{24(3+\alpha)(3+4\alpha)}, \\
 Y_{01} &= -M_{00} = + \frac{Pl}{96N_1} (27+156\alpha+249\alpha^2+136\alpha^3+20\alpha^4), \\
 Y_{02} &= +M_{02} = + \frac{Pl}{96N_1} (27+168\alpha+309\alpha^2+208\alpha^3+44\alpha^4), \\
 Y_{01} - Y_{02} &= M_{01} = - \frac{3\alpha Pl}{16(3+\alpha)(3+4\alpha)}, \\
 M_{10} &= + \frac{Pl}{192N_1} (369+2550\alpha+5963\alpha^2+6118\alpha^3+2748\alpha^4+424\alpha^5), \\
 M_{12} &= + \frac{Pl}{192N_1} (207+1254\alpha+2345\alpha^2+1738\alpha^3+492\alpha^4+40\alpha^5), \\
 M_{11} &= + \frac{(72+129\alpha+38\alpha^2)Pl}{48(3+\alpha)(3+4\alpha)}, \\
 M_{10} + M_{12} &= \frac{(144+231\alpha+58\alpha^2)Pl}{48(3+\alpha)(3+4\alpha)}, \quad M_{10} + M_{11} + M_{12} = + \frac{Pl}{2}, \\
 L_P &= + \frac{Pl}{96N} (180+1257\alpha+2976\alpha^2+3059\alpha^3+1360\alpha^4+212\alpha^5), \\
 z_{10} &= \frac{Pl^3}{1152^2 EIN} (219+1252\alpha+2057\alpha^2+1200\alpha^3+212\alpha^4), \\
 z_{12} &= \frac{Pl^3}{1152 EIN} (165+784\alpha+827\alpha^2+264\alpha^3+20\alpha^4), \\
 z_{01} &= \frac{(66+19\alpha)Pl^3}{576(3+\alpha)EI}, \quad z_{11} = \frac{3(54+19\alpha)Pl^3}{576(3+\alpha)EI},
 \end{aligned}
 \tag{34}$$

wobei

$$N = (1+\alpha)(3+\alpha)(1+4\alpha+2\alpha^2), \dots \tag{18}$$

$$N_1 = (1+\alpha)(3+\alpha)(3+4\alpha)(1+4\alpha+2\alpha^2), \dots \tag{29}$$

Für $\alpha = \infty$ erhalten wir (Abb. 28):

$$\begin{aligned}
 L_{01}^n &= I_{01}^n = + \frac{19}{192} Pl, \quad L_{12}^n = I_{12}^n = + \frac{5}{96} Pl, \\
 L_P &= M_{10} = + \frac{53}{192} Pl, \quad M_{11} = + \frac{19}{96} Pl, \\
 M_{12} &= + \frac{5}{192} Pl, \\
 z_{10} &= + \frac{53}{576} \frac{Pl^3}{EI}, \quad z_{11} = + \frac{19}{192} \frac{Pl^3}{EI}, \\
 z_{12} &= + \frac{5}{576} \frac{Pl^3}{EI}, \quad z_{01} = + \frac{19}{576} \frac{Pl^3}{EI}, \\
 L_{10} &= L_{12} = L_{00} = L_{02} = M_{00} = M_{01} = M_{02} = 0, \\
 X_{10} &= X_{11} = X_{12} = Y_{01} = Y_{02} = 0.
 \end{aligned}
 \tag{35}$$

Für $\alpha = 0$ erhalten wir (Abb. 29 a und b):

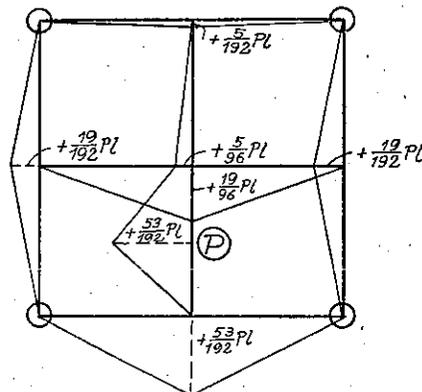
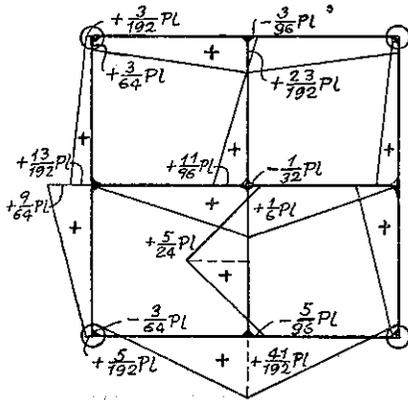
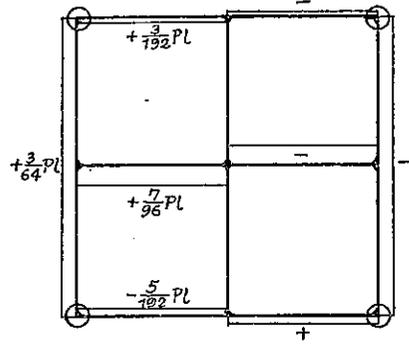


Abb. 28.

$$\left. \begin{aligned}
 L_{00} &= -\frac{1}{2} L_{10} = -X_{10} = +\frac{5}{192} Pl, & L_{02} &= -\frac{1}{2} L_{12} = +X_{12} = +\frac{3}{192} Pl, \\
 L_{0,1}^{\prime} &= +\frac{9}{64} Pl, & L_{0,1}^{\prime\prime} &= +\frac{13}{192} Pl, & L_{1,1}^{\prime} &= -\frac{1}{32} Pl, & L_{1,1}^{\prime\prime} &= +\frac{11}{96} Pl, \\
 L_{0,1} &= +\frac{5}{24} Pl, & X_{11} &= +\frac{7}{96} Pl, & Y_{01} &= -M_{10} = Y_{02} = M_{02} = +\frac{3}{64} Pl, \\
 M_{01} &= 0, & M_{10} &= +\frac{41}{192} Pl, & M_{11} &= +\frac{1}{6} Pl, & M_{12} &= +\frac{23}{192} Pl. \\
 z_{01} &= +\frac{73}{1152} \frac{Pl^3}{EI}, & z_{11} &= +\frac{3}{32} \frac{Pl^3}{EI}, \\
 z_{12} &= +\frac{55}{1152} \frac{Pl^3}{EI}, & z_{01} &= +\frac{11}{288} \frac{Pl^3}{EI}.
 \end{aligned} \right\} (36)$$



a) Biegemomente.



b) Torsionsmomente.

Abb. 29.

6) Gleichmässig verteilte Last am Mittelträger zwischen den Knoten (10)–(11).

Wie es in der **Abb. 30** skizziert ist, wirkt eine gleichmässig verteilte Last q pro Längeneinheit auf den Mittelträger zwischen den Knoten (10) und (11).

a) Ermittlung der Unbekannten.

Bezeichnen wir im allgemeinen mit Z die statische Grösse infolge der Last q und mit Z' die nämliche infolge der Einzellast P , die auf den Mittelträger im Abstände ηl von dem Knoten (10) wirkt, so können wir Z durch

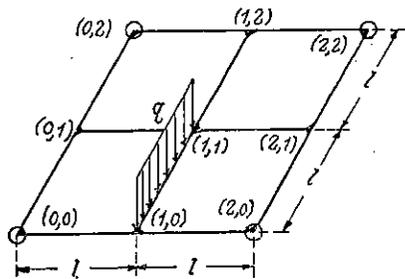


Abb. 30.

$$Z = \frac{ql}{P} \int_0^1 Z' d\eta \dots \dots \dots (37)$$

bestimmen. Beachten wir die Gl. (27), bekommen wir

$$Z = \frac{ql}{P} \left[\int_0^1 Z_I \eta d\eta + \int_0^1 Z_{II} (1-\eta) d\eta + \int_0^1 Z_{III} \eta (1-\eta) d\eta \right],$$

welche in

$$Z = \frac{ql}{P} \left[\frac{1}{2} (Z_I + Z_{II}) + \int_0^1 Z_{III} \eta (1-\eta) d\eta \right] \dots \dots \dots (37a)$$

übergeht, da sowohl Z_I wie Z_{II} unabhängig von η sind.

Setzen wir die Werte von Z_I , Z_{II} und Z_{III} , die schon in 2), 4) bzw. 5) ermittelt worden sind, in die Gl. (37a) ein, so bekommen wir:

$$L_{00} = -\frac{1}{2} L_{10} = -X_{10} = + \frac{ql^2}{576 N_1} (63 + 315\alpha + 362\alpha^2 + 104\alpha^3 + 24\alpha^4),$$

$$L_{02} = -\frac{1}{2} L_{12} = +X_{12} = + \frac{ql^2}{576 N_1} (81 + 525\alpha + 1102\alpha^2 + 904\alpha^3 + 216\alpha^4),$$

$$L_{00} + L_{02} = -\frac{1}{2} (L_{10} + L_{12}) = -X_{10} + X_{12} = + \frac{(6+5\alpha)ql^2}{24(3+\alpha)(3+4\alpha)},$$

$$L_{01}^n = + \frac{ql^2}{576 N_1} (657 + 4239\alpha + 8912\alpha^2 + 8012\alpha^3 + 3144\alpha^4 + 432\alpha^5),$$

$$L_{01}^0 = + \frac{ql^3}{576 N_1} (351 + 2505\alpha + 6088\alpha^2 + 6388\alpha^3 + 2856\alpha^4 + 432\alpha^5),$$

$$X_{11} = L_{01}^n - L_{01}^0 = + \frac{ql^2}{288 N_1} (153 + 867\alpha + 1412\alpha^2 + 812\alpha^3 + 144\alpha^4),$$

$$L_{01}^n + L_{01}^0 = + \frac{(42+71\alpha+18\alpha^2)ql^2}{24(3+\alpha)(3+4\alpha)} = \frac{2}{9} ql^2 - \frac{1}{3} (3+2\alpha)(L_{00} + L_{02}),$$

$$L_{11}^n = + \frac{ql^2}{288 N_1} (-9 + 81\alpha + 664\alpha^2 + 1204\alpha^3 + 744\alpha^4 + 144\alpha^5),$$

$$L_{11}^0 = + \frac{ql^2}{288 N_1} (297 + 1815\alpha + 3488\alpha^2 + 2328\alpha^3 + 1032\alpha^4 + 144\alpha^5),$$

$$L_{11}^n + L_{11}^0 = + \frac{(12+19\alpha+16\alpha^2)ql^2}{12(3+\alpha)(3+4\alpha)} = \frac{1}{2} ql^2 - 2(L_{01}^n + L_{01}^0),$$

$$Y_{01} = -M_{00} = + \frac{ql^2}{192 N_1} (81 + 465\alpha + 762\alpha^2 + 440\alpha^3 + 72\alpha^4),$$

$$Y_{02} = + M_{02} = + \frac{ql^2}{192 N_1} (81 + 489\alpha + 882\alpha^2 + 584\alpha^3 + 120\alpha^4),$$

(38)

$$\begin{aligned}
 Y_{01} - Y_{02} &= + M_{01} = -\frac{\alpha q l^2}{8(3 + \alpha)(3 + 4\alpha)}, \\
 M_{10} &= + \frac{q l^2}{192 N^1} (369 + 2\,547\alpha + 5\,964\alpha^2 + 6\,140\alpha^3 + 2\,776\alpha^4 + 432\alpha^5), \\
 M_{12} &= + \frac{q l^2}{192 N_1} (207 + 1\,269\alpha + 2\,412\alpha^2 + 1\,828\alpha^3 + 536\alpha^4 + 48\alpha^5), \\
 M_{11} &= + \frac{3(4 + 7\alpha + 2\alpha^2) q l^2}{8(3 + \alpha)(3 + 4\alpha)}, \\
 M_{10} + M_{12} &= \frac{(24 + 39\alpha + 10\alpha^2) q l^2}{8(3 + \alpha)(3 + 4\alpha)}, & M_{10} + M_{11} + M_{12} &= + \frac{q l^2}{2}, \\
 z_{10} &= + \frac{q l^4}{1\,152 E I N} (219 + 1\,251\alpha + 2\,054\alpha^2 + 1\,208\alpha^3 + 216\alpha^4), \\
 z_{12} &= + \frac{q l^4}{1\,152 E I N} (165 + 789\alpha + 850\alpha^2 + 280\alpha^3 + 24\alpha^4), \\
 z_{11} &= + \frac{(26 + 9\alpha) q l^4}{96(3 + \alpha) E I}, & z_{01} &= + \frac{(10 + 3\alpha) q l^4}{96(3 + \alpha) E I},
 \end{aligned}$$

wobei wie früher

$$N = (1 + \alpha)(3 + \alpha)(1 + 4\alpha + 2\alpha^2), \dots \dots \dots (18)$$

$$N_1 = (1 + \alpha)(3 + \alpha)(3 + 4\alpha)(1 + 4\alpha + 2\alpha^2) \dots \dots \dots (28)$$

Das Biegemoment des belasteten Stabes können wir gemäss (1, 3) durch

$$L_\eta = \eta L_{11}^0 + (1 - \eta) L_{10} + \eta(1 - \eta) \frac{q l^2}{2} \dots \dots \dots (39)$$

bestimmen, wenn wir mit ηl die Entfernung des betreffenden Querschnittes von dem Knoten (10) bezeichnen.

Die Auflagerreaktionen ergeben sich zu

$$R_{00} = R_{20} = + \frac{3}{8} q l, \quad R_{02} = R_{22} = + \frac{1}{8} q l \dots (40)$$

b) Sonderfall $\alpha = \infty$ (Abb. 31).

$$\left. \begin{aligned}
 L_{01}^0 &= L_{01}^0 = + \frac{3}{32} q l^2, & L_{11}^0 &= L_{11}^0 = + \frac{1}{16} q l^2, \\
 M_{10} &= + \frac{9}{32} q l^2, & M_{11} &= + \frac{3}{16} q l^2, \\
 M_{12} &= + \frac{1}{32} q l^2, \\
 z_{10} = z_{11} &= + \frac{3}{32} \frac{q l^4}{E I},
 \end{aligned} \right\} (41)$$

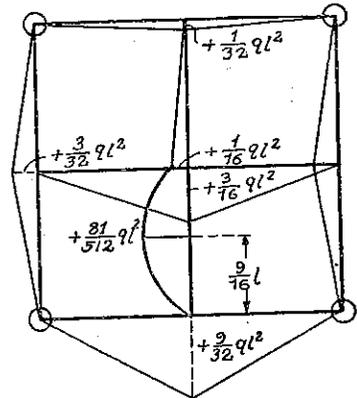


Abb. 31.

$$\left. \begin{aligned} z_{01} = 3 z_{12} &= + \frac{1}{32} \frac{q l^4}{EI}, \\ L_{00} = L_{10} = L_{02} = L_{12} = M_{00} = M_{01} = M_{02} &= 0, \\ X_{10} = X_{11} = X_{12} = Y_{01} = Y_{02} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

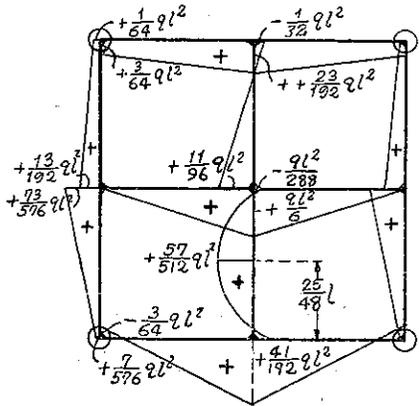
Das Biegemoment des belasteten Stabes ist nach Gl. (39)

$$L_\eta = \eta (9 - 8\eta) \frac{q l^2}{16} \dots \dots \dots (42)$$

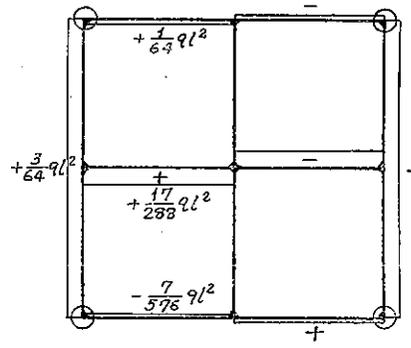
Für $\eta = 9/16$ erreicht das L_η den Maximalwert $+\frac{81}{512} q l^2$.

c) Sonderfall $\alpha = 0$ (Abb. 32 a u. b).

$$\left. \begin{aligned} L_{00} &= + \frac{7}{576} q l^2, & L_{01}^u &= + \frac{73}{576} q l^2, & L_{01}^o &= + \frac{13}{192} q l^2, & L_{02} &= + \frac{1}{64} q l^2, \\ L_{10} &= - \frac{7}{288} q l^2, & L_{11}^u &= - \frac{1}{288} q l^2, & L_{11}^o &= + \frac{11}{96} q l^2, & L_{12} &= - \frac{1}{32} q l^2, \\ Y_{01} &= - M_{00} = + Y_{02} = + M_{02} = + \frac{3}{64} q l^2, & & & & & M_{01} &= 0, \\ M_{10} &= + \frac{41}{192} q l^2, & M_{11} &= + \frac{1}{6} q l^2, & & & M_{12} &= + \frac{23}{192} q l^2, \\ X_{10} &= - \frac{7}{576} q l^2, & X_{11} &= + \frac{17}{288} q l^2, & X_{12} &= + \frac{1}{64} q l^2, & & \\ z_{10} &= + \frac{73}{1152} \frac{q l^4}{EI}, & & & z_{11} &= + \frac{13}{144} \frac{q l^4}{EI}, & & \\ z_{12} &= + \frac{55}{1152} \frac{q l^4}{EI}, & & & z_{01} &= + \frac{5}{144} \frac{q l^4}{EI}. & & \end{aligned} \right\} (43)$$



a) Biegemomente.



b) Torsionsmomente.

Abb. 32.

Das Biegemoment des belasteten Stabes ist nach Gl. (39)

$$L_{\eta} = + \frac{ql^2}{288} (-7 + 150\eta - 144\eta^2)$$

und erreicht für $\eta = 25/48$ seinen Maximalwert $+ \frac{57}{512} ql^2$.

3. Der an den vier Ecken unterstützte, symmetrisch belastete, quadratische Rost mit 3×3 gleichen Feldern.

1) Die Rand- und Symmetriebedingungen und die Unbekannten.

Wir wollen nun einen Rost mit 3×3 gleichen, quadratischen Feldern untersuchen, der, wie in **Abb. 33** dargestellt ist, an den vier Eckknoten unterstützt ist und durch eine Belastung belastet ist, welche symmetrisch um den Mittelpunkt des Rostes ist. Da dieser Rost $4 \times 4 = 16$ Knoten hat, sind im allgemeinen $8 \times 16 = 128$ unbekannte Größen vorhanden. Aber wegen der Randbedingungen verschwinden die folgenden 40 Unbekannten:

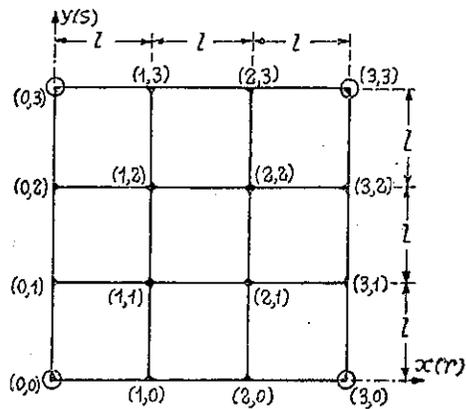


Abb. 33.

R_{rs} für Knoten (10), (20), (01), (11), (21), (31), (02), (12), (22), (32), (13) und (23),

Z_{rs} für Knoten (00), (30), (03) und (33),

M_{rs}^x und X_{rs} für $r=0$,

M_{rs}^y für $r=3$,

L_{rs}^x und Y_{rs} für $s=0$

und L_{rs}^y für $s=3$,

so dass diesem Roste eigentlich $128 - 40 = 88$ Unbekannten gehören.

Wirkt nun die Belastung symmetrisch um den Mittelpunkt des Rostes, so ergeben sich zwischen 88 Unbekannten die folgenden Symmetriebedingungen:

$$\begin{aligned}
 M_{00}^r &= M_{03}^r = M_{30}^l = M_{33}^l = L_{00}^o = L_{30}^o = L_{03}^u = L_{33}^u, \\
 M_{01}^r &= M_{02}^r = M_{21}^l = M_{32}^l = L_{10}^o = L_{20}^o = L_{13}^u = L_{23}^u, \\
 M_{10}^l &= M_{13}^l = M_{20}^r = M_{23}^r = L_{01}^o = L_{31}^o = L_{02}^u = L_{32}^u, \\
 M_{11}^r &= M_{13}^r = M_{21}^l = M_{23}^l = L_{01}^o = L_{31}^o = L_{02}^u = L_{32}^u, \\
 M_{11}^l &= M_{12}^l = M_{21}^r = M_{22}^r = L_{11}^o = L_{21}^o = L_{12}^u = L_{22}^u, \\
 M_{11}^r &= M_{12}^r = M_{21}^l = M_{22}^l = L_{11}^o = L_{21}^o = L_{12}^u = L_{22}^u, \\
 X_{10} &= -X_{20} = -X_{13} = X_{23} = Y_{01} = -Y_{03} = -Y_{21} = Y_{23}, \\
 X_{11} &= -X_{21} = -X_{12} = X_{22} = Y_{11} = -Y_{13} = -Y_{21} = Y_{23}, \\
 X_{21} &= X_{22} = Y_{12} = Y_{22}, \\
 X_{20} &= X_{23} = Y_{02} = Y_{32}, \\
 z_{10} &= z_{20} = z_{31} = z_{32} = z_{23} = z_{13} = z_{02} = z_{01}, \\
 z_{11} &= z_{21} = z_{12} = z_{22}, \\
 R_{00} &= R_{30} = R_{03} = R_{23}.
 \end{aligned}
 \tag{44}$$

Wir haben also in diesem Falle 13 Unbekannten, M_{00}^r , M_{01}^r , M_{10}^l , M_{10}^r , M_{11}^l , M_{11}^r , X_{10} , X_{11} , X_{20} , X_{21} , z_{10} , z_{11} und R_{30} zu bestimmen.

2) **Gleiche Einzellasten an den vier Innenknoten.**

Vier gleiche Einzellasten mögen auf die vier Innenknoten (11), (21), (12) und (22) wirken (**Abb. 33**).

a) **Aufstellung der Gleichungen.**

Da sowohl S auch T überall verschwinden, so erhalten wir mit Beachtung von den Symmetriebedingungen (44).

aus Gl. (1) für den Knoten (10): $M_{00}^r + 2M_{10}^l + 3M_{10}^r = \frac{6}{l\mu} z_{10} \dots \dots \dots (1_1)$

„ für den Knoten (11): $M_{01}^r + 2M_{11}^l + 3M_{11}^r = \frac{6}{l\mu} (z_{11} - z_{10}) \dots (1_2)$

aus Gl. (3) für den Knoten (00): $M_{10}^l - M_{00}^r = \frac{1}{2} R_{30} l \dots \dots \dots (3_1)$

„ für den Knoten (10): $M_{10}^l - M_{00}^r - M_{11}^l + M_{01}^r = 0 \dots \dots \dots (3_2)$

„ für den Knoten (11): $M_{11}^l - M_{01}^r = \frac{1}{2} Pl \dots \dots \dots (3_3)$

aus Gl. (4) für den Knoten (10): $X_{11} = M_{10}^l - M_{10}^r \dots \dots \dots (5_1)$

aus Gl. (5) für den Knoten (00): $X_{10} = -M_{00}^r \dots \dots \dots (5_2)$

„ für den Knoten (10): $X_{20} - X_{10} = -M_{01}^r \dots \dots \dots (5_3)$

„ für den Knoten (11): $X_{21} - X_{11} = M_{11}^l - M_{11}^r \dots \dots \dots (5_4)$

und schliesslich aus Gl. (7a)

für (10): $-6\alpha X_{10} = + \frac{6}{l\mu} (z_{11} - 2z_{10}) + (M_{11} - M_{10}^i) + 2(M_{01}^r - M_{00}^r) \dots\dots (7_1)$

„ (11): $2\alpha X_{11} = M_{10}^r - M_{11}^i \dots\dots\dots (7_2)$

„ (20): $X_{20} = 0 \dots\dots\dots (7_3)$

„ (21): $X_{21} = 0 \dots\dots\dots (7_4)$

Damit haben wir 13 voneinander unabhängige, hinreichende und nötige Gleichungen aufgestellt.

b) Ermittlung der Unbekannten.

Wir erhalten aus Gl. (3₁), (3₂) und (3₃), wie es so sein muss,

$$R_{00} = +P \dots\dots\dots (45)$$

Mit Benutzung von Gl. (7₃) und (7₄) erhalten wir aus den Gl. (5₁) und (5₂) bzw. aus Gl. (5₂) und (5₃).

$$M_{10}^i - M_{10}^r + M_{11}^i - M_{11}^r = 0 \dots\dots\dots (i)$$

und $M_{00}^r + M_{01}^r = 0 \dots\dots\dots (ii)$

Setzen wir den Wert von X_{11} von (5₁) in die Gl. (7₂) ein, so ergibt sich

$$2\alpha M_{10}^i - (1 + 2\alpha)M_{10}^r + M_{11}^r = 0 \dots\dots\dots (iii)$$

Mit Benutzung von den Gl. (1₁), (1₂), (5₂) eliminieren wir X_{10} und z aus der Gl. (7₁) und wir erhalten

$$(1 + 2\alpha)M_{00}^r + M_{10}^i + M_{10}^r - M_{01}^r - M_{11}^i - M_{11}^r = 0 \dots\dots\dots (iv)$$

Lösen wir nun sechs Gleichungen (3₂), (3₃), (i), (ii), (iii) und (iv) nach sechs unbekanntem M auf, so erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} M_{10}^i &= M_{10}^r = M_{11}^i = M_{11}^r = + \frac{1}{2}Pl, \\ M_{00}^r &= M_{01}^r = 0, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (46)$$

und deshalb

$$X_{10} = X_{11} = 0 \dots\dots\dots (47)$$

Wir erhalten dann aus (1₁) und (1₂) die Knotenverschiebungen:

$$\left. \begin{aligned} z_{10} &= + \frac{5}{12} \cdot \frac{Pl^3}{EI}, \\ z_{11} &= + \frac{5}{6} \cdot \frac{Pl^3}{EI}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (48)$$

Wie man daraus sehen kann, ist es bei diesem Roste sehr bemerkenswert, dass für den

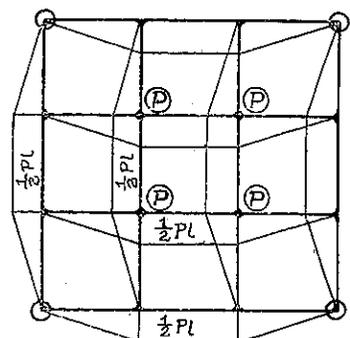


Abb. 34

hier betrachteten Belastungszustand sowohl die Torsionsmomente auch die Biegemomente an den Stabenden verschwinden und auch dass, wie bei einem einfachen Balkenträger, die Knotenmomente unabhängig von der Gestalt und den Abmessungen des Stabquerschnittes sind.

3) Gleichmässig verteilte Last über dem ganzen Rost.

Auf alle Stäbe des Rostes möge eine gleichmässig verteilte Last q pro Längeneinheit wirken. Wegen der vorhandenen Symmetrie haben wir auch in diesem Falle mit 13 Unbekannten zu tun.

a) Aufstellung der Gleichungen.

Wie es bei dem 2×2 -feldrigen Rost abgeleitet worden ist, erhält man für die zur x -Achse parallele Stabschar

$$\text{für } r=0 \quad S_{rs}^i=0, \quad S_{rs}^r=+\frac{1}{24}ql^3,$$

$$\text{für } r=1 \text{ und } 2 \quad S_{rs}^i=S_{rs}^r+\frac{1}{24}ql^3,$$

$$\text{und für } r=3 \quad S_{rs}^i=+\frac{1}{24}ql^3, \quad S_{rs}^r=0$$

$$\text{und deshalb für } r=0 \text{ und } 3 \quad U_{rs}=+\frac{\mu}{24}ql^2,$$

$$\text{für } r=1 \text{ und } 2 \quad U_{rs}=+\frac{\mu}{12}ql^2.$$

Für die zur y -Achse parallele Stabschar erhält man analoge Formeln für T und V .

Ferner ergibt die Belastung die Knotenlasten:

$$P_{rs}=+2ql \quad \text{für } (11), (12), (21), (22),$$

$$P_{rs}=+\frac{3}{2}ql \quad \text{für } (10), (20), (01), (02), (13), (23), (31), (32),$$

$$\text{und } P_{rs}=+ql \quad \text{für } (00), (30), (03), (33).$$

Dann erhalten wir mit Beachtung von den Symmetriebedingungen (44)

$$\text{aus Gl. (1) für den Knoten (10): } M_{10}^r+2M_{10}^i+3M_{10}^r+\frac{1}{2}ql^2=\frac{6}{l\mu}z_{10}\dots(1_1)$$

$$\begin{aligned} \text{„ „ (11): } M_{11}^r-2M_{11}^i-3M_{11}^r+\frac{1}{2}ql^2 \\ =\frac{6}{l\mu}(z_{11}-z_{10})\dots\dots\dots(1_2) \end{aligned}$$

aus Gl. (3) für den Knoten (00): $M_{10}^i - M_{00}^r = \frac{1}{2} (R_{00} - ql) l \dots\dots\dots (3_1)$

„ „ (10): $M_{10}^i - M_{00}^r - M_{11}^i + M_{01}^r = + \frac{3}{2} ql^2 \dots\dots (3_2)$

„ „ (11): $M_{11}^i - M_{01}^r = + ql^2 \dots\dots\dots (3_3)$

aus Gl. (4) für den Knoten (10): $X_{11} = M_{10}^i - M_{10}^r \dots\dots\dots (5_1)$

aus Gl. (5) für den Knoten (00): $X_{10} = -M_{00}^r \dots\dots\dots (5_2)$

„ „ (10): $X_{20} - X_{10} = -M_{01}^r \dots\dots\dots (5_3)$

„ „ (11): $X_{21} - X_{11} = M_{11}^i - M_{11}^r \dots\dots\dots (5_4)$

und schliesslich aus Gl. (7a)

für (10): $-6\alpha X_{10} = + \frac{6}{l\mu} (z_{11} - 2z_{10}) + (M_{11}^i - M_{10}^i) + 2(M_{01}^r - M_{00}^r) \dots\dots (7_1)$

„ (11): $2\alpha X_{11} = M_{10}^r - M_{11}^r \dots\dots\dots (7_2)$

„ (20): $X_{20} = 0 \dots\dots\dots (7_3)$

„ (21): $X_{21} = 0 \dots\dots\dots (7_4)$

b) Ermittlung der Unbekannten.

Wir erhalten aus Gl. (3₁), (3₂) und (3₃)

$$R_{00} = + 6ql \dots\dots\dots (49)$$

Mit Benutzung von Gl. (7₃) und (7₄) erhalten wir aus den Gl. (5₁) und (5₄) bzw. aus Gl. (5₂) und (5₃)

$$M_{10}^i - M_{10}^r + M_{11}^i - M_{11}^r = 0 \dots\dots\dots (i)$$

und $M_{00}^r + M_{01}^r = 0 \dots\dots\dots (ii)$

Setzen wir den Wert von (5₁) in Gl. (7₂) ein, so ergibt sich

$$2\alpha M_{10}^i - (1 + 2\alpha) M_{10}^r + M_{11}^r = 0 \dots\dots\dots (iii)$$

Eliminieren wir X_{10} und z aus den Gl. (1₁), (1₂), (5₂) und (7₁), so erhalten wir

$$(1 + 2\alpha) M_{00}^r + M_{10}^i + M_{10}^r - M_{01}^r - M_{11}^i - M_{11}^r = 0 \dots\dots\dots (iv)$$

Lösen wir nun sechs Gleichungen (3₂), (3₃), (i), (ii), (iii), (iv) nach sechs unbekanntem M auf, so erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} M_{00}^r = -M_{01}^r &= - \frac{3(1+2\alpha)}{4(2+4\alpha+\alpha^2)} ql^2, \\ M_{10}^i &= + \frac{17+34\alpha+10\alpha^2}{4(2+4\alpha+\alpha^2)} ql^2, & M_{10}^r &= + \frac{14+31\alpha+10\alpha^2}{4(2+4\alpha+\alpha^2)} ql^2, \\ M_{11}^i &= + \frac{11+22\alpha+4\alpha^2}{4(2+4\alpha+\alpha^2)} ql^2, & M_{11}^r &= + \frac{14+25\alpha+4\alpha}{4(2+4\alpha+\alpha^2)} ql^2, \end{aligned} \right\} \dots\dots (50)$$

und nach Gl. (5₁) und (5₂)

$$X_{11} = + \frac{3(1+\alpha)}{4(2+4\alpha+\alpha^2)} ql^2, \quad X_{10} = + \frac{3(1+3\alpha)}{4(2+4\alpha+\alpha^2)} ql^2 \dots \dots \dots (51)$$

Die Knotenverschiebungen ergeben sich dann aus Gl. (1₁) und (1₂) zu

$$z_{10} = + \frac{77+163\alpha+52\alpha^2}{24(2+4\alpha+\alpha^2)} \frac{ql^4}{EI}, \quad z_{11} = \frac{37}{12} \frac{ql^4}{EI} \dots \dots \dots (52)$$

c) Sonderfall $\alpha = \infty$ (Abb. 35).

Bei verschwindendem Drillungswiderstande erhalt man

$$\left. \begin{aligned} M_{10}^i = + M_{10}^r = + \frac{5}{2} ql^2, \quad M_{11}^i = M_{11}^r = + ql^2, \\ M_{10}^v + M_{11}^v = X_{10} = X_{11} = 0, \\ z_{10} = + \frac{13}{6} \frac{ql^4}{EI}, \quad z_{11} = + \frac{37}{12} \frac{ql^4}{EI}. \end{aligned} \right\} (53)$$

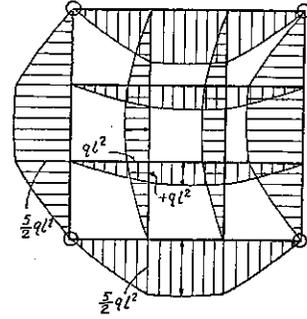
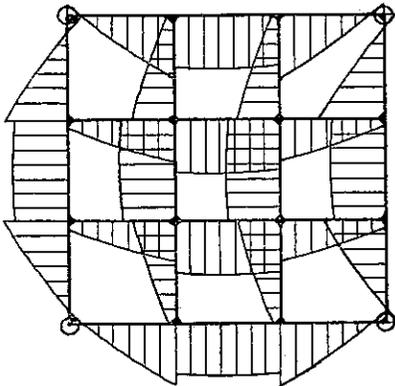


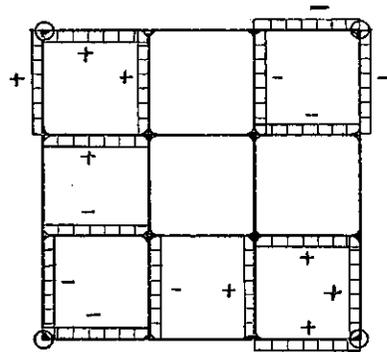
Abb. 35.

d) Sonderfall $\alpha = 0$ (Abb. 36).

$$\left. \begin{aligned} M_{11}^v = -M_{10}^v = + X_{10} = + X_{11} = + \frac{3}{8} ql^2, \\ M_{10}^i = + \frac{17}{8} ql^2, \quad M_{11}^i = + \frac{11}{8} ql^2, \quad M_{10}^r = M_{11}^r = + \frac{7}{4} ql^2, \\ z_{10} = + \frac{77}{48} \frac{ql^4}{EI}, \quad z_{11} = + \frac{37}{12} \frac{ql^4}{EI}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (54)$$



a) Biegemomente.



b) Torsionsmomente.

Abb. 36.

4. Der an den vier Seiten eingespannte, quadratische Rost mit 3×3 gleichen Feldern.

1) Die Unbekannten.

Wir denken uns an einen 3×3-feldrigen Rost, der, wie in **Abb. 37** dargestellt ist, an den vier Seiten fest eingespannt ist. Die vier Eckknoten (00), (30), (03) und (33) können wir ausser Betracht lassen.

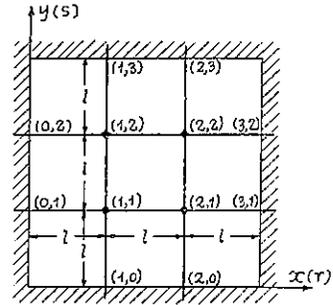


Abb. 37.

Die unbekanntenen Grössen sind:

- für die Knoten (10) und (20): R_{rs} und L_{rs}^o ,
- „ „ „ (01) und (02): R_{rs} und M_{rs}^r ,
- „ „ „ (13) und (23): R_{rs} , L_{rs}^u und Y_{rs} ,
- „ „ „ (31) und (32): R_{rs} , M_{rs}^l und X_{rs}

und für vier Innenknoten: z_{rs} , M_{rs}^l , M_{rs}^r , L_{rs}^u , L_{rs}^o , X_{rs} und Y_{rs} .

Wir haben also in diesem Falle mit 48 Unbekannten zu tun.

2) Gleiche Einzellasten an den vier Innenknoten.

a) Symmetriebedingungen.

Wenn vier gleiche Einzellasten P an die vier Innenknoten (11), (21), (12) und (22) wirken, so ergeben sich die folgenden Zusammenhänge:

$$\left. \begin{aligned}
 M_{01}^l &= M_{02}^r = M_{31}^l = M_{32}^r = L_{10}^o = L_{20}^o = L_{13}^u = L_{23}^u, \\
 M_{11}^l &= M_{12}^r = M_{21}^r = M_{22}^l = L_{11}^u = L_{21}^u = L_{12}^o = L_{22}^o, \\
 M_{11}^r &= M_{12}^l = M_{21}^l = M_{22}^r = L_{11}^o = L_{21}^o = L_{12}^u = L_{22}^u, \\
 X_{11} &= Y_{11} = X_{22} = Y_{22} = -X_{12} = -Y_{21} = -X_{31} = -Y_{13}, \\
 X_{21} &= X_{22} = Y_{12} = Y_{21}, \\
 z_{11} &= z_{21} = z_{12} = z_{22}, \\
 R_{01} &= R_{10} = R_{02} = R_{20} = R_{13} = R_{31} = R_{23} = R_{32}.
 \end{aligned} \right\} \dots (56)$$

Daraus sieht man, dass es genügt, wenn wir nur die sieben Unbekannten R_{01} , z_{11} , M_{01}^l , M_{11}^l , M_{11}^r , X_{11} und X_{21} bestimmen.

b) Aufstellung der Gleichungen.

Da sowohl S auch T überall verschwinden, so bekommen wir mit Benutzung von den Symmetriebedingungen (55)

aus Gl. (I, 24) für den Knoten (01): $2M_{01}^l + M_{11}^l + \frac{6}{l\mu} z_{11} = 0 \dots\dots\dots(i)$

aus Gl. (I, 25) für den Knoten (01): $M_{01}^l - M_{01}^r = R_{01} \cdot l \dots \dots \dots$ (ii)

aus Gl. (I, 26a) „ „ $2\alpha X_{11} = -M_{11}^r \dots \dots \dots$ (iii)

aus Gl. (1) für den Knoten (11): $M_{01}^r + 2M_{11}^l + 3M_{11}^r - \frac{6}{l\mu} z_{11} = 0 \dots$ (iv)

aus Gl. (3) „ „ $M_{11}^r - M_{01}^r = \frac{1}{2} Pl \dots \dots \dots$ (v)

aus Gl. (5) „ „ $X_{21} - X_{11} = M_{11}^l - M_{11}^r \dots \dots \dots$ (vi)

und aus Gl. (7a) für den Knoten (21): $X_{21} = 0 \dots \dots \dots$ (vii)

Die ersten drei Gleichungen (i), (ii), (iii) stellen die Randbedingungen dar, wie sie allgemein in dem ersten Abschnitt abgeleitet worden sind.

c) Ermittlung der Unbekannten.

Aus (ii) und (v) folgt, wie es sein muss,

$$R_{01} = \frac{1}{2} P \dots \dots \dots (56)$$

Aus (vi) und (vii) erhalten wir

$$X_{11} = M_{11}^r - M_{11}^l \dots \dots \dots (vi')$$

Die Auflösung der Gleichungen (i), (iii), (iv) (v) und (vi') ergibt:

$$\left. \begin{aligned} M_{01}^r &= -\frac{(1+4\alpha)Pl}{4(1+3\alpha)}, & M_{11}^l &= +\frac{(1+2\alpha)Pl}{4(1+3\alpha)}, & M_{11}^r &= +\frac{\alpha Pl}{2(1+3\alpha)}, \\ X_{11} &= -\frac{Pl}{4(1+3\alpha)}, & z_{11} &= +\frac{1+6\alpha}{24(1+3\alpha)} \cdot \frac{Pl^3}{EI}. \end{aligned} \right\} (57)$$

d) Sonderfall $\alpha = \infty$.

$$\left. \begin{aligned} M_{01}^r &= -\frac{1}{3} Pl, & M_{11}^l = M_{11}^r &= +\frac{1}{6} Pl, \\ X_{11} &= 0, & z_{11} &= +\frac{Pl^3}{12EI}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (58)$$

e) Sonderfall $\alpha = 0$.

$$\left. \begin{aligned} M_{01}^r &= -\frac{1}{4} Pl, & M_{11}^l &= +\frac{1}{4} Pl, & M_{11}^r &= 0, \\ X_{11} &= -\frac{1}{4} Pl, & z_{11} &= +\frac{Pl^3}{24EI}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (58)$$

Wie es aus den Gl. (59) oder aus der **Abb. 39** ersichtlich ist, ist es beachtenswert, dass für $\alpha = 0$ die Innenstäbe bei dieser Belastung spannungsfrei werden.

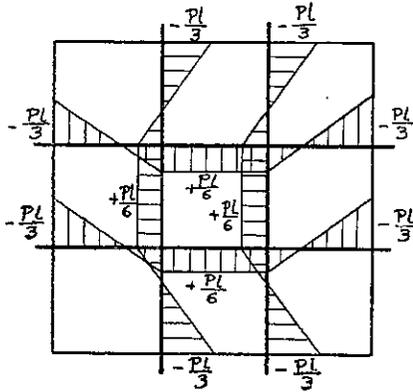


Abb. 38. $\alpha = \infty$.

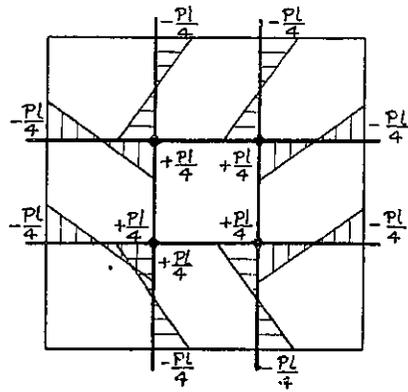


Abb. 39. $\alpha = 0$.

3) **Einzellast in einem Innenknoten.**

a) **Symmetriebedingungen und die Unbekannten.**

Wenn eine Einzellast P an einen Innenknoten, z.B. an den Knoten (11), wirkt, so erhalten wir der Symmetrie wegen

$$\left. \begin{aligned}
 M_{01}^i &= L_{10}^0, & M_{02}^r &= L_{20}^0, & M_{31}^l &= L_{13}^u, & M_{32}^l &= L_{23}^u, \\
 M_{11}^i &= L_{11}^u, & M_{11}^r &= L_{11}^0, & M_{12}^i &= L_{21}^u, & M_{12}^r &= L_{21}^0, \\
 M_{21}^i &= L_{12}^u, & M_{21}^r &= L_{12}^0, & M_{22}^l &= L_{22}^u, & M_{22}^r &= L_{22}^0, \\
 X_{11} &= Y_{11}, & X_{12} &= Y_{21}, & X_{21} &= Y_{12}, & X_{22} &= Y_{22}, \\
 X_{31} &= Y_{13}, & X_{32} &= Y_{23}, & z_{12} &= z_{21}, & & \cdot \\
 R_{10} &= R_{01}, & R_{20} &= R_{02}, & R_{31} &= R_{13}, & R_{32} &= R_{23},
 \end{aligned} \right\} \dots\dots(60)$$

so dass wir mit 25 Unbekannten

$$\begin{aligned}
 &R_{01}, R_{02}, R_{31}, R_{32}, z_{11}, z_{21}, z_{22}, \\
 &M_{01}^r, M_{02}^r, M_{31}^l, M_{32}^l, M_{11}^i, M_{11}^r, M_{12}^i, M_{12}^r, M_{21}^i, M_{21}^r, M_{22}^l, M_{22}^r, \\
 &X_{11}, X_{12}, X_{21}, X_{22}, X_{31}, X_{32}
 \end{aligned}$$

zu tun haben.

b) **Aufstellung der Gleichungen.**

Bei der Aufstellung der Gleichungen beachten wir die Symmetriebedingungen (60) und dass S und T überall verschwinden.

Aus den im ersten Abschnitt gegebenen Randbedingungsgleichungen erhalten wir die folgenden zwölf Gleichungen :

aus Gl. (I, 24) für den Knoten (01): $2M_{01}^r + M_{11}^i + \frac{6}{l\mu} z_{11} = 0 \dots\dots(A1)$

aus Gl. (I, 24) für den Knoten (02): $2M_{02}^r + M_{12}^i + \frac{6}{l\mu} z_{21} = 0 \dots\dots (A2)$

aus Gl. (I, 24a) für den Knoten (31): $M_{21}^r + 2M_{31}^i + \frac{6}{l\mu} z_{21} = 0 \dots\dots (A3)$

„ „ (32): $M_{22}^r + 2M_{32}^i + \frac{6}{l\mu} z_{22} = 0 \dots\dots (A4)$

aus Gl. (I, 25) für den Knoten (01): $M_{11}^i - M_{01}^r = R_{01} \cdot l \dots\dots (B1)$

„ „ (02): $M_{12}^i - M_{02}^r = R_{02} \cdot l \dots\dots (B2)$

aus Gl. (I, 25a) für den Knoten (31): $M_{21}^r - M_{31}^i = R_{31} \cdot l \dots\dots (B3)$

„ „ (32): $M_{22}^r - M_{32}^i = R_{32} \cdot l \dots\dots (B4)$

aus Gl. (I, 26) für den Knoten (01): $6\alpha X_{11} = -\frac{6}{l\mu} z_{11} + 2M_{11}^i + M_{01}^r \quad (C1)$

aus Gl. (I, 26a) „ (02): $6\alpha X_{12} = +\frac{6}{l\mu} z_{21} - 2M_{21}^r - M_{31}^i \quad (C2)$

aus Gl. (I, 27) „ (31): $6\alpha X_{31} = +\frac{6}{l\mu} z_{21} - 2M_{12}^i - M_{02}^r \quad (C3)$

aus Gl. (I, 27a) „ (32): $6\alpha X_{32} = -\frac{6}{l\mu} z_{22} + 2M_{22}^r + M_{32}^i \quad (C4)$

Aus den Grundgleichungen erhalten wir die folgenden dreizehn Gleichungen:

aus Gl. (1)

für (11): $M_{01}^r + 2(M_{11}^i + M_{11}^r) + M_{21}^i + \frac{6}{l\mu} (z_{21} - 2z_{11}) = 0 \dots\dots (1_1)$

„ (12): $M_{02}^r + 2(M_{12}^i + M_{12}^r) + M_{22}^i + \frac{6}{l\mu} (z_{22} - 2z_{21}) = 0 \dots\dots (1_2)$

„ (21): $M_{11}^r + 2(M_{21}^i + M_{21}^r) + M_{31}^i + \frac{6}{l\mu} (z_{11} - 2z_{21}) = 0 \dots\dots (1_3)$

„ (22): $M_{12}^r + 2(M_{22}^i + M_{22}^r) + M_{32}^i + \frac{6}{l\mu} (z_{21} - 2z_{22}) = 0 \dots\dots (1_4)$

aus Gl. (3)

für (11): $M_{01}^r - M_{11}^i - M_{11}^r + M_{21}^i = -\frac{1}{2} P l \dots\dots (3_1)$

„ (21): $M_{02}^r - M_{12}^i - M_{12}^r + M_{22}^i + M_{11}^r - M_{21}^i - M_{21}^r + M_{31}^i = 0 \dots (3_2)$

„ (22): $M_{12}^r - M_{22}^i - M_{22}^r + M_{32}^i = 0 \dots\dots (3_3)$

aus Gl. (5)

für (11): $X_{21} - X_{11} = M_{11}^l - M_{11}^r \dots\dots\dots(5_1)$

„ (12): $X_{22} - X_{12} = M_{21}^l - M_{21}^r \dots\dots\dots(5_2)$

„ (21): $X_{31} - X_{21} = M_{12}^l - M_{12}^r \dots\dots\dots(5_3)$

„ (22): $X_{32} - X_{22} = M_{22}^l - M_{22}^r \dots\dots\dots(5_4)$

aus Gl. (7) für den Knoten (21):

$$6\alpha X_{21} = + \frac{6}{l\mu} (z_{11} - z_{21}) + 2(M_{12}^l - M_{11}^l) + (M_{02}^r - M_{01}^r) \dots\dots\dots(7_1)$$

und aus Gl. (7a) für den Knoten (22):

$$6\alpha X_{22} = + \frac{6}{l\mu} (z_{22} - z_{21}) - 2(M_{22}^r - M_{21}^r) - (M_{32}^l - M_{31}^l) \dots\dots\dots(7_2)$$

b) Auflösung der Gleichungen.

Setzen wir (A1), (A3), (A2) und (A4) der Reihe nach in (C1), (C2), (C3) und (C4) ein, so erhalten wir, durch Eliminieren von z ,

$$\left. \begin{aligned} 2\alpha X_{11} &= M_{01}^r + M_{11}^l, \\ 2\alpha X_{12} &= -M_{21}^r - M_{31}^l, \\ 2\alpha X_{31} &= -M_{02}^r - M_{12}^l, \\ 2\alpha X_{32} &= M_{22}^r + M_{32}^l. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(a)$$

Eliminieren wir z aus beiden Gleichungen (7₁) und (7₂) mit Hilfe der Gleichungen (A1), (A2) bzw. (A3), (A4), so erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} 2\alpha X_{21} &= M_{02}^r + M_{12}^l - M_{01}^r - M_{11}^l, \\ 2\alpha X_{22} &= M_{21}^r + M_{31}^l - M_{22}^r - M_{32}^l. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(b)$$

Eliminieren wir drei Unbekannten z_{11} , z_{21} und z_{22} aus acht Gleichungen der Gleichungsgruppen (A) und (1), so erhalten wir die folgenden fünf Gleichungen und zwar

aus (A2), (A3): $2M_{02}^r + M_{12}^l - 2M_{31}^l - M_{21}^r = 0 \dots\dots\dots(i)$

„ (A1), (A3), (1₁): $5M_{01}^r + 4M_{11}^l + 2M_{11}^r + M_{21}^l - M_{21}^r - 2M_{31}^l = 0 \dots\dots\dots(ii)$

„ (A2), (A4), (1₂): $5M_{02}^r + 4M_{12}^l + 2M_{12}^r + M_{22}^l - M_{22}^r - 2M_{32}^l = 0 \dots\dots\dots(iii)$

„ (A1), (A3), (1₃): $-2M_{01}^r - M_{11}^l + M_{11}^r + 2M_{21}^l + 4M_{21}^r + 5M_{31}^l = 0 \dots\dots\dots(iv)$

„ (A2), (A4), (1₄): $-2M_{02}^r - M_{12}^l + M_{12}^r + 2M_{22}^l + 4M_{22}^r + 5M_{32}^l = 0 \dots\dots\dots(v)$

Durch Addition der linken Seiten von (ii) und (iv) bzw. von (iii) und (v) erhalten wir

$$M_{01}^r + M_{11}^l + M_{11}^r + M_{21}^l + M_{21}^r + M_{31}^l = 0 \dots\dots\dots(c)$$

$$M_{02}^r + M_{12}^l + M_{12}^r + M_{22}^l + M_{22}^r + M_{32}^l = 0 \dots\dots\dots(d)$$

Setzen wir nun die Werte von den X aus (a) und (b) in die Gleichungs-

gruppe (5) ein, so erhalten wir der Reihe nach

$$2M_{01}^r + 2(1+\alpha)M_{11}^l - 2\alpha M_{11}^r - M_{02}^r - M_{12}^l = 0 \dots\dots\dots (vi)$$

$$2M_{21}^l + 2(1+\alpha)M_{21}^r - 2\alpha M_{21}^l - M_{32}^l - M_{22}^r = 0 \dots\dots\dots (vii)$$

$$2M_{02}^r + 2(1+\alpha)M_{12}^l - 2\alpha M_{12}^r - M_{01}^r - M_{11}^l = 0 \dots\dots\dots (viii)$$

$$2M_{32}^l + 2(1+\alpha)M_{22}^r - 2\alpha M_{22}^l - M_{31}^l - M_{21}^r = 0 \dots\dots\dots (ix)$$

Zur Bestimmung der zwölf Unbekannten M stehen nun die zwölf Gleichungen (3₁), (3₂), (3₃) und (i) bis (ix) zur Verfügung. An Stelle der Gleichungen (iv) und (iii) wollen wir die Gleichungen (c) bzw. (d) in Gebrauch nehmen; das Gleichungsschema ist folgendes:

| Gl. Nr. | M_{01}^r | M_{11}^l | M_{11}^r | M_{21}^l | M_{21}^r | M_{31}^l | M_{02}^r | M_{12}^l | M_{12}^r | M_{22}^l | M_{22}^r | M_{32}^l | |
|-------------------|------------|----------------|------------|------------|----------------|------------|------------|----------------|------------|----------------|------------|------------|-------------------|
| (3 ₁) | +1 | -1 | -1 | +1 | | | | | | | | | $= -\frac{Pl}{2}$ |
| (c) | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | | | | | | | $= 0$ |
| (3 ₂) | | | +1 | -1 | -1 | +1 | +1 | -1 | -1 | +1 | | | $= 0$ |
| (d) | | | | | | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | $= 0$ |
| (3 ₃) | | | | | | | | | +1 | -1 | -1 | +1 | $= 0$ |
| (ii) | +5 | +4 | +2 | +1 | -1 | -2 | | | | | | | $= 0$ |
| (v) | | | | | | | -2 | -1 | +1 | +2 | +4 | +5 | $= 0$ |
| (i) | | | | | +1 | +2 | -2 | -1 | | | | | $= 0$ |
| (vi) | +2 | $+2(1+\alpha)$ | -2α | | | | -1 | -1 | | | | | $= 0$ |
| (viii) | -1 | -1 | | | | | $+2$ | $+2(1+\alpha)$ | -2α | | | | $= 0$ |
| (vii) | | | | -2α | $+2(1+\alpha)$ | $+2$ | | | | | -1 | -1 | $= 0$ |
| (ix) | | | | | -1 | -1 | | | -2α | $+2(1+\alpha)$ | $+2$ | | $= 0$ |

Diese Gleichungen sind ohne Schwierigkeiten nach dem Eliminationsverfahren gelöst; es ergeben sich folgende Werte für die M :

$$\left. \begin{aligned} M_{01}^r &= -\frac{Pl}{48N}(7 + 107\alpha + 410\alpha^2 + 424\alpha^3), \\ M_{11}^l &= +\frac{Pl}{144N}(21 + 311\alpha + 1060\alpha^2 + 980\alpha^3), \\ M_{11}^r &= +\frac{Pl}{144N}(15 + 209\alpha + 856\alpha^2 + 980\alpha^3), \\ M_{21}^l &= -\frac{Pl}{144N}(15 + 167\alpha + 382\alpha^2 + 224\alpha^3), \\ M_{21}^r &= +\frac{Pl}{72N}(3 + 23\alpha - 14\alpha^2 - 112\alpha^3), \\ M_{31}^l &= -\frac{Pl}{24N}(1 + 13\alpha + 46\alpha^2 + 40\alpha^3), \end{aligned} \right\} \dots\dots (61)$$

$$\begin{aligned}
 M_{02}^r &= -\frac{Pl}{24N}(1 + 17\alpha + 74\alpha^2 + 88\alpha^3), \\
 M_{12}^l &= +\frac{Pl}{72N}(3 + 47\alpha + 154\alpha^2 + 176\alpha^3), \\
 M_{12}^r &= +\frac{Pl}{144N}(3 + 43\alpha + 278\alpha^2 + 352\alpha^3), \\
 M_{22}^l &= -\frac{Pl}{144N}(3 + 13\alpha - 40\alpha^2 - 44\alpha^3), \\
 M_{22}^r &= +\frac{Pl}{144N}(3 + 17\alpha + 28\alpha^2 + 44\alpha^3), \\
 M_{32}^l &= -\frac{Pl}{48N}(1 + 13\alpha + 70\alpha^2 + 88\alpha^3),
 \end{aligned}$$

wobei

$$N = (1 + 3\alpha)(1 + 11\alpha + 16\alpha^2) = 1 + 14\alpha + 49\alpha^2 + 48\alpha^3 \dots\dots (62)$$

Nach der Ermittlung der M erhalten wir aus (a) und (b)

$$\begin{aligned}
 X_{11} &= -\frac{Pl}{144N}(5 + 85\alpha + 146\alpha^2), \\
 X_{21} &= +\frac{Pl}{144N}(1 + 17\alpha + 53\alpha^2), \\
 X_{31} &= +\frac{Pl}{36N}(1 + 17\alpha + 22\alpha^2), \\
 X_{12} &= +\frac{Pl}{18N}(2 + 19\alpha + 29\alpha^2), \\
 X_{22} &= -\frac{Pl}{144N}(5 + 61\alpha + 122\alpha^2), \\
 X_{32} &= -\frac{Pl}{144N}(11 + 91\alpha + 110\alpha^2),
 \end{aligned}
 \dots\dots\dots (63)$$

und aus der Gleichungsgruppe (B)

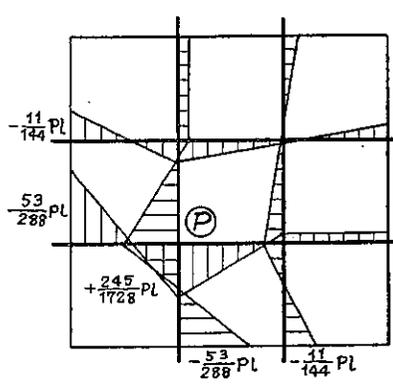
$$\begin{aligned}
 R_{01} &= +\frac{Pl}{72N}(21 + 316\alpha + 1145\alpha^2 + 1126\alpha^3), \\
 R_{02} &= +\frac{Pl}{36N}(3 + 49\alpha + 188\alpha^2 + 220\alpha^3), \\
 R_{31} &= +\frac{Pl}{36N}(3 + 31\alpha + 62\alpha^2 + 4\alpha^3), \\
 R_{32} &= +\frac{Pl}{72N}(3 + 28\alpha + 119\alpha^2 + 154\alpha^3).
 \end{aligned}
 \dots\dots\dots (64)$$

Aus der Gleichungsgruppe (A) ergeben sich folgende Werte für z :

$$\left. \begin{aligned} z_{11} &= + \frac{Pl^3}{864 E I N} (21 + 331\alpha + 1400\alpha^2 + 1564\alpha^3), \\ z_{21} &= + \frac{Pl}{432 E I N} (3 + 55\alpha + 290\alpha^2 + 352\alpha^3), \\ z_{22} &= + \frac{Pl^3}{864 E I N} (3 + 61\alpha + 392\alpha^2 + 484\alpha^3). \end{aligned} \right\} \dots (65)$$

c) Sonderfall $\alpha = \infty$ (Abb. 40).

Bei verschwindendem Drillungswiderstande ergeben sich die folgenden Werte:



$$\left. \begin{aligned} M_{01}^r &= -\frac{53}{288} Pl, & M_{31}^l &= -\frac{5}{144} Pl, \\ M_{02}^r &= -\frac{11}{144} Pl, & M_{32}^l &= -\frac{11}{288} Pl, \\ M_{11}^l = M_{11}^r &= +\frac{245}{1728} Pl, & M_{21}^l = M_{21}^r &= -\frac{7}{216} Pl, \\ M_{12}^l = M_{12}^r &= +\frac{11}{216} Pl, & M_{22}^l = M_{22}^r &= +\frac{11}{1728} Pl, \\ R_{01} &= +\frac{563}{1728} P, & R_{02} &= +\frac{55}{432} P, \\ R_{31} &= +\frac{1}{432} P, & R_{32} &= +\frac{77}{1728} P. \end{aligned} \right\} (66)$$

Abb. 40.

$$\left. \begin{aligned} z_{11} &= + \frac{391}{10368} \cdot \frac{Pl^3}{EI}, & z_{21} &= + \frac{11}{648} \cdot \frac{Pl^3}{EI}, \\ z_{22} &= + \frac{121}{10368} \cdot \frac{Pl^3}{EI}, & X &= 0. \end{aligned} \right\}$$

d) Sonderfall $\alpha = 0$ (Abb. 41).

Für $\alpha = 0$ erhalten wir:

$$\left. \begin{aligned} M_{01}^r &= -M_{11}^l = -\frac{7}{48} Pl, & M_{11}^r &= -M_{21}^l = +\frac{5}{48} Pl, \\ M_{02}^r &= -M_{12}^l = -M_{21}^r = M_{31}^l = -\frac{1}{24} Pl, \\ M_{12}^r &= -M_{22}^l = M_{22}^r = -M_{32}^l = +\frac{1}{48} Pl, \\ X_{11} = X_{22} &= -\frac{5}{144} Pl, & X_{12} &= +\frac{1}{9} Pl, \end{aligned} \right\} \dots (67)$$

$$\left. \begin{aligned} X_{21} &= +\frac{1}{144}Pl, & X_{31} &= +\frac{1}{36}Pl, & X_{32} &= -\frac{11}{144}Pl, \\ R_{01} &= +\frac{7}{24}Pl, & R_{02} &= R_{31} = +\frac{1}{12}P, & R_{32} &= +\frac{1}{24}Pl, \\ z_{11} &= +\frac{7}{288} \cdot \frac{Pl^3}{EI}, & z_{21} &= +\frac{1}{144} \cdot \frac{Pl^3}{EI}, & z_{22} &= +\frac{1}{288} \cdot \frac{Pl^3}{EI}. \end{aligned} \right\}$$

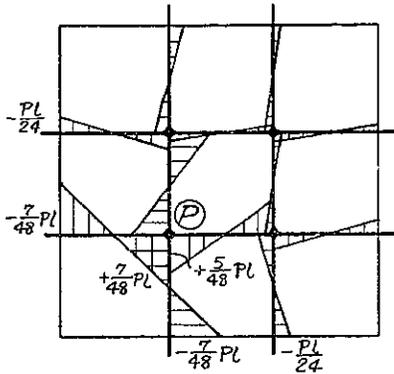


Abb. 41a. Biegemomente.

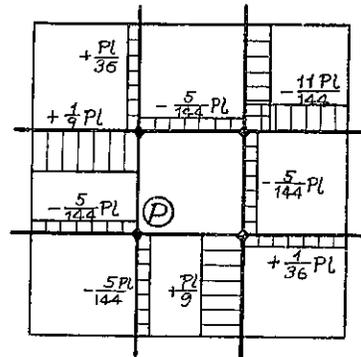


Abb. 41b. Torsionsmomente.

5. Der an den vier Ecken unterstützte, quadratische Rost mit 4x4 gleichen Feldern. Einzellast in Mittelknoten.

1) Die Rand- und Symmetriebedingungen und die Unbekannten.

Wir betrachten nun einen 4x4-feldrigen, quadratischen Rost, der an den vier Eckknoten unterstützt ist, und denken uns an, dass eine Einzellast P auf den Rost in dem Mittelknoten wirkt. Im folgenden beziehen wir uns auf ein Koordinatensystem mit dem Ursprung in dem Mittelknoten, wie es in der **Abb. 42** dargestellt ist.

Wegen der Randbedingungen verschwinden die folgenden 55 Unbekannten:

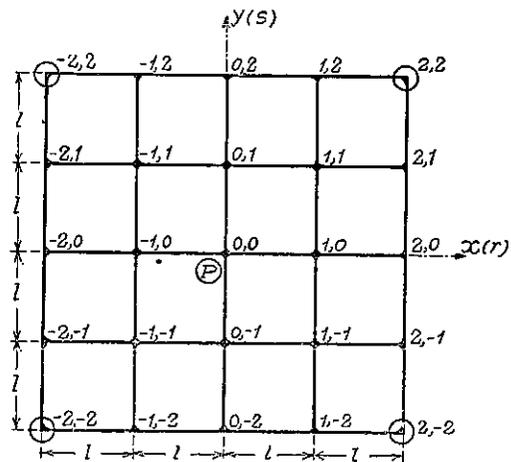


Abb. 42.

$$\begin{aligned}
 z_{rs} & \quad \text{für } r = \pm 2, \quad s = \pm 2, \\
 R_{rs} & \quad \text{für } r = +1, \quad 0, \quad -1, \\
 \text{und} & \quad \text{für } s = +1, \quad 0, \quad -1, \\
 M_{rs}^l \text{ und } X_{rs} & \quad \text{für } r = -2, \\
 M_{rs}^r & \quad \text{für } r = +2, \\
 L_{rs}^u \text{ und } Y_{rs} & \quad \text{für } s = -2, \\
 \text{und } L_{rs}^o & \quad \text{für } s = +2.
 \end{aligned}$$

Wenn eine Einzellast in dem Mittelknoten wirkt, so gelten, wie man sich leicht überzeugen kann, zwischen den Unbekannten die folgenden Symmetriebedingungen :

$$\left. \begin{aligned}
 M_{rs}^l = M_{r,-s}^l = M_{r,s}^r = M_{r,-s}^r = L_{sr}^u = L_{s,-r}^u = L_{s,-r}^o = L_{-s,-r}^o \\
 \text{für } (r, s) = (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), \\
 M_{rs}^r = M_{r,-s}^r = M_{r,s}^l = M_{r,-s}^l = L_{sr}^o = L_{-s,r}^o = L_{s,-r}^u = L_{-s,-r}^u \\
 \text{für } (r, s) = (0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 2), \\
 M_{r,0}^l = M_{-r,0}^l = L_{0,r}^u = L_{0,-r}^u \quad \text{für } r = +1 \quad \text{und } +2, \\
 M_{r,0}^r = M_{-r,0}^r = L_{0,r}^o = L_{0,-r}^o \quad \text{für } r = 0 \quad \text{und } +1, \\
 X_{00} = X_{10} = X_{20} = X_{-1,0} = Y_{00} = Y_{01} = Y_{02} = Y_{0,-1} = 0, \\
 X_{rs} = X_{-(r-1),-s} = -X_{r,-s} = -X_{-(r-1),s} \\
 = Y_{-s,-(r-1)} = -Y_{-s,r} = -Y_{s,-(r-1)} = Y_{sr} \\
 \text{für } (r, s) = (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), \\
 z_{rs} = z_{r,-s} = z_{-r,s} = z_{-r,-s} \quad \text{für } (r, s) = (1, 1), (1, 0), (2, 0), \\
 z_{21} = z_{12} = z_{-2,1} = z_{-1,2} = z_{2,-1} = z_{1,-2} = z_{-2,-1} = z_{-1,-2}, \\
 R_{22} = R_{2,-2} = R_{-2,2} = R_{-2,-2}.
 \end{aligned} \right\} \dots (68)$$

Gemäss diesen Symmetriebedingungen sind 22 Unbekannten zu bestimmen, für die wir wählen : $R_{22}, z_{00}, z_{10}, z_{20}, z_{11}, z_{21}, M_{00}^r, M_{01}^r, M_{02}^r, M_{10}^l, M_{10}^r, M_{11}^l, M_{11}^r, M_{12}^l, M_{12}^r, M_{20}^l, M_{21}^l, M_{22}^l, X_{11}, X_{12}, X_{21}, \text{ und } X_{22}.$

2) **Aufstellung der Gleichungen.**

Mit Benutzung von den Symmetriebedingungen (68) erhalten wir aus den Grundgleichungen :

aus Gl. (1) für die Knoten

$$(00) : \quad 2M_{00}^r + M_{10}^l = \frac{6}{l\mu} (z_{00} - z_{10}) \dots \dots \dots (1)$$

$$(01) : \quad 2M_{01}^r + M_{11}^l = \frac{6}{l\mu} (z_{10} - z_{11}) \dots \dots \dots (1)$$

$$(02): \quad 2M_{02}^r + M_{12}^l = \frac{6}{l\mu} (z_{20} - z_{21}) \dots \dots \dots (1_3)$$

$$(10): \quad M_{00}^r + 2(M_{10}^l + M_{10}^r) + M_{20}^l = -\frac{6}{l\mu} (z_{00} - 2z_{10} + z_{20}) \dots \dots \dots (1_4)$$

$$(11): \quad M_{01}^r + 2(M_{11}^l + M_{11}^r) + M_{21}^l = -\frac{6}{l\mu} (z_{10} - 2z_{11} + z_{21}) \dots \dots \dots (1_5)$$

$$(12): \quad M_{02}^r + 2(M_{12}^l + M_{12}^r) + M_{22}^l = -\frac{6}{l\mu} (z_{20} - 2z_{21}) \dots \dots \dots (1_6)$$

aus Gl. (3) für die Knoten

$$(00): \quad M_{00}^r - M_{10}^l = +\frac{1}{4} Pl \dots \dots \dots (3_1)$$

$$(01): \quad 2(M_{01}^r - M_{11}^l) - M_{00}^r + M_{10}^l + M_{10}^r - M_{20}^l = 0 \dots \dots \dots (3_2)$$

$$(02): \quad 2(M_{02}^r - M_{12}^l) - M_{10}^r + M_{20}^l = 0 \dots \dots \dots (3_3)$$

$$(11): \quad M_{01}^r - M_{11}^l - M_{11}^r + M_{21}^l = 0 \dots \dots \dots (3_4)$$

$$(12): \quad M_{02}^r - M_{12}^l - M_{12}^r + M_{22}^l + M_{11}^r - M_{21}^l = 0 \dots \dots \dots (3_5)$$

$$(22): \quad M_{12}^r - M_{22}^l = +\frac{1}{2} R_{22} \cdot l \dots \dots \dots (3_6)$$

aus Gl. (5) für die Knoten

$$(01): \quad 2X_{11} = M_{10}^l - M_{10}^r \dots \dots \dots (5_1)$$

$$(11): \quad X_{21} - X_{11} = M_{11}^l - M_{11}^r \dots \dots \dots (5_2)$$

$$(21): \quad -X_{21} = M_{12}^l - M_{12}^r \dots \dots \dots (5_3)$$

$$(02): \quad 2X_{12} = M_{21}^l \dots \dots \dots (5_4)$$

$$(12): \quad X_{22} - X_{12} = M_{21}^l \dots \dots \dots (5_5)$$

$$(22): \quad -X_{22} = M_{22}^l \dots \dots \dots (5_6)$$

und schliesslich aus Gl. (6) für die Knoten

$$(11): \quad 6\alpha X_{11} = -\frac{6}{l\mu} (z_{00} - 2z_{10} + z_{11}) + 2(M_{11}^l - M_{10}^l) + M_{01}^r - M_{00}^r \dots \dots (6_1)$$

$$(12): \quad 6\alpha X_{21} = -\frac{6}{l\mu} (z_{21} - z_{20} - z_{11} + z_{10}) + 2(M_{12}^l - M_{11}^l) + M_{12}^r - M_{01}^r \dots \dots (6_2)$$

$$(21): \quad 6\alpha X_{12} = -\frac{6}{l\mu} (z_{21} - z_{20} - z_{11} + z_{10}) + 2(M_{21}^l - M_{20}^l) + M_{11}^r - M_{10}^r \dots \dots (6_3)$$

$$(22): \quad 6\alpha X_{22} = -\frac{6}{l\mu} (z_{11} - 2z_{21}) + 2(M_{22}^l - M_{21}^l) + M_{12}^r - M_{11}^r \dots \dots \dots (6_4)$$

3) Auflösung der Gleichungen.

Zuerst erhalten wir aus der Gleichungsgruppe (3) für die Auflagerreaktion :

$$R_{22} = \frac{1}{2} P \dots \dots \dots (69)$$

Durch Elimination von X aus der Gleichungsgruppe (5) ergeben sich zwei Gleichungen für M :

$$M_{10}^i - M_{10}^r + 2(M_{11}^i - M_{11}^r + M_{12}^i - M_{12}^r) = 0, \dots \dots \dots (i)$$

$$M_{20}^i + 2(M_{21}^i + M_{22}^i) = 0, \dots \dots \dots (ii)$$

Durch Elimination von z aus der Gleichungsgruppe (1) ergeben sich eine Gleichung für M :

$$3M_{00}^r + 3M_{10}^i + 2M_{10}^r + M_{20}^i - 5M_{01}^r - 4M_{11}^i - 2M_{11}^r - M_{21}^i + 2M_{02}^r + M_{12}^i = 0 \dots (iii)$$

Wenn wir X und z aus vier Gleichungen (6₁), (6₂), (6₃), (6₄) mit Hilfe der Gleichungsgruppen (1) und (5) eliminieren, so erhalten wir vier Gleichungen für M , und zwar

aus (6₁) mit (1₁), (1₂) und (5₁):

$$M_{00}^r + (1 + \alpha) M_{10}^i - \alpha M_{10}^r - M_{01}^r - M_{11}^i = 0, \dots \dots \dots (iv)$$

aus (6₂) mit (1₂), (1₃) und (5₃):

$$M_{02}^r + (1 + 2\alpha) M_{12}^i - 2\alpha M_{12}^r - M_{01}^r - M_{11}^i = 0, \dots \dots \dots (v)$$

aus (6₃) mit (1₁), (1₂), (1₄), (1₅) und (5₄):

$$M_{00}^r + M_{10}^i + M_{10}^r + (1 + \alpha) M_{20}^i - (M_{01}^r + M_{11}^i + M_{11}^r + M_{21}^i) = 0, \dots (vi)$$

aus (6₄) mit (1₂), (1₃), (1₅), (1₆) und (5₅):

$$M_{02}^r + M_{12}^i + M_{12}^r + (1 + 2\alpha) M_{22}^i - (M_{01}^r + M_{11}^i + M_{11}^r + M_{21}^i) = 0. (vii)$$

Durch diese sieben Gleichungen und die fünf Gleichungen (3₁) bis (3₅) können die zwölf Unbekannten M bestimmt werden. An Stelle von (vi) und (vii) können wir

$$(1 + \alpha)(M_{10}^i + M_{20}^i) - \alpha M_{10}^r - M_{11}^r - M_{21}^i = 0 \dots \dots \dots (viii)$$

$$(1 + 2\alpha)(M_{12}^r + M_{22}^i) - 2\alpha M_{12}^i - M_{11}^r - M_{21}^i = 0 \dots \dots \dots (ix)$$

in Gebrauch nehmen, welche sich aus (iv) und (vi) bzw. aus (v) und (vii) ergeben. Das Gleichungsschema ist folgendes:

| Gl. Nr. | M_{00}^r | M_{10}^i | M_{10}^r | M_{20}^i | M_{01}^r | M_{11}^i | M_{11}^r | M_{21}^i | M_{02}^r | M_{12}^i | M_{12}^r | M_{22}^i | |
|-------------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|--------------------|
| (3 ₁) | +1 | -1 | | | | | | | | | | | $= + \frac{Pl}{4}$ |
| (3 ₂) | +1 | -1 | -1 | +1 | -2 | +2 | | | | | | | $= 0$ |
| (3 ₄) | | | | | +1 | -1 | -1 | +1 | | | | | $= 0$ |
| (3 ₅) | | | | | | | +1 | -1 | +1 | -1 | -1 | +1 | $= 0$ |
| (3 ₃) | | | +1 | -1 | | | | | -2 | +2 | | | $= 0$ |
| (i) | | +1 | -1 | | | +2 | -2 | | | +2 | -2 | | $= 0$ |

| Gl. Nr | M_{00}^r | M_{10}^l | M_{10}^r | M_{23}^l | M_{01}^r | M_{11}^l | M_{11}^r | M_{21}^l | M_{02}^r | M_{12}^l | M_{12}^r | M_{22}^l |
|--------|------------|---------------|---------------|---------------|------------|------------|------------|------------|------------|----------------|----------------|--------------------|
| (ii) | | | | +1 | | | | +2 | | | | +2 = 0 |
| (iii) | +3 | +3 | +2 | +1 | -5 | -4 | -2 | -1 | +2 | +1 | | = 0 |
| (iv) | +1 | $+(1+\alpha)$ | $-\alpha$ | | -1 | -1 | | | | | | = 0 |
| (viii) | | $-\alpha$ | $+(1+\alpha)$ | $+(1+\alpha)$ | | | -1 | -1 | | | | = 0 |
| (v) | | | | | -1 | -1 | | | +1 | $+(1+2\alpha)$ | -2α | = 0 |
| (ix) | | | | | | | -1 | -1 | | -2α | $+(1+2\alpha)$ | $+(1+2\alpha) = 0$ |

Wir lösen diese Gleichungen nach M durch das Eliminationsverfahren auf, und wir erhalten, mit der Abkürzung

$$N = (5 + 10\alpha + 4\alpha^2)(25 + 70\alpha + 17\alpha^2) = 125 + 600\alpha^2 + 885\alpha^2 + 450\alpha^3 + 68\alpha^4, \quad (70)$$

die folgenden Werte für M :

$$\left. \begin{aligned} M_{00}^r &= + \frac{Pl}{8N} (275 + 1355\alpha + 2064\alpha^2 + 1070\alpha^3 + 164\alpha^4), \\ M_{10}^l &= + \frac{Pl}{8N} (25 + 155\alpha + 294\alpha^2 + 170\alpha^3 + 28\alpha^4), \\ M_{10}^r &= + \frac{Pl}{4N} (50 + 205\alpha + 233\alpha^2 + 100\alpha^3 + 14\alpha^4), \\ M_{23}^l &= - \frac{Pl}{4N} \cdot \alpha(1 + \alpha)(5 + 2\alpha), \\ M_{01}^r &= + \frac{Pl}{16N} (375 + 1825\alpha + 2742\alpha^2 + 1416\alpha^3 + 216\alpha^4), \\ M_{11}^l &= + \frac{Pl}{16N} (225 + 1045\alpha + 1458\alpha^2 + 720\alpha^3 + 108\alpha^4), \\ M_{11}^r &= + \frac{Pl}{16N} (175 + 865\alpha + 1342\alpha^2 + 702\alpha^3 + 108\alpha^4), \\ M_{21}^l &= + \frac{Pl}{16N} (25 + 85\alpha + 52\alpha^2 + 6\alpha^3), \\ M_{02}^r &= + \frac{Pl}{8N} (175 + 810\alpha + 1134\alpha^2 + 657\alpha^3 + 82\alpha^4), \\ M_{12}^l &= + \frac{Pl}{8N} (125 + 600\alpha + 894\alpha^2 + 455\alpha^3 + 68\alpha^4), \\ M_{12}^r &= + \frac{Pl}{16N} (225 + 1125 + 1732\alpha^2 + 898\alpha^3 + 136\alpha^4), \\ M_{22}^l &= - \frac{Pl}{16N} (25 + 75\alpha + 38\alpha^2 + 2\alpha^3). \end{aligned} \right\} \dots (71)$$

Nach der Ermittlung von M ergeben sich aus (3₁), (3₂), (3₄) und (3₅) die folgenden Werte für die Torsionsmomente:

$$\left. \begin{aligned} X_{11} &= -\frac{Pl}{16N}(75 + 255\alpha + 172\alpha^2 + 30\alpha^3), \\ X_{12} &= -\frac{Pl}{8N} \cdot \alpha(1 + \alpha)(5 + 2\alpha), \\ X_{21} &= -\frac{Pl}{16N}(1 + 2\alpha)(5 + 2\alpha)(5 + 3\alpha), \\ X_{22} &= +\frac{P}{16N}(25 + 75\alpha + 38\alpha^2 + 2\alpha^3). \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (72)$$

Aus der Gleichungsgruppe (1) erhalten wir für die Verschiebungen:

$$\left. \begin{aligned} z_{00} &= +\frac{Pl^3}{EI} \cdot \left[\frac{9}{16} - \frac{1}{96N}(225 + 915\alpha + 1044\alpha^2 + 444\alpha^3 + 20\alpha^4) \right], \\ z_{10} &= +\frac{Pl^3}{EI} \cdot \left[\frac{11}{24} - \frac{1}{96N}(125 + 645\alpha + 1038\alpha^2 + 564\alpha^3 + 52\alpha^4) \right], \\ z_{20} &= +\frac{Pl^3}{EI} \cdot \left[\frac{13}{48} - \frac{1}{96N}(75 + 525\alpha + 1092\alpha^2 + 696\alpha^3 + 92\alpha^4) \right], \\ z_{11} &= +\frac{Pl^3}{EI} \cdot \left[\frac{3}{8} - \frac{1}{48N}(50 + 270\alpha + 456\alpha^2 + 258\alpha^3 + 24\alpha^4) \right], \\ z_{21} &= +\frac{Pl^3}{EI} \cdot \left[\frac{3}{16} - \frac{1}{96N}(25 + 165\alpha + 336\alpha^2 + 234\alpha^3 + 52\alpha^4) \right]. \end{aligned} \right\} \dots (73)$$

4) Sonderfälle.

a) $\alpha = 0$ (Abb. 43).

$$\left. \begin{aligned} M_{00}^r &= +\frac{41}{136}Pl, & M_{10}^l &= M_{10}^r = +\frac{7}{136}Pl, \\ M_{01}^r &= +\frac{27}{136}Pl, & M_{11}^l &= M_{11}^r = +\frac{27}{272}Pl, \\ M_{02}^r &= +\frac{41}{272}Pl, & M_{12}^l &= M_{12}^r = +\frac{1}{8}Pl, \\ z_{00} &= +\frac{305}{544} \cdot \frac{Pl^3}{EI}, & z_{10} &= +\frac{245}{544} \cdot \frac{Pl^3}{EI}, \\ z_{11} &= +\frac{25}{68} \cdot \frac{Pl^3}{EI}, & z_{21} &= +\frac{35}{204} \cdot \frac{Pl^3}{EI}, \\ z_{20} &= +\frac{419}{1362} \cdot \frac{Pl^3}{EI}, \\ M_{20}^l &= M_{21}^l = M_{22}^l = X = 0. \end{aligned} \right\} (74)$$

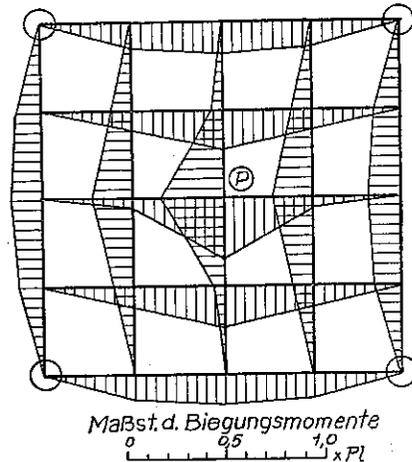


Abb. 43.

b) $\alpha = 0$ (Abb. 44a u. b).

$$\left. \begin{aligned} M_{00}^r &= +\frac{11}{40}Pl, & M_{10}^l &= +\frac{1}{40}Pl, & M_{10}^r &= +\frac{1}{10}Pl, & M_{20}^l &= 0, \\ M_{01}^r &= +\frac{3}{16}Pl, & M_{11}^l &= +\frac{9}{80}Pl, & M_{11}^r &= +\frac{7}{80}Pl, & M_{21}^l &= +\frac{1}{80}Pl, \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned}
 M_{0,2}^i &= +\frac{7}{40}Pl, & M_{1,2}^i &= +\frac{1}{8}Pl, & M_{1,2}^r &= +\frac{9}{80}Pl, & M_{2,2}^i &= -\frac{1}{80}Pl, \\
 X_{1,1} &= -\frac{3}{80}Pl, & X_{2,1} &= -\frac{1}{80}Pl, & X_{2,2} &= +\frac{1}{80}Pl, & X_{1,2} &= 0, \\
 z_{0,0} &= +\frac{87}{160} \cdot \frac{Pl^3}{EI}, & z_{1,0} &= +\frac{43}{96} \cdot \frac{Pl^3}{EI}, & z_{2,0} &= +\frac{127}{480} \cdot \frac{Pl^3}{EI}, \\
 z_{1,1} &= +\frac{11}{30} \cdot \frac{Pl^3}{EI}, & z_{2,1} &= +\frac{89}{480} \cdot \frac{Pl^3}{EI}
 \end{aligned} \right\} \dots (75)$$

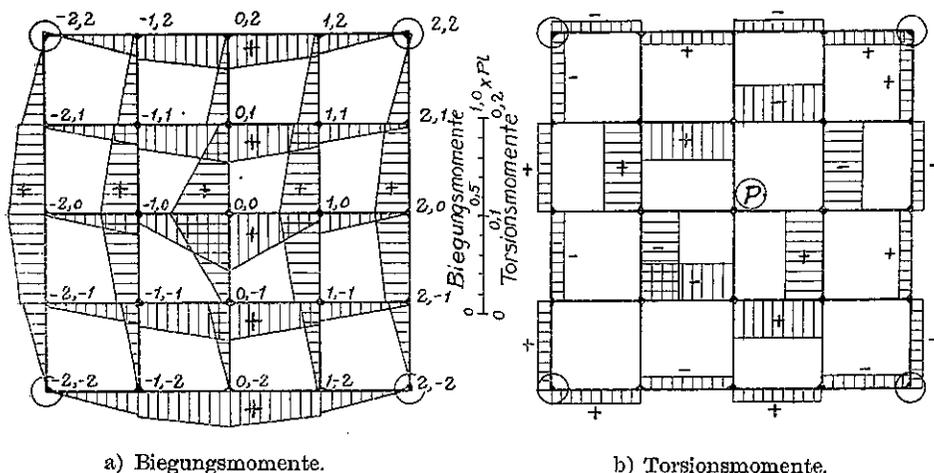


Abb. 44.

6. Der an den vier Seiten eingespannte, quadratische Rost mit 4×4 gleichen Feldern. Einzellast in Mittelknoten.

1) Die Rand- und Symmetriebedingungen und die Unbekannten.

Wir werden nun einen 4×4 -feldrigen, quadratischen Rost untersuchen, der, wie in der **Abb. 45** dargestellt ist, an den vier Seiten fest eingespannt ist, und wir denken uns an, dass eine Einzellast P auf den Rost in dem Mittelknoten wirkt. Wie bei vorigem Falle legen wir den Koordinatenursprung in dem Mittelknoten.

Wir können uns denken, dass dieser Rost 21 Knoten hat und demnach im allgemeinen $8 \times 21 = 168$ Unbekannten vorhanden sind. Wegen der Randbedingungen kommen aber die folgenden 75 Unbekannten

- z_{rs} für $r = \pm 2$ und $s = \pm 2$,
- R_{rs} für die neun Innenknoten,
- $L_{rs}^u, L_{rs}^o, M_{rs}^l, X_{rs}$ und Y_{rs} für $r = -2$,
- $L_{rs}^u, L_{rs}^o, M_{rs}^r$ und Y_{rs} für $r = +2$,
- $M_{rs}^l, M_{rs}^r, L_{rs}^u, X_{rs}$ und Y_{rs} für $s = -2$,
- $M_{rs}^l, M_{rs}^r, L_{rs}^o$ und X_{rs} für $s = +2$

nicht ins Betracht.

Bei der zentrischen Belastung gelten, wie (68), die folgenden Symmetrieebedingungen :

$$\begin{aligned}
 M_{rs}^l &= M_{r,-s}^l = M_{-r,s}^r = M_{-r,-s}^r = L_{sr}^u = L_{-s,r}^u = L_{s,-r}^o = L_{-s,-r}^o && \text{für } (r, s) = (1, 1), (2, 1), \\
 M_{rs}^r &= M_{r,-s}^r = M_{-r,s}^l = M_{-r,-s}^l = L_{sr}^o = L_{-s,r}^o = L_{s,-r}^u = L_{-s,-r}^u && \text{für } (r, s) = (0, 1), (1, 1), \\
 M_{r,o}^l &= M_{-r,o}^r = L_{o,r}^u = L_{o,-r}^o && \text{für } r = +1 \text{ und } +2, \\
 M_{r,o}^r &= M_{-r,o}^l = L_{o,r}^o = L_{o,-r}^u && \text{für } r = 0 \text{ und } +1, \\
 X_{00} &= X_{10} = X_{20} = X_{-1,0} = Y_{00} = Y_{01} = Y_{02} = Y_{0,-1} = 0, \\
 X_{rs} &= X_{-(r-1),-s} = -X_{r,-s} = -X_{-(r-1),s} \\
 &= Y_{-s,-(r-1)} = -Y_{-s,r} = -Y_{s,-(r-1)} = Y_{s,r} && \text{für } (r, s) = (1, 1), (2, 1), \\
 z_{rs} &= z_{r,-s} = z_{-r,s} = z_{-r,-s} && \text{für } (r, s) = (1, 0), (1, 1), \\
 R_{21} &= R_{12} = R_{-2,1} = R_{1,-2} = R_{2,-1} = R_{-1,2} = R_{-1,-2} = R_{-2,-1}, \\
 R_{20} &= R_{02} = R_{0,-2} = R_{-2,0}.
 \end{aligned}
 \tag{76}$$

Aus obigen Betrachtungen folgt, dass die Anzahl der Unbekannten, die wir zu bestimmen brauchen, 15 ist; diese Unbekannten sind: $R_{20}, R_{21}, z_{00}, z_{10}, z_{11}, M_{00}^r, M_{01}^r, M_{10}^l, M_{10}^r, M_{11}^l, M_{11}^r, M_{20}^l, M_{21}^l, X_{11}$ und X_{21} .

2) Aufstellung der Gleichungen.

Bei der Aufstellung der Gleichungen beachten wir die Symmetrieebedingungen (76) und dass S und T überall verschwinden, und wir brauchen nur das Achtel des Rostes zu berücksichtigen.

Aus den im ersten Abschnitt gegebenen Randbedingungsgleichungen erhalten wir die folgenden sechs Gleichungen, und zwar aus Gl. (I, 24a)

für den Knoten (20): $M_{10}^l + 2M_{20}^l + \frac{6}{l\mu} z_{10} = 0 \dots \dots \dots (1)$

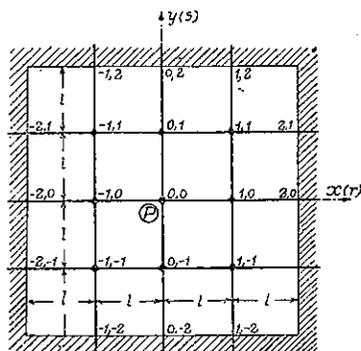


Abb. 45.

für den Knoten (21): $M_{11}^r + 2M_{21}^i + \frac{6}{l\mu} Z_{11} = 0 \dots\dots\dots (1_2)$

aus Gl. (I, 25a)

für den Knoten (20): $M_{10}^r - M_{20}^i = R_{20} \cdot l \dots\dots\dots (3_1)$

„ (21): $M_{11}^r - M_{21}^i = R_{21} \cdot l \dots\dots\dots (3_2)$

aus Gl. (I, 27a)

für den Knoten (20): $0 = \frac{6}{l\mu} (z_{11} - z_{10}) + 2M_{01}^r + M_{11}^i \dots\dots\dots (7_1)$

„ (21): $6\alpha X_{21} = -\frac{6}{l\mu} z_{11} + 2M_{11}^r + M_{21}^i \dots\dots\dots (7_2)$

Aus den Grundgleichungen erhalten wir die folgenden Gleichungen:
aus Gl. (1)

für (00): $2M_{00}^r + M_{10}^i + \frac{6}{l\mu} (z_{10} - z_{00}) = 0 \dots\dots\dots (1_3)$

„ (10): $M_{00}^r + 2(M_{10}^i + M_{10}^r) + M_{21}^i + \frac{6}{l\mu} (z_{00} - 2z_{10}) = 0 \dots\dots\dots (1_4)$

„ (11): $M_{01}^r + 2(M_{11}^i + M_{11}^r) + M_{21}^i + \frac{6}{l\mu} (z_{10} - 2z_{11}) = 0 \dots\dots\dots (1_5)$

aus Gl. (3)

für (00): $M_{00}^r - M_{10}^i = +\frac{1}{4} Pl \dots\dots\dots (3_3)$

„ (10): $M_{00}^r - M_{10}^i - M_{10}^r + M_{20}^i - 2(M_{11}^r - M_{11}^i) = 0 \dots\dots\dots (3_4)$

„ (11): $M_{01}^r - M_{11}^i - M_{11}^r + M_{21}^i = 0 \dots\dots\dots (3_5)$

aus Gl. (4)

für (10): $2X_{11} = M_{10}^i - M_{10}^r \dots (4_1)$; für (11): $X_{21} - X_{11} = M_{11}^i - M_{11}^r \dots (4_2)$

und aus Gl. (7a)

für (10): $0 = -\frac{6}{l\mu} (z_{11} - 2z_{10} + z_{00}) - (M_{11}^i - M_{10}^i) - 2(M_{01}^r - M_{00}^r) \dots\dots\dots (7_3)$

„ (11): $6\alpha X_{11} = -\frac{6}{l\mu} (z_{10} - z_{11}) - (M_{21}^i - M_{20}^i) - (M_{11}^r - M_{10}^r) \dots\dots\dots (7_4)$

Wir haben damit sechszehn Gleichungen aufgestellt, von denen eine Gleichung überzählig ist, und zwar leitet sich die Gl. (7₃) aus den Gl. (7₁) und (1₃) her, so dass es im Einklang mit der Anzahl der Unbekannten fünfzehn unabhängige Gleichungen gibt.

3) Auflösung der Gleichungen.

Wir eliminieren z_{00} , z_{10} und z_{11} aus der Gl. (7₁) und der Gleichungsgruppe

(1)₂ erhalten

aus (1₄) mit (1₁), (1₃): $M_{00}^r + M_{10}^i + M_{10}^r + M_{20}^i = 0 \dots\dots\dots(i)$

aus (1₅) mit (1₂), (7₁): $M_{01}^r + M_{11}^i + M_{11}^r + M_{21}^i = 0 \dots\dots\dots(ii)$

aus (7₁) mit (1₁), (1₂): $M_{10}^r + 2M_{20}^i + 2M_{01}^r + M_{11}^i - M_{11}^r - 2M_{21}^i = 0 \dots\dots(iii)$

Aus Gl. (4₁) und (4₂) ergeben sich

$$X_{21} = \frac{1}{2} (M_{10}^i - M_{10}^r) + M_{11}^i - M_{11}^r \dots\dots\dots(a)$$

$$X_{11} = \frac{1}{2} (M_{10}^i - M_{10}^r) \dots\dots\dots(b)$$

Wir erhalten dann

aus (7₂) mit (a), (1₂): $\alpha M_{10}^i - \alpha M_{10}^r + 2\alpha M_{11}^i - (1 + 2\alpha)M_{11}^r - M_{21}^i = 0 \dots(iv)$

aus (7₄) mit (b), (1₁), (1₂): $\alpha M_{20}^i - (1 + \alpha)M_{10}^r - M_{20}^i + M_{11}^i + M_{21}^i = 0 \dots(v)$

Damit haben wir fünf Gleichungen für *M* erhalten und mit der drei Gleichungen (3₃), (3₄) und (3₅) können wir *M* bestimmen. Zur Erleichterung der Auflösung subtrahieren wir die linken Seite der Gl. (v) aus der der Gl. (iv) und erhalten

$$M_{10}^r + M_{20}^i + 2\alpha M_{11}^i - 2(1 + \alpha)M_{11}^r - 2M_{21}^i = 0 \dots(vi)$$

Das Gleichungsschema für *M* ist dann folgendes:

| Gl. Nr. | M_{00}^r | M_{10}^i | M_{10}^r | M_{20}^i | M_{01}^r | M_{11}^i | M_{11}^r | M_{21}^i | |
|-------------------|------------|------------|-----------------|------------|------------|------------|------------------|------------|--------------------|
| (3 ₃) | +1 | -1 | | | | | | | = + $\frac{Pl}{4}$ |
| (i) | +1 | +1 | +1 | +1 | | | | | = 0 |
| (3 ₄) | +1 | -1 | -1 | +1 | -2 | +2 | | | = 0 |
| (iii) | | | +1 | +2 | +2 | +1 | -1 | -2 | = 0 |
| (ii) | | | | | +1 | +1 | +1 | +1 | = 0 |
| (3 ₅) | | | | | +1 | -1 | -1 | +1 | = 0 |
| (v) | | α | $-(1 + \alpha)$ | -1 | | | +1 | +1 | = 0 |
| (vi) | | | +1 | +1 | | $+2\alpha$ | $-2(1 + \alpha)$ | -2 | = 0 |

Diese Gleichungen sind nach dem Eliminations verfahren gelöst; es ergeben sich folgende Werte für die Biegunsmomente:

$$\left. \begin{aligned} M_{00}^r &= + \frac{Pl}{8N} (2 + 15\alpha + 22\alpha^2), & M_{20}^i &= - \frac{Pl}{8N} (1 + 11\alpha + 14\alpha^2), \\ M_{10}^i &= - \frac{Pl}{8N} (2 + 7\alpha + 4\alpha^2), & M_{10}^r &= + \frac{Pl}{8N} (1 + 3\alpha - 4\alpha^2), \\ M_{01}^r &= - M_{21}^i = + \frac{Pl}{16N} (1 + 9\alpha + 11\alpha^2), & M_{11}^i &= - M_{11}^r = -(1 - \alpha) \frac{Pl}{16N} \end{aligned} \right\} (77)$$

wobei der Kürze halber

$$N = 2 + 11\alpha + 13\alpha^2 \dots \dots \dots (78)$$

gesetzt ist. Die Auflagerreaktionen ergeben sich dann aus (3₁) und (3₂) zu

$$R_{20} = + \frac{P}{4N} (1 + 7\alpha + 5\alpha^2), \quad R_{21} = + \frac{P}{8N} (1 + 4\alpha + 8\alpha^2) \dots \dots (79)$$

Aus (a) und (b) erhalten wir für die Torsionsmomente

$$X_{11} = - \frac{Pl}{16N} (3 + 10\alpha), \quad X_{21} = - \frac{Pl}{16N} (5 + 8\alpha) \dots \dots \dots (80)$$

Die Verschiebungen ergeben sich aus (1₁), (1₂) und (1₃) zu

$$\left. \begin{aligned} z_{00} &= + \frac{Pl^3}{16EIN} (1 + 14\alpha + 24\alpha^2), \\ z_{10} = 2z_{11} &= + \frac{Pl^3}{48EIN} (1 + 19\alpha + 32\alpha^2). \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (81)$$

4) Sonderfälle.

a) $\alpha = \infty$ (Abb. 46).

Beim verschwindenden Drillungswiderstande erhalten wir:

$$\left. \begin{aligned} M'_{00} &= + \frac{11}{52} Pl, & M'_{20} &= - \frac{7}{52} Pl, \\ M'_{10} = M'_{10} &= - \frac{1}{26} Pl, \\ M'_{01} = -M'_{21} &= + \frac{1}{13} Pl, \\ M'_{11} = M'_{11} &= 0, & X_{21} = X_{11} &= 0, \\ R_{20} &= + \frac{5}{52} P, & R_{21} &= + \frac{1}{13} P, \\ z_{10} = 2z_{11} &= + \frac{2}{39} \cdot \frac{Pl^3}{EI}, \\ z_{00} &= + \frac{3}{26} \cdot \frac{Pl^3}{EI}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (82)$$

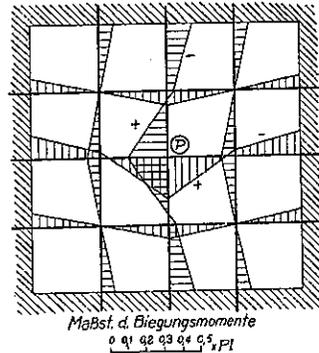


Abb. 46. $\alpha = \infty$.

b) $\alpha = 0$ (Abb. 47 a u. b).

Wenn wir $\alpha = 0$ setzen, so erhalten wir:

$$\left. \begin{aligned} M'_{00} = -M'_{10} &= + \frac{Pl}{8}, & M'_{20} = -M'_{10} &= + \frac{Pl}{16}, \\ M'_{01} = -M'_{11} = M'_{11} &= -M'_{21} = + \frac{Pl}{32}, \\ R_{20} &= + \frac{P}{8}, & R_{21} &= + \frac{P}{16}, \\ X_{21} &= - \frac{5}{32} Pl, & X_{11} &= - \frac{3}{32} Pl, \\ z_{10} = 2z_{11} &= + \frac{Pl^3}{96EI}, & z_{00} &= + \frac{Pl^3}{32EI}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (83)$$

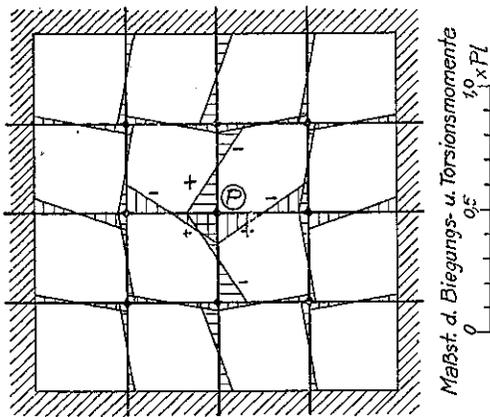


Abb. 47a. Biegemomente.

Maßst. d. Biegungs- u. Torsionsmomente
 $\frac{1}{10} \times Pl$
 $\frac{1}{5}$
 0

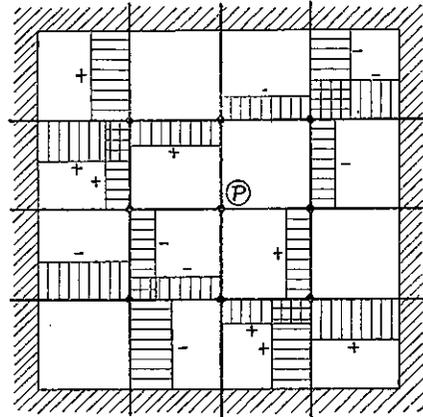


Abb. 47b. Torsionsmomente.