參考資料

土木學會誌　第十七卷第四號　昭和六年四月

最小働の原理に依りて求めたる重力堰堤の應力

(Stresses in Gravity Dams By Principle of Least Work
by B. F. Jackobsen, Proc. of the A. S. C. E, Sept. 1930)

今までの重力堰堤内の應力算定には，水平斷面に働く應力は直線變化をすると云ふ假定をしてゐる。所が，プラスチシンやインデァゴムで模型實驗を行つた結果は上記の假定と相距ることが遠いのを知つた。本論文は最小働の原理を使つて應力の分布を求めたもので，結果は實驗の結果ともよく合ふ。

今　n_y, n_x：垂直及び水平面に働く垂面應力

t：接面應力

w：1 立方呎のコンクリートの重さ（封度）

g：1 立方呎の水の重さ　　　　（〃）

M：堰頂から y 呎下の點に於ける Y 軸の廻りのモーメント

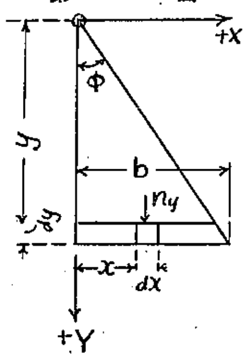
W：同じ點に於ける單位厚さの堰堤水平切斷片の重さ（封度）

b：同點に於ける堰堤の幅（呎）

ϕ：堰頂に於ける上下流面間の角

$k=\operatorname{tg}\phi=\dfrac{b}{y}$

第一圖

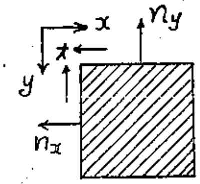


とすれば第一圖を參照して

$$W=0.5\,wby=0.5\,wky^2 \quad\text{.......(1)}$$

$$M=0.5\,wky^2\frac{b}{3}+\frac{g}{6}y^3=(g+wk^2)\frac{y^3}{6} \quad\text{.......(2)}$$

第二圖



第二圖に示す方向を各應力の正の方向とし xy 面には應力が働かぬものとすれば平衡條件として次の 3 式を得る。

$$\int_0^b n_y\,dx=-W=-0.5\,wky^2 \quad\text{.......(3)}$$

$$\int_0^b n_y\,x\,dx=-M=-(g+wk^2)\frac{y^3}{6} \quad\text{.......(4)}$$

$$\int_0^b t\,dx = -S = -0.5\,gy^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

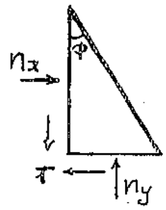
又 (x, y, z) 點に於ける dx, dy, dz にてかこまれた立方體の平衡條件より次式が出る

$$\frac{\partial n_y}{\partial y} + \frac{\partial t}{\partial x} + w = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

$$\frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial y} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

周邊條件として

第　三　圖



上流面では　$t=0,\ n_x=-gy$
下流面では　$t=n_y \operatorname{tg}\phi$　$\Bigg\}$ $\cdots\cdots\cdots\cdots (8)$

又　$n_x = t \operatorname{tg}\phi = n_y \operatorname{tg}^2\phi$
故に　$n_y n_c = t$　$\Bigg\}$ $\cdots\cdots\cdots\cdots (9)$

之れ等は**第三圖**に示す三角形の平衡より求められる。

前記 (3)〜(9) までの條件だけではまだ應力は求められない。そこで今までは，水平面に働く應力は直線變化をすると假定した。

即ち

$$n_y = Ay + Bx \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (10)$$

之れと (3), (4) とより A, B を求めて (10) に入れると

$$n_y = \left(-w + \frac{g}{k^2}\right) y + \left(\frac{w}{k} - 2\frac{g}{k^3}\right) x,$$

之れと (6), (7) より

$$t = -\frac{g}{k^2} x, \qquad n_x = -gy \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (11)$$

之れで三つの應力 n_y, n_x, t が求めらる。

最小働の原理を使ふ方法は次の如くする。即ち n_y, n_x, t による internal work は

$$L = \frac{1}{2G} \iiint \left[\frac{n_y{}^2 + n_x{}^2}{2} - \frac{(n_y + n_x)^2}{2(m+1)} + t^2 \right] dx\,dy\,dz \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (12)$$

但し　$\dfrac{1}{m}$ = ポアソン比　　$G = \dfrac{mE}{2(m+1)}$

(10) の代りに (12) を最小ならしめると云ふ條件式を立てればこれで各應力が求められるわけであるが之れは容易でないから近似方法として先づ

$$n_y = Ay + Bx + C\frac{x^2}{y} + F\frac{x^3}{y^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (13)$$

と假定する。即ち (3), (4) 式で求め得る常數の他尚二つの常數を含む，この二つの常數を最小働の原理によつて決めるのである。

(3), (4) により A, B を C, F で表はすことが出來る。即ち

$$A=\frac{g}{k^2}+\frac{Ck^2}{6}+\frac{Fk^3}{5}-w \quad \cdots\cdots(14)$$

$$B=\frac{w}{k}-Ck-\frac{2g}{k^3}-0.9Fk^2 \quad \cdots\cdots(15)$$

そこで $\frac{\partial L}{\partial n_x}=0,\ \frac{\partial L}{\partial n_y}=0,\ \frac{\partial L}{\partial t}=0$ とおけば

$$\frac{\partial L}{\partial C}=\frac{\partial L}{\partial n_x}\frac{\partial n_x}{\partial C}+\frac{\partial L}{\partial n_y}\frac{\partial n_y}{\partial C}+\frac{\partial L}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial C}=0,\quad \text{同様に}\quad \frac{\partial L}{\partial F}=0 \quad \text{となる}$$

故に (12) 式により

$$\frac{\partial L}{\partial C}=\frac{1}{2G}\int_0^1 dz\int_0^H dy\int_0^b dx\left[\frac{m}{m+1}\left(n_y\frac{\partial n_y}{\partial C}+n_x\frac{\partial n_x}{\partial C}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{1}{m+1}\left(n_y\frac{\partial n_x}{\partial C}+n_x\frac{\partial n_y}{\partial C}\right)+2t\frac{\partial t}{\partial C}\right]=0 \quad \cdots\cdots(16)$$

$$\frac{\partial L}{\partial F}=\frac{1}{2G}\int_0^1 dz\int_0^H dy\int_0^b dx\left[\frac{m}{m+1}\left(n_y\frac{\partial n_y}{\partial F}+n_x\frac{\partial n_x}{\partial F}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{1}{m+1}\left(n_y\frac{\partial n_x}{\partial F}+n_x\frac{\partial n_y}{\partial F}\right)+2t\frac{\partial t}{\partial F}\right]=0 \quad \cdots\cdots(17)$$

次に n_x, t を x, y 及び A, B, C, F の函数として表はすために (13) 式を y につき微分し (6) に代入し，之れを積分すれば $x=0$ の時 $t=0$ なる故

$$t=-Ax+\frac{C}{3}\frac{x^3}{y^2}+\frac{F}{2}\frac{x^4}{y^3}-wx \quad \cdots\cdots(18)$$

同様にして (18) と (7) とより

$$x=0 \quad \text{の時} \quad n_x=-gy$$

故に

$$n_x=\frac{C}{6}\frac{x^4}{y^3}+0.3F\frac{x^5}{y^4}-gy \quad \cdots\cdots(19)$$

(14), (15) 兩式より

$$\frac{\partial A}{\partial C}=\frac{k^2}{6};\quad \frac{\partial B}{\partial C}=-k;\quad \frac{\partial A}{\partial F}=\frac{k^3}{5};\quad \frac{\partial B}{\partial F}=-0.9k^2$$

故に (13), (18), (19) より

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial n_x}{\partial C}&=\frac{x^4}{6y^3}\\ \frac{\partial n_y}{\partial C}&=\frac{k^2}{6}y-kx+\frac{x^2}{y}\\ \frac{\partial t}{\partial C}&=-k^2\frac{x}{6}+\frac{x^3}{3y^2}\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(20)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial n_x}{\partial F}&=0.3\ \frac{x^5}{y^4}\\ \frac{\partial n_y}{\partial F}&=\frac{k^3}{5}\ y-0.9\ k^2x+\frac{x^3}{y^2}\\ \frac{\partial t}{\partial F}&=-\frac{k^3}{}\ x+0.5\ \frac{x^4}{y^3}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(21)$$

之れ等の値を (16), (17) に代入し $x=0$ より $x=b=ky$ まで定積分を行ひ整理すれば次の二式を得る。

$$\frac{1}{2G}\int_0^1 dz\int_0^H y^3\,dy\Big[\frac{m}{m+1}\Big(\frac{C}{180}+\frac{F}{120}\ k+\frac{C}{324}\ k^4+\frac{F}{200}k^5-\frac{g}{30}\Big)$$
$$-\frac{1}{m+1}\Big(\frac{A}{30}+\frac{B}{36}\ k+\frac{8}{315}\ Ck^2+\frac{F}{42}\ k^3\Big)$$
$$-\frac{A}{45}+\frac{C}{105}\ k^2+\frac{F}{72}\ k^3-\frac{w}{45}\Big]=0\cdots\cdots\cdots\cdots(22)$$

$$\frac{1}{2G}\int_0^1 dz\int_0^H y^3\,dy\Big[\frac{m}{m+1}\Big(\frac{C}{120}+\frac{9}{700}\ Fk+\frac{C}{200}\ k^4+\frac{9k^5}{1100}\ F-\frac{g}{20}\Big)$$
$$-\frac{1}{m+1}\Big(\frac{A}{20}+\frac{3}{70}\ Bk+\frac{C}{25}\ k^2+\frac{4}{105}\ Fk^3\Big)$$
$$-\frac{A}{30}+\frac{3}{200}\ Ck^2+\frac{F}{45}\ k^3-\frac{w}{30}\Big]=0\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(23)$$

上式の H は堰堤の高さを表はす，故に A, B, C, F 等の常數は H の函數ではない。故に上式の大括弧内は零とならなければならぬ，かくて得る二式と (14), (15) とを組合せれば各常數は定まり從つて應力も求まる。

計算例： 應力が直線變化をすると假定した場合，上流趾で應力が零となる如き斷面を考へる。

即ち (11) 式より $x=0$ の時 $n_y=0$ より

$$w=\frac{g}{k^2}$$

今 $g=62.5, m=8, w=150.23, k=\mathrm{tg}\phi=\dfrac{b}{y}=0.645$ とし之れ等の値を (14), (15) に代入すれば

$$A=0.069337\ C+0.05367F\ \cdots\cdots\cdots\cdots(14a)$$

$$B=-232.92-0.645\ C-0.37442\ F\ \cdots\cdots\cdots\cdots(15a)$$

又 (22), (23) より

$$8.2013\ C+8.2909\ F-25.926\ A-1.9907\ B=5\,190.3\ \cdots\cdots\cdots(22a)$$

$$12.568\ C+13.011\ F-38.889\ A-3.0714\ B=7\,785.5\ \cdots\cdots\cdots(23a)$$

之れ等の式より A, B, C, F を求め 144 で除せば $A'=0.3765$; $B'=-5.777$; $C'=9.50$; $F'=-5.263$, 之れを (13), (18), (19) に代入すれば平方吋當りの應力が求められる。即ち

$$\left.\begin{aligned} n_y &= 0.3765\,y-5.777\,x+9.504\,\frac{x^2}{y}-5.263\frac{x^3}{y^2} \\ t &= -1.420\,x+3.168\,\frac{x^3}{y^2}-2.632\,\frac{x^4}{y^3} \\ n_x &= -0.4349\,y+1.584\,\frac{x^4}{y^3}-1.579\,\frac{x^5}{y^4} \end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(24)$$

今, $y=100$ 呎として各應力の値を求めれば**第一表**の如くなり，グラフに畫けば**第四圖**の如くなる，之れを見れば上流堰堤に張力の働くことを知る。

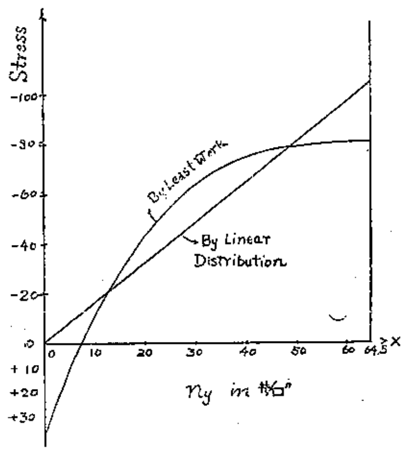
第　一　表

x	n_y	t	n_x
0	+37.650	0.000	−43.403
3	+21.161	−−−	−−−
6	+ 5.274	−−−	−−−
10	−11.140	−13.908	−43.389
20	−44.082	−26.238	−43.200
30	−64.332	−36.172	−42.503
40	−75.048	−43.254	−40.962
50	−79.389	−47.839	−38.438
60	−80.512	−50.868	−35.201
64.5	−80.809	−52.119	−33.616

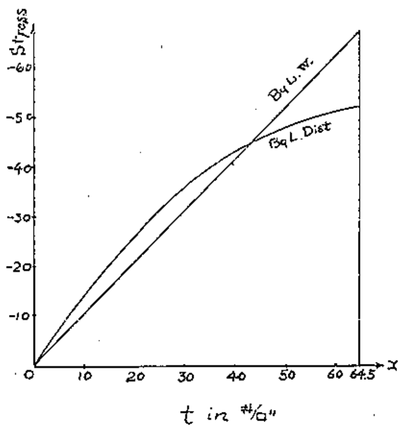
第　二　表

x	n_y	n_y (第一表より)
0	+29.6	+37.7
10	− 9.87	−11.1
20	−40.8	−44.1
30	−63.2	−64.3
40	−77.0	−75.0
50	−82.4	−79.4
60	−79.2	−80.5
64.5	−75.0	−80.8

第 四 圖 (其 一)



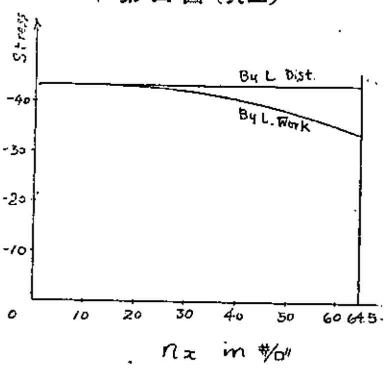
第 四 圖 (其 二)



以上の解法は近似解で (13) に於て n_y に假定した式の項の數によつて尚一層正確になる。反對に項の數を減ずれば卽ち $F=0$ と置いて n_y を求めて第一表の n_y の値と比較してみると第二表の如くなり其の間に大差のないことがわかる。

（伊藤剛 抄譯）

第四圖（其三）



Truss 橋の立體二次應力

(W. Bergfelder, Die räumlichen Zusatzkräfte beim Drei- und Viergurtträger. Bautechnik, Der Stahlbau, Heft 17, 22. Aug. 1930)

本編は 3 本又は 4 本の弦材を持つ truss 橋の立體二次應力を求め，之れを互に比較檢討して，更に arch の立體二次應力との比較を試みたものである。

橋桁の立體作用

通常 truss 橋を設計するには，上部構造を幾つかの平面 truss に分解し，各平面 truss に加はる荷重は其の平面内に働くものゝみを採る。一本の部材が同時に 2 箇の平面 truss に屬するときは，其の應力は同一の荷重位置の下で各の truss から算出したものを加へ合せ，curved chord truss や arch の curved chord に生ずる垂直の二次力は主桁で受けてゐる。併し實際の橋は何れも立體構造で，力學的にも立體として作用するから，玆に橋梁を立體 truss として計算する場合と，平面 truss に分けて解く場合の部材の應力の差異，卽ち「立體二次應力」の作用を明かにしよう。今第一圖上に示す truss に於て，後側の主桁に一列の活荷重を載せると，後側の下弦材は前面のより強く伸びるから，下側綾構は後へ曲り下側綾構の部材と支材とに應力を生ずる。卽ち主桁に偏荷重を加へると，下側の綾構は強く載荷された主桁の方へ曲る。例へば一方の主桁は右から，他の主桁は左から何れも橋の中央まで載荷すれば綾構は S 字型に曲るが，之れは「十字型載荷」として後に述べる。上弦材は之れと反對に應壓力を受けて縮むから，上側綾構は荷重の少い主桁の方へ曲る。