

論 說 報 告

土木學會誌 第十六卷第十號 昭和五年十月

二軸の方向に於ける彎曲剛率不等なる
矩形平版の一解法

會員 工學士 井 口 鹿 象

A Solution of Rectangular Plates with Unequal
Flexural Rigidities in Two Directions

By Shikazo Iguchi, C. E., Member.

内 容 梗 概

本論に於ては、二軸の方向に於ける彎曲剛率不等なる矩形平版に關する M. T. Huber 氏の基本方程式を根據とし、分布荷重を受くる場合の一般解式を求め、且つ之れを各特殊の場合に適用せる公式を誘導し、併せて二三の数字的算例を示せるものなり。

目 次

第一章	總 說	1
第一節	緒 言	1
第二節	二軸の方向に於ける彎曲剛率不等なる平版の撓曲方程式	2
第三節	二軸の方向に於ける彎曲剛率不等なる平版の應力に關する公式	4
第四節	平版の基本公式解法の概要	7
第五節	解説可能なる矩形平版の周邊の條件	11
第六節	豫備的數學公式	11
第二章	普通の桁に對する應用	17
第一節	一般式	18
第二節	特殊の場合に對する應用	21
第三章	矩形平版に對する應用	22
第一節	一般式	22
第二節	特殊の場合に對する應用	32
第三節	Huber の公式に於ける c の値と公式適用の限界	48
第四節	特殊の場合に對する数字的算例	50

第一章 總 說

第一節 緒 言

總ての方向に於ける彎曲剛率 (flexural rigidity) が相等しき矩形平版 (isotropic rectangular

plate) の彎曲並に之れに依りて生ずる應力の研究は、從來各國の學者に依りて行はれ、其の解説の順序方法、誘導せられたる公式等亦多種多様にして一々枚舉に追なしと雖も、孰れも或る特殊の周邊條件 (boundary conditions) 及び荷重に應ずる個々の問題に就き論述せるもの多く、周邊條件並に荷重の如何に關せず一般的に適用し得る如き公式の組織的誘導を試みたるもの稀なり。

二軸の方向に於ける彎曲剛率不等なる平版、例へば鐵筋コンクリート床版に於て見る如き物體に對する彎曲並に彎曲應力の計算に際しては、從來平版の基本公式とは殆ど無關係なる近似公式に依るか、若くは凡ての方向に於ける剛率が不變なる平版に關する公式を便宜使用せるに過ぎざる状態にして、理論的見地より觀察して吾人の頗る遺憾とする處なり。

而して此の種の平版に對する基本公式たる微分方程式は、次節に於て記載せる如く、M. T. Huber, H. Marcus 氏等に依りて誘導せられたるものあるも、各種の場合に對する該方程式の系統的解法に至りては未だ深く之れが討究を試みたる者なきが如し。

著者は先づ M. T. Huber 氏に依りて與へられたる基本公式を根據とし、解説可能なる 9 種の周邊條件を有する矩形平版 (本章第五節) が、Fourier 級數に展開し得る如き分布荷重ならば如何なる荷重に對しても一般的に當てはまるが如き公式を求め、之れを根據として各特殊の状態に在る平版に對する公式を誘導し、且つ其の二三の場合に對する數字的算例に就き記述せむとす。

吾人の日常遭遇する鐵筋コンクリート床版の彎曲剛率は、單に二軸の方向に不等なるのみならず、嚴格の意味に於ては其の各點に於て異なるものにして、斯の如き床版而も其の剛率を或る連續函數を以て表はすことを得ざるものゝ理論的解法は殆ど不可能事にして、筆者の叙べむとする所亦實際の場合の一特例に過ぎざるのみならず、コンクリートの不均質性、不完全彈性、依つて生ずる應力分布の法則に關する疑問、非連續的鐵筋の挿入等亦其の嚴正を遲疑する幾多の原因を爲すものありと雖も、之れに依りて從來の計算方法に一步を進め、其の實驗的研究の一助たることを得ば、筆者の望外の幸とする處なると共に卑見に對し切に先輩諸賢の叱正を請はむとするものなり。

第二節 二軸の方向に於ける彎曲剛率不等なる平版の撓曲方程式

1. M. T. Huber の公式

1914年 M. T. Huber 氏は鐵筋コンクリート床版に對し次の如き撓曲方程式を發表せり。^(*)

(*) Z. Öst. Ing. V., Heft 30: Die Grundlagen einer rationellen Berechnung der kreuzweise bewehrten Eisenbetonplatten.

$$\left. \begin{aligned}
 J_x \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + 2J_0 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^2 \partial y^2} + J_y \frac{\partial^4 \zeta}{\partial y^4} &= \frac{1-\mu^2}{E} p \\
 J_0 &= \frac{1}{2\mu} (J_x + J_y) + \left(1 - \frac{1}{\mu}\right) J'
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

但し

上式中 ζ = 矩座標軸 x, y に refer せる任意の點に於ける撓度 (deflection)

$J_x, J_y = x$ 及び y 軸に直角なる單位幅を有する斷面に對する惰率 (moment of inertia)

p = 任意の點に於ける單位面積に對する荷重

E = コンクリートの彈性率 (modulus of elasticity)

μ = コンクリートの Poisson's number

$$2GJ' = \frac{E\mu}{\mu+1} J' = \text{torsional rigidity}$$

にして、鐵筋コンクリート斷面は、彎曲力率に對する場合と異り、扭力率に對しては完全に抵抗し得ざるものとし、縦横鐵筋の交叉點に於ける緊縮不充分なる場合は、 $J' = \frac{h^3}{12}$ 、即ち鐵筋の效力は全然無視すべきものと假定せり。而して Huber 氏は上記公式應用の一例として、四邊に於て單純に支承せらるゝ矩形平版が等布荷重を受くる場合に對し、H. Lorenz 氏の近似的方法に倣ひ

$$\zeta = f \cos \frac{\pi}{a} x \cos \frac{\pi}{b} y$$

に於ける f の値を求めたり。

1923 年 Huber 氏は (1) 式を更に一般化して orthogonally anisotropic rectangular plate に對し

$$\left. \begin{aligned}
 B_1 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^2 \partial y^2} + B_2 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial y^4} &= p \\
 B_1 &= \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 \mu_2 - 1} E J_x, \quad x \text{ 軸の方向に於ける彎曲剛率} \\
 B_2 &= \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 \mu_2 - 1} E J_y, \quad y \text{ 軸の方向に於ける彎曲剛率} \\
 2H &= \frac{B_1}{\mu_2} + \frac{B_2}{\mu_1} + 4C, \quad 2C = \text{torsional rigidity}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

なる公式を誘導し、⁽¹⁾ 之れを波狀版、肋版 (slab with ribs) 及び網狀桁 (net-shaped beam) 等に適用せむとする場合の B_1, B_2, H 等の定め方を示し、翌々 1925 年非常に長き鐵筋コンクリート床版が單純に支承せらるゝ場合の解法に就き説述せり。⁽²⁾

公式 (1) は (2) の特別の場合にして、(2) に於て

(1) Der Bauing., 1923, Heft 30.

(2) Der Bauing., 1925, Heft 1 u. 2.

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu, \quad 2C = \frac{E\mu}{\mu+1} J'$$

と置けば (1) 式を得べきことを知るべし。

II. H. Marcus 氏の公式

H. Marcus 氏は二軸の方向に於ける惰率が不異なる鉄筋コンクリート床版に對し、次の如き方程式を誘導したり。^(*)

$$J_x \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + (J_x + J_y) \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^2 \partial y^2} + J_y \frac{\partial^4 \zeta}{\partial y^4} = \frac{1 - \mu^2}{E} p \dots\dots\dots (3)$$

此の式は Huber 氏の公式 (1) の J' の代りに $\frac{1}{2} (J_x + J_y)$ と置きたるものにして、鉄筋コンクリート断面は彎曲力率に對すると同様扭力率に對しても完全に抵抗し得るものと假定し、其の torsional rigidity を

$$(J_x + J_y) G = \frac{E\mu}{2(\mu+1)} (J_x + J_y)$$

とせるものなり。此の假定は Huber 氏の假定と大いに異なる所にして、其の何れが適當なるや、或は Huber 氏の公式に於ける C, H 等は如何に採るべきやは、主として實驗的研究に待つべき興味ある問題とす。

第三節 二軸の方向に於ける彎曲剛率不異なる平板の應力に関する公式

M. T. Huber の公式 (2) は、二軸の方向に於ける彎曲剛率不異なる平板に對する最も一般的なる撓曲方程式なるを以て、本節に於ては之れを根據とせる各應力に関する公式を掲記すべし。

I. 撓曲方程式

便宜上公式 (2) を次の如く書換ふべし。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + 2K'^2 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^2 \partial y^2} + K^2 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial y^4} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \lambda'^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \zeta = \frac{p_{xy}}{N_x} \\ \text{但し } K^2 &= \frac{B_2}{B_1} = \frac{J_y}{J_x}, \quad K'^2 = \frac{H}{B_1} = \frac{1}{2} \left(\frac{K^2}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) + \frac{2C}{B_1} \\ N_x &= B_1 = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 \mu_2 - 1} E J_x \\ \lambda^2 &= K'^2 + \sqrt{K'^4 - K^2}, \quad \lambda'^2 = K'^2 - \sqrt{K'^4 - K^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

(*) H. Marcus: Die Theorie elastische Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung biegsamer Platten, S. 105.

上式中, $2K'^2=1+K^2$ とすれば

$$\lambda^2=1, \quad \lambda'^2=K^2$$

従て

$$2C = \frac{E\mu}{2(\mu+1)} (1+K^2) J_x$$

となり, Marcus 氏の公式 (3) を得べし。

II. 力 率

$M_x, M_y = x$ 及び y 軸に直角にして単位幅を有する断面に於ける彎曲力率

M_{xy} = 同上断面に於ける扭力率

とすれば次の關係あり。

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -N_x \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) \\ M_y &= -N_x K^2 \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

$$M_{xy} = -2C \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y}$$

但し

$$\left. \begin{aligned} 2C &= \left(\frac{2C}{N_x} \right) N_x \\ &= \left(1 - \frac{1}{\mu} \right) \frac{J'}{J_x} N_x, \quad \mu_1 = \mu_2 = \mu \text{ の時} \\ &= \frac{1}{2} (1+K^2) \left(1 - \frac{1}{\mu} \right) N_x, \quad \left(J' = \frac{1}{2} (J_x + J_y) \right) \text{ の時} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

III. 剪 裁 力

$S_x, S_y = x$ 及び y 軸に直角にして単位幅を有する断面に於ける剪裁力

とすれば

$$S_x = -N_x \left\{ \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3} + \left(\frac{1}{\mu_2} + \frac{2C}{N_x} \right) \frac{\partial^3 \xi}{\partial x \partial y^2} \right\}$$

$$S_y = -N_x \left\{ K^2 \frac{\partial^3 \xi}{\partial y^3} + \left(\frac{K^2}{\mu_1} + \frac{2C}{N_x} \right) \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^2 \partial y} \right\}$$

但し

$$\frac{1}{\mu_2} + \frac{2C}{N_x} = \frac{1}{\mu} + \left(1 - \frac{1}{\mu} \right) \frac{J'}{J_x}, \quad \mu_1 = \mu_2 = \mu \text{ の時}$$

$$= \frac{1}{2} \left(K^2 + 1 - \frac{K^2 - 1}{\mu} \right), \quad \left(J' = \frac{1}{2} (J_x + J_y) \right) \text{ の時}$$

$$\frac{K^2}{\mu_1} + \frac{2C}{N_x} = \frac{K^2}{\mu} + \left(1 - \frac{1}{\mu} \right) \frac{J'}{J_x}, \quad \mu_1 = \mu_2 = \mu \text{ の時}$$

$$= \frac{1}{2} \left(K^2 + 1 + \frac{K^2 - 1}{\mu} \right), \quad \left(J' = \frac{1}{2} (J_x + J_y) \right) \text{ の時}$$

.....(7)

IV. 反 力

平板が四邊に於て完全に固定せられざる場合は、四隅 O, A, B, C (第一圖参照) は上方にはね上るを以て、周邊の凡ての點に於ける撓度を零ならしむるためには、四隅に於て次の如き集中外力を作用せしめざるべからず。

$$\left. \begin{aligned} P_O &= 2 M_{xy}|_{x=0, y=0} = -2C \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right)_{x=0, y=0} \\ P_A &= -2 M_{xy}|_{x=a, y=0} = +2C \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right)_{x=a, y=0} \\ P_B &= -2 M_{xy}|_{x=0, y=b} = +2C \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right)_{x=0, y=b} \\ P_C &= 2 M_{xy}|_{x=a, y=b} = -2C \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right)_{x=a, y=b} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

上記の集中外力のため各周邊に生ずべき分布反力を Q_{OB}, Q_{AC}, Q_{OA} 及び Q_{BC} とすれば

$$\left. \begin{aligned} Q_{OB} &= -2C \left(\frac{\partial^3 \zeta}{\partial x \partial y^2} \right)_{x=0} \\ Q_{AC} &= +2C \left(\frac{\partial^3 \zeta}{\partial x \partial y^2} \right)_{x=a} \\ Q_{OA} &= -2C \left(\frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^2 \partial y} \right)_{y=0} \\ Q_{BC} &= +2C \left(\frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^2 \partial y} \right)_{y=b} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

にして、四邊に於て完全に固定せられざる矩形平板の各邊に於ける分布反力は次式を以て表はさるべし。

$$\left. \begin{aligned} R_{OB} &= S_x|_{x=0} + Q_{OB} = -N_x \left\{ \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} + \left(\frac{1}{\mu_2} + \frac{4C}{N_x} \right) \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x \partial y^2} \right\}_{x=0} \\ R_{AC} &= -S_x|_{x=a} + Q_{AC} = +N_x \left\{ \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} + \left(\frac{1}{\mu_2} + \frac{4C}{N_x} \right) \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x \partial y^2} \right\}_{x=a} \\ R_{OA} &= S_y|_{y=0} + Q_{OA} = -N_x \left\{ K^2 \frac{\partial^3 \zeta}{\partial y^3} + \left(\frac{K^2}{\mu_1} + \frac{4C}{N_x} \right) \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^2 \partial y} \right\}_{y=0} \\ R_{BC} &= -S_y|_{y=b} + Q_{BC} = +N_x \left\{ K^2 \frac{\partial^3 \zeta}{\partial y^3} + \left(\frac{K^2}{\mu_1} + \frac{4C}{N_x} \right) \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^2 \partial y} \right\}_{y=b} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

但し

$$\frac{1}{\mu_2} + \frac{4C}{N_x} = \frac{1}{\mu} + 2 \left(1 - \frac{1}{\mu} \right) \frac{J'}{J_x}, \quad \mu_1 = \mu_2 = \mu \text{ の時}$$

$$= 1 + K^2 - \frac{K^2}{\mu}, \quad \left(J' = \frac{1}{2} (J_x + J_y) \right) \text{ の時}$$

$$\frac{K^2}{\mu_1} + \frac{4C}{N_x} = \frac{K^2}{\mu} + 2 \left(1 - \frac{1}{\mu} \right) \frac{J'}{J_x}, \quad \mu_1 = \mu_2 = \mu \text{ の時}$$

$$= 1 + K^2 - \frac{1}{\mu}, \quad \left(\begin{array}{l} \mu_1 = \mu_2 = \mu \\ J = \frac{1}{2}(J_x + J_y) \end{array} \right) \text{の時}$$

平版が周邊に於て完全に固定せらるゝ場合は、(9)式に示す附加分布反力を生ずることなきを以て、其の分布反力は單に S_x 又は S_y より生ずるもの、即ち(10)式右邊の各 Q を零と置きたるものなり。

又周邊に於ける反力の合成力を R とすれば

$$R = \int_0^b (R_{OB} + R_{1C}) dy + \int_0^a (R_{OA} + R_{BC}) dx + P_0 + P_A + P_B + P_C$$

然るに R_{OB} , R_{1C} , R_{OA} , R_{BC} 等に含まるゝ附加分布反力の合成力は、四隅に於ける集中反力 ΣP と相殺せらるゝものなるを以て、之れと基本公式(4)の兩邊を平版の全面に付き積分せる結果とに依り、次の如き當然の關係を得べし。

$$R = \int_0^b \{ (S_x)_{y=0} - (S_x)_{y=a} \} dy + \int_0^a \{ (S_y)_{x=0} - (S_y)_{x=b} \} dx = \int_0^a \int_0^b p_{xy} dx dy \dots\dots\dots (11)$$

此の式は各個々の問題に對する計算の結果の檢算用として使用することを得べし。

V. 内働及び外働

全平版に對する内働及び外働を夫々 ω_i 及び ω_e を以て表はせば次の關係あり。

$$\left. \begin{aligned} \omega_i &= \frac{N_x}{2} \int_0^a \int_0^b \left\{ \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right)^2 + K^2 \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{K^2 + 1}{\mu_1 + \mu_2} \right) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \frac{4C}{N_x} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx dy \\ \omega_e &= \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \zeta p_{xy} dx dy, \quad \omega_i = \omega_e \end{aligned} \right\} \dots\dots (12)$$

第四節 平版の基本公式解法の概要

本節に於ては平版の基本公式の解法として従來行はれたる種々の方法の概要を述べ、併せて著者の探らむとする方法に就て説述せむとす。

平版の基本公式たる偏微分方程式の解法の主なるものは、大別して次の二つと爲すことを得べし。

I. 第一法

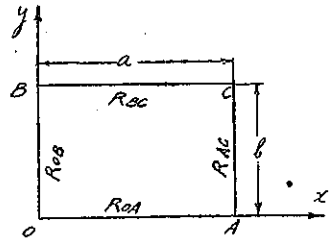
此の方法は偏微分方程式の解法として最も普通に用ひらるゝものにして、先づ(4)式を満足するなるべく簡單にして都合よき particular integral $\zeta^{(0)}$ を假定し、更に

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \lambda'^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \zeta^{(1)} = 0 \dots\dots\dots (a)$$

を満足する complementary function $\zeta^{(1)}$ を求め

$$\zeta = \zeta^{(0)} + \zeta^{(1)} \dots\dots\dots (b)$$

第一圖



を以て所要の解式とし^(*), $\zeta^{(1)}$ 中に含まるゝ未定積分係数は, (b) 式が與へられたる周邊條件を満足する様に定めむとするものにして, 其の結果は普通單式無限級數を以て表はさる。然れども此の方法は, 平板の周邊條件が極めて簡單なる場合, 即ち少くとも相對する二邊が單純に支承せられ, 該邊の凡ての點に對し Navier's boundary condition が満足さるゝ如き場合は, 所謂 Levy's method に依り比較的容易に求むることを得るも, 然らざる場合に於ては相當煩雜なる手數を要するものとす。又 particular integral $\zeta^{(0)}$ は (4) 式を満足すべきものなるを以て, 荷重の状態に依りて異なるのみならず (通常矩形の相對する二邊が無限大なる strip に對する撓度の式を以て $\zeta^{(0)}$ とす), 同一の荷重に對しても千差萬様に於て, 其の求め方を一定の法式に依りて律すること能はず, 要はなるべく簡單にして便利なる式を撰定するに在るも, 其の定め方の如何に依りては, $\zeta^{(1)}$ 中に含まるゝ未定係數を求むる上に於て煩雜を來す虞あるのみならず, 仍て得べき結果亦往々にして複雑なる形式となることあり, 蓋し從來東西の學者が各其の獨特の particular integral を求むる上に於て, 特に其の思考を費すを惜まざりし所以なり。

II. 第二法

此の方法は前記第一法と其の演算の順序に於て恰も正反對なり。即ち最初凡ての周邊條件を満足すべき撓度の式を假定し, 其の中に含まるゝ未定係數を, 該式が (4) 式を満足する様定めむとするものにして, 其の結果は普通複式無限級數を以て表はさる。此の方法に於ては, 最初假定せる撓度の式が (4) を満足する様に該式に含まるゝ未定係數を定むることが其の演算上相當の手數を要することあるも, 第一法に於て各周邊條件を満足せしむるため行ふべき計算に比し必ずしも煩雜なるものに非ず。而して此の方法に依りて得べき解式が複式無限級數として表はさるゝは其の不利益の一とする所なるも, 其の他の點に於ては頗る便利にして, 殊に第一法の如く particular integral を撰定するの要なく, 荷重を表はす函數が Fourier の級數に展開し得るものならば, 如何なる分布荷重にも, 又如何なる周邊條件のものにも (但し本論に於ては第五節記載の 9 種のものに限るものとす) 適用し得る一般式を誘導することを得べし。

複式無限級數は單式無限級數より, 其の形に於ては却て簡單なること多きも, 其の收斂の程度は概して後者より緩慢なるが爲に, 實際の數字的計算, 特に力率, 剪裁力, 反力等の如く高次の微分式を含むもの程其の計算に不便を感ずること多し。然れども後章に於て論述せる如

(*) A. Nadai (Formänderungen und Spannungen von rechteckigen elastische Platten), H. Hencky (Über den Spannungszustand in rechteckigen ebenen Platten bei gleichmäßig und bei konzentrischer Belastung) 等は凡ての方向に於ける剛率が不變なる矩形平板を解くに當り此の方法を用ひたり。

く、第二法に依りて得たる複式無限級数は、凡て單式無限級數に變形することを得るが故に（此の場合第一法に於て必要とせる particular integral $\xi^{(0)}$ は自然的に誘致せらるゝものとす）此の點より觀たる彼此の得失は結局度外視することを得べし。

1821年 Navier 氏は前記第二法に依り、分布荷重又は一つの集中荷重を受くる平版の撓度の式を誘導せり、然れども其の周邊は何れも單純に支承せらるゝ特別の場合に限られたるものなり。⁽¹⁾

W. Ritz, H. Lorenz⁽²⁾ 氏等の近似的解法は又此の第二法に屬するものにして、唯だ其の初めに假定すべき撓度の式が有限項の函數なる場合に於ては、基本公式(4)を完全に満足すること能はざるものとす、此外 Lewe⁽³⁾ 氏の Pilzdecken, Hager⁽⁴⁾ 氏の普通の矩形平版に關する解法等は、孰れも之れと類似の方法に依りたるものなり。

III. 著者の採用せる方法

前節に記載せる如く、平版の一般的解法としては第二法を採用するの有利なることあるを認め、著者は二軸の方向に於ける彎曲剛率不等的な矩形平版を解くに當り此の方法を用ふることとせり。

今 X_{mn} 及び Y_{mn} を夫々 x 及び y のみの函數とし、 X_{mn}, Y_{mn} は與へられたる平版の凡ての周邊條件を満足するものとすれば、任意の點に於ける撓度 ξ は次式を以て表はすことを得べし。

$$\xi = \frac{pb^4}{N_x} \xi = \frac{pb^4}{N_y} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} X_{mn} Y_{mn} \dots (13)$$

但し $p = \text{定数}$

$b = y$ 軸に並行なる矩形の邊長

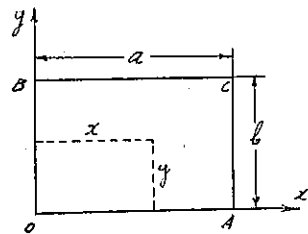
$A_{mn} = \text{未定係數}$

上式を基本公式(4)に當てはむれば

$$\frac{pb^4}{N_x} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} (X_{mn}'''' Y_{mn} + 2K'^2 X_{mn}'' Y_{mn}'' + K''^2 X_{mn} Y_{mn}'''') = \frac{pxy}{N_x}$$

故に任意の點に於ける單位面積に對する荷重 p_{xy} を

第二圖



(1) A. Nadai: Elastische Platten, S. 117 又は L. Föppl: Draug und Zwang, Bd. I, S. 157.
 (2) H. Lorenz: Technische Elastizitäts-Lehre, Bd. IV.
 (3) Lewe: Pilzdecken.
 (4) K. Hager: Berechnung ebener, rechteckiger Platten mittels trigonometrischer Reihen.

$$p_{xy} = pf(x), \quad \text{但し} \quad p = \text{定数}$$

を以て表はせば、(3) が (4) 式を満足せしむるためには

$$b^4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} (X_{mn}'''' Y_{mn} + 2K'^2 X_{mn}'' Y_{mn}'' + K^2 X_{mn} Y_{mn}'''') = f(xy)$$

ならざるべからず。此の式中 x 及び y に關する既知函数は凡て Fourier の級數に展開することを得るものとすれば、上式は

$$b^4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} R_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y$$

とすることを得べし。而して此の關係は x 及び y の如何に關せず成立するを要するものなるを以て

$$b^4 \Phi_{mn} = R_{mn} \dots \dots \dots (14)$$

ならざるべからず。

上式中 Φ_{mn} は m, n, A_{mn} 等を含む或る函数、 R_{mn} は荷重が與へらるれば既知式なるが故に、(14) 式より A_{mn} の値を求むれば、其の値は最初假定せる撓度の式 (13) が基本公式 (4) を満足せしむるものに外ならず。而して此の方法は Navier 氏の解法を更に擴張せるものと見做すことを得べし。

(13) 式中の未定係數 A_{mn} は別に W. Ritz 氏の如く最小働の原理を應用して之れを求むることを得べし。即ち (12) 式に (13) 式の關係を代入して ω_i 及び ω_s を求め、之れに最小働の原理を適用すれば

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial A_{mn}} = 2 \frac{\partial \omega_s}{\partial A_{mn}} \dots \dots \dots (15)$$

を得べく、之れを適當に變形して (14) 式と全く同一の結果を誘導することを得べし。⁽²⁾ 從て (15) 式より得べき A_{mn} は (14) 式より得たる A_{mn} と同様、(13) 式が (4) 式を満足せしむるものなること明かなり。此の意味に於て此の方法は、W. Ritz 氏解法の擴張とも謂ふことを得べし。蓋し Ritz 氏解法は、最初假定すべき撓度の式が有限項の函数なる場合に於ては一近似的解法に過ぎざるも、適當なる複式無限級數を用ふれば、(4) 式を完全に満足する解式となることを示すことを得べし。此の關係は平板の平衡の方程式たる (4) が直接最小働の原理より誘導し得べきこと、⁽³⁾ 更に進んで其の運動の方程式が内働に關する同様の理

(1) H. Lorenz: Technische Elastizitäts-Lehre, S. 401.

(2) Ritz 氏解法の應用に就ては拙著「矩形平板の撓度並に應力に就て」(土木學會誌第十卷第六號) 参照

(3) L. Föppl: Drang und Zwang, Bd. I, S. 133.

論より誘導し得る事實より觀て(*)寧ろ當然のこと、謂はざるべからず。

第五節 解説可能なる矩形平版の周邊の條件

矩形平版の撓度の式を、(13) 式の如く二つの既知函數 X_{mn} と Y_{mn} との積に關する複式無限級數として表はすことを得ば、其の未定係數 A_{mn} は (14) 又は (15) 式より算出することを得るを以て、撓度の式は完全に決定せらるべし。而して其の可能なる場合は次に示す 9 種とす。

第一種 少くとも相對する二邊が單に支承せらるゝ場合

A. 自由邊を有せざる場合。

- (1) 四邊に於て單に支承せらるゝ場合 (第八圖)
- (2) 三邊に於て單に支承せられ、一邊が完全に固定せらるゝ場合 (第九圖)
- (3) 一雙の相對二邊が單に支承せられ、残りの二邊が完全に固定せらるゝ場合 (第十圖)

B. 自由邊を有する場合。

- (1) 三邊に於て單に支承せられ、一邊自由なる場合 (第十一圖)
- (2) 一雙の相對二邊が單に支承せられ、残りの邊の一が完全に固定、他の一が自由なる場合 (第十二圖)
- (3) 一雙の相對二邊が單に支承せられ、残りの二邊が自由なる場合 (第十三圖)

第二種 少くとも相隣る二邊が完全に固定せらるゝ場合

- (1) 相隣る二邊が單に支承せられ、残りの二邊が完全に固定せらるゝ場合 (第十四圖)
- (2) 三邊に於て完全に固定せられ、一邊が單に支承せらるゝ場合 (第十五圖)
- (3) 四邊に於て完全に固定せらるゝ場合 (第十六圖)

自由邊を有せざる平版に於ては、 x 及び y に對する周邊の條件は夫々 X_{mn} 及び Y_{mn} を單獨に満足せしむることを得るも、然らざる場合即ち第一種の B の場合に於ては、 x に對する周邊條件を満足せしむるための X_{mn} は Y_{mn} に依りて左右せらるゝものなり。而して其の定め方に就ては後章に詳説すべし。

矩形平版の解説に際し通常假定せらるゝ如く、自由邊以外の各邊の撓度は常に零なるものとす。

第六節 豫備的數學公式

次章以下の各數學的演算の便に資せむがため、重要な Fourier 級數に關する公式を掲記すべし。

(*) G. Kirchhoff: Vorlesungen über Mechanik, S. 459.

W. J. Ibbeston: Mathematical Theory of Elasticity, p. 475.

I. 代數的函數の展開

變數 x/a に關する代數的函數と、Fourier 級數との間には次の如き關係あり^(*)。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{m=1, 2, 3, 4, \dots, \infty} \frac{1}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{a} x &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{a}\right) & 0 < \frac{x}{a} < 2 \\ \sum_{m=1, 2, 3, 4, \dots, \infty} \frac{1}{m^2\pi^2} \cos \frac{m\pi}{a} x &= \frac{1}{6} - \frac{x}{2a} + \frac{x^2}{4a^2} & 0 \leq \frac{x}{a} \leq 2 \\ \sum_{m=1, 2, 3, 4, \dots, \infty} \frac{1}{m^3\pi^3} \sin \frac{m\pi}{a} x &= \frac{1}{12} \left(\frac{2x}{a} - \frac{3x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3}\right) & \text{''} \\ \sum_{m=1, 2, 3, 4, \dots, \infty} \frac{1}{m^4\pi^4} \cos \frac{m\pi}{a} x &= \frac{1}{48} \left(\frac{8}{15} - \frac{4x^2}{a^2} + \frac{4x^3}{a^3} - \frac{x^4}{a^4}\right) & \text{''} \\ \sum_{m=1, 2, 3, 4, \dots, \infty} \frac{1}{m^5\pi^5} \sin \frac{m\pi}{a} x &= \frac{1}{48} \left(\frac{8x}{15a} - \frac{4x^3}{3a^3} + \frac{x^4}{a^4} - \frac{x^5}{5a^5}\right) & \text{''} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(16)$$

次に
$$\sin m\pi \left(1 - \frac{x}{a}\right) = \sin m\pi \cos \frac{m\pi}{a} x - \cos m\pi \sin \frac{m\pi}{a} x = -(-1)^m \sin \frac{m\pi}{a} x$$

なるが故に、(16) 式の $\frac{x}{a}$ の代りに $1 - \frac{x}{a}$ と置けば次の公式を得べし。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{m=1, 2, 3, 4, \dots, \infty} \frac{(-1)^m}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{a} x &= -\frac{x}{2a} & -1 < \frac{x}{a} < 1 \\ \sum_{m=1, 2, 3, 4, \dots, \infty} \frac{(-1)^m}{m^2\pi^2} \cos \frac{m\pi}{a} x &= -\frac{1}{12} + \frac{x^2}{4a^2} & -1 \leq \frac{x}{a} \leq 1 \\ \sum_{m=1, 2, 3, 4, \dots, \infty} \frac{(-1)^m}{m^3\pi^3} \sin \frac{m\pi}{a} x &= -\frac{1}{12} \left(\frac{x}{a} - \frac{x^3}{a^3}\right) & \text{''} \\ \sum_{m=1, 2, 3, 4, \dots, \infty} \frac{(-1)^m}{m^4\pi^4} \cos \frac{m\pi}{a} x &= -\frac{1}{48} \left(\frac{7}{15} - \frac{2x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4}\right) & \text{''} \\ \sum_{m=1, 2, 3, 4, \dots, \infty} \frac{(-1)^m}{m^5\pi^5} \sin \frac{m\pi}{a} x &= -\frac{1}{48} \left(\frac{7x}{15a} - \frac{2x^3}{3a^3} + \frac{x^5}{5a^5}\right) & \text{''} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(17)$$

公式 (16) と (17) の $m\pi$ の同次の式を邊々相減すれば、 m が奇數、即ち $m=1, 3, 5, \dots, \infty$ なる無限級數に關する公式を得べく、尙兩邊を適當に組合はすことに依り、次の如き關係を得べし。

(*) K. Knopp: Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, S. 373.

E. Schneider: Mathematische Schwingungslehre, S. 103 等參照

$$\left. \begin{aligned}
 1 &= 2 \sum \frac{1 - (-1)^m}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{a} x && 0 < \frac{x}{a} < 1 \\
 \frac{x}{a} &= -2 \sum \frac{(-1)^m}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{a} x && -1 < \frac{x}{a} < 1 \\
 \frac{x^2}{a^2} &= -2 \sum \left(\frac{(-1)^m}{m\pi} + \frac{2}{m^3\pi^3} - \frac{2(-1)^m}{m^3\pi^3} \right) \sin \frac{m\pi}{a} x && \text{''} \\
 \frac{x^3}{a^3} &= -2 \sum \left(\frac{(-1)^m}{m\pi} - \frac{6(-1)^m}{m^3\pi^3} \right) \sin \frac{m\pi}{a} x && \text{''} \\
 1 - \frac{x}{a} &= 2 \sum \frac{1}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{a} x && 0 < \frac{x}{a} < 2 \\
 \frac{x}{a} - \frac{x^2}{a^2} &= 4 \sum \frac{1 - (-1)^m}{m^3\pi^3} \sin \frac{m\pi}{a} x && 0 \leq \frac{x}{a} \leq 1 \\
 \frac{x}{a} - \frac{x^3}{a^3} &= -12 \sum \frac{(-1)^m}{m^3\pi^3} \sin \frac{m\pi}{a} x && -1 \leq \frac{x}{a} \leq 1 \\
 \frac{x^2}{a^2} - \frac{x^3}{3a^3} &= -4 \sum \left(\frac{(-1)^m}{3m\pi} + \frac{1}{m^3\pi^3} \right) \sin \frac{m\pi}{a} x && 0 \leq \frac{x}{a} < 1
 \end{aligned} \right\} \dots\dots(18)$$

公式 (16) 及び (17) の x/a の代りに 0, 1/2, 1 等とすれば次の結果を得べし。

$$\left. \begin{aligned}
 \sum \frac{1}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{2} &= \frac{1}{4} \\
 \sum \frac{1}{m^2\pi^2} &= \frac{1}{6} \\
 \sum \frac{1}{m^2\pi^2} \cos \frac{m\pi}{2} &= -\frac{1}{48} \\
 \sum \frac{1}{m^3\pi^3} \sin \frac{m\pi}{2} &= \frac{1}{32} \\
 \sum \frac{1}{m^4\pi^4} &= \frac{1}{90} \\
 \sum \frac{1}{m^4\pi^4} \cos \frac{m\pi}{2} &= -\frac{1}{16} \frac{7}{720} \\
 \sum \frac{1}{m^5\pi^5} \sin \frac{m\pi}{2} &= \frac{5}{1536}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots(19)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \sum \frac{(-1)^m}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{2} &= -\frac{1}{4} \\
 \sum \frac{(-1)^m}{m^2\pi^2} &= -\frac{1}{12} \\
 \sum \frac{(-1)^m}{m^2\pi^2} \cos \frac{m\pi}{2} &= -\frac{1}{48} \\
 \sum \frac{(-1)^m}{m^3\pi^3} \sin \frac{m\pi}{2} &= -\frac{1}{32}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots(20)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum \frac{(-1)^m}{m^4 \pi^4} &= -\frac{7}{720} \\ \sum \frac{(-1)^m}{m^4 \pi^4} \sin \frac{m\pi}{2} &= -\frac{1}{16} \frac{7}{720} \end{aligned} \right\}$$

II. 双曲線函数の展開

Cosh ωθ を Fourier の餘弦級數に展開すれば次の關係あり。

$$\sum_{m=1, 2, 3, \dots, \infty} \frac{\cos m(\pi - \theta)}{m^2 + \omega^2} = -\frac{1}{2\omega^2} + \frac{\pi \text{Cosh } \omega\theta}{2\omega \text{Sinh } \omega\pi} \quad \pi \leq \theta \leq \pi \dots\dots\dots(21)$$

上式中 $\pi - \theta = \frac{\pi}{a} x$, $\omega = \frac{\alpha_n}{\pi}$ とすれば次の如くなる。

$$\sum \frac{\cos \frac{m\pi}{a} x}{\pi^2 \left(m^2 + \frac{\alpha_n^2}{\pi^2} \right)} = -\frac{1}{2\alpha_n^2} \left\{ 1 - \frac{\alpha_n \text{Cosh } \alpha_n \left(1 - \frac{x}{a} \right)}{\text{Sinh } \alpha_n} \right\}, \quad -1 \leq \frac{x}{a} \leq 1 \dots\dots\dots(22)$$

上式に於て $\frac{x}{a}$ の代りに $1 - \frac{x}{a}$ と置けば、

$$\sum \frac{(-1)^m \cos \frac{m\pi}{a} x}{\pi^2 \left(m^2 + \frac{\alpha_n^2}{\pi^2} \right)} = -\frac{1}{2\alpha_n^2} \left(1 - \frac{\alpha_n \text{Cosh } \frac{\alpha_n}{a} x}{\text{Sinh } \alpha_n} \right), \quad -1 \leq \frac{x}{a} \leq 1 \dots\dots\dots(23)$$

是等の公式を用ひ著者は次の如き重要な公式を誘導したり、即ち

$$\rho_{mn} = \left(m^2 + \frac{\lambda^2 \alpha_n^2}{\pi^2} \right) \left(m^2 + \frac{\lambda'^2 \alpha_n^2}{\pi^2} \right), \quad m=1, 2, 3, 4 \dots\dots\dots\infty$$

$$\alpha_n = \frac{a}{b} n\pi, \quad \xi = \frac{x}{a}$$

$$\lambda^2 = K'^2 + \sqrt{K'^4 - K^2}, \quad \lambda'^2 = K'^2 - \sqrt{K'^4 - K^2}$$

とすれば (公式 (4) 及び (48) 参照),

$$\left. \begin{aligned} \sum \frac{m^2 \pi^3}{\pi^4 \rho_{mn}} \sin \frac{m\pi}{a} x &= \frac{1}{4} \left[-\frac{2}{\lambda'^2 - \lambda^2} \left\{ \frac{\lambda^2 \text{Sinh } \lambda \alpha_n (1 - \xi)}{\text{Sinh } \lambda \alpha_n} - \frac{\lambda'^2 \text{Sinh } \lambda' \alpha_n (1 - \xi)}{\text{Sinh } \lambda' \alpha_n} \right\} \right] = \frac{H_{n\xi}^{(3)}}{4}, \text{ say} \\ \sum \frac{m^2 \pi^2}{\pi^4 \rho_{mn}} \cos \frac{m\pi}{a} x &= \frac{1}{4\alpha_n} \left[-\frac{2}{\lambda'^2 - \lambda^2} \left\{ \frac{\lambda \text{Cosh } \lambda \alpha_n (1 - \xi)}{\text{Sinh } \lambda \alpha_n} - \frac{\lambda' \text{Cosh } \lambda' \alpha_n (1 - \xi)}{\text{Sinh } \lambda' \alpha_n} \right\} \right] = \frac{H_{n\xi}^{(2)}}{4\alpha_n} \\ \sum \frac{m\pi}{\pi^4 \rho_{mn}} \sin \frac{m\pi}{a} x &= \frac{1}{4\alpha_n^2} \left[\frac{2}{\lambda'^2 - \lambda^2} \left\{ \frac{\text{Sinh } \lambda \alpha_n (1 - \xi)}{\text{Sinh } \lambda \alpha_n} - \frac{\text{Sinh } \lambda' \alpha_n (1 - \xi)}{\text{Sinh } \lambda' \alpha_n} \right\} \right] = \frac{H_{n\xi}^{(1)}}{4\alpha_n^2} \end{aligned} \right\}$$

(*) A. Kneser: Die Integralgleichungen und ihre Anwendungen in der mathematischen Physik S. 157 参照, 又 K. Knopp: Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, S. 377 に示す $\cos \alpha x$ の展開式 $\cos \alpha x = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \left\{ \frac{1}{\alpha} - 2\alpha \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} \cos m\pi}{\alpha^2 - m^2} \right\}$ の α 及び x の代りに夫々 ix 及び θ と置けば (21) 式を得べし。

$$\begin{aligned} \sum \frac{\cos \frac{m\pi}{a} x}{\pi^4 \rho_{mn}} &= \frac{1}{4\alpha n^3} \left[\frac{2}{\lambda'^2 - \lambda^2} \left\{ \frac{\text{Cosh } \lambda \alpha n (1-\xi)}{\lambda \text{ Sinh } \lambda \alpha n} - \frac{\text{Cosh } \lambda' \alpha n (1-\xi)}{\lambda' \text{ Sinh } \lambda' \alpha n} \right\} - \frac{2}{\alpha n K^2} \right] = \frac{1}{4\alpha n^3} \left(H_{n\xi}^{(0)} - \frac{2}{K^2 \alpha n} \right) \\ \sum \frac{\sin \frac{m\pi}{a} x}{m\pi^5 \rho_{mn}} &= \frac{1}{4\alpha n^4} \left[-\frac{2}{\lambda'^2 - \lambda^2} \left\{ \frac{\text{Sinh } \lambda \alpha n (1-\xi)}{\lambda^2 \text{ Sinh } \lambda \alpha n} - \frac{\text{Sinh } \lambda' \alpha n (1-\xi)}{\lambda'^2 \text{ Sinh } \lambda' \alpha n} \right\} + \frac{2}{K^2} \left(1 - \frac{x}{a} \right) \right] \\ &= \frac{1}{4\alpha n^4} \left\{ H_{n\xi}^{(1)} + \frac{2}{K^2} \left(1 - \frac{x}{a} \right) \right\} \\ \sum \frac{\cos \frac{m\pi}{a} x}{m^2 \pi^5 \rho_{mn}} &= \frac{1}{4\alpha n^5} \left[-\frac{2}{\lambda'^2 - \lambda^2} \left\{ \frac{\text{Cosh } \lambda \alpha n (1-\xi)}{\lambda^3 \text{ Sinh } \lambda \alpha n} - \frac{\text{Cosh } \lambda' \alpha n (1-\xi)}{\lambda'^3 \text{ Sinh } \lambda' \alpha n} \right\} + \frac{\alpha n}{K^2} \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{2x}{a} + \frac{2}{3} \right) + \frac{4K'^2}{K^4 \alpha n} \right] \\ &= \frac{1}{4\alpha n^5} \left\{ H_{n\xi}^{(2)} + \frac{\alpha n}{K^2} \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{2x}{a} + \frac{2}{3} \right) + \frac{4K'^2}{K^4 \alpha n} \right\} \\ \sum \frac{\sin \frac{m\pi}{a} x}{m^3 \pi^7 \rho_{mn}} &= \frac{1}{4\alpha n^6} \left[\frac{2}{\lambda'^2 - \lambda^2} \left\{ \frac{\text{Sinh } \lambda \alpha n (1-\xi)}{\lambda^4 \text{ Sinh } \lambda \alpha n} - \frac{\text{Sinh } \lambda' \alpha n (1-\xi)}{\lambda'^4 \text{ Sinh } \lambda' \alpha n} \right\} + \frac{\alpha n^2}{K^2} \left(\frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^2}{a^2} + \frac{2x}{3a} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{4K'^2}{K^4} \left(1 - \frac{x}{a} \right) \right] = \frac{1}{4\alpha n^6} \left\{ H_{n\xi}^{(3)} + \frac{\alpha n^2}{K^2} \left(\frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^2}{a^2} + \frac{2x}{3a} \right) - \frac{4K'^2}{K^4} \left(1 - \frac{x}{a} \right) \right\} \end{aligned} \tag{24}$$

上式中第一式は $0 < \frac{x}{a} < 2$ の時、其の他の式は $0 \leq \frac{x}{a} \leq 2$ の時成立つものにして、各式の $\frac{x}{a}$ の代りに $1 - \frac{x}{a}$ と置けば次の如き公式を得べし。

$$\begin{aligned} \sum \frac{m^3 \pi^3}{\pi^4 \rho_{mn}} (-1)^m \sin \frac{m\pi}{a} x &= -\frac{G_{n\xi}^{(3)}}{4} \\ \sum \frac{m^2 \pi^2}{\pi^4 \rho_{mn}} (-1)^m \cos \frac{m\pi}{a} x &= \frac{G_{n\xi}^{(2)}}{4\alpha n} \\ \sum \frac{m\pi}{\pi^4 \rho_{mn}} (-1)^m \sin \frac{m\pi}{a} x &= -\frac{G_{n\xi}^{(1)}}{4\alpha n^2} \\ \sum \frac{(-1)^m}{\pi^4 \rho_{mn}} \cos \frac{m\pi}{a} x &= \frac{1}{4\alpha n^3} \left(G_{n\xi}^{(0)} - \frac{2}{K^2 \alpha n} \right) \\ \sum \frac{(-1)^m}{m\pi^5 \rho_{mn}} \sin \frac{m\pi}{a} x &= -\frac{1}{4\alpha n^4} \left(G_{n\xi}^{(1)} + \frac{2x}{K^2 a} \right) \\ \sum \frac{(-1)^m}{m^2 \pi^5 \rho_{mn}} \cos \frac{m\pi}{a} x &= \frac{1}{4\alpha n^5} \left\{ G_{n\xi}^{(2)} + \frac{\alpha n^2}{K^2} \left(\frac{a^2}{a^2} - \frac{1}{3} \right) - \frac{4K'^2}{K^4 \alpha n} \right\} \\ \sum \frac{(-1)^m}{m^3 \pi^7 \rho_{mn}} \sin \frac{m\pi}{a} x &= -\frac{1}{4\alpha n^6} \left\{ G_{n\xi}^{(3)} - \frac{\alpha n^2}{K^2} \left(\frac{x^3}{3a^3} - \frac{x}{3a} \right) - \frac{4K'^2}{K^4} \frac{x}{a} \right\} \end{aligned} \tag{25}$$

上式中第一式は $-1 < \frac{x}{a} < 1$ の時、其の他の式は $-1 \leq \frac{x}{a} \leq 1$ の時成立し、各 $G_{n\xi}$ は公式 (24) の各對應式中に示す $H_{n\xi}$ の $1-\xi$ の代りに ξ と置きたるものなり。

若し $K=K'=1$ とすれば

$\lambda=\lambda'=1$ なるを以て、各 $H_{n\xi}$ は運算の結果次の如くなるべし。

$$\begin{aligned}
 H_{n\xi}^{(3)} &= \frac{1}{\text{Sinh}^2 \alpha_n} \left\{ 2 \text{Sinh} \alpha_n \text{Sinh} \alpha_n (1-\xi) - \alpha_n \xi \text{Cosh} \alpha_n \text{Sinh} \alpha_n (1-\xi) + \alpha_n (1-\xi) \text{Sinh} \alpha_n \xi \right\} \\
 H_{n\xi}^{(2)} &= \frac{1}{\text{Sinh}^2 \alpha_n} \left\{ \text{Sinh} \alpha_n \text{Cosh} \alpha_n (1-\xi) - \alpha_n \text{Cosh} \alpha_n \text{Cosh} \alpha_n (1-\xi) \right. \\
 &\quad \left. + \alpha_n (1-\xi) \text{Sinh} \alpha_n \text{Sinh} \alpha_n (1-\xi) \right\} \\
 H_{n\xi}^{(1)} &= \frac{1}{\text{Sinh}^2 \alpha_n} \left\{ \alpha_n \xi \text{Cosh} \alpha_n \text{Sinh} \alpha_n (1-\xi) - \alpha_n (1-\xi) \text{Sinh} \alpha_n \xi \right\} \\
 H_{n\xi}^{(0)} &= \frac{1}{\text{Sinh}^2 \alpha_n} \left\{ \text{Sinh} \alpha_n \text{Cosh} \alpha_n (1-\xi) + \alpha_n \text{Cosh} \alpha_n \text{Cosh} \alpha_n (1-\xi) \right. \\
 &\quad \left. - \alpha_n (1-\xi) \text{Sinh} \alpha_n \text{Sinh} \alpha_n (1-\xi) \right\} \\
 H_{n\xi}^{(1)} &= \frac{1}{\text{Sinh}^2 \alpha_n} \left\{ -2 \text{Sinh} \alpha_n \text{Sinh} \alpha_n (1-\xi) - \alpha_n \xi \text{Cosh} \alpha_n \text{Sinh} \alpha_n (1-\xi) + \alpha_n (1-\xi) \text{Sinh} \alpha_n \xi \right\} \\
 H_{n\xi}^{(II)} &= \frac{1}{\text{Sinh}^2 \alpha_n} \left\{ -3 \text{Sinh} \alpha_n \text{Cosh} \alpha_n (1-\xi) - \alpha_n \text{Cosh} \alpha_n \text{Cosh} \alpha_n (1-\xi) + \alpha_n (1-\xi) \text{Sinh} \alpha_n \text{Sinh} \alpha_n (1-\xi) \right\} \\
 H_{n\xi}^{(III)} &= \frac{1}{\text{Sinh}^2 \alpha_n} \left\{ 4 \text{Sinh} \alpha_n \text{Sinh} \alpha_n (1-\xi) + \alpha_n \xi \text{Cosh} \alpha_n \text{Sinh} \alpha_n (1-\xi) - \alpha_n (1-\xi) \text{Sinh} \alpha_n \xi \right\} \\
 &\dots\dots\dots (26)
 \end{aligned}$$

又此の場合の各 $G_{n\xi}$ は上式の ξ の代りに $1-\xi$ と置きたるものなること明かなり。

公式 (24) 及び (25) は λ 及び λ' が共に實數、即ち

$$K'^4 > K^2$$

なる時成立するものなり。然らざる場合に於ては

$$\lambda^2 = K^2 + i\sqrt{K^2 - K'^4}, \quad \lambda'^2 = K'^2 - i\sqrt{K^2 - K'^4}$$

と置くことを得るを以て

$$\sqrt{\frac{1}{2}(K + K'^2)} \equiv K_1, \quad \sqrt{\frac{1}{2}(K - K'^2)} \equiv K_2$$

とすれば

$$\left. \begin{aligned}
 \lambda &= K_1 + iK_2, & \lambda^2 &= K^2 + 2iK_1K_2 \\
 \lambda' &= K_1 - iK_2, & \lambda'^2 &= K'^2 - 2iK_1K_2 \\
 \lambda'^2 - \lambda^2 &= -4iK_1K_2, & \lambda\lambda' &= K_1^2 + K_2^2 = K \\
 K'^2 &= K_1^2 - K_2^2
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27)$$

にして、 λ と λ' とは共軛複素數なるを以て是等の値を用ひて公式 (24) に示す各 $H_{n\xi}$ を計算すれば次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned}
 \text{Sinh} K_1 \alpha_n \xi \sin K_2 \alpha_n (2-\xi) - \text{Sinh} K_1 \alpha_n (2-\xi) \sin K_2 \alpha_n \xi &\equiv P_{n\xi} \\
 \text{Cosh} K_1 \alpha_n \xi \cos K_2 \alpha_n (2-\xi) - \text{Cosh} K_1 \alpha_n (2-\xi) \cos K_2 \alpha_n \xi &\equiv Q_{n\xi}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Cosh}K_1\alpha_n\xi\sin K_2\alpha_n(2-\xi) + \text{Cosh}K_1\alpha_n(2-\xi)\sin K_2\alpha_n\xi &\equiv U_{n\xi} \\ \text{Sinh}K_1\alpha_n\xi\cos K_2\alpha_n(2-\xi) + \text{Sinh}K_1\alpha_n(2-\xi)\cos K_2\alpha_n\xi &\equiv V_{n\xi} \end{aligned} \right\}$$

とすれば

$$\left. \begin{aligned} H_{n\xi}^{(3)} &= \frac{\frac{K'^2}{K_1K_2}P_{n\xi} - 2Q_{n\xi}}{\text{Cosh}2K_1\alpha_n - \cos 2K_2\alpha_n} \\ H_{n\xi}^{(2)} &= -\frac{\frac{1}{K_1}U_{n\xi} - \frac{1}{K_2}V_{n\xi}}{\text{Cosh}2K_1\alpha_n - \cos 2K_2\alpha_n} \\ H_{n\xi}^{(1)} &= -\frac{1}{K_1K_2} \frac{P_{n\xi}}{\text{Cosh}2K_1\alpha_n - \cos 2K_2\alpha_n} \\ H_{n\xi}^{(6)} &= \frac{\frac{1}{K_1}U_{n\xi} + \frac{1}{K_2}V_{n\xi}}{K(\text{Cosh}2K_1\alpha_n - \cos 2K_2\alpha_n)} \\ H_{n\xi}^{(7)} &= \frac{\frac{K'^2}{K_1K_2}P_{n\xi} + 2Q_{n\xi}}{K^2(\text{Cosh}2K_1\alpha_n - \cos 2K_2\alpha_n)} \\ H_{n\xi}^{(11)} &= -\frac{\frac{1}{K_2}(K'^2 - 2K_2^2)U_{n\xi} + \frac{1}{K_1}(K'^2 + 2K_2^2)V_{n\xi}}{K^3(\text{Cosh}2K_1\alpha_n - \cos 2K_2\alpha_n)} \\ H_{n\xi}^{(111)} &= -\frac{\left(\frac{K'^4}{K_1K_2} - 4K_1K_2\right)P_{n\xi} + 4K'^2Q_{n\xi}}{K^4(\text{Cosh}2K_1\alpha_n - \cos 2K_2\alpha_n)} \end{aligned} \right\} \dots (28)_b$$

λ 及び λ' が複素数なる場合の各 $G_{n\xi}$ は (28)_a 及び (28)_b に於ける ξ の代りに $1-\xi$ と置きたるものなること明かなり。

$$\begin{aligned} \sum \frac{(m\pi)^k}{\pi^4 \rho_{mn}} \sin \frac{m\pi}{a} x - \sum \frac{(-1)^m (m\pi)^k}{\pi^4 \rho_{mn}} \sin \frac{m\pi}{a} x &= \sum \frac{1 - (-1)^m}{\pi^4 \rho_{mn}} (m\pi)^k \sin \frac{m\pi}{a} x \\ &= 2 \sum \frac{(m'\pi)^k}{\pi^4 \rho_{m'n}} \sin \frac{m'\pi}{a} x \quad m' = 1, 3, 5, \dots, \infty \end{aligned}$$

なるが故に、 m の奇数級数に對する公式は前記各公式より直に求むることを得べし。例へば

$$\begin{aligned} 2 \sum \frac{1}{m'\pi^2 \rho_{m'n}} \sin \frac{m'\pi}{a} x &= \frac{1}{4\alpha_n^4} \left\{ H_{n\xi}^{(1)} + \frac{2}{K^2} \left(1 - \frac{x}{a}\right) + G_{n\xi}^{(7)} + \frac{x}{K^2 a} \right\} \\ \therefore \sum \frac{1}{m'\pi^2 \rho_{m'n}} \sin \frac{m'\pi}{a} x &= \frac{1}{8\alpha_n^4} \left(H_{n\xi}^{(1)} + G_{n\xi}^{(7)} + \frac{2}{K^2} \right) \end{aligned}$$

なるが如し。 $\cos \frac{m'\pi}{a} x$ に關する級数に對しても同様に求むることを得。

第二章 普通の桁に對する應用

第一節 一般式

I. 桁に対する撓度方程式の假定と其の終端條件

桁の撓度は只一つの變數を以て表はさるべきが故に、(13) 式の代りに次の如き單式無限級數を以て表はさるべし。

$$\xi = \frac{pa^4}{N} \sum_{m=1}^{\infty} A_m X_m \dots\dots\dots (29)$$

但し $N=EI$ は桁の彎曲剛率、 a は桁の徑間

桁の一端を x 軸の原點とし、該點に於ける撓度は常に零なりとすれば、函數 X_m は次の如き三次代數式と一つの三角函數との和を以て表はすことを得べし。

$$X_m = C_m \frac{x^3}{3a^3} - C_m' \left(\frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^2}{a^2} \right) + C_m'' \frac{x}{a} + \frac{1}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{a} x \dots\dots\dots (30)$$

但し $m=1, 2, 3, 4 \dots\dots\dots \infty$

上式中 C_m, C_m', C_m'' は桁の各終端條件に依りて定むべき常數なり。

(30) 式より X_m の各微分式は次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{dX_m}{dx} = X_m' &= \frac{1}{a} \left\{ C_m \frac{x^2}{a^2} - C_m' \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{2x}{a} \right) + C_m'' + \cos \frac{m\pi}{a} x \right\} \\ \frac{d^2X_m}{dx^2} = X_m'' &= \frac{1}{a^2} \left\{ 2C_m \frac{x}{a} - 2C_m' \left(\frac{x}{a} - 1 \right) - m\pi \sin \frac{m\pi}{a} x \right\} \\ \frac{d^3X_m}{dx^3} = X_m''' &= \frac{1}{a^3} \left(2C_m - 2C_m' - m^2\pi^2 \cos \frac{m\pi}{a} x \right) \\ \frac{d^4X_m}{dx^4} = X_m'''' &= \frac{m^3\pi^3}{a^4} \sin \frac{m\pi}{a} x \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (31)$$

是等の關係より各終端條件を満足すべき C_m, C_m', C_m'' を求むれば次の如し。

i) 單 桁

此の場合に於ては兩端に於ける ξ 及び M は零なるが故に

$$X_m(0) = X_m(a) = X_m'(0) = X_m'(a) = 0$$

ならざるべからず。従て次の結果を得べし。

$$\left. \begin{aligned} C_m = C_m' = C_m'' &= 0 \\ X_m &= \frac{1}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{a} x \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (32)$$

ii) 一端 $x=0$ に於て完全に固定せられ、 $x=a$

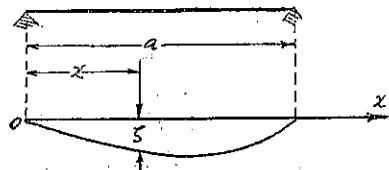
に於て單に支承せらるゝ桁

此の場合に於ては ξ は兩端に於て、 $\frac{d\xi}{dx}$ は $x=0$ に於て、 M は $x=a$ に於て孰れも零なり。従て

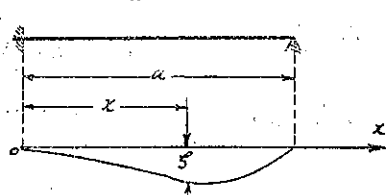
$$X_m(0) = X_m(a) = X_m'(0) = X_m''(a) = 0$$

なる條件より次の公式を得べし。

第三圖



第四圖



$$\left. \begin{aligned} C_m &= 0, \quad C_m' = \frac{3}{2}, \quad C_m'' = -1 \\ X_m &= -\frac{1}{2} \left(\frac{x^3}{a^3} - \frac{3x^2}{a^2} + \frac{2x}{a} \right) + \frac{1}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{a} x \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(33)$$

iii) 突 桁

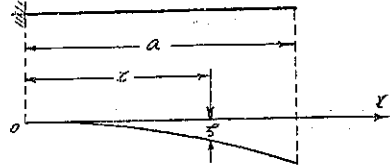
突桁に於ては ζ 及び $\frac{d\zeta}{dx}$ は $x=0$ の時、 M 及び S は $x=a$ の時零なり。

$$\therefore X_m(0) = X_m'(0) = X_m''(a) = X_m'''(a) = 0$$

是より次の公式を得べし。

$$\left. \begin{aligned} C_m &= 0, \quad C_m' = -\frac{1}{2} m^2 \pi^2 (-1)^m, \quad C_m''' = -1 \\ X_m &= \frac{1}{2} m^2 \pi^2 (-1)^m \left(\frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^2}{a^2} \right) - \frac{x}{a} + \frac{1}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{a} x \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(34)$$

第五圖



iv) 固定 桁

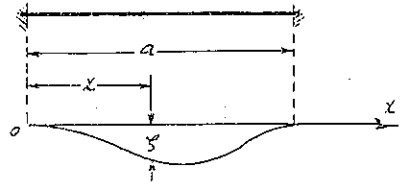
兩端に於て固定せらるゝ桁に於ては ζ 及び $\frac{d\zeta}{dx}$ は兩端に於て零、即ち

$$X_m(0) = X_m(a) = X_m'(0) = X_m'(a) = 0$$

是より次の結果を得べし。

$$\left. \begin{aligned} C_m &= -1 - 2(-1)^m, \quad C_m' = 2 + (-1)^m, \quad C_m'' = -1 \\ X_m &= -\left(\frac{x^3}{a^3} - \frac{2x^2}{a^2} + \frac{x}{a} \right) - (-1)^m \left(\frac{x^3}{a^3} - \frac{x^2}{a^2} \right) + \frac{1}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{a} x \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(35)$$

第六圖



II. 荷重の函数の展開

桁の任意の點に於ける單位長に對する荷重を p_x とし

$$\left. \begin{aligned} p_x &= pf(x), \quad p = \text{定數} \\ f(x) &= \sum_{m=1}^{\infty} R_m \sin \frac{m\pi}{a} x \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(36)$$

とすれば、公式(18)に依りて次の結果を得べし。

i) 等布荷重の場合

$$\left. \begin{aligned} p_x &= p \quad f(x) = 1 \\ R_m &= \frac{2}{m\pi} \{1 - (-1)^m\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(37)$$

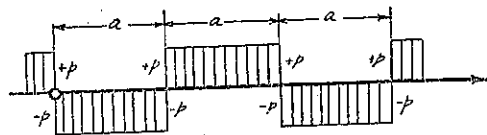
ii) 等變荷重の場合

$$\left. \begin{aligned} p_x &= p \left(1 + \alpha \frac{x}{a} \right) \\ R_m &= \frac{2}{m\pi} \{ 1 - (-1)^m - \alpha (-1)^m \} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (38)$$

同様に荷重の函数が其の他の代數式を以て表はさるゝ場合も前記各公式を用ひて R_m を求むることを得べし。其の他圓函数、双曲線函数等に對する R_m を求むること決して難事に非ず。

上記 $f(x)$ の展開式 $\sum R_m \sin \frac{m\pi}{a} x$ は $0 < \frac{x}{a} < 1$ の時成立ち、 $x=0$ 及び $x=a$ の時は零となり、桁の兩端に於ては適用すること能はさるゝが如し。然れども p_x が第七圖に示す如く $2a$ なる periodic length を有する非連續線を以て表はさるゝものとすれば $x=0$ 及び $x=a$ に對する p_x は零となるが故に、(37) 式

第七圖



は a なる徑間を有する桁の凡ての點に當てはまるものと考ふることを得べし。此の關係は平板に對しても全く同様に於て、各函数の Fourier 級數の展開式は桁

又は平板の凡ての點に當てはまるものとするも、演算上何等の矛盾を生ずることなし。(1)

III. 未定係數 A_m 及び一般撓度方程式

平板の撓曲方程式 (4) は桁に對しては

$$\frac{d^4 \zeta}{dx^4} = \frac{p_x}{EI}$$

となるを以て、之れと (29) 式とより

$$\frac{p a^4}{EI} \sum A_m X_m'''' = \frac{p f(x)}{EI}$$

$$\therefore a^4 \sum A_m X_m'''' = f(x)$$

然るに (31) 式より

$$a^4 X_m'''' = m^3 \pi^3 \sin \frac{m\pi}{a} x$$

$$\therefore \sum A_m m^3 \pi^3 \sin \frac{m\pi}{a} x = \sum R_m \sin \frac{m\pi}{a} x$$

是より

$$m^3 \pi^3 A_m = R_m^{(2)}$$

故に次の公式を得べし。

(1) A. Nadai: Elastische Platten, S. 71 参照

(2) 公式 (14) に示す $b^4 \Phi_{mn}$ は此の場合に於ては $m^3 \pi^3 A_m$ となれるものなり。

$$\Delta m = \frac{R_m}{m^3 \pi^3}$$

$$\zeta = \frac{p a^4}{EI} \left\{ \frac{x^3}{3a^3} \sum \frac{C_m R_m}{m^3 \pi^3} - \left(\frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^2}{a^2} \right) \sum \frac{C_m' R_m}{m^3 \pi^3} + \frac{x}{a} \sum \frac{C_m'' R_m}{m^3 \pi^3} + \sum \frac{R_m}{m^4 \pi^4} \sin \frac{m\pi}{a} x \right\} \dots\dots\dots (39)$$

是終端條件並に荷重の如何に拘らず一般的に當てはまる桁の撓度方程式なり。

等變荷重に對しては公式 (38), (16), (17) 等に依り

$$\sum \frac{R_m}{m^4 \pi^4} \sin \frac{m\pi}{a} x = 2 \sum \frac{1}{m^5 \pi^5} \{ 1 - (-1)^m - \alpha (-1)^m \} \sin \frac{m\pi}{a} x$$

$$= \frac{1}{24} \left(\frac{x}{a} - \frac{2x^3}{a^3} + \frac{x^4}{a^4} \right) + \frac{\alpha}{24} \left(\frac{7x}{15a} - \frac{2x^2}{3a^2} + \frac{x^3}{5a^3} \right)$$

$$\therefore \zeta = \frac{p a^4}{EI} \left\{ \frac{x^3}{3a^3} \sum \frac{C_m R_m}{m^3 \pi^3} - \left(\frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^2}{a^2} \right) \sum \frac{C_m' R_m}{m^3 \pi^3} + \frac{x}{a} \sum \frac{C_m'' R_m}{m^3 \pi^3} \right. \\ \left. + \frac{1}{24} \left(\frac{x^4}{a^4} - \frac{2x^3}{a^3} + \frac{x}{a} \right) + \frac{\alpha}{24} \left(\frac{7x}{15a} - \frac{2x^2}{3a^2} + \frac{7x}{15a} \right) \right\} \dots\dots\dots (40)$$

上式中 $\alpha=0$ と置けば等布荷重に對する公式となる。

第二節 特殊の場合に對する應用

單桁に對しては公式 (32) に依り C_m, C_m', C_m'' は何れも零なるを以て、等變荷重に對しては

$$\zeta = \frac{p a^4}{24 EI} \left\{ \frac{x}{a} - \frac{2x^3}{a^3} + \frac{x^4}{a^4} + \alpha \left(\frac{7x}{15a} - \frac{2x^2}{3a^2} + \frac{x^3}{5a^3} \right) \right\}$$

等布荷重を受くる固定桁に對しては

$$\sum \frac{C_m R_m}{m^3 \pi^2} = -2 \sum \frac{1}{m^4 \pi^4} \{ 1 - (-1)^m \} \{ 1 + 2(-1)^m \} = 2 \sum \frac{1 - (-1)^m}{m^4 \pi^4} = \frac{1}{24}$$

同様に

$$\sum \frac{C_m' R_m}{m^3 \pi^3} = - \sum \frac{C_m'' R_m}{m^3 \pi^3} = \frac{1}{24}$$

$$\therefore \zeta = \frac{p a^4}{24 EI} \left(\frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^2}{3a^3} + \frac{x^2}{a^2} - \frac{x}{a} + \frac{x}{a} - \frac{2x^3}{a^3} + \frac{x^4}{a^4} \right) = \frac{p a^4}{24 EI} \frac{x^2}{a^2} \left(1 - \frac{x}{a} \right)^2$$

是等の結果は何れも普通の statics より得べきものと全く同一の式にして、其の他の荷重及び終端條件に對しても同様に求むることを得べし。(1)

桁に對する撓度の式は普通の statics に依りて簡單に求めらるゝものなるを以て、特に上

(1) 此の方法は更に連続桁及び弾性基礎に支持せらるゝ桁に對しても擴張することを得べし。

述の如き方法に依るを要せざること勿論なるも、著者が故ら本章を設けて之れを論述せるは次章以下の矩形平版解説の道程たらしめむとせるに外ならず。

第三章 矩形平版に對する應用

第一節 一般式

I. 矩形平版に對する撓度方程式の假定

矩形平版に對する撓度方程式は普通の桁に對する (29) 及び (30) 式より推定して次の如く假定することを得べし。

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= \frac{pb^4}{N_x} \sum \sum A_{mn} X_{mn} Y_{mn}, \quad m, n = 1, 2, 3, 4, \dots \infty \\ X_{mn} &= C_{mn} \frac{x^3}{3a^3} - C_{mn}' \left(\frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^2}{a^2} \right) + C_{mn}'' \frac{x}{a} + C_{mn}''' + \frac{1}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{a} x \\ Y_{mn} &= D_{mn} \frac{y^3}{3b^3} - D_{mn}' \left(\frac{y^3}{3b^3} - \frac{y^2}{b^2} \right) + D_{mn}'' \frac{y}{b} + D_{mn}''' + \frac{1}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{b} y \end{aligned} \right\} \dots (41)$$

上式中 a 及び b は夫々 x 及び y 軸に並行なる矩形の邊の長さとする。自由邊を有せざる場合、即ち四邊の各點に於ける ζ が零なる平版に對しては、一般に

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} C_{mn} + \frac{2}{3} C_{mn}' + C_{mn}'' + C_{mn}''' &= 0, & C_{mn}''' &= 0 \\ \frac{1}{3} D_{mn} + \frac{2}{3} D_{mn}' + D_{mn}'' + D_{mn}''' &= 0, & D_{mn}''' &= 0 \end{aligned}$$

にして、 C_{mn} , C_{mn}' , C_{mn}'' , 従て X_{mn} は m のみを、 D_{mn} , D_{mn}' , D_{mn}'' 従て Y_{mn} は n のみを含む式となる。而して各邊は單純に支承せらるゝか若しくは完全に固定せらるゝものなるを以て、 C_m , C_m' , C_m'' 及び D_n , D_n' , D_n'' , は夫々 x 及び y に関する周邊の條件に應じ、(32), (33) 及び (35) 式を其のまゝ用ふることを得べし。

自由邊を有する平版に對する各 C_{mn} 及び D_{mn} は後章に於て求むべし。

II. 荷重の函數の展開

荷重の函數が只一つの變數を含む場合に於て、該函數を Fourier の單式無限級數に展開せる結果は公式 (37), (38) 等に示せる如し。

矩形平版の撓度は一般に二つの自變數 x 及び y を以て表はさるゝが故に、荷重の函數 p_{xy} が定數なると或は唯一つ、若しくは二つの變數を含むとに拘らず、之れを複式無限級數に展開するの要あり。今

$$\left. \begin{aligned} p_{xy} &= pf(xy), & p &= \text{定数} \\ f(xy) &= \sum \sum R_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \\ m, n &= 1, 2, 3, 4, \dots \infty \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (42)$$

とすれば、公式 (18) を適用して次の結果を得べし。

i) 等布荷重

$$\left. \begin{aligned} p_{xy} &= p & f(xy) &= 1 \\ R_{mn} &= \frac{4}{mn\pi^2} \{1 - (-1)^m\} \{1 - (-1)^n\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (43)$$

ii) $x=0$ に於て最大, $x=a$ に於て零なる等變荷重

$$\left. \begin{aligned} p_{xy} &= p \left(1 - \frac{x}{a}\right) \\ R_{mn} &= \frac{4}{mn\pi^2} \{1 - (-1)^n\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (44)$$

iii) $x=0$ に於て零, $x=a$ に於て最大なる等變荷重

$$\left. \begin{aligned} p_{xy} &= p \frac{x}{a} \\ R_{mn} &= -\frac{4}{mn\pi^2} (-1)^m \{1 - (-1)^n\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (45)$$

iv) 一般的等變荷重

$$\left. \begin{aligned} p_{xy} &= p \left(1 + \alpha \frac{x}{a} + \beta \frac{y}{b}\right) \\ R_{mn} &= \frac{4}{mn\pi^2} \left[\{1 - (-1)^m\} \{1 - (-1)^n\} - \alpha (-1)^m \{1 - (-1)^n\} - \beta \{1 - (-1)^m\} (-1)^n \right] \end{aligned} \right\} (46)$$

v) 二次代數式を以て表はさるゝ荷重

$$\left. \begin{aligned} p_{xy} &= p \left(1 + \alpha \frac{x}{a} + \beta \frac{y}{b} + \alpha' \frac{x^2}{a^2} + \gamma' \frac{xy}{ab} + \beta' \frac{y^2}{b^2}\right) \\ R_{mn} &= \frac{4}{mn\pi^2} \left[\{1 - (-1)^m\} \{1 - (-1)^n\} - \alpha (-1)^m \{1 - (-1)^n\} - \beta (-1)^m \{1 - (-1)^n\} \right. \\ &\quad - \alpha' \left\{ (-1)^m + \frac{2}{m^2\pi^2} - \frac{2(-1)^m}{m^2\pi^2} \right\} \{1 - (-1)^n\} + \gamma' \frac{(-1)^{m+n}}{mn\pi^2} \\ &\quad \left. - \beta' \left\{ (-1)^n + \frac{2}{n^2\pi^2} - \frac{2(-1)^n}{n^2\pi^2} \right\} \{1 - (-1)^m\} \right] \end{aligned} \right\} (47)$$

上記の各公式は平板の凡ての點に對して當てはまること第 20 頁に述べたる如し。

III. 未定係數 A_{mn} の方程式

公式 (4) 及び (41) より

$$\frac{pb^4}{N_x} \sum \sum A_{mn} (X_{mn}'''' Y_{mn} + 2K'^2 X_{mn}'' Y_{mn}'' + K^2 X_{mn} Y_{mn}''''') = \frac{p_{xy}}{N_x} = \frac{pf(xy)}{N_x}$$

$$\therefore b^4 \sum \sum A_{mn} (X_{mn}'''' Y_{mn} + 2K'^2 X_{mn}'' Y_{mn}'' + K^2 X_{mn} Y_{mn}''''') = f(xy)$$

然るに

$$\begin{aligned} & b^4 (X_{mn}'''' Y_{mn} + 2K'^2 X_{mn}'' Y_{mn}'' + K^2 X_{mn} Y_{mn}''''') \\ &= \frac{b^4}{a^4} m^3 \pi^3 \left\{ D_{mn} \frac{y^3}{3b^3} - D_{mn}' \left(\frac{y^3}{3b^3} - \frac{y^2}{b^2} \right) + D_{mn}'' \frac{y}{b} + D_{mn}''' + \frac{1}{n\pi} \sin \frac{m\pi}{b} y \right\} \sin \frac{m\pi}{a} x \\ &+ \frac{2K'^2 b^2}{a^2} \left\{ 2C_{mn} \frac{x}{a} - 2C_{mn}' \left(\frac{x}{a} - 1 \right) - m\pi \sin \frac{m\pi}{a} x \right\} \left\{ 2D_{mn} \frac{y}{b} - 2D_{mn}' \left(\frac{y}{b} - 1 \right) - n\pi \sin \frac{n\pi}{b} y \right\} \\ &+ K^2 n^3 \pi^3 \left\{ C_{mn} \frac{x^3}{3a^3} - C_{mn}' \left(\frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^2}{a^2} \right) + C_{mn}'' \frac{x}{a} + C_{mn}''' + \frac{1}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{a} x \right\} \sin \frac{n\pi}{b} y \\ &= \frac{b^4}{a^4} \frac{\pi^4}{mn\pi^2} \left(m^4 + 2K'^2 \frac{a^2}{b^2} m^2 n^2 + K^2 \frac{a^4}{b^4} n^4 \right) \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \\ &+ \left[D_{mn} \left\{ \frac{b^4}{a^4} m^3 \pi^3 \frac{y^3}{3b^3} - \frac{4K'^2 b^2}{a^2} m\pi \frac{y}{b} \right\} - D_{mn}' \left\{ \frac{b^4}{a^4} m^3 \pi^3 \left(\frac{y^3}{3b^3} - \frac{y^2}{b^2} \right) - \frac{4K'^2 b^2}{a^2} m\pi \left(\frac{y}{b} - 1 \right) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{b^4}{a^4} m^3 \pi^3 \left(D_{mn}'' \frac{y}{b} + D_{mn}''' \right) \right] \sin \frac{m\pi}{a} x \\ &+ \left[C_{mn} \left\{ K^2 n^3 \pi^3 \frac{x^3}{3a^3} - \frac{4K'^2 b^2}{a^2} n\pi \frac{x}{a} \right\} - C_{mn}' \left\{ K^2 n^3 \pi^3 \left(\frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^2}{a^2} \right) - \frac{4K'^2 b^2}{a^2} n\pi \left(\frac{x}{a} - 1 \right) \right\} \right. \\ &\quad \left. + K^2 n^3 \pi^3 \left(C_{mn}'' \frac{x}{a} + C_{mn}''' \right) \right] \sin \frac{n\pi}{b} y \\ &+ \frac{8K'^2 b^2}{a^2} \left\{ \frac{xy}{ab} C_{mn} D_{mn} - \frac{x}{a} \left(\frac{y}{b} - 1 \right) C_{mn} D_{mn}' - \left(\frac{x}{a} - 1 \right) \frac{y}{b} C_{mn}' D_{mn} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{x}{a} - 1 \right) \left(\frac{y}{b} - 1 \right) C_{mn}' D_{mn}' \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \therefore b^4 \sum \sum A_{mn} (X_{mn}'''' Y_{mn} + 2K'^2 X_{mn}'' Y_{mn}'' + K^2 X_{mn} Y_{mn}''''') \\ &= \frac{b^4}{a^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^4}{mn\pi^2} \left(m^4 + 2K'^2 \frac{a^2}{b^2} m^2 n^2 + K^2 \frac{a^4}{b^4} n^4 \right) A_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \left[\left(\frac{b^4}{a^4} m^3 \pi^3 \frac{y^3}{3b^3} - \frac{4K'^2 b^2}{a^2} m\pi \frac{y}{b} \right) \sum D_{ms} A_{ms} - \left\{ \frac{b^4}{a^4} m^3 \pi^3 \left(\frac{y^3}{3b^3} - \frac{y^2}{b^2} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{4K'^2 b^2}{a^2} m\pi \left(\frac{y}{b} - 1 \right) \right\} \sum D_{ms}' A_{ms} \right. \\ &\quad \left. + \frac{b^4}{a^4} m^3 \pi^3 \left(\frac{y}{b} \sum D_{ms}'' A_{ms} + \sum D_{ms}''' A_{ms} \right) \right] \sin \frac{m\pi}{a} x \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(K^2 n^3 \pi^3 \frac{x^3}{3a^3} - \frac{4K'^2 b^2}{a^2} n\pi \frac{x}{a} \right) \sum C_{rn} A_{rn} - \left\{ K^2 n^3 \pi^3 \left(\frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^2}{a^2} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{4K'^2 b^2}{a^2} n\pi \left(\frac{x}{a} - 1 \right) \right\} \sum C_{rn}' A_{rn} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + K^2 n^3 \pi^3 \left(\frac{x}{a} \sum C_{rn}'' A_{rn} + \sum C_{rn}''' A_{rn} \right) \left] \sin \frac{n\pi}{b} y \right. \\
& + \frac{8K'^2 b^3}{a^2} \left\{ \frac{xy}{ab} \sum \sum C_{rs} D_{rs} A_{rs} - \frac{x}{a} \left(\frac{y}{b} - 1 \right) \sum \sum C_{rs} D_{rs}' A_{rs} - \left(\frac{x}{a} - 1 \right) \frac{y}{b} \sum \sum C_{rs}' D_{rs} A_{rs} \right. \\
& \left. + \left(\frac{x}{a} - 1 \right) \left(\frac{y}{b} - 1 \right) \sum \sum C_{rs}' D_{rs}' \right\} = f(xy)
\end{aligned}$$

上式中左邊第二頂の $\frac{y}{b}$ の代數式を $\sin \frac{n\pi}{b} y$ の級數に、第三項の $\frac{x}{a}$ の代數式を $\sin \frac{m\pi}{a} x$ の級數に、第四項及び右邊の $f(xy)$ を $\sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y$ の級數に展開すれば

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \left[\frac{\pi^4}{mn\pi^2} \left(m^4 + \frac{2K'^2 a^2}{b^2} m^2 n^2 + \frac{K^2 a^4}{b^4} n^4 \right) A_{mn} \right. \\
& + \left\{ -\frac{b^4}{a^4} m^3 \pi^3 (-1)^n \left(\frac{2}{3n\pi} - \frac{4}{n^3 \pi^3} \right) + \frac{8K'^2 b^3}{a^2} \frac{m\pi (-1)^n}{n\pi} \right\} \sum D_{ms} A_{ms} \\
& - \left\{ \frac{4b^4}{a^4} m^3 \pi^3 \left(\frac{(-1)^n}{3n\pi} + \frac{1}{n^3 \pi^3} \right) + \frac{8K'^2 b^3}{a^2} \frac{m\pi}{n\pi} \right\} \sum D_{ms}' A_{ms} \\
& + \frac{b^4}{a^4} m^3 \pi^3 \left\{ -\frac{2(-1)^n}{n\pi} \sum D_{ms}'' A_{ms} + \frac{2}{m\pi} \{1 - (-1)^n\} \sum D_{ms}''' A_{ms} \right\} \\
& + \left\{ -K^2 n^3 \pi^3 (-1)^m \left(\frac{2}{3m\pi} - \frac{4}{m^3 \pi^3} \right) + \frac{8K'^2 b^3}{a^2} \frac{n\pi (-1)^m}{m\pi} \right\} \sum C_{rn} A_{rn} \\
& - \left\{ 4K^2 n^3 \pi^3 \left(\frac{(-1)^m}{3m\pi} + \frac{1}{m^3 \pi^3} \right) + \frac{8K'^2 b^3}{a^2} \frac{n\pi}{m\pi} \right\} \sum C_{rn}' A_{rn} \\
& + K^2 n^3 \pi^3 \left\{ -\frac{2(-1)^m}{m\pi} \sum C_{rn}'' A_{rn} + \frac{2}{m\pi} \{1 - (-1)^m\} \sum C_{rn}''' A_{rn} \right\} \\
& + \frac{8K'^2 b^3}{a^2} \left\{ \frac{4(-1)^{m+n}}{mn\pi^2} \sum \sum C_{rs} D_{rs} A_{rs} - \frac{4(-1)^m}{mn\pi^2} \sum \sum C_{rs} D_{rs}' A_{rs} \right. \\
& \left. - \frac{4(-1)^n}{mn\pi^2} \sum \sum C_{rs}' D_{rs} A_{rs} + \frac{4}{mn\pi^2} \sum \sum C_{rs}' D_{rs}' A_{rs} \right\} \Big] \\
& = \sum \sum R_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y
\end{aligned}$$

前頁(*) n に付て總和を求めたる $\sum_{n=1}^{\infty} D_{mn} A_{mn}$ は m を含むも n を含まざるものと考ふることを得るが故に、便宜上之れを $\sum_{s=1}^{\infty} D_{ms} A_{ms}$ を以て表はせば

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} D_{mn} A_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{s=1}^{\infty} D_{ms} A_{ms} \right) \sin \frac{m\pi}{a} x \\
\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} A_{mn} \sin \frac{n\pi}{b} y &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} C_{rn} A_{rn} \right) \sin \frac{n\pi}{b} y \\
\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} D_{mn} A_{mn} &= \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} C_{rs} D_{rs} A_{rs}
\end{aligned}$$

等と書くことを得べし、其の他類推すべし。

此の式は x 及び y の如何に關せず成立するを要するものなるを以て、兩邊の $\Sigma\Sigma$ 内の $\sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y$ の係數 (其の右邊に屬するものは公式 14 の $b^4 \phi_{mn}$ に外ならず) を equato し、且

$$\left. \begin{aligned} \rho_{mn} &= m^4 + \frac{2K'^2 a^2}{b^2} m^2 n^2 + \frac{K^2 a^4}{b^4} n^4 = \left(m^2 + \frac{\lambda^2 \alpha n^2}{\pi^2}\right) \left(m^2 + \frac{\lambda'^2 \alpha n^2}{\pi^2}\right), & \alpha_n &= \frac{a}{b} n\pi \\ \rho_{mn'} &= \frac{b^4}{K^2 a^4} \rho_{mn} = \left(n^2 + \frac{\beta m^2}{\lambda'^2 \pi^2}\right) \left(n^2 + \frac{\beta m^2}{\lambda^2 \pi^2}\right), & \beta_m &= \frac{b}{a} m\pi \\ \lambda^2 &= K^2 + \sqrt{K'^4 - K^2} & \lambda'^2 &= K'^2 - \sqrt{K'^4 - K^2} \\ \bar{C}_{rn} &= C_{rn} + 2C_{rn'} + 3C_{rn''} + 3C_{rn'''} \\ \bar{D}_{ms} &= D_{ms} + 2D_{ms'} + 3D_{ms''} + 3D_{ms'''} \end{aligned} \right\} \dots\dots(48)$$

と置けば、運算の結果 A_{mn} に關する次の如き一般方程式を得べし。

$$\begin{aligned} A_{mn} + \frac{1}{\pi^4 \rho_{mn}} \left[4\alpha n^2 \left(\frac{K^2 \alpha n^2}{m^2 \pi^2} + 2K'^2 \right) \{ (-1)^m \Sigma C_{rn} A_{rn} - \Sigma C_{rn'} A_{rn} \} \right. \\ \left. - \frac{2K^2 \alpha n^4}{3} \{ (-1)^m \Sigma \bar{C}_{rn} A_{rn} - 3 \Sigma C_{rn''} A_{rn} \} \right] \\ + \frac{1}{K^2 \pi^4 \rho_{mn'}} \left[4\beta m^2 \left(\frac{\beta m^2}{n^2 \pi^2} + 2K'^2 \right) \{ (-1)^n \Sigma D_{ms} A_{ms} - \Sigma D_{ms'} A_{ms} \} \right. \\ \left. - \frac{2\beta m^4}{3} \{ (-1)^n \Sigma \bar{D}_{ms} A_{ms} - 3 \Sigma D_{ms''} A_{ms} \} \right] \\ + \frac{32K'^2 a^2}{b^2 \pi^4 \rho_{mn}} \{ (-1)^{m+n} \Sigma \Sigma C_{rs} D_{rs} A_{rs} - (-1)^m \Sigma \Sigma C_{rs} D_{rs'} A_{rs} \\ - (-1)^n \Sigma \Sigma C_{rs'} D_{rs} A_{rs} + \Sigma \Sigma C_{rs'} D_{rs'} A_{rs} \} = \frac{a^4}{b^4} \frac{mn \pi^2 R_{mn}}{\pi^4 \rho_{mn}} \dots\dots\dots(49) \end{aligned}$$

是最初假定せる撓度の式 (41) が平板の基本公式 (4) を満足せしむるための係數 A_{mn} の方程式にして、周邊の條件に依りて決定せらるべき各 C, D 及び荷重に依りて定まるべき R_{mn} 等が與へらるれば、任意の m, n に對する A_{mn} の値を計算することを得べし。然れども本章第二節の各例に於て見る如く、四邊に於て單純に支承せらるゝ場合の外、 m と n とを含む A_{mn} 自身を知る必要なく、 n 又は m のみの函數たる A_n, A_n', B_m, B_m' 等を知れば、撓度の式は完全に決定せらるゝものとす。而して其の求め方に付ては各場合に就き説述すべし。

(49) 式中

$$\begin{aligned} \frac{4\alpha n^2}{\pi^4 \rho_{mn}} \left(\frac{K^2 \alpha n^2}{m^2 \pi^2} + 2K'^2 \right) &= 4 \left(\frac{1}{m^2 \pi^2} - \frac{m^2 \pi^2}{\pi^4 \rho_{mn}} \right) \\ \frac{4\beta m^2}{K^2 \pi^4 \rho_{mn'}} \left(\frac{\beta m^2}{n^2 \pi^2} + 2K'^2 \right) &= 4 \left(\frac{1}{n^2 \pi^2} - \frac{n^2 \pi^2}{\pi^4 \rho_{mn'}} \right) \end{aligned}$$

なるを以て、便宜上

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{4}{n^2 \pi^2} \{(-1)^n \sum \sum C_{rs} D_{rs} A_{rs} - \sum \sum C_{rs} D_{rs}' A_{rs}\} + \sum C_{rn} A_{rn} \equiv A_n \\
 & \frac{4}{n^2 \pi^2} \{(-1)^n \sum \sum C_{rs}' D_{rs} A_{rs} - \sum \sum C_{rs}' D_{rs}' A_{rs}\} + \sum C_{rn}' A_{rn} \equiv A_n' \\
 & \frac{4}{m^2 \pi^2} \{(-1)^m \sum \sum C_{rs} D_{rs} A_{rs} - \sum \sum C_{rs}' D_{rs} A_{rs}\} + \sum D_{ms} A_{ms} \equiv B_m \\
 & \frac{4}{m^2 \pi^2} \{(-1)^m \sum \sum C_{rs} D_{rs}' A_{rs} - \sum \sum C_{rs}' D_{rs}' A_{rs}\} + \sum D_{ms}' A_{ms} = B_m' \\
 & (-1)^{m+n} \sum \sum C_{rs} D_{rs} A_{rs} - (-1)^m \sum \sum C_{rs} D_{rs}' A_{rs} - (-1)^n \sum \sum C_{rs}' D_{rs} A_{rs} \\
 & + \sum \sum C_{rs}' D_{rs}' A_{rs} = \Delta_{mn}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots (50)$$

と置けば、(49) 式は次の如く書換ふることを得べし。

$$\begin{aligned}
 & \Delta_{mn} + \frac{4}{n^2 \pi^2} \{(-1)^m \sum C_{rn} A_{rn} - \sum C_{rn}' A_{rn}\} + \frac{4}{n^2 \pi^2} \{(-1)^n \sum D_{ms} A_{ms} - \sum D_{ms}' A_{ms}\} + \frac{16 \Delta_{mn}}{m^2 n^2 \pi^4} \\
 & - \frac{1}{\pi^4 \rho_{mn}} \left[4 m^2 \pi^2 \{(-1)^m A_n - A_n'\} + \frac{2}{3} K^2 \alpha n^4 \{(-1)^m \sum \bar{C}_{rn} A_{rn} - 3 \sum C_{rn}'' A_{rn}\} \right] \\
 & - \frac{1}{\pi^4 \rho_{mn}'} \left[4 n^2 \pi^2 \{(-1)^n B_m - B_m'\} + \frac{2}{3} \beta m^4 \{(-1)^n \sum \bar{D}_{ms} A_{ms} - 3 \sum D_{ms}''' A_{ms}\} \right] \\
 & = \frac{\alpha^4}{b^4} \frac{mn \pi^2 R_{mn}}{\pi^4 \rho_{mn}} \dots\dots\dots (51)
 \end{aligned}$$

IV. 一般撓度方程式

i) 複式無限級數を以て表はしたる撓度方程式

(49) 又は (50) 式より A_{mn} を求め、之れを (41) 式に當てはむれば任意の點に於ける ξ の値を計算することを得べし。而して (41) 式を以て表はさるゝ ξ は次の如く書換ふることを得。

$$\begin{aligned}
 \xi &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{mn}}{mn \pi^2} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y + \sum_{n=1}^{\infty} F\left(n, \frac{x}{a}\right) \sin \frac{n\pi}{b} y \\
 &+ \sum_{m=1}^{\infty} F\left(m, \frac{y}{b}\right) \sin \frac{m\pi}{a} x + \xi^{(4)}
 \end{aligned}$$

但し

$$\begin{aligned}
 F\left(n, \frac{x}{a}\right) &= \frac{1}{n\pi} \left\{ \frac{x^3}{3a^3} \sum C_{rn} A_{rn} - \left(\frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^2}{a^2} \right) \sum C_{rn}' A_{rn} \right. \\
 & \left. + \frac{x}{a} \sum C_{rn}'' A_{rn} + \sum C_{rn}''' A_{rn} \right\} \\
 F\left(m, \frac{y}{b}\right) &= \frac{1}{m\pi} \left\{ \frac{y^3}{3b^3} \sum D_{ms} A_{ms} - \left(\frac{y^3}{3b^3} - \frac{y^2}{b^2} \right) \sum D_{ms}' A_{ms} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{y}{b} \{ \sum D_{ms}'' A_{ms} + \sum D_{ms}''' A_{ms} \} \\
 \xi^{(4)} = & \frac{x^3}{3\alpha^3} \left\{ \frac{y^3}{3b^3} \sum \sum C_{rs} D_{rs} A_{rs} - \left(\frac{y^3}{3b^3} - \frac{y^2}{b^2} \right) \sum \sum C_{rs} D_{rs}' A_{rs} \right. \\
 & + \frac{y}{b} \sum \sum C_{rs} D_{rs}'' A_{rs} + \sum \sum C_{rs} D_{rs}''' A_{rs} \left. \right\} - \left(\frac{x^3}{3\alpha^3} - \frac{x^2}{\alpha^2} \right) \left\{ \frac{y^2}{3b^3} \sum \sum C_{rs}' D_{rs} A_{rs} \right. \\
 & - \left(\frac{y^3}{3b^3} - \frac{y^2}{b^2} \right) \sum \sum C_{rs}' D_{rs}' A_{rs} + \frac{y}{b} \sum \sum C_{rs}' D_{rs}'' A_{rs} + \sum \sum C_{rs}' D_{rs}''' A_{rs} \left. \right\} \\
 & + \frac{x}{\alpha} \left\{ \frac{y^3}{3b^3} \sum \sum C_{rs}'' D_{rs} A_{rs} - \left(\frac{y^3}{3b^3} - \frac{y^2}{b^2} \right) \sum \sum C_{rs}'' D_{rs}' A_{rs} \right. \\
 & + \frac{y}{b} \sum \sum C_{rs}'' D_{rs}'' A_{rs} + \sum \sum C_{rs}'' D_{rs}''' A_{rs} \left. \right\} + \frac{y^3}{3b^3} \sum \sum C_{rs}''' D_{rs} A_{rs} \\
 & - \left(\frac{y^3}{3b^3} - \frac{y^2}{b^2} \right) \sum \sum C_{rs}''' D_{rs}' A_{rs} + \frac{y}{b} \sum \sum C_{rs}''' D_{rs}'' A_{rs} + \sum \sum C_{rs}''' D_{rs}''' A_{rs}
 \end{aligned} \tag{52}$$

上式中、各代數的函数を Fourier 級數に展開し、且 (50) 式の關係と組合はすれば、

$$\begin{aligned}
 \bar{\xi} = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{mn\pi^2} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \left\{ A_{mn} + \frac{4}{n^2\pi^2} \{ (-1)^m \sum C_{rn} A_{rn} - \sum C_{rn}' A_{rn} \} \right. \\
 & - \frac{2}{3} \{ (-1)^m \sum \bar{C}_{rn} A_{rs} - \sum C_{rn}''' A_{rn} \} + \frac{4}{n^2\pi^2} \{ (-1)^n \sum D_{ms} A_{ms} - \sum D_{ms}' A_{ms} \} \\
 & - \frac{2}{3} \{ (-1)^n \sum \bar{D}_{ms} A_{ms} - \sum D_{ms}''' A_{ms} \} + \frac{16\Delta mn}{m^2 n^2 \pi^4} - \frac{8}{3m^2 n^2} \sum \sum \{ (-1)^m C_{rs} \\
 & - C_{rs}' \} \{ (-1)^n \bar{D}_{rs} - 3 D_{rs}''' \} A_{rs} - \frac{8}{3m^2 n^2} \sum \sum \{ (-1)^n D_{rs} - D_{rs}' \} \{ (-1)^m \bar{C}_{rs} - 3 C_{rs}''' \} A_{rs} \\
 & \left. + \frac{4}{9} \sum \sum \{ (-1)^m \bar{C}_{rs} - 3 C_{rs}''' \} \{ (-1)^n \bar{D}_{rs} - 3 D_{rs}''' \} A_{rs} \right\} \dots \dots \dots (53)
 \end{aligned}$$

を得べし。

ii) 單式無限級數を以て表はしたる撓度方程式

(49) 又は (51) 式に示す A_{mn} を (52) 又は (53) 式に代入し、 m 又は n に關する無限級數の總和を求むれば、 $\bar{\xi}$ を單式無限級數として表はすことを得べし。

今 (49) 式の左邊第二、第三及び第四項を夫々 $F_{mn}^{(1)}$ 、 $F_{mn}^{(2)}$ 及び $F_{mn}^{(3)}$ を以て表はせば

$$\begin{aligned}
 A_{mn} = & \frac{\alpha^4}{b^4} \frac{mn\pi^2 R_{mn}}{\pi^4 \rho_{mn}} - F_{mn}^{(1)} - F_{mn}^{(2)} - F_{mn}^{(3)} \\
 \therefore \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{mn}}{mn\pi^2} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha^4}{b^4} \cdot \frac{R_{mn}}{\pi^4 \rho_{mn}} \right. \\
 & \left. - \frac{F_{mn}^{(1)}}{mn\pi^2} - \frac{F_{mn}^{(2)}}{mn\pi^2} - \frac{F_{mn}^{(3)}}{mn\pi^2} \right) \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y
 \end{aligned}$$

等變荷重に對しては公式 (46) に依り

$$\frac{\alpha^4}{b^4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{R_{mn}}{\pi^4 \rho_{mn}} = \frac{4\alpha^4}{b^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{mn\pi^5 \rho_{mn}} \left[\{1-(-1)^m\} \{1-(-1)^n\} - \alpha(-1)^m \{1-(-1)^n\} - \beta(-1)^m \{1-(-1)^n\} \right] \sin \frac{m\pi}{a} x$$

公式 (24) 及び (25) の第五式に依りて上式右邊の無限級數の和を求むれば,

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^4}{b^4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{R_{mn}}{\pi^4 \rho_{mn}} \sin \frac{m\pi}{a} x &= \frac{1}{n^5 \pi^5} \left[\{1-(-1)^n\} \{H_{n\xi^{(I)}} + (1+\alpha)G_{n\xi^{(I)}}\} \right. \\ &\quad \left. - \beta(-1)^n (H_{n\xi^{(I)}} + G_{n\xi^{(I)}}) + \frac{2}{K^2} \left\{ \{1-(-1)^n\} \left(1 + \alpha \frac{x}{a}\right) - \beta(-1)^n \right\} \right] \\ \therefore \frac{\alpha^4}{b^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_{mn}}{\pi^4 \rho_{mn}} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5 \pi^5} \left[\{1-(-1)^n\} \{H_{n\xi^{(I)}} + (1+\alpha)G_{n\xi^{(I)}}\} \right. \\ &\quad \left. - \beta(-1)^n (H_{n\xi^{(I)}} + G_{n\xi^{(I)}}) \right] \sin \frac{n\pi}{b} y + \frac{2}{K^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5 \pi^5} \left\{ \{1-(-1)^n\} \left(1 + \alpha \frac{x}{a}\right) \right. \\ &\quad \left. - \beta(-1)^n \right\} \sin \frac{n\pi}{b} y \end{aligned}$$

此の式の右邊第二項の無限級數を公式 (16) 及び (17) の各第五式を適用して其の總和を求むれば, 運算の結果次の式を得べし。

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^4}{b^4} \sum \sum \frac{R_{mn}}{\pi^4 \rho_{mn}} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y &= \sum \frac{1}{n^5 \pi^5} \left[\{1-(-1)^n\} \{H_{n\xi^{(I)}} + (1+\alpha)G_{n\xi^{(I)}}\} \right. \\ &\quad \left. - \beta(-1)^n (H_{n\xi^{(I)}} + G_{n\xi^{(I)}}) \right] \sin \frac{n\pi}{b} y + \frac{1}{24K^2} \left\{ \left(1 + \alpha \frac{x}{a}\right) \left(\frac{y^4}{b^4} - \frac{2y^3}{b^3} + \frac{y}{b}\right) \right. \\ &\quad \left. + \beta \left(\frac{y^5}{5b^5} - \frac{2y^3}{3b^3} + \frac{7y}{15b}\right) \right\} \dots \dots \dots (54) \end{aligned}$$

$\sum \sum \frac{F_{mn}^{(1)}}{mn\pi^2} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y$ 及び $\sum \sum \frac{F_{mn}^{(3)}}{mn\pi^2} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y$ に對しても同様に最初 m に付て, 次に n に付ての總和を求め, $\sum \sum \frac{F_{mn}^{(2)}}{mn\pi^2} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y$ に對しては其の順序を反對にすれば運算の結果次の如き關係を得べし。

$$\begin{aligned} -\sum \sum \frac{F_{mn}^{(1)}}{mn\pi^2} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y &= -\sum F\left(n, \frac{x}{a}\right) \sin \frac{n\pi}{b} y + \frac{b^2}{a^2} \sum \frac{1}{n^3 \pi^3} \left\{ (K^2 G_{n\xi^{(III)}} \right. \\ &\quad \left. + 2K'^2 G_{n\xi^{(I)}} \right\} \Sigma C_{rn} A_{rn} + (K^2 H_{n\xi^{(III)}} + 2K'^2 H_{n\xi^{(I)}}) \Sigma C_{rn}' A_{rn} \\ &\quad - \frac{K^2 \alpha \rho^2}{6} (G_{n\xi^{(I)}} \Sigma \bar{C}_{rn} A_{rn} + 3 H_{n\xi^{(I)}} \Sigma C_{rn}'' A_{rn}) \left\} \sin \frac{n\pi}{b} y \dots \dots \dots (55) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\sum \sum \frac{F_{mn}^{(2)}}{mn\pi^2} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y = & -\sum F\left(m, \frac{y}{b}\right) + \frac{a^2}{K^2 b^2} \sum \frac{1}{m^3 \pi^3} \left\{ (G_{m\eta}^{(III)} + 2K'^2 G_{m\eta}^{(I)}) \sum D_{ms} A_{ms} \right. \\
 & + (H_{m\eta}^{(III)} + 2K'^2 H_{m\eta}^{(I)}) \sum D_{ms}' A_{ms} - \frac{\beta m^2}{6} (G_{m\eta}^{(I)} \sum \bar{D}_{ms} A_{ms} \\
 & \left. + 3H_{m\eta}^{(I)} \sum D_{ms}'' A_{ms}) \right\} \sin \frac{m\pi}{a} x \dots \dots \dots (56)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\sum \sum \frac{F_{mn}^{(3)}}{mn\pi^2} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y = & \frac{8b^2 K'^2}{a^2} \sum \frac{1}{n^5 \pi^5} \left[G_{n\xi}^{(I)} \{ (-1)^n \sum \sum C_{rs} D_{rs} A_{rs} - \sum \sum C_{rs}' D_{rs}' \} \right. \\
 & + H_{n\xi}^{(I)} \{ (-1)^n \sum \sum C_{rs}' D_{rs}' A_{rs} - \sum \sum C_{rs} D_{rs}' A_{rs} \} \left. \right] \sin \frac{n\pi}{b} y - \frac{b^2 K'^2}{3a^2 K^2} \left[\left(\frac{y^5}{5b^5} - \frac{2y^3}{3b^3} \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{7y}{15b} \right) \left\{ \frac{x}{a} \sum \sum C_{rs} D_{rs} A_{rs} + \left(1 - \frac{x}{a} \right) \sum \sum C_{rs}' D_{rs}' A_{rs} \right\} - \left(\frac{y^5}{5b^5} - \frac{y^4}{b^4} + \frac{4y^3}{3b^3} \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{8y}{15b} \right) \left\{ \frac{x}{a} \sum \sum C_{rs}' D_{rs}' A_{rs} + \left(1 - \frac{x}{a} \right) \sum \sum C_{rs} D_{rs}' A_{rs} \right\} \right] \dots \dots \dots (57)
 \end{aligned}$$

(56) 式中の各 $H_{m\eta}$ 及び $G_{m\eta}$ は夫々 $H_{n\xi}$ 及び $G_{n\xi}$ 中の $n, K\alpha_m, \xi (= \frac{x}{a})$ の代りに $m, \frac{\beta m}{K}, \eta (= \frac{y}{b})$ と置きたるものなり。

(55) 乃至 (57) 式の和は $\sum \sum \frac{A_{mn}}{mn\pi^2} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y$, 即ち (52) の第一式右邊の第一項に外ならざるを以て, ζ に關する次の如き一般公式を得べし。

$$\begin{aligned}
 \zeta &= \frac{pb^4}{N_x} \bar{\zeta}, \quad \bar{\zeta} = \bar{\zeta}^{(0)} + \bar{\zeta}^{(1)} + \bar{\zeta}^{(2)} + \bar{\zeta}^{(3)} + \bar{\zeta}^{(4)} \\
 \bar{\zeta}^{(0)} &= \frac{a^4}{b^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_{mn}}{\pi^4 \pi^2 mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y, \quad \text{一般式} \\
 &= \frac{1}{24 K^2} \left\{ \left(1 + \alpha \frac{x}{a} \right) \left(\frac{y^4}{b^4} - \frac{2y^3}{b^3} + \frac{y}{b} \right) + \beta \left(\frac{y^5}{5b^5} - \frac{2y^3}{3b^3} + \frac{7y}{15b} \right) \right\} \\
 &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5 \pi^5} \left[\{ 1 - (-1)^n \} \left\{ H_{n\xi}^{(I)} + (1 + \alpha) G_{n\xi}^{(I)} \right\} - \beta (-1)^n (H_{n\xi}^{(I)} + G_{n\xi}^{(I)}) \right] \sin \frac{n\pi}{b} y, \quad \text{等變荷重の時} \\
 \bar{\zeta}^{(1)} &= \frac{b^2}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 \pi^3} \left\{ (K^2 G_{n\xi}^{(III)} + 2K'^2 G_{n\xi}^{(I)}) \sum C_{rn} A_{rn} + (K^2 H_{n\xi}^{(III)} \right. \\
 &+ 2K'^2 H_{n\xi}^{(I)}) \sum C_{rn}' A_{rn} - \frac{K^2 \alpha_n^2}{6} (G_{n\xi}^{(I)} \sum \bar{C}_{rn} A_{rn} \\
 &+ 3H_{n\xi}^{(I)} \sum C_{rn}'' A_{rn}) \left. \right\} \sin \frac{n\pi}{b} y \\
 \bar{\zeta}^{(2)} &= \frac{a^2}{K^2 b^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^3 \pi^3} \left\{ (G_{m\eta}^{(III)} + 2K'^2 G_{m\eta}^{(I)}) \sum D_{ms} A_{ms} + (H_{m\eta}^{(III)} \right. \\
 &+ 2K'^2 H_{m\eta}^{(I)}) \sum D_{ms}' A_{ms} - \frac{\beta m^2}{6} (G_{m\eta}^{(I)} \sum \bar{D}_{ms} A_{ms}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 3 H_{m\eta}^{(1)} \sum D_{ms}''' A_{ms} \} \sin \frac{m\pi}{a} x \\
\bar{\xi}^{(3)} = & - \frac{K'^2 b^2}{3K^2 a^2} \left[\left(\frac{y^5}{5b^5} - \frac{2y^3}{3b^3} + \frac{7y}{15b} \right) \left\{ \frac{x}{a} \sum \sum C_{rs} D_{rs} A_{rs} + \left(1 - \frac{x}{a} \right) \sum \sum C_{rs}' D_{rs} A_{rs} \right\} \right. \\
& - \left. \left(\frac{y^5}{5b^5} - \frac{y^4}{b^4} + \frac{4y^3}{3b^3} - \frac{8y}{15b} \right) \left\{ \frac{x}{a} \sum \sum C_{rs} D_{rs}' A_{rs} + \left(1 - \frac{x}{a} \right) \sum \sum C_{rs}' D_{rs}' A_{rs} \right\} \right] \dots (58) \\
& + \frac{8K'^2 b^2}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5 \pi^5} \left[G_{n\xi}^{(1)} \{ (-1)^n \sum \sum C_{rs} D_{rs} A_{rs} - \sum \sum C_{rs} D_{rs}' A_{rs} \} \right. \\
& + \left. H_{n\xi}^{(1)} \{ (-1)^n \sum \sum C_{rs}' D_{rs} A_{rs} - \sum \sum C_{rs}' D_{rs}' A_{rs} \} \right] \sin \frac{n\pi}{b} y \\
\bar{\xi}^{(4)} = & \frac{x^3}{3a^3} \left\{ \frac{y^3}{3b^3} \sum \sum C_{rs} D_{rs} A_{rs} - \left(\frac{y^3}{3b^3} - \frac{y^2}{b^2} \right) \sum \sum C_{rs} D_{rs}' A_{rs} \right. \\
& + \left. \frac{y}{b} \sum \sum C_{rs} D_{rs}'' A_{rs} + \sum \sum C_{rs} D_{rs}''' A_{rs} \right\} \\
& - \left(\frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^2}{a^2} \right) \left\{ \frac{y^3}{3b^3} \sum \sum C_{rs}' D_{rs} A_{rs} - \left(\frac{y^3}{3b^3} - \frac{y^2}{b^2} \right) \sum \sum C_{rs}' D_{rs}' A_{rs} \right. \\
& + \left. \frac{y}{b} \sum \sum C_{rs}' D_{rs}'' A_{rs} + \sum \sum C_{rs}' D_{rs}''' A_{rs} \right\} \\
& + \frac{x}{a} \left\{ \frac{y^3}{3b^3} \sum \sum C_{rs}'' D_{rs} A_{rs} - \left(\frac{y^3}{3b^3} - \frac{y^2}{b^2} \right) \sum \sum C_{rs}'' D_{rs}' A_{rs} \right. \\
& + \left. \frac{y}{b} \sum \sum C_{rs}'' D_{rs}'' A_{rs} + \sum \sum C_{rs}'' D_{rs}''' A_{rs} \right\} \\
& + \left\{ \frac{y^3}{3b^3} \sum \sum C_{rs}''' D_{rs} A_{rs} - \left(\frac{y^3}{3b^3} - \frac{y^2}{b^2} \right) \sum \sum C_{rs}''' D_{rs}' A_{rs} \right. \\
& + \left. \frac{y}{b} \sum \sum C_{rs}''' D_{rs}'' A_{rs} + \sum \sum C_{rs}''' D_{rs}''' A_{rs} \right\}
\end{aligned}$$

又 (51) 及び (58) 式を用ひて類似の演算を行へば、 $\bar{\xi}$ は別に次式を以て表はさるゝことを知るべし。

$$\begin{aligned}
\bar{\xi} = & \xi^{(0)} - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{b^2}{a^2} \frac{1}{n^5 \pi^5} (A_n G_{n\xi}^{(1)} + A_n' H_{n\xi}^{(1)}) + \frac{K^2}{6n\pi} (G_{n\xi}^{(1)} \sum \bar{C}_{rn} A_{rn} \right. \\
& \left. + 3 H_{n\xi}^{(1)} \sum C_{rn}''' A_{rn}) \right] \sin \frac{n\pi}{b} y \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{a^2}{b^2} \frac{1}{m^5 \pi^5} (B_m G_{m\eta}^{(1)} + B_m' H_{m\eta}^{(1)}) + \frac{1}{6K^2 m\pi} (G_{m\eta}^{(1)} \sum \bar{D}_{ms} A_{ms} \right. \\
& \left. + 3 H_{m\eta}^{(1)} \sum D_{ms}''' A_{ms}) \right] \sin \frac{m\pi}{a} x \\
& + \frac{1}{9} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \left[\left(\frac{x^3}{a^3} - \frac{x}{a} \right) C_{rs} - \left(\frac{x^3}{a^3} - \frac{3x^2}{a^2} + \frac{2x}{a} \right) C_{rs}' \right] \left\{ \frac{y}{b} \bar{D}_{rs} + 3 \left(1 - \frac{y}{b} \right) D_{rs}'' \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left\{ \frac{x}{a} \bar{C}_{rs} + 3 \left(1 - \frac{x}{a} \right) C_{rs}''' \right\} \left\{ \left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{y}{b} \right) D_{rs} - \left(\frac{y^3}{b^3} - \frac{3y^2}{b^2} + \frac{2y}{b} \right) D_{rs}' \right\} \\
 & + \left\{ \frac{x}{a} \bar{C}_{rs} + 3 \left(1 - \frac{x}{a} \right) C_{rs}''' \right\} \left\{ \frac{y}{b} \bar{D}_{rs} + 3 \left(1 - \frac{y}{b} \right) D_{rs}''' \right\} \dots\dots\dots (59)
 \end{aligned}$$

上式中 $\bar{\zeta}^{(0)}$ は (58) 式に示すが如し。

(58) 式に示す $\bar{\zeta}$ と (59) 式に示すものとは其の形に於ては著しく相違せるも全く同一のものなること明かなり。而して之れを用ふる上に於て、其の何れが便利なるかは各場合に就て判定せざるべからず。

公式 (58) 中の n 又は m に關する無限級數の式は何れも公式 (24) 及び (25) に示す双曲線函數の組合せより成るものなるを以て、是等を

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \lambda'^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \dots\dots\dots (a)$$

に當てはむれば、何れも零となることは容易に證明することを得べし。又 $\bar{\zeta}^{(3)}$ 中の代數函數及び $\bar{\zeta}^{(4)}$ を (a) 式に當てはむれば、矢張り零となり、等變荷重に對する $\bar{\zeta}^{(0)}$ の代數函數に對しては

$$\frac{1}{b^4} \left(1 + \alpha \frac{x}{a} + \beta \frac{y}{b} \right)$$

となる、從て

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \lambda'^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \zeta = \frac{p}{N_x} \left(1 + \alpha \frac{x}{a} + \beta \frac{y}{b} \right) = \frac{pxy}{N_x}$$

即ち (58) 式は周邊條件の如何に關せず基本公式 (4) を満足す。其の他 $p \sum \sum R_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y$ を以て表はさるゝ一般的荷重及び (59) 式に付ても同様に證明することを得べし。

第二節 特殊の場合に對する應用

I. 第一種 A. 少なくとも相對する二邊が單に支承せられ、自由邊を有せざる場合

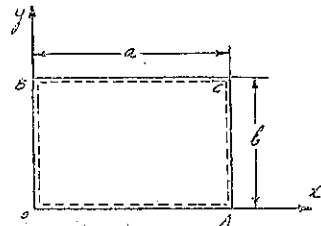
i) 四邊に於て單に支承せらるゝ場合

此の場合に於ては公式 (32) に依り、各 C_{mn} 及び D_{mn} は何れも零なり。從て

$$\left. \begin{aligned}
 X_m &= \frac{1}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{a} x \\
 Y_n &= \frac{1}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{b} y \\
 A_{mn} &= \frac{a^2}{b^2} \frac{mn\pi^2 R_{mn}}{\pi^4 \rho_{mn}}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (60)$$

にして、(58) 式中の $\bar{\zeta}^{(1)}$ 乃至 $\bar{\zeta}^{(4)}$ は凡て零となるを以て直ちに次の公式を得べし。

第八圖



a. 撓 度

$$\zeta = \frac{pb^4}{N_x} \bar{\zeta}$$

$$\bar{\zeta} = \bar{\zeta}^{(0)} = \frac{1}{24K^2} \left\{ \left(1 + \alpha \frac{x}{a}\right) \left(\frac{y^4}{b^4} - \frac{2y^3}{b^3} + \frac{y}{b}\right) + \beta \left(\frac{y^5}{5b^5} - \frac{2y^3}{3b^3} + \frac{7y}{15b}\right) \right\}$$

$$+ \sum \frac{W_{n\xi}^{(1)}}{n^3 \pi^3} \sin \frac{n\pi}{b} y$$

但し $W_{n\xi}^{(1)} = \{1 - (-1)^n\} \{H_{n\xi}^{(1)} + (1 + \alpha) G_{n\xi}^{(1)}\} - \beta(-1)^n (H_{n\xi}^{(1)} + G_{n\xi}^{(1)})$

$W_{n\xi}^{(1)}$ の x に関する微分式を求むれば次の如し。

$$\frac{dW_{n\xi}^{(1)}}{dx} = \frac{\alpha n}{a} \left[\{1 - (-1)^n\} \{H_{n\xi}^{(0)} - (1 + \alpha) G_{n\xi}^{(0)}\} - \beta(-1)^n (H_{n\xi}^{(0)} - G_{n\xi}^{(0)}) \right]$$

$$= \frac{\alpha n}{a} W_{n\xi}^{(0)} \quad \text{say.}$$

$$\frac{d^2 W_{n\xi}^{(1)}}{dx^2} = -\frac{\alpha n^2}{a^2} \left[\{1 - (-1)^n\} \{H_{n\xi}^{(1)} + (1 + \alpha) G_{n\xi}^{(1)}\} - \beta(-1)^n (H_{n\xi}^{(1)} + G_{n\xi}^{(1)}) \right] = -\frac{\alpha n^2}{a^2} W_{n\xi}^{(1)}$$

$$\frac{d^3 W_{n\xi}^{(1)}}{dx^3} = -\frac{\alpha n^3}{a^3} \left[\{1 - (-1)^n\} \{H_{n\xi}^{(2)} - (1 + \alpha) G_{n\xi}^{(2)}\} - \beta(-1)^n (H_{n\xi}^{(2)} + G_{n\xi}^{(2)}) \right] = -\frac{\alpha n^3}{a^3} W_{n\xi}^{(2)}$$

b. 彎曲力率及扭力率

$$M_x = pb^2 \bar{M}_x$$

$$\bar{M}_x = -\frac{1}{2\mu_2 K^2} \left\{ \left(1 + \alpha \frac{x}{a}\right) \left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{y}{b}\right) + \frac{\beta}{3} \left(\frac{y^3}{b^3} - \frac{y}{b}\right) \right\}$$

$$+ \sum \frac{1}{n^3 \pi^3} \left(W_{n\xi}^{(1)} + \frac{W_{n\xi}^{(1)}}{\mu_2} \right) \sin \frac{n\pi}{b} y$$

$$M_y = p b^2 \bar{M}_y$$

$$\bar{M}_y = -\frac{1}{2} \left\{ \left(1 + \alpha \frac{x}{a}\right) \left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{y}{b}\right) + \frac{\beta}{3} \left(\frac{y^3}{b^3} - \frac{y}{b}\right) \right\}$$

$$+ K^2 \sum \frac{1}{n^3 \pi^3} \left(W_{n\xi}^{(1)} + \frac{W_{n\xi}^{(1)}}{\mu_2} \right) \sin \frac{n\pi}{b} y$$

$$M_{xy} = pb^2 \bar{M}_{xy}$$

$$M_{xy} = -\frac{2c}{N_x} \left\{ \frac{\alpha b}{24K^2 \alpha} \left(\frac{4y^3}{b^3} - \frac{6y^2}{b^2} + 1\right) + \sum \frac{W_{n\xi}^{(0)}}{n^3 \pi^3} \cos \frac{n\pi}{b} y \right\}$$

c. 剪裁力

$$\begin{aligned}
 S_x &= pb\bar{S}_x \\
 \bar{S}_x &= \sum \frac{W_{n\xi}}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{b} y - \left(\frac{1}{\mu_2} + \frac{2c}{N_x} \right) \left\{ \frac{\alpha b}{2K^2 a} \left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{y}{b} \right) - \sum \frac{W_{n\xi}^{(0)}}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{b} y \right\} \\
 S_y &= pb\bar{S}_y \\
 \bar{S}_y &= -\frac{1}{2} \left\{ \left(1 + \alpha \frac{x}{a} \right) \left(\frac{2y}{b} - 1 \right) - \beta \left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{1}{3} \right) \right\} + \sum \frac{1}{n^2\pi^2} \left\{ K^2 W_{n\xi}^{(1)} \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{K^2}{\mu_1} + \frac{2c}{N_x} \right) W_{n\xi}^{(1)} \right\} \cos \frac{n\pi}{b} y
 \end{aligned} \quad \dots (65)$$

d. 反力

附加分布反力は次式を以て表はさるべし

$$\begin{aligned}
 Q_{OB} &= pb\bar{Q}_{OB}, & \bar{Q}_{OB} &= -2c \left\{ \frac{\alpha b}{2K^2 a} \left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{y}{b} \right) - \sum \frac{W_{n0}^{(0)}}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{b} y \right\} \\
 Q_{AC} &= pb\bar{Q}_{AC}, & \bar{Q}_{AC} &= +2c \left\{ \frac{\alpha b}{2K^2 a} \left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{y}{b} \right) - \sum \frac{W_{n1}^{(0)}}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{b} y \right\} \\
 Q_{OA} &= pb\bar{Q}_{OA}, & \bar{Q}_{OA} &= +2c \sum \frac{W_{n\xi}^{(1)}}{n^2\pi^2} \\
 Q_{BC} &= pb\bar{Q}_{BC}, & \bar{Q}_{BC} &= -2c \sum \frac{(-1)^n}{n^2\pi^2} W_{n\xi}^{(1)}
 \end{aligned} \quad \dots (66)$$

(65) 及び (66) 式に依り四邊に於ける各 S 及び Q を計算すれば各邊に於ける分布反力は公式 (10) に依りて算出することを得べし。

ii) 三邊に於て單に支承せられ、残りの一邊が完全に固定せらるゝ場合

第九圖に示す如く、一邊 $x=0$ に於て完全に固定せられ、他の三邊が單に支承せらるゝ場合に於ては、公式 (32) 及び (33) に依り

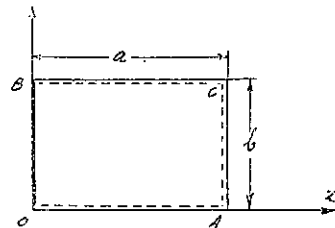
$$C_{mn}=0, \quad C_{mn}'=\frac{3}{2}, \quad C_{mn}''=-1, \quad \bar{C}_{mn}=C_{mn}'''=0$$

$$D_{mn}=D_{mn}'=D_{mn}''=D_{mn}'''=\bar{D}_{mn}=0$$

なるを以て

$$\begin{aligned}
 X_m &= -\frac{1}{2} \left(\frac{x^3}{a^3} - \frac{3x^2}{a^2} + \frac{2x}{a} \right) + \frac{1}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{a} x \\
 Y_n &= \frac{1}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{b} y
 \end{aligned} \quad \dots (67)$$

第九圖



(*) 各 $H_{n\xi}$ 及び $G_{n\xi}$ のを 0 又は 1 と置きたるものを夫々 H_{n0} , G_{n0} , H_{n1} , G_{n1} と背くことゝす其他變はずべし。

又公式 (50) に依り

$$\sum C_{rn}' A_{rn} = A_n' = \frac{3}{2} \sum A_{rn}$$

従て (51) 式は次の如くなる。

$$A_{mn} - \frac{6}{m^2 \pi^2} \sum A_{rn} + \frac{4m^2 \pi^2}{\pi^4 \rho_{mn}} A_n' = \frac{a^4}{b^4} \frac{mn\pi^2 R_{mn}}{\pi^4 \rho_{mn}} \dots\dots\dots(68)$$

此の式の兩邊の m を r と見做し $\sum_{r=1}^{\infty}$ を求むれば、

$$\left(1 - \sum_{r=1}^{\infty} \frac{6}{r^2 \pi^2}\right) \sum_{r=1}^{\infty} A_{rn} + 4 A_n' \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r^2 \pi^2}{\pi^4 \rho_{rn}} = \frac{a^4}{b^4} n \pi \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r\pi R_{rn}}{\pi^4 \rho_{rn}}$$

然るに公式 (19), (24) 及び (25) 等に依り

$$\sum \frac{1}{r^2 \pi^2} = \frac{1}{6}, \quad \sum \frac{r^2 \pi^2}{\pi^4 \rho_{rn}} = \frac{H_{no}^{(2)}}{4\alpha_n}$$

$$\frac{a^4}{b^4} n \pi \sum \frac{r\pi R_{rn}}{\pi^4 \rho_{rn}} = \frac{a^2}{b^2 n^2 \pi^2} \left[W_{no}^{(0)} + \frac{2\alpha}{K^2 \alpha_n} \{1 - (-1)^n\} \right], \text{ 等變荷重に對し}$$

$$\therefore H_{no}^{(2)} A_n' = \frac{a^2}{b^2 n^2 \pi^2} \left[W_{no}^{(0)} + \frac{2\alpha}{K^2 \alpha_n} \{1 - (-1)^n\} \right] \dots\dots\dots(69)$$

を得べく、 $\bar{\zeta}$ は公式 (59) より直ちに次の如くなるを知るべし。

$$\bar{\zeta} = \bar{\zeta}^{(0)} - \frac{b^2}{a^2} \sum \frac{A_n'}{n^3 \pi^3} H_{n\zeta}^{(1)} \sin \frac{n\pi y}{b} \dots\dots\dots(70)$$

(69) 式に依り任意の n に對する A_n' の値を求め、之れを (70) 式に當てはむれば、任意の點に於ける $\bar{\zeta}$ の値を計算することを得。

(69) 式は (70) 式より得べき $\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x}$ が零なるため必要なる條件式なることを證明することを得べし。

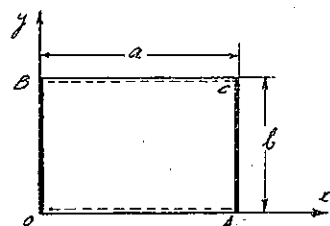
iii) 一雙の相對二邊が單に支承せられ、残りの二邊が完全に固定せらるゝ場合

第十圖に示す如く、 x 軸に並行なる二邊が單に支承せられ、其の他の二邊が完全に固定せらるゝ平版に於ては、公式 (32) 及び (35) に依り

$$\begin{aligned} C_{mn} &= C_m = -1 - 2(-1)^m, & C_{mn}' &= C_m' = 2 + (-1)^m \\ C_{mn}'' &= -1, & C_{mn}''' &= \bar{C}_{mn} = 0 \\ D_{mn} &= D_{mn}' = D_{mn}'' = D_{mn}''' = \bar{D}_{mn} = 0 \end{aligned}$$

なるを以て

第十圖



$$\left. \begin{aligned} X_m &= -\left(\frac{x^3}{a^3} - \frac{2x^2}{a^2} + \frac{x}{a}\right) - (-1)^m \left(\frac{x^3}{a^3} - \frac{x^2}{a^2}\right) + \frac{1}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{a} x \\ Y_n &= \frac{1}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{b} y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (71)$$

又公式 (50) に上記各 C の値を入れるれば

$$\sum C_{rn} A_{rn} = A_n, \quad \sum C_{rn'} A_{rn'} = A_{n'}$$

従て (51) 式は次の如くなるべし。

$$A_{mn} + 4\left(\frac{1}{m^2 \pi^2} - \frac{m^2 \pi^2}{\pi^4 \rho_{mn}}\right) \{(-1)^m A_n - A_{n'}\} = \frac{a^4}{b^4} \frac{m n \pi^2 R_{mn}}{\pi^4 \rho_{mn}} \dots\dots\dots (72)$$

此の式の兩邊に各別に C_m 及び $C_{m'}$ を乘じ、 m を r と見做して $\sum_{r=1}^{\infty}$ を求むれば、等變荷重に對しては運算の結果

$$\begin{aligned} (2H_{n0} + G_{n0})A_n - (H_{n0} + 2G_{n0})A_{n'} &= -\frac{a^2}{b^2 n^2 \pi^2} \left[W_{n0}^{(0)} + 2W_{n1}^{(0)} + \frac{6\alpha}{K^2 \alpha_n} \{1 - (-1)^n\} \right] \\ (H_{n0} + 2G_{n0})A_n - (2H_{n0} + G_{n0})A_{n'} &= -\frac{a^2}{b^2 n^2 \pi^2} \left[2W_{n0}^{(0)} + W_{n1}^{(0)} + \frac{6\alpha}{K^2 \alpha_n} \{1 - (-1)^n\} \right] \end{aligned}$$

なる二つの方程式を得べく、是より更に次の關係を得べし。

$$\left. \begin{aligned} G_{n0} A_n - H_{n0} A_{n'} &= -\frac{a^2}{b^2 n^2 \pi^2} \left[W_{n0}^{(0)} + \frac{2\alpha}{K^2 \alpha_n} \{1 - (-1)^n\} \right] \\ G_{n1} A_n - H_{n1} A_{n'} &= -\frac{a^2}{b^2 n^2 \pi^2} \left[W_{n1}^{(0)} + \frac{2\alpha}{K^2 \alpha_n} \{1 - (-1)^n\} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (73)$$

又 $\bar{\xi}$ は公式 (59) より次の如くなるを知る。

$$\bar{\xi} = \bar{\xi}^{(0)} - \frac{b^2}{a^2} \sum \frac{1}{n^3 \pi^3} (A_n G_{n\bar{\xi}} + A_{n'} H_{n\bar{\xi}}) \sin \frac{n\pi}{b} y \dots\dots\dots (74)$$

(73) の第一及び第二式は夫々 (74) 式より得べき $\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial x} \Big|_{x=0}$ 及び $\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial x} \Big|_{x=a}$ が共に零なるため必要なる A_n と $A_{n'}$ との關係を示すものなることを證明し得べし。

第一種の A に屬するものは矩形平板の周邊の條件が最も簡單なる場合に於て、函數 X は m のみを、 Y は n のみを含み、且未定係數 A_{mn} の方程式より求むべき $A_n, A_{n'}$ 等は凡て既知函數 $H_{n0}, H_{n1}, G_{n0}, G_{n1}$ 等の有限項の式として表はすことを得るものなり。

II. 第一種 B 少なくとも相對する二邊が單に支承せられ、其の他の邊の一つ又は二つが自由なる場合

i) 三邊に於て單に支承せられ残りの一邊が自由なる場合

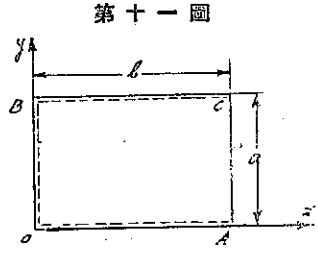
第十一圖に示す如く、 $x=a$ を除く他の三邊が單に支承せらるゝ場合に於ては

$$C_{mn}' = C_{mn}''' = 0$$

$$D_{mn} = D_{mn}' = D_{mn}'' = D_{mn}''' = \bar{D}_{mn} = 0$$

なるを以て

$$\left. \begin{aligned} X_{mn} &= C_{mn} \frac{x^3}{3a^3} + C_{mn}'' \frac{x}{a} + \frac{1}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{a} x \\ Y_n &= \frac{1}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{b} y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (75)$$



第十一圖

上式中 C_{mn} 及び C_{mn}'' は自由邊に對する條件即ち

$$M_x)_{x=a} = -N_x \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right)_{x=a} = -pb^2 \sum \sum A_{mn} \left(X_{mn}'' Y_n + \frac{1}{\mu_2} X_{mn} Y_n'' \right)_{x=a} = 0$$

$$R_{AC} = N_x \left\{ \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3} + \left(\frac{1}{\mu_2} + \frac{4C}{N_x} \right) \frac{\partial^3 \xi}{\partial x \partial y^2} \right\}_{x=a} = pb \sum \sum A_{mn} \left\{ X_{mn}''' Y_n + \left(\frac{1}{\mu_2} + \frac{4C}{N_x} \right) X_{mn}' Y_n'' \right\}_{x=a} = 0$$

従て

$$X_{mn}''(a) Y_n + \frac{1}{\mu_2} X_{mn}(a) Y_n'' = 0$$

$$X_{mn}'''(a) Y_n + \left(\frac{1}{\mu_2} + \frac{4C}{N_x} \right) X_{mn}'(a) Y_n'' = 0$$

より定むべきものとす、而して其の結果は次の如し。

$$\left. \begin{aligned} C_{mn} &= - \frac{(-1)^m \left(1 + \epsilon \frac{m^2 \pi^2}{\alpha_n^2} \right)}{\frac{2}{\alpha_n^2} (\mu_2 - \epsilon) + \frac{2}{3}}, & \frac{1}{\epsilon} &= \frac{1}{\mu_2} + \frac{4C}{N_x} \\ C_{mn}'' &= \left(\frac{2\mu_2}{\alpha_n^2} - \frac{1}{3} \right) C_{mn} \\ \bar{C}_{mn} &= \frac{6\mu_2}{\alpha_n} C_{mn} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (76)$$

上記各 C 及び D の値を (49) 式に代入すれば A_{mn} の方程式は次の如くなる。

$$A_{mn} + \frac{4\alpha_n^2 (-1)^m}{\pi^4 \rho_{mn}} \left(\frac{K^2 \alpha_n^2}{m^2 \pi^2} + 2K'^2 - \mu_2 K^2 \right) \sum C_{rn} A_{rn} = \frac{a^4}{b^4} \frac{mn \pi^2 R_{mn}}{\pi^4 \rho_{mn}} \dots\dots\dots (77)$$

此の式の兩邊に C_{mn} を乗じ、 m を r と見做して $\sum_{r=1}^{\infty}$ を求むれば、等變荷重に對しては

$$\left[K^2 G_{m1}^{(II)} + \{ 2K'^2 - K^2 (\mu_2 - \epsilon) \} G_{m1}^{(I)} + \epsilon (2K'^2 - \mu_2 K^2) G_{m1}^{(2)} \right] A_n$$

$$= \frac{a^2}{b^2 n^2 \pi^2} \left[W_{m1}^{(I)} + \epsilon W_{m1}^{(2)} + \frac{2\alpha_n}{K^2} \{ 1 - (-1)^m \} \right]$$

$$\text{但し } A_n = \sum C_{rn} A_{rn} \dots\dots\dots (78)$$

を得べく、公式 (58) より $\bar{\xi}$ は次式を以て表はさるゝを知る。

$$\bar{\xi} = \bar{\xi}^{(0)} + \frac{b^2}{a^2} \sum \frac{A_n}{n^3 \pi^3} \left\{ K^2 G_{n\xi}^{(III)} + (2K'^2 - \mu_2 K^2) G_{n\xi}^{(I)} \right\} \sin \frac{n\pi}{b} y \dots \dots \dots (79)$$

(78) 式は (79) 式より得べき R_{10} が零なるため必要な条件式なることを證明し得べし。

ii) 一双の相對二邊が單に支承せられ残りの邊の一が完全に固定、他の一が自由なる場合第十二圖の如く； $y=0$ 及び $y=b$ なる二邊が單に支承

第十二圖

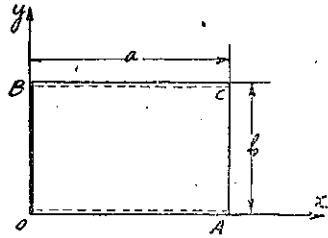
せられ、邊 $x=0$ が完全に固定せらるゝ時は

$$C_{mn}'' = -1, \quad C_{mn}''' = 0$$

$$D_{mn} = D_{mn}' = D_{mn}'' = D_{mn}''' = \bar{D}_{mn} = 0$$

なるを以て

$$\left. \begin{aligned} X_{mn} &= C_{mn} \frac{X^3}{3a^3} - C_{mn}' \left(\frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^2}{a^2} \right) - \frac{x}{a} + \frac{1}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{a} x \\ Y_n &= \frac{1}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{b} y \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (80)$$



X_{mn} 中の C_{mn} 及び C_{mn}' は前と同様の条件及び計算に依り次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} C_{mn} &= - \frac{(-1)^m \left(1 + \epsilon \frac{m^2 \pi^2}{\alpha_n^2} \right) + \frac{3\mu_2}{\alpha_n^2} + \frac{1}{2}}{\frac{3\epsilon}{\alpha_n^4} (2\mu_2 - \alpha_n^2) + \frac{3\mu_2}{\alpha_n^2} + \frac{1}{2}} \\ C_{mn}' &= \frac{3}{2} + \left(\frac{3\mu_2}{\alpha_n^2} - \frac{1}{2} \right) C_{mn} \\ \bar{C}_{mn} &= \frac{6\mu_2}{\alpha_n^2} C_{mn} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (81)$$

又 A_{mn} の方程式は (49) 式より

$$A_{mn} + \frac{4\alpha_n^2}{\pi^4 \rho_{mn}} \left[\left\{ (-1)^m \left(\frac{K^2 \alpha_n^2}{m^2 \pi^2} + 2K'^2 - \mu_2 K^2 \right) - \left(\frac{3\mu_2}{\alpha_n^2} - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{K^2 \alpha_n^2}{m^2 \pi^2} + 2K'^2 \right) \right\} \sum C_{rn} A_{rn} - \frac{3}{2} \left(\frac{K^2 \alpha_n^2}{m^2 \pi^2} + 2K'^2 \right) \sum A_{rn} \right] = \frac{a^4}{b^4} \frac{mn\pi^2 R_{mn}}{\pi^4 \rho_{mn}} \dots \dots \dots (82)$$

となるを以て、等變荷重に對しては前と同様の計算に依り、

$$\left. \begin{aligned} -\frac{3}{2} (K^2 H_{n0}^{(II)} + 2K'^2 H_{n0}^{(0)}) \sum A_{rn} + \left\{ K^2 G_{n0} + (2K'^2 - \mu_2 K^2) G_{n0} - \left(\frac{3\mu_2}{\alpha_n^2} - \frac{1}{2} \right) (K^2 H_{n0}^{(II)} + 2K'^2 H_{n0}^{(0)}) \right\} A_n &= \frac{a^2}{b^2 n^2 \pi^2} \left[W_{n0}^{(0)} + \frac{2\alpha}{K'^2 \alpha_n} \{ 1 - (-1)^n \} \right] \\ -\frac{3}{2} \left\{ K^2 H_{n1}^{(II)} + (2K'^2 + \epsilon K^2) H_{n1}^{(0)} + 2\epsilon K'^2 H_{n1}^{(2)} \right\} \sum A_{rn} & \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[K^2 G_{n1}^{(II)} + \{2K'^2 - K^2(\mu_2 - \epsilon)\} G_{n1}^{(0)} + \epsilon(2K'^2 - \mu_2 K^2) G_{n1}^{(2)} - \left(\frac{2\mu_2}{\alpha_n^2}\right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{1}{2}\right) \left\{ K^2 H_{n1}^{(II)} + (2K'^2 + \epsilon K^2) H_{n1}^{(0)} + 2K'^2 H_{n1}^{(2)} \right\} \right] A_n \\
 & = \frac{a^2}{b^2 n^2 \pi^2} \left[W_{n1}^{(0)} + \epsilon W_{n1}^{(2)} + \frac{2\alpha}{K^2 \alpha_n} \{1 - (-1)^n\} \right]
 \end{aligned} \tag{83}$$

但し $A_n = \sum C_{rn} A_{rn}$

上式より任意の n に對する $\sum A_{rn}$ 及び A_n を計算すれば、任意の點に於ける $\bar{\zeta}$ は次式に依りて求むることを得。

$$\begin{aligned}
 \bar{\zeta} = \bar{\zeta}^{(0)} + \frac{b^2}{a^2} \sum_n \frac{1}{n \pi^3} \left[\frac{3}{2} (K^2 H_{n\xi}^{(III)} + 2K'^2 H_{n\xi}^{(I)}) \sum A_{rn} + \left\{ K^2 G_{n\xi}^{(III)} + (2K'^2 - \mu_2 K^2) G_{n\xi}^{(I)} \right. \right. \\
 \left. \left. + \left(\frac{3\mu_2}{\alpha_n^2} - \frac{1}{2}\right) (K^2 H_{n\xi}^{(III)} + 2K'^2 H_{n\xi}^{(I)}) \right\} A_n \right] \sin \frac{n\pi}{b} y \dots\dots\dots(84)
 \end{aligned}$$

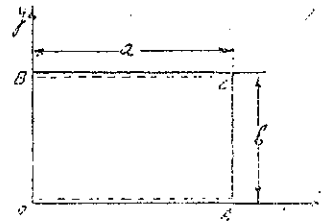
(83) 式の第一及び第二式は夫々 (84) 式より得べき $\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} \Big|_{x=0}$ 及び R_{AC} が零なるため必要な關係式なることを證明し得べし。

iii) 一雙の相對二邊が單に支承せられ、殘りの二邊が自由なる場合

第十三圖の如く、 $y=0$ 及び $y=b$ なる二邊が單に支承せらるゝ場合に於ては一般に

第十三圖

$$\begin{aligned}
 X_{mn} &= C_{mn} \frac{x^3}{3a^3} - C_{mn}' \left(\frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^2}{a^2} \right) + C_{mn}'' \frac{x}{a} \\
 & + C_{mn}''' + \frac{1}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{a} x \\
 Y_n &= \frac{1}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{b} y
 \end{aligned} \tag{85}$$



にして、 X_{mn} 中の四つの未知係數は二つの自由邊に於ける彎曲力率 M_B 及び分布反力 R_{OB} 、 R_{AC} が零となるべき條件より定むべきものにして、其の結果は次の如し。

$$\begin{aligned}
 C_{mn} &= -\frac{(-1)^m}{2} \left(1 + \epsilon \frac{m^2 \pi^2}{\alpha_n^2} \right) \left\{ 1 - (-1)^m + \frac{1 + (-1)^m}{\frac{1}{3} + \frac{4}{\alpha_n^2} (\mu_2 - \epsilon)} \right\} \\
 C_{mn}' &= -\frac{(-1)^m}{2} \left(1 + \epsilon \frac{m^2 \pi^2}{\alpha_n^2} \right) \left\{ 1 - (-1)^m - \frac{1 + (-1)^m}{\frac{1}{3} + \frac{4}{\alpha_n^2} (\mu_2 - \epsilon)} \right\} \\
 \bar{C}_{mn} &= \frac{6\mu_2}{\alpha_n^2} C_{mn}, \quad C_{mn}''' = \frac{2\mu_2}{\alpha_n^2} C_{mn}'
 \end{aligned} \tag{86}$$

是等の關係より (49) 式中の $\sum \bar{C}_{rn} A_{rn}$ 及び $\sum C_{rn}''' A_{rn}$ を消去すれば、 A_{nn} の方程式は

次の如くなる。

$$A_{mn} + \frac{4\alpha n^2}{\pi^4 \rho_{mn}} \left[\left(\frac{K^2 \alpha n^2}{m^2 \pi^2} + 2K'^2 - \mu_2 K^2 \right) \left\{ (-1)^m \sum C_{rn} A_{rn} - \sum C_{rn}' A_{rn} \right\} \right] = \frac{\alpha^4}{b^4} \frac{mn\pi^2 R_{mn}}{\pi^4 \rho_{mn}} \dots \dots \dots (87)$$

此の式の兩邊に C_{mn} 及び C_{mn}' を各別に乘じ、 m を r と見做して $\sum_{r=1}^{\infty}$ を求むれば、等變荷重に對しては運算の結果次の如き二つの方程式を得べし。

$$\left. \begin{aligned} & \left\{ K^2 G_{n0}^{(1)} + (2K'^2 - \mu_2 K^2 + \epsilon K^2) G_{n0}^{(0)} + \epsilon (2K'^2 - \mu_2 K^2) G_{n0}^{(2)} \right\} A_n \\ & - \left\{ K^2 H_{n0}^{(1)} + (2K'^2 - \mu_2 K^2 + \epsilon K^2) H_{n0}^{(0)} + \epsilon (2K'^2 - \mu_2 K^2) H_{n0}^{(2)} \right\} A_n' = \\ & \quad \frac{\alpha^2}{b^2 n^2 \pi^2} \left[W_{n0}^{(0)} + \epsilon W_{n0}^{(2)} + \frac{2\alpha}{K^2 \alpha n} \{ 1 - (-1)^n \} \right] \\ & \left\{ K^2 G_{n1}^{(1)} + (2K'^2 - \mu_2 K^2 + \epsilon K^2) G_{n1}^{(0)} + \epsilon (2K'^2 - \mu_2 K^2) G_{n1}^{(2)} \right\} A_n \\ & - \left\{ K^2 H_{n1}^{(1)} + (2K'^2 - \mu_2 K^2 + \epsilon K^2) H_{n1}^{(0)} + \epsilon (2K'^2 - \mu_2 K^2) H_{n1}^{(2)} \right\} A_n' = \\ & \quad \frac{\alpha^2}{b^2 n^2 \pi^2} \left[W_{n1}^{(0)} + \epsilon W_{n1}^{(2)} + \frac{2\alpha}{K^2 \alpha n} \{ 1 - (-1)^n \} \right] \end{aligned} \right\} \dots (88)$$

但し $A_n = \sum C_{rn} A_{rn}$, $A_n' = \sum C_{rn}' A_{rn}$

是に依り任意の n に對する A_n 及び A_n' の値を求むれば、任意の點に於ける $\bar{\zeta}$ は次式に依りて計算することを得。

$$\bar{\zeta} = \bar{\zeta}^{(0)} + \frac{b^2}{\alpha^2} \sum \frac{1}{n^3 \pi^3} \left[\left\{ K^2 G_{n\xi}^{(1)} + (2K'^2 - \mu_2 K^2) G_{n\xi}^{(0)} \right\} A_n + \left\{ K^2 H_{n\xi}^{(1)} + (2K'^2 - \mu_2 K^2) \right\} A_n' \right] \sin \frac{n\pi}{b} y \dots \dots \dots (89)$$

(88) 式の第一及び第二式は (89) 式より得べき R_{n0} 及び R_{n1} が零なるため必要なる條件式なることを證明し得べし。

前記各結果に依りて見る如く、第一種の B に屬する平版に在りては A の場合と異り、 X_{mn} 中の係數 C_{mn} , C_{mn}' , C_{mn}'' 等は m の外 n を含むも、 A_{mn} の方程式より求むべき A_n , A_n' 等は前の場合と同様、既知函數 H_{n0} , H_{n1} , G_{n0} , G_{n1} 等の有限項の式として表はさるゝものとする。是第一種即ち x 軸に並行なる二邊に於て單純に支承せらるゝ矩形平版に在りては、其の他の二邊に對する周邊條件並に荷重の如何に關せず常に

$$Y_{mn} = Y_n = \frac{1}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{b} y$$

なるに起因せるものにして、與へられたる荷重に對應せる particular integral $\bar{\zeta}^{(0)}$ を求むることを得たりとせば、complementary function $\bar{\zeta}^{(1)}$ は Levy's method に依り容易に求むる

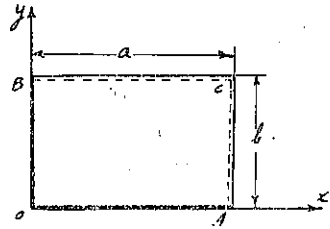
ことを得べきを以て、§ の式は第一法に依るも亦比較的簡単に誘導せらるべし。

III. 第二種 少くとも相隣る二邊が完全に固定せらるゝ場合

i. 相隣る二邊が單に支承せられ、其の他の二邊が完全に固定せらるゝ場合

第十四圖の如く、 $x=a$ 及び $y=b$ なる二邊が單に支承せられ、其の他の二邊が完全に固定せらるゝ場合に於ては、公式 (33) に依り

第十四圖



$$C_{mn} = C_{mn}''' = \bar{C}_{mn} = 0, \quad C_{mn}' = \frac{3}{2}, \quad C_{mn}'' = -1$$

$$D_{mn} = D_{mn}''' = \bar{D}_{mn} = 0, \quad D_{mn}' = \frac{3}{2}, \quad D_{mn}'' = -1$$

なるを以て

$$\left. \begin{aligned} X_m &= -\frac{1}{2} \left(\frac{x^3}{a^3} - \frac{3x^2}{a^2} + \frac{2x}{a} \right) + \frac{1}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{a} x \\ Y_n &= -\frac{1}{2} \left(\frac{y^3}{b^3} - \frac{3y^2}{b^2} + \frac{2y}{b} \right) + \frac{1}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{b} y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (90)$$

又公式 (50) より

$$A_n = 0, \quad A_n' = -\frac{9}{n^2\pi^2} \sum \sum A_{rs} + \frac{3}{2} \sum A_{rn}$$

$$B_m = 0, \quad B_m' = -\frac{9}{m^2\pi^2} \sum \sum A_{rs} + \frac{3}{2} \sum A_{ms}$$

$$\Delta_{mn} = \frac{9}{4} \sum \sum A_{rs}$$

是等の關係より A_{mn} の方程式 (51) は次の如くなるを知るべし。

$$\begin{aligned} A_{mn} - \frac{6}{m^2\pi^2} \sum A_{rn} - \frac{6}{n^2\pi^2} \sum A_{ms} + \frac{36}{m^2n^2\pi^4} \sum \sum A_{rs} + \frac{4m^2\pi^2}{\pi^4\rho_{mn}} A_n' \\ + \frac{4n^2\pi^2}{\pi^4\rho_{mn}'} B_m' = \frac{\alpha^4}{b^4} \frac{mn\pi^2 R_{mn}}{\pi^4\rho_{mn}'} \dots\dots\dots (91) \end{aligned}$$

此の式の兩邊の m 及び n を 夫々 r 及び s と見做し、各別に $\sum_{r=1}^{\infty}$ 及び $\sum_{s=1}^{\infty}$ を求むれば等邊荷重に對しては次の如き二つの方程式を得べし。

$$\left. \begin{aligned} A_n' H_{no}^{(2)} + \frac{4K^2\alpha^2}{b^2} \alpha_n^3 \sum \frac{B_r'}{\pi^4\rho_{rn}} = \frac{\alpha^2}{b^2n^2\pi^2} \left[W_{no}^{(0)} + \frac{2\alpha}{K^2\alpha_n} \{1 - (-1)^n\} \right] \\ \frac{4\alpha^2}{b^2} \beta_n^3 \sum \frac{A_s'}{\pi^4\rho_{ms}} + B_m' H_{mo}^{(0)} = \frac{\alpha^2}{K^2b^2m^2\pi^2} \left[W_{mo}^{(0)} + \frac{2\beta}{K^2\beta_m} \{1 - (-1)^m\} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (92)$$

又 § は公式 (59) に依り次式を以て表はさるべし。

$$\bar{\zeta} = \bar{\zeta}^{(0)} - \frac{b^2}{a^2} \sum \frac{A_n'}{n^3 \pi^3} H_{n\xi}^{(1)} \sin \frac{n\pi}{b} y - \frac{a^2}{b^2} \sum \frac{B_m'}{m^3 \pi^3} H_{m\eta}^{(1)} \sin \frac{m\pi}{a} x \dots\dots\dots (93)$$

(92) 式に依り A_n' 又は B_m' は夫々 n 又は m の函数なること明かなるも、 n 又は m の既知函数の有限項の式として與へられざるを以て、其の値の計算に當りては尙相當の手續を要すべし。

(92) 式より、其の第一式中の $\sum \frac{B_r'}{\pi^3 \rho_{rn}}$ を消去すれば A_n' に關する次の如き方程式を得べし。

$$\left. \begin{aligned} A_n' &= L_n + \sum_s K_{ns} A_s' \\ \text{但し } L_n &= \frac{a^2}{b^2 H_{no}^{(2)}} \left[\frac{1}{n^2 \pi^2} \left\{ W_{no}^{(0)} + \frac{2\alpha}{K^2 \alpha_n} \{1 - (-1)^n\} \right\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{4a^5}{b^5} n^3 \pi^3 \sum_r \frac{1}{r^2 \pi^6 \rho_{rn} H_{ro}^{(2)}} \left\{ W_{ro}^{(0)} + \frac{2K^2 \beta}{\beta_r} \{1 - (-1)^r\} \right\} \right] \\ K_{ns} &= \frac{16K^2 a^4 n^3 \pi^3}{b^4 H_{no}^{(2)}} \sum_r \frac{r^3 \pi^3}{\pi^6 \rho_{rn} \rho_{rs} H_{ro}^{(2)}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (94)$$

上式中 L_n 及び K_{ns} は凡て既知函数を以て表はさるゝが故に、任意の n 及び s に對する夫れ等の値を算出することを得べし。而して從來上記第一式の如き方程式より A_n' の値を計算するに當りては n に種々の値、例へば $1, 2, 3, 4, \dots, k$ 等を與へて k 個の方程式

$$\begin{aligned} a_{11}A_1' + a_{12}A_2' + a_{13}A_3' + a_{14}A_4' + \dots + a_{1k}A_k' &= L_1 \\ a_{21}A_1' + a_{22}A_2' + a_{23}A_3' + a_{24}A_4' + \dots + a_{2k}A_k' &= L_2 \\ a_{31}A_1' + a_{32}A_2' + a_{33}A_3' + a_{34}A_4' + \dots + a_{3k}A_k' &= L_3 \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}A_1' + a_{n2}A_2' + a_{n3}A_3' + a_{n4}A_4' + \dots + a_{nk}A_k' &= L_n \end{aligned}$$

を作り (A_n' は n の増加と共に減少するものなるを以て、 A_{k+1}' 以上の項を無視せるものなり)、 A_n' が n の増加と共に著しく減少する場合は未知數、從て方程式の數少きを以て、普通の一次聯立方程式の解法に依りて A_1', A_2', A_3', \dots 等を求め、⁽¹⁾ 然らざる場合、若くは精密を期するため未知數、從て方程式の數多き場合は漸近法に依り上記聯立方程式を解くを通例とせり、⁽²⁾ 然れども A_n' を n の既知函数として表はすことを得ば、其の計算上遙かに便利なること論を俟たず、依つて著者は次の如き方法を用ふることにせり。

(94) の第一式より

$$A_n' = L_n + \sum_s K_{ns} A_s' \dots\dots\dots (a)$$

(1) A. Nadai: Die Formänderungen und Spannungen von rechteckigen Platten, S. 85.
 (2) H. Hencky: Der Spannungszustand in rechteckigen Platten, S. 49, 稲田博士: 四邊に於て支持せらるゝ矩形平面版の研究 (土木學會誌第十四卷第四號) 等參照

此の式中の s は \sum に附隨せる一記號に過ぎざるを以て之れを s_1, s_2, s_3, \dots (但し何れも 1, 2, 3, 4, \dots, ∞ を表はすものとす) とするも何等の支障を生ぜず, 故に (a) 式中の A_s' の代りに同式の n を s_1 と見做したるものを代入すれば

$$\begin{aligned} A_n' &= L_n + \sum_s K_{ns} A_s' \\ &= L_n + \sum_{s_1} K_{ns_1} (L_{s_1} + \sum_{s_2} K_{s_1 s_2} A_{s_2}') \\ &= L_n + \sum_{s_1} K_{ns_1} L_{s_1} + \sum_{s_1} K_{ns_1} \sum_{s_2} K_{s_1 s_2} A_{s_2}' \end{aligned}$$

但し上式右邊の第三項は $\sum_{s_1} K_{ns_1}$ と $\sum_{s_2} K_{s_1 s_2} A_{s_2}'$ との積の謂に非ずして, s_1 に関する二つの函数 K_{ns_1} と $\sum_{s_2} K_{s_1 s_2} A_{s_2}'$ (s_2 に付て總和を求めたる $\sum_{s_2} K_{s_1 s_2} A_{s_2}'$ は單に s_1 の函数と見做すことを得るが故に) との積に對する \sum_{s_1} を意味するものとす。

上式右邊第三項の A_{s_2}' の代りに (a) 式の n を s_2 と見做したるものを代入し, 逐次同様の演算を續行すれば, A_n' は次の如き無限級數を以て表さるゝことを知るべし。(1)

$$\begin{aligned} A_n' &= L_n + \sum_{s_1} K_{ns_1} L_{s_1} + \sum_{s_1} K_{ns_1} \sum_{s_2} K_{s_1 s_2} L_{s_2} + \sum_{s_1} K_{ns_1} \sum_{s_2} K_{s_1 s_2} \sum_{s_3} K_{s_2 s_3} L_{s_3} \\ &\quad + \sum_{s_1} K_{ns_1} \sum_{s_2} K_{s_1 s_2} \sum_{s_3} K_{s_2 s_3} \sum_{s_4} K_{s_3 s_4} L_{s_4} + \dots \\ &\quad + \sum_{s_1} K_{ns_1} \sum_{s_2} K_{s_1 s_2} \sum_{s_3} K_{s_2 s_3} \sum_{s_4} K_{s_3 s_4} \sum_{s_5} \dots \sum_{s_t} \dots \sum_{s_t} K_{s_{t-1} s_t} L_{s_t} \\ &\quad + \sum_{s_1} K_{ns_1} \sum_{s_2} K_{s_1 s_2} \sum_{s_3} K_{s_2 s_3} \sum_{s_4} K_{s_3 s_4} \dots \sum_{s_{t+1}} K_{s_t s_{t+1}} A_{s_{t+1}}' \\ &\quad + \dots \end{aligned} \quad \dots (95)$$

此の式の右邊は項數の進むに従て漸次減少し, 終に零に收斂するものなるを以て, 所要の精密度に應じ初めの數項丈けを取り, 其の餘の項を無視することを得べし。其の算例に付ては後章に述ぶるが如し。

(95) 式に依りて $n=1, 2, 3, 4, \dots$ 等に對する A_n' の値を算出し, A_n' の n を s と見做したるものを (92) の第二式に代入すれば, 任意の m に對する B_m' の値を計算することを得べし。

(1) 公式 (94) の第一式は Fredholm の積分方程式

$$U(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) U(t) dt$$

但し $U(x)$ = 未知函数, $f(x)$ = 既知函数, $K(x,t)$ = 核, λ = Parameter

の積分記號 \int_a^b の代りに $\sum_{s=1}^{\infty}$ と書換へたる如きものにして, 其の形に於て彼此相類似せるを見るべし。著者が (94) 式より (95) 式を誘導したるは, 上記積分方程式の一解法たる逐次代入法を適用せるに外ならず。W. Hort: Die Differentialgleichungen des Ingenieurs, s. 652, 池田芳郎博士著, 積分方程式論 78 頁等参照。

以上叙ぶる所に依りて明かなる如く、第二種に屬する矩形平版に在りては、第一種の場合と異り、 A_{mn} の方程式より得べき A_n, A_n', B_m, B_m' 等は既知函數の有限項の式として表はすこと能はず、而して公式 (95) は第二種の其の場合に對しても其のまゝ適用することを得るものとす。

ii. 三邊に於て完全に固定せられ、一邊が單に支承せらるゝ場合

第十五圖の如く、一邊 $x=a$ に於て單に支承せられ、其の他の三邊が完全に固定せらるゝ場合に於ては、公式 (33) 及び (35) に依り

$$\begin{aligned} C_{mn} = C_{mnn}''' = \bar{C}_{mn} = 0, \quad C_{mn}' = \frac{3}{2}, \quad C_{mnn}'' = -1 \\ D_{mn} = D_n = -1 - 2(-1)^n, \quad D_{mn}' = D_n' = 2 + (-1)^n, \\ D_{mnn}'' = -1, \quad \bar{D}_{mnn}''' = \bar{D}_{mn} = 0 \end{aligned}$$

なるが故に

$$\left. \begin{aligned} X_m &= -\frac{1}{2} \left(\frac{x^3}{a^3} - \frac{3x^2}{a^2} + \frac{2x}{a} \right) + \frac{1}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{a} x \\ Y_n &= -\left(\frac{y^3}{b^3} - \frac{2y^2}{b^2} + \frac{y}{b} \right) - (-1)^n \left(\frac{y^3}{b^3} - \frac{y^2}{b^2} \right) + \frac{1}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{b} y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (96)$$

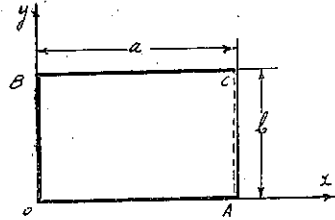
又公式 (50) に前記各 C 及び D を代入すれば

$$\begin{aligned} A_n &= 0 \\ A_n' &= -\frac{6}{n^2\pi^2} \left[\{2 + (-1)^n\} \sum \sum A_{rs} + \{1 + 2(-1)^n\} \sum \sum (-1)^s A_{rs} \right] + \frac{3}{2} \sum A_{rn} \\ B_m &= \frac{6}{m^2\pi^2} \sum \sum \{1 + 2(-1)^s\} A_{rs} - \sum \{1 + 2(-1)^s\} A_{ms} \\ B_m' &= -\frac{6}{m^2\pi^2} \sum \sum \{2 + (-1)^s\} A_{rs} + \sum \{2 + (-1)^s\} A_{ms} \\ \Delta_{mn} &= \frac{3}{2} \left[\{2 + (-1)^n\} \sum \sum A_{rs} + \{1 + 2(-1)^n\} \sum \sum (-1)^s A_{rs} \right] \end{aligned}$$

となるを以て A_{mn} の方程式は (51) 式より次の如くなるを知るべし。

$$\begin{aligned} A_{mn} - \frac{6}{m^2\pi^2} \sum A_{rn} - \frac{4}{n^2\pi^2} \left[\{2 + (-1)^n\} \sum A_{ms} + \{1 + 2(-1)^n\} \sum (-1)^s A_{ms} \right] \\ + \frac{24}{m^2n^2\pi^4} \left[\{2 + (-1)^n\} \sum \sum A_{rs} + \{1 + 2(-1)^n\} \sum \sum (-1)^s A_{rs} \right] \\ + \frac{4m^2\pi^2}{\pi^4\rho_{mn}} A_n' - \frac{4n^2\pi^2}{\pi^4\rho_{mn}'} \{(-1)^n B_m - B_m'\} = \frac{\alpha^4}{b^4} \frac{mn\pi^2 R_{mn}}{\pi^4\rho_{mn}} \dots\dots (97) \end{aligned}$$

第十五圖



上式左邊の初めの四項を δ_{mn} とすれば

$$\sum_r \delta_{rn} = \sum_s \delta_{ms} = \sum_s (-1)^s \delta_{ms} = 0$$

なるを以て、等變荷重に對しては前と同様の演算に依り次の如き三つの方程式を得べし。

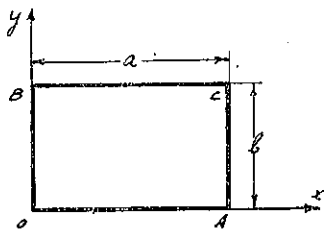
$$\left. \begin{aligned} A_n' H_{m0}^{(2)} - \frac{4K^2 \alpha^2}{b^2} \alpha_n^3 \sum \frac{(-1)^n B_r - B_r'}{\pi^4 \rho_{rn}} &= \frac{\alpha^2}{b^2 n^2 \pi^2} \left[W_{n0}^{(0)} + \frac{2\alpha}{K^2 \alpha_n} \{1 - (-1)^n\} \right] \\ \frac{4\alpha^2}{b^2} \beta_m^3 \sum \frac{A_n'}{\pi^4 \rho_{ms}} - (G_{m0}^{(2)} B_m - H_{m0}^{(2)} B_m') &= \frac{\alpha^2}{K^2 b^2 m^2 \pi^2} \left[W_{m0}^{(0)} + \frac{2K^2 \beta}{\beta_m} \{1 - (-1)^m\} \right] \\ \frac{4\alpha^2}{b^2} \beta_m^3 \sum \frac{(-1)^s A_s'}{\pi^4 \rho_{ms}} - (H_{m0}^{(0)} B_m - G_{m0}^{(2)} B_m') &= \frac{\alpha^2}{K^2 b^2 m^2 \pi^2} \left[W_{m1}^{(0)} + \frac{2K^2 \beta}{\beta_m} \{1 - (-1)^m\} \right] \end{aligned} \right\} \dots (98)$$

上記第一式中 $\sum \frac{(-1)^n B_r - B_r'}{\pi^4 \rho_{rn}}$ を消去すれば、 A_n' に関し (94) の第一式と同様の形の方程式を得るを以て、前例の如く公式 (95) を用ひて A_n' を計算することを得べし。而して斯くして得たる A_n' の n を s と見做して (98) の第二及び第三式に代入すれば、 B_m と B_m' との値を求むることを得、次に $\bar{\xi}$ は公式 (59) より直ちに次の如くなるを知るべし。

$$\bar{\xi} = \bar{\xi}^{(0)} - \frac{b^2}{\alpha^2} \sum \frac{A_n'}{n^3 \pi^3} H_{m0}^{(1)} \sin \frac{n\pi}{b} y - \frac{\alpha^2}{b^2} \sum \frac{1}{m^4 \pi^4} (B_m G_{m\eta}^{(1)} + B_m' H_{m\eta}^{(1)}) \sin \frac{m\pi}{a} x \dots (99)$$

(98) の第一、第二及び第三式は夫々 (99) より得べき $\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial x} \Big|_{x=0}$ 、 $\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial y} \Big|_{y=0}$ 及び $\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial y} \Big|_{y=b}$ が何れも零なるため必要なる條件式なることを證明するを得べし。

第十六圖



iii. 四邊に於て完全に固定せらるゝ場合

α 等變荷重を受くる時

四邊に於て完全に固定せらるゝ平版に對しては公式(35)

に依り

$$\begin{aligned} C_{mn} = C_m = -1 - 2(-1)^m, \quad C_{mn}' = C_m' = 2 + (-1)^m, \\ C_{mn}'' = -1, \quad C_{mn}''' = \bar{C}_{mn} = 0 \end{aligned}$$

にして各 D は上記各 C の m の代りに n と置きたるものなり、從て

$$\left. \begin{aligned} X_m &= -\left(\frac{x^3}{a^3} - \frac{2x^2}{a^2} + \frac{x}{a}\right) - (-1)^m \left(\frac{x^3}{a^3} - \frac{x^2}{a^2}\right) + \frac{1}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{a} x \\ Y_n &= -\left(\frac{y^3}{b^3} - \frac{2y^2}{b^2} + \frac{y}{b}\right) - (-1)^n \left(\frac{y^3}{b^3} - \frac{y^2}{b^2}\right) + \frac{1}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{b} y \end{aligned} \right\} \dots (100)$$

$$\begin{aligned} A_{mn} + \frac{4}{m^2 \pi^2} \{(-1)^m \sum C_{rn} A_{rn} - \sum C_{rn}' A_{rn}\} + \frac{4}{n^2 \pi^2} \{(-1)^n \sum D_{ms} A_{ms} - \sum D_{ms}' A_{ms}\} \\ + \frac{16A_{mn}}{m^2 n^2 \pi^4} - \frac{4m^2 \pi^2}{\pi^4 \rho_{mn}} \{(-1)^m A_n - A_n'\} - \frac{4n^2 \pi^2}{\pi^4 \rho_{mn}} \{(-1)^n B_m - B_m'\} = \frac{\alpha^4}{b^4} \frac{m n \pi^2 R_{mn}}{\pi^4 \rho_{mn}} \dots (101) \end{aligned}$$

上式左邊の初めの四項を ρ_{mn} とすれば

$$\sum_r C_r \delta r_n = \sum_r C'_r \delta r_n = \sum_s D_s \delta m_s = \sum_s D'_s \delta m_s = 0$$

なるが故に、前と同様の演算に依り次の關係を得べし。

$$\left. \begin{aligned} A_n G_{n0}^{(2)} - A'_n H_{n0}^{(2)} + \frac{4K^2 a^2}{b^2} \alpha_n^3 \left\{ (-1)^n \sum \frac{B_r}{\pi^4 \rho_{rn}} - \sum \frac{B'_r}{\pi^4 \rho_{rn}} \right\} \\ = -\frac{a^2}{b^2 n^2 \pi^2} \left[W_{n0}^{(0)} + \frac{2\alpha}{K^2 \alpha_n} \{1 - (-1)^n\} \right] \\ A_n G_{m1}^{(2)} - A'_n H_{m1}^{(2)} + \frac{4K^2 a^2}{b^2} \alpha_n^3 \left\{ (-1)^n \sum \frac{(-1)^r B_r}{\pi^4 \rho_{rn}} - \sum \frac{(-1)^r B'_r}{\pi^4 \rho_{rn}} \right\} \\ = -\frac{a^2}{b^2 n^2 \pi^2} \left[W_{m1}^{(0)} + \frac{2\alpha}{K^2 \alpha_n} \{1 - (-1)^n\} \right] \\ B_m G_{m0}^{(2)} - B'_m H_{m0}^{(2)} + \frac{4a^2}{b^2} \beta_m^3 \left\{ (-1)^m \sum \frac{A_s}{\pi^4 \rho_{ms}} - \sum \frac{A'_s}{\pi^4 \rho_{ms}} \right\} \\ = -\frac{a^2}{K^2 b^2 m^2 \pi^2} \left[W_{m0}^{(0)} + \frac{2K^2 \beta}{\beta_m} \{1 - (-1)^m\} \right] \\ P_m G_{m1}^{(2)} - B'_m H_{m0}^{(2)} + \frac{4a^2}{b^2} \beta_m^3 \left\{ (-1)^m \sum \frac{(-1)^s A_s}{\pi^4 \rho_{ms}} - \sum \frac{(-1)^s A'_s}{\pi^4 \rho_{ms}} \right\} \\ = -\frac{a^2}{K^2 b^2 m^2 \pi^2} \left[W_{m1}^{(0)} + \frac{2K^2 \beta}{\beta_m} \{1 - (-1)^m\} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (102)$$

又 $\bar{\xi}$ は (59) 式に依り

$$\bar{\xi} = \bar{\xi}^{(n)} - \frac{b^2}{a^2} \sum \frac{1}{m^3 \pi^3} (A_n G_{n0}^{(1)} + A'_n H_{n0}^{(1)}) \sin \frac{n\pi}{b} y - \frac{a^2}{b^2} \sum \frac{1}{m^3 \pi^3} (B_m G_{m0}^{(1)} + B'_m H_{m0}^{(1)}) \sin \frac{m\pi}{a} x \dots\dots\dots (103)$$

(102) の第一、第二、第三及び第四式は夫々 (103) 式より得べき $\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial x} \Big|_{x=0}$, $\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial x} \Big|_{x=a}$, $\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial y} \Big|_{y=0}$ 及び $\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial y} \Big|_{y=b}$ が孰れも零なるため必要なる各係数間の關係を示すものなることを證明することを得べし。

b 等布荷重を受くる時

此の場合に於ては m 及び n が偶数なれば R_{mn} は常に零なるを以て、各式は m 及び n (従て r 及び s 共) の奇数値のみを採りたるものと爲さざるべからず、即ち

$$C_m = C'_m = 1, \quad D_n = D'_n = 1 \\ A_n = A'_n, \quad B_m = B'_m, \quad A_{mn} = 4 \sum \sum A_{rs}$$

是等の關係より次の式を得べし。

$$A_{mn} - \frac{8}{m^2 \pi^2} \sum A_{rn} - \frac{8}{n^2 \pi^2} \sum A_{ms} + \frac{64}{m^2 n^2 \pi^4} \sum \sum A_{rs} + \frac{8m^2 \pi^2}{\pi^4 \rho_{mn}} A_n + \frac{8n^2 \pi^2}{\pi^4 \rho_{mn}} B_m \\ = \frac{a^4}{b^4} \frac{16}{\pi^4 \rho_{mn}} \dots\dots\dots (104)$$

上式中 m, n, r, s 等は凡て奇數 1, 3, 5, 7...∞ を表はすものにして、兩邊の m, n , を夫々 r, s と見做し、各別に $\sum_{r=1}^{\infty}$ 及び $\sum_{s=1}^{\infty}$ を求むれば次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned}
 A_n (H_{no}^{(2)} - G_{no}^{(2)}) + \frac{8K^2 \alpha^2}{b^2} \alpha n^3 \sum \frac{B_r}{\pi^4 \rho_{rn}} &= \frac{2\alpha^2}{b^2 n^2 \pi^2} (H_{no}^{(0)} - G_{no}^{(0)}) \\
 B_m (H_{mo}^{(2)} - G_{mo}^{(2)}) + \frac{8\alpha^2}{b^2} \beta m^3 \sum \frac{A_s}{\pi^4 \rho_{ms}} &= \frac{2\alpha^2}{K^2 b^2 m^2 \pi^2} (H_{mo}^{(0)} - G_{mo}^{(0)}) \\
 \text{但し } H_{no}^{(0)} - G_{no}^{(0)} &= \frac{2}{\lambda'^2 - \lambda^2} \left(\frac{1}{\lambda} \operatorname{Tanh} \frac{\lambda \alpha n}{2} - \frac{1}{\lambda'} \operatorname{Tanh} \frac{\lambda' \alpha n}{2} \right) \\
 H_{no}^{(2)} - G_{no}^{(2)} &= -\frac{2}{\lambda'^2 - \lambda^2} \left(\lambda \operatorname{Tanh} \frac{\lambda \alpha n}{2} - \lambda' \operatorname{Tanh} \frac{\lambda' \alpha n}{2} \right)
 \end{aligned} \right\} \dots\dots (105)$$

$H_{no}^{(0)} - G_{no}^{(0)}$ 及び $H_{no}^{(2)} - G_{no}^{(2)}$ は夫々上式中の $\lambda, \lambda', \alpha n$ の代りに $\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda'}, \beta m$ と置きたるものとす。

上式第一式に於て $\sum \frac{B_r}{\pi^4 \rho_{rn}}$ を消去すれば

$$\left. \begin{aligned}
 A_n &= L_n + \sum_s K_{ns} A_s \\
 L_n &= \frac{2\alpha^2}{b^2 (H_{no}^{(2)} - G_{no}^{(2)})} \left\{ \frac{1}{n^2 \pi^2} (H_{no}^{(0)} - G_{no}^{(0)}) - \frac{8\alpha^5}{b^5} n^3 \pi^3 \sum_{r=1}^{\infty} \frac{H_{ro}^{(0)} - G_{ro}^{(2)}}{r^2 \pi^4 \rho_{rn} (H_{ro}^{(2)} - G_{ro}^{(2)})} \right\} \\
 K_{ns} &= \frac{64K^2 \alpha^4}{b^4} \frac{n^3 \pi^3}{H_{no}^{(2)} - G_{no}^{(2)}} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r^3 \pi^3}{\pi^4 \rho_{rn} \rho_{rs} (H_{ro}^{(2)} - G_{ro}^{(2)})}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots (106)$$

是等の關係及び (95) 式に依り任意の n, m に對する A_n 及び B_m を求むれば、任意の點に於ける撓度、力率、剪裁力等に對する係数は次式に依りて計算することを得べし。

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{\xi} &= \bar{\xi}^{(0)} + \bar{\xi}^{(1)} \\
 \bar{\xi}^{(0)} &= \frac{1}{24K^2} \left(\frac{y^4}{b^4} - \frac{2y^3}{b^3} + \frac{y}{b} \right) + 2 \sum \frac{1}{n^2 \pi^2} (H_{n\xi}^{(1)} + G_{n\xi}^{(1)}) \sin \frac{n\pi}{b} y \\
 \bar{\xi}^{(1)} &= -\frac{b^2}{\alpha^2} \sum \frac{A_n}{n^2 \pi^2} (H_{n\xi}^{(1)} + G_{n\xi}^{(1)}) \sin \frac{n\pi}{b} y - \frac{\alpha^2}{b^2} \sum \frac{B_m}{m^2 \pi^2} (H_{m\eta}^{(1)} + G_{m\eta}^{(1)}) \sin \frac{m\pi}{a} x
 \end{aligned} \right\} \dots\dots (107)$$

$\bar{\xi}^{(0)}$ より生ずる力率、剪裁力等に對する係数は公式 (62) 乃至 (66) 式より直ちに求むることを得るが故に、 $\bar{\xi}^{(1)}$ より生ずるもののみを擧ぐれば次の如し。

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{M}_x^{(1)} &= -\frac{b^2}{\alpha^2} \sum \frac{A_n}{n\pi} \left\{ H_{n\xi}^{(3)} + G_{n\xi}^{(3)} + \frac{1}{\mu_2} (H_{n\xi}^{(1)} + G_{n\xi}^{(1)}) \right\} \sin \frac{n\pi}{b} y \\
 &\quad - \sum \frac{B_m}{m\pi} \left\{ H_{m\eta}^{(1)} + G_{m\eta}^{(1)} + \frac{1}{\mu_2} (H_{m\eta}^{(3)} + G_{m\eta}^{(3)}) \right\} \sin \frac{m\pi}{a} x \\
 \bar{M}_y^{(1)} &= -\frac{K^2 b^2}{\alpha^2} \sum \frac{A_n}{n\pi} \left\{ H_{n\xi}^{(1)} + G_{n\xi}^{(1)} + \frac{1}{\mu_1} (H_{n\xi}^{(3)} + G_{n\xi}^{(3)}) \right\} \sin \frac{n\pi}{b} y \\
 &\quad - K^2 \sum \frac{B_m}{m\pi} \left\{ H_{m\eta}^{(3)} + G_{m\eta}^{(3)} + \frac{1}{\mu_1} (H_{m\eta}^{(1)} + G_{m\eta}^{(1)}) \right\} \sin \frac{m\pi}{a} x
 \end{aligned} \right\} \dots\dots (108)$$

$$\bar{M}_{xy}^{(1)} = \frac{2c}{N_x} \left\{ \frac{b^2}{a^2} \sum \frac{A_n}{n\pi} (H_{n\xi}^{(2)} - G_{n\xi}^{(2)}) \cos \frac{n\pi}{b} y \right. \\ \left. + \sum \frac{B_m}{m\pi} (H_{m\eta}^{(2)} - G_{m\eta}^{(2)}) \cos \frac{m\pi}{a} x \right\} \dots\dots\dots (109)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{S}_x^{(1)} &= -\frac{b^2}{a^2} \sum A_n \left\{ H_{n\xi}^{(4)} - G_{n\xi}^{(4)} + \left(\frac{1}{\mu_2} + \frac{2c}{N_x} \right) (H_{n\xi}^{(2)} - G_{n\xi}^{(2)}) \right\} \sin \frac{n\pi}{b} y \\ &\quad - \frac{b}{a} \sum B_m \left\{ H_{m\eta}^{(4)} + G_{m\eta}^{(4)} + \left(\frac{1}{\mu_2} + \frac{2c}{N_x} \right) (H_{m\eta}^{(2)} + G_{m\eta}^{(2)}) \right\} \sin \frac{m\pi}{a} x \\ \bar{S}_y^{(1)} &= -\frac{b^2}{a^2} \sum A_n \left\{ K^2 (H_{n\xi}^{(3)} + G_{n\xi}^{(3)}) + \left(\frac{K^2}{\mu_1} + \frac{2c}{N_x} \right) (H_{n\xi}^{(2)} + G_{n\xi}^{(2)}) \right\} \sin \frac{n\pi}{b} y \\ &\quad - \frac{b}{a} \sum B_m \left\{ K^2 (H_{m\eta}^{(4)} - G_{m\eta}^{(4)}) + \left(\frac{K^2}{\mu_1} + \frac{2c}{N_x} \right) (H_{m\eta}^{(2)} - G_{m\eta}^{(2)}) \right\} \sin \frac{m\pi}{a} x \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (110)$$

四邊に於て完全に固定せらるゝ矩形平板に於ては、單純に支承せらるゝ場合と異り、四隅に於て集中外力を作用せしむる必要なく、從て附加分布反力を生ぜざるを以て、四邊に於ける分布反力は公式 (10) に依り

$$\left. \begin{aligned} R_{OB} &= (S_x^{(0)} + S_x^{(1)})_{x=0}, & R_{AC} &= -(S_x^{(0)} + S_x^{(1)})_{x=a} \\ R_{OA} &= (S_y^{(0)} + S_y^{(1)})_{y=0}, & R_{BC} &= -(S_y^{(0)} + S_y^{(1)})_{y=b} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (111)$$

第三節 Huber の公式に於ける c の値と公式適用の限界

公式 (4) より

$$K'^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mu_2} + \frac{K^2}{\mu_1} \right) + \frac{2c}{N_x}$$

$$\lambda^2 = K'^2 + \sqrt{K'^4 - K^2} \qquad K^2 = \frac{J_y}{J_x}$$

$$\lambda'^2 = K'^2 - \sqrt{K'^4 - K^2}$$

なるが故に

$$K'^2 \geq K$$

なれば λ^2 と λ'^2 , 從て λ と λ' とは正の實數なり、故に斯の如き場合に於ては前節各公式中の $H_{n\xi}$, $G_{n\xi}$ 等は公式 (24) 及び (25) に示すものを其の儘用ふることを得べし。

若し $K'^2 < K$ とすれば

$$\lambda^2 = K'^2 + i\sqrt{K'^2 - K'^4}, \qquad \lambda'^2 = K'^2 - i\sqrt{K'^2 - K'^4}$$

$$\therefore K_1 \equiv \sqrt{\frac{1}{2}(K + K'^2)}, \qquad K_2 = \sqrt{\frac{1}{2}(K - K'^2)}$$

と置けば

$$\lambda = K_1 + iK_2, \quad \lambda' = K_1 - iK_2$$

即ち λ と λ' とは複素数なるが故に、各 H_{nE} 及び G_{nE} は公式 (28) に示すものを用ひざるべからず。

若し $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ とすれば

$$K'^2 = \frac{1}{2\mu}(1+K^2) + \left(1 - \frac{1}{\mu}\right) \frac{J'}{J_0} \quad (\text{公式 (1) 参照})$$

従て $\frac{J'}{J_0} = \frac{j}{2}(1+K^2)$ と置けば

$$j < \frac{1}{\mu-1} \left(\frac{2\mu K}{1+K^2} - 1 \right) \dots\dots\dots (112)$$

なれば λ と λ' とは複素数となる。

上式中 $\mu = 6$ とすれば

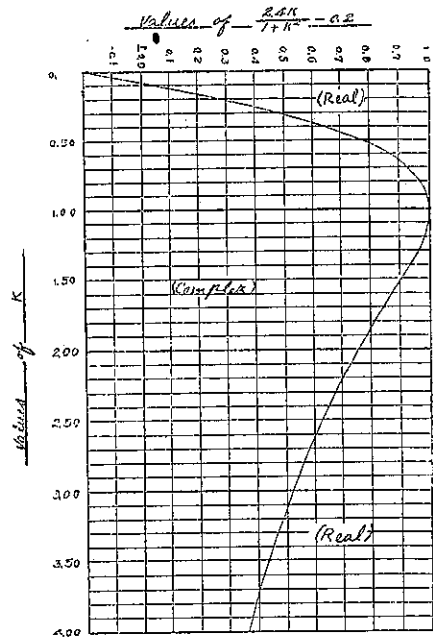
$$j < \frac{2.4K}{1+K^2} - 0.2$$

にして、 K の種々の値に對する $\frac{2.4K}{1+K^2} - 0.2$ の値を計算すれば、第一表及び第十七圖に示すが如し。而して j の値が第十七圖に示す曲線の外側に在るか、内側に在るかに従て λ 及び λ' は實數、若しくは複素數となるべし。

第一表

K	$\frac{2.4K}{1+K^2} - 0.2$	K	$\frac{2.4K}{1+K^2} - 0.2$
0.00	-0.200	1.50	0.905
0.10	0.038	1.75	0.884
0.20	0.262	2.00	0.760
0.30	0.461	2.25	0.691
0.40	0.628	2.50	0.628
0.50	0.760	2.75	0.571
0.60	0.859	3.00	0.520
0.70	0.928	3.25	0.475
0.80	0.965	3.50	0.434
0.90	0.973	3.75	0.398
1.00	1.000	4.00	0.365
1.25	0.971		

第十七圖



第四節 特殊の場合に対する数字的算例

I. 係数 j の影響

前節に記載せる如く、 $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ なる時は

$$K'^2 = \frac{1+K^2}{2} \left\{ \frac{1}{\mu} + j \left(1 - \frac{1}{\mu} \right) \right\}$$

此の式に依り $\mu=6$, $K=1$, $K=2/3$ の時の j の種々の値に對する K'^2 , λ , λ' , K_1 , K_2 等を計算すれば次表に示すが如し。

第 二 表

j	$K=1, \mu=6$ の時				
	K'^2	λ	λ'	K_1	K_2
-0.20	0.00000	複素數	複素數	0.70711	0.70711
0.00	0.16667	"	"	0.76376	0.64550
0.25	0.37500	"	"	0.82915	0.55902
0.50	0.58333	"	"	0.88976	0.45644
0.75	0.79166	"	"	0.94649	0.32275
1.00	1.00000	1.00000	1.00000	—	—

j	$K=2/3, \mu=6$ の時				
	K'^2	λ	λ'	K_1	K_2
-0.20	0.00000	複素數	複素數	0.57735	0.57735
0.00	0.12037	"	"	0.62731	0.52264
0.25	0.27083	"	"	0.68465	0.44488
0.50	0.42130	"	"	0.73756	0.35027
0.75	0.57176	"	"	0.78691	0.21785
1.00	0.72222	1.00000	0.66667	—	—

上表記載の K_1 , K_2 , λ , λ' を用ひて各 $H_{n\xi}$, $G_{n\xi}$ を計算し、四邊に於て單純に支承せらるる平板が等布荷重を受くる場合の算例を示せば次の如し。

i) $K=1, a=b$ の時

此の場合に於ては正方形の中心點 ($\xi = \eta = 1/2$) に對する $\bar{\xi}$, \bar{M}_x , \bar{M}_y 及び一隅 ($x=y=0$) に於ける \bar{M}_{xy} は次式を以て表はさるべし。

$$\bar{\xi} = 0.01802 + \sum \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^2 \pi^5} W_{n, 1/2}^{(1)} = 0.01802 + 4 \sum \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^2 \pi^5} H_{n, 1/2}^{(1)}, \quad n=1, 3, 5, 7, \dots, \infty$$

$$\bar{M}_x = 0.02083 + 4 \sum \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^3 \pi^3} \left(H_{n, 1/2}^{(1)} + \frac{1}{6} H_{n, 1/2}^{(1)} \right)$$

$$\bar{M}_y = 0.12500 + 4 \sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^3 \pi^3} \left(H_{n, 1/2}^{(1)} + \frac{1}{6} H_{n, 1/2}^{(1)} \right)$$

$$\bar{M}_{xy} = 1.66667 \sum \frac{1}{n^3 \pi^3} (G_{n0}^{(0)} - H_{n0}^{(0)})$$

是等の式に依り j の種々の値に對する $\bar{\xi}$, \bar{M}_x , \bar{M}_y , \bar{M}_{xy} 等の値を計算すれば第三表の如し。

第三表

j	$\bar{\xi}$	$\bar{M}_x = \bar{M}_y$	\bar{M}_{xy}	$j \bar{M}_{xy}$
-0.20	0.00820	0.0892	-0.0735	0.0147
0.00	0.00699	0.0767	-0.0637	0.0000
0.25	0.00594	0.0642	-0.0546	-0.0136
0.50	0.00514	0.0532	-0.0477	-0.0239
0.75	0.00453	0.0434	-0.0425	-0.0319
1.00	0.00406	0.0430	-0.0383	-0.0383

上表に示す如く、 $\bar{\xi}$, \bar{M}_x 及び \bar{M}_{xy} の絶対値は j の増加と共に減少し、 $j=0$ と $j=1$ との間に於ける減少率は、 $\bar{\xi}$ に在りては約 42%， \bar{M}_x に在りては 44%， \bar{M}_{xy} に在りては 43% なるを見るべし。

ii) $K=2/3$, $\frac{a}{b}=2/3$ の時

此の場合に於ては矩形の中心點に對する $\bar{\xi}$, \bar{M}_x , \bar{M}_y 及び一隅 0 に於ける \bar{M}_{xy} は次式を以て表はさる。

$$\bar{\xi} = 0.02930 + 4 \sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^3 \pi^3} H_{n, 1/2}^{(1)}$$

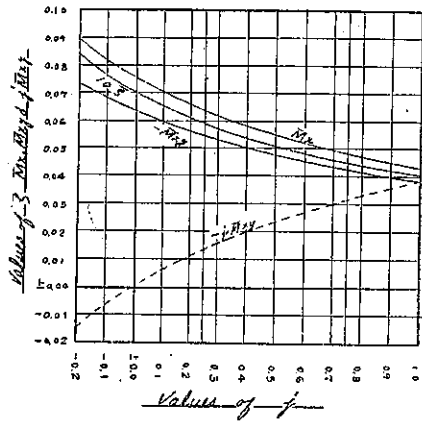
$$\bar{M}_x = 0.04688 + 4 \sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^3 \pi^3} \left(H_{n, 1/2}^{(1)} + \frac{1}{6} H_{n, 1/2}^{(1)} \right)$$

$$\bar{M}_y = 0.12500 + 4 \sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^3 \pi^3} \left(H_{n, 1/2}^{(1)} + \frac{1}{6} H_{n, 1/2}^{(1)} \right)$$

$$\bar{M}_{xy} = 1.20370 \sum \frac{1}{n^3 \pi^3} (G_{n0}^{(0)} - H_{n0}^{(0)})$$

從て次の結果を得べし。

第十八圖



第四表

j	ξ	\bar{M}_x	\bar{M}_y	M_{xy}	$j \bar{M}_{xy}$
-0.20	0.00289	0.0659	0.0135	-0.0308	0.0062
0.00	0.00263	0.0599	0.0124	-0.0293	0.0000
0.25	0.00237	0.0538	0.0113	-0.0263	-0.0066
0.50	0.00215	0.0483	0.0103	-0.0239	-0.0120
0.75	0.00197	0.0446	0.0095	-0.0220	-0.0165
1.00	0.00182	0.0411	0.0088	-0.0203	-0.0203

此の場合に於ては、 $j=0$ と $j=1$ との間に於ける各係数の減少率は、 ξ に於ては約 30%、 \bar{M}_x 、 \bar{M}_y 及び \bar{M}_{xy} に於ては夫々 32、30 及び 31% なり。

撓度を複式無限級数を以て表はせば、荷重の如何に關せず

$$\xi = \frac{pa^4}{N_x} \sum \sum \frac{R_{mn}}{\pi^4 \rho_{mn}} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y$$

にして、此の式は普通 m, n に關し相當迅速に收斂するを以て、初めの一項即ち $m=n=1$ だけを取り其の他の項を凡て無視すれば、 $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = 1/2$ に對しては

$$\xi \doteq \frac{pa^4}{N_x} \frac{R_{11}}{\pi^4 \left(1 + 2K'^2 \frac{a^2}{b^2} + K^2 \frac{a^4}{b^4}\right)}$$

を以て表はさるべし、而して

$$\begin{aligned} 2K'^2 &= \frac{1}{\mu} (1 + K^2), & \mu_1 &= \mu_2 = \mu, & j &= 0 \text{ の時} \\ &= 1 + K^2, & \mu_1 &= \mu_2 = \mu, & j &= 1 \text{ の時} \end{aligned}$$

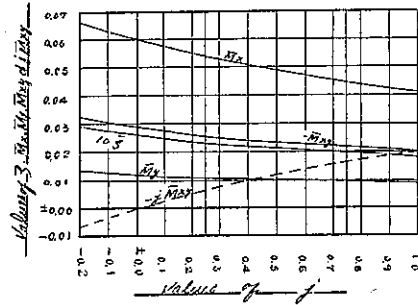
なるが故に

$$e = \frac{\xi_{(i=0)} - \xi_{(i=1)}}{\xi_{(i=0)}} = \frac{\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)(K^2 + 1)}{\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)\left(K^2 + \frac{b^2}{a^2}\right)}$$

是れ Huber の公式の最も安全なる場合、即ち torsional rigidity の影響を全然無視せる場合の撓度と、其の最も不安全なる場合、即ち Marcus 氏の公式の如く torsional rigidity を完全に認めたる場合の撓度との差の比率を表はす近似式なり。而して

$$\begin{aligned} e &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\mu}\right) & a &= b \text{ の時} \\ &= \frac{a^2}{b^2} \left(1 - \frac{1}{\mu}\right) \frac{1}{1 + \frac{b^2}{a^2}} & K &= 0 \text{ の時} \end{aligned}$$

第十九圖



$$= \left(1 - \frac{1}{\mu}\right) \frac{1}{1 + \frac{b^2}{a^2}} \quad K = \infty \text{ の時}$$

即ち $a=b$ の時は K の如何に關せず e は $\frac{1-\frac{1}{\mu}}{2}$ ($\mu=6$ の時は此の値に 100 を乗じたるものは 41.667 となり, 第三表に依り求めたる結果と殆ど一致せることを見るべし) にして, $\frac{a}{b} < 1$ の時は K の減少と共に減少す, 従て $\frac{a}{b} \leq 1$ の範圍に於ては e の最大値は $\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)$ なり。是に依り四邊に於て單純に支承せらるゝ矩形平版に在りては其の torsional rigidity を全然無視せる場合と, 之れを完全に認めたる場合との撓度の差の百分率は, 略 42% を超えざることを知るべし。

彎曲力率其の他に對しても同様の關係を見出すことを得べし。

II. 矩形の各點に於ける $\bar{\zeta}$, \bar{M} , \bar{S} 等の計算

矩形の各點に於ける撓度, 彎曲力率, 剪截力等の分布の狀況を知らむが爲 $j=1$ として

$$a:b=2/3, \quad J_y + J_x = K^2 = (2/3)^2$$

なる平版が, 四邊に於て單純に支承, 又は完全に固定せらるゝ場合の算例を示すべし。

第二十圖

A. 四邊に於て單に支承せらるゝ場合

(a) 滿載等布荷重を受くる場合

i) 撓度 (附圖第一参照)

滿載等布荷重を受くる場合は $\alpha = \beta = 0$ なるが故に

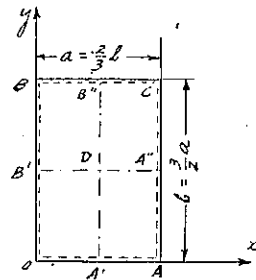
$$W_{ne}^{(1)} = \{1 - (-1)^n\} (H_{ne}^{(1)} + G_{ne}^{(1)})$$

而して $W_{ne}^{(1)}$ は n の凡ての偶數値に對して零なるを以て, 公式 (61), 第二式右邊の末項は n の奇數値のみを取らさるべからず, 従て

$$\bar{\zeta} = \frac{1}{24K^2} \left(\frac{y^4}{b^4} - \frac{2y^3}{b^3} + \frac{y}{b} \right) + 2 \sum \frac{1}{n^2 \pi^2} (H_{ne}^{(1)} + G_{ne}^{(1)}) \sin \frac{n\pi}{b} y$$

但し $n=1, 3, 5, 7, \dots, \infty$

となり, $\bar{M}_x, \bar{M}_y, \bar{S}_x, \bar{S}_y$ 等に對する公式亦同様に求むることを得べし。第二十圖に示す平版の各點に於ける $\bar{\zeta}$ の値を計算すれば次表の如し (附圖第一参照)。



第五表の一

x	$\bar{\zeta}$	y	$\bar{\zeta}$
a	along $B' A''$	b	along $A' B''$
0/4	0.00000	0/4	0.00000
1/4	0.00130	1/4	0.00138

第五表の二

K^2	$\bar{\zeta}$
1/4	0.00194
49/	0.00182

2/4	0.00182	2/4	0.00182	25/36	0.00168
3/4	0.00130	3/4	0.00138	1	0.00153
4/4	0.00000	4/4	0.00000	36/25	0.00135
				9/4	0.00111
				4	0.00080

第五表の二に示す如く、 ξ は K の増加と共に極て僅づゝ減少す、例へば J_x が定数とすれば、 J_y の 16 倍の増加に對し ξ の減少率は僅に $\frac{0.00194-0.00080}{0.00194} \times 100 \doteq 60\%$ に過ぎざるが如し。

ii) 彎曲力率 (附圖第一参照)

第六表の一						第六表の二		
$\frac{x}{a}$	\bar{M}_x along $B'A''$	\bar{M}_y along $B'A''$	$\frac{y}{b}$	\bar{M}_x along $A'B''$	\bar{M}_y along $A'B''$	K^2	\bar{M}_x at D	\bar{M}_y at D
0/4	0.0000	0.0000	0/4	0.0000	0.0000	1/4	0.0437	0.0050
1/4	0.0314	0.0064	1/4	0.0320	0.0094	4/9	0.0411	0.0088
2/4	0.0411	0.0088	2/4	0.0411	0.0088	25/36	0.0379	0.0132
3/4	0.0314	0.0064	3/4	0.0320	0.0094	1	0.0344	0.0178
4/4	0.0000	0.0000	4/4	0.0000	0.0000	36/25	0.0304	0.0232
						9/4	0.0247	0.0303
						4	0.0175	0.0394

上表に示す如く、中心點 D に於ける \bar{M}_x は \bar{M}_y の約 4.7 倍にして、 \bar{M}_x は K の増加と共に減少し、 \bar{M}_y は増加するを見るべし。又第六表の二より各 K^2 に對する $\frac{b^2}{K^2 a^2} \bar{M}_y$ を計算し、 \bar{M}_x との差の百分率を求むれば

$\frac{100}{\bar{M}_x} \left(\bar{M}_x - \frac{b^2}{K^2 a^2} \bar{M}_y \right)$	K^2	1/4	4/9	25/36	1	36/25	9/4	4
		-0.2	-8.7	-13.2	-16.7	-19.5	-22.8	-26.6

$a/b < 1$ の時は $K^2 < 1$ と爲すが通則なるが故に、斯の如き場合に於ては \bar{M}_x と $\frac{b^2}{K^2 a^2} \bar{M}_y$ との差は極て僅少なることを推知することを得、從て

$$\frac{\bar{M}_x}{\bar{M}_y} \doteq \frac{b^2 J_x}{a^2 J_y}$$

なる近似的關係が成立するものと考ふることを得べし。此の關係は又次の如くしても求めらる、即ち公式 (60) を用ひて M_x 及び M_y を複式無限級數として表はせば

$$M_x - \frac{b^2}{K^2 a^2} M_y = pb^2 \sum \sum \frac{m^2 \pi^2}{\pi^4 \rho_{mn}} R_{mn} \left\{ \frac{a^2}{b^2} \left(1 - \frac{m^2}{n^2} \right) - \frac{1}{\mu} \left(1 - \frac{a^4 n^2}{b^4 m^2} \right) \right\} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y$$

となるが故に、初めの一項即ち $m=n=1$ だけを取り、且 $a/b < 1$ 及び $\frac{1}{\mu} < 1$ 等の關係より上式右邊は略零に等しきものとすれば

$$M_x \doteq \frac{b^2}{K^2 a^2} M_y$$

即ち前と同様の近似的關係を得たり。

類似の近似的計算に依り $M_x = M_y$ なるためには

$$K^2 \doteq \frac{1 + \frac{a^2}{\mu b^2}}{\frac{1}{\mu} + \frac{a^2}{b^2}} = \frac{b^2}{a^2}, \quad \mu = \infty \text{ の時}$$

$$= 1.76, \quad \mu = 6, \quad \frac{a}{b} = \frac{2}{3} \text{ の時}$$

上記 $K^2 = 1.76$ は附圖第一に示す K^2 の種々の値に對する \bar{M}_x と \bar{M}_y との二曲線の交叉點に對應せる K^2 の値と略一致せることを見るべし。

又 $1/\mu$ は通常 1 より非常に小なるを以て

$$M_x = -N_x \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \quad M_y = -K^2 N_x \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}, \quad \text{但し } N_x = EJ_x$$

とするも大なる誤差なきものと想像することを得べし。本例即ち $a/b = 2/3$ なる場合の中心點 D に於ける \bar{M}_x と \bar{M}_y とに付て計算するに、 K^2 の如何に關せず、 \bar{M}_x は 5% 内外、 \bar{M}_y は 30% 内外の誤差に過ぎざることを知るべし。

iii) 扭力率 (附圖第一参照)

滿載等布荷重を受くる場合に於ては二つの中心線 $A'B''$, $B'A''$ の各點に於ける M_{xy} は零なり。而して 0 點に於ける \bar{M}_{xy} の絶對値は K^2 の増加と共に増加するも其の増加率は極て僅少なること第七表の二に示すが如し。

第七表の一

$\frac{x}{a}$	\bar{M}_{xy} along OA	$\frac{y}{b}$	\bar{M}_{xy} along OB
0/4	-0.0203	0/4	-0.0203
1/4	-0.0132	1/4	-0.0102
2/4	0.0000	2/4	0.0000
3/4	0.0132	3/4	0.0102
4/4	0.0203	4/4	0.0203

第七表の二

K^2	\bar{M}_{xy} at O
1/4	-0.0196
4/9	-0.0203
25/36	-0.0212
1	-0.0224
36/25	-0.0237
9/4	-0.0257
4	-0.0235

iv) 剪裁力 (附圖第二参照)

剪裁力の内 S_x は中心線 $A'B''$, 二邊 OA 及び BC の各點に於て、 S_y は $B'A''$, OB 及び AC の各點に於て零なること明かなり。

第八表の一

$\frac{x}{a}$	\bar{S}_x along $B'A''$	\bar{S}_y along OA	$\frac{y}{b}$	S_x along OB	S_y along $A'B''$
0/4	0.310	0.000	0/4	0.000	0.197
1/4	0.146	0.163	1/4	0.270	0.048
2/4	0.000	0.197	2/4	0.310	0.000
3/4	-0.146	0.163	3/4	0.270	-0.048
4/4	-0.310	0.000	4/4	0.000	-0.197

第八表の二

K^2	\bar{S}_x at B'	\bar{S}_y at A'
1/4	0.318	0.174
4/9	0.310	0.197
25/36	0.299	0.221
1	0.288	0.243
36/25	0.273	0.266
9/4	0.253	0.298
4	0.226	0.335

v) 反力 (附圖第二参照)

四隅に於て平版のはね上ることを防ぐため附加すべき集中外力は計算の結果次の如くなる。

$$P_0 = P_1 = P_2 = P_3 = -0.041 pb^2$$

四邊に於ける附加分布反力に對する各係數 \bar{Q} 及び之れと第八表の一に示す \bar{S}_x 及び \bar{S}_y の各對應値とを加へて得べき合成分布反力に對する係數 \bar{R} は次表に示すが如し。

第九表

$\frac{x}{a}$	\bar{Q}_{OB}	\bar{R}_{OB}	$\frac{y}{b}$	\bar{Q}_{OA}	\bar{R}_{OA}
0/4	0.000	0.000	0/4	0.000	0.000
1/4	0.048	0.318	1/4	0.069	0.232
2/4	0.041	0.351	2/4	0.084	0.282
3/4	0.048	0.318	3/4	0.069	0.232
4/4	0.000	0.000	4/4	0.000	0.000

附圖第二に示す \bar{R}_{OB} 曲線と、 OB 直線との間に圍まるゝ面積と、 \bar{R}_{OA} 曲線と OA 直線との間に圍まるゝ面積との和の 2 倍に

$$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = -4 \times 0.041 pb^2$$

に相當する値を加へ、 $cpab$ に對する c を計算すれば、 $c=1.02$ となる。然るに反力の總和の理論的値は pac 、即ち $c=1$ なるを以て、前記著者の計算の結果は理論的の値に對して 2% の誤差に過ぎざることを知るべし。

(b) 三角荷重を受くる時

邊 $x=0$ に於て零なる如き三角荷重、即ち

$$p_x = p\alpha \frac{x}{a} = p \frac{x}{a}, \quad \alpha=1 \text{ の時}$$

を受くる場合は

$$\bar{\xi} = \frac{1}{24K^2} \left(\frac{y^4}{b^4} - \frac{2y^3}{b^3} + \frac{y}{b} \right) \frac{x^3}{a} + 2 \sum \frac{H_n \xi^{(1)}}{n^5 \pi^5} \sin \frac{n\pi}{b} y$$

となる。故に $a/b=2/3$, $\mu=6$ なる平板に対しては次の如き各結果を得べし。

i) 撓度 (附圖第三参照)

第十表の一				第十表の二	
$\frac{x}{a}$	$\bar{\xi}$ along $B'A''$	$\frac{y}{b}$	$\bar{\xi}$ along $A'B''$	K^2	$\bar{\xi}$ at D
0/4	0.00000	0/4	0.00000	1/4	0.00097
1/4	0.00061	1/4	0.00069	4/9	0.00091
2/4	0.00091	2/4	0.00091	25/36	0.00084
3/4	0.00069	3/4	0.00069	1	0.00076
4/4	0.00000	4/4	0.00000	36/25	0.00067
				9/4	0.00055
				4	0.00040

$A'B''$ の各點に於ける $\bar{\xi}$ の値は滿載等布荷重を受くる場合の各對應値の $1/2$ なり。

ii) 彎曲力率 (附圖第三参照)

第十表					
$\frac{x}{a}$	\bar{M}_x along $B'A''$	\bar{M}_y along $B'A''$	$\frac{y}{b}$	\bar{M}_x along $A'B''$	\bar{M}_y along $A'B''$
0/4	0.0000	0.0000	0/4	0.0000	0.0000
1/4	0.0123	0.0029	1/4	0.0160	0.0047
2/4	0.0205	0.0044	2/4	0.0205	0.0044
3/4	0.0191	0.0035	3/4	0.0160	0.0047
4/4	0.0000	0.0000	4/4	0.0000	0.0000

中心線 $A'B''$ の各點に於ける \bar{M}_x 及び \bar{M}_y の値は滿載等布荷重を受くる場合の各 $1/2$ なり。

iii) 扭力率 (附圖第三参照)

第十表					
$\frac{x}{a}$	\bar{M}_{xy} along OA	$\frac{y}{b}$	\bar{M}_{xy} along $A'B''$	\bar{M}_{xy} along OB	\bar{M}_{xy} along AC
0/4	-0.0088	0/4	-0.0012	-0.0088	0.0115
1/4	-0.0068	1/4	-0.0003	-0.0049	0.0053
2/4	-0.0012	2/4	0.0000	0.0000	0.0000
3/4	0.0064	3/4	0.0003	0.0049	-0.0053
4/4	0.0115	4/4	0.0012	0.0088	0.0115

此の場合の荷重は中心線 $B'A''$ に對して對稱的なるが故に、該中心線の凡ての點に於ける M_{xy} は零なり。

iv) 剪裁力 (附圖第四参照)

第 十 三 表

$\frac{x}{a}$	\bar{S}_x along $B'A''$	\bar{S}_y along OA	$\frac{y}{b}$	\bar{S}_x along OB	\bar{S}_x along $A'B''$	\bar{S}_x along AC	\bar{S}_y along $A'B''$
0/4	0.096	0.000	0/4	0.000	0.000	0.000	0.099
1/4	0.080	0.056	1/4	0.080	0.026	-0.190	0.024
2/4	0.027	0.099	2/4	0.096	0.027	-0.214	0.000
3/4	-0.007	0.107	3/4	0.080	0.026	-0.190	-0.024
4/4	-0.214	0.000	4/4	0.000	0.000	0.000	-0.099

v) 反力 (附圖第四参照)

四隅 O, A, B, C に附加すべき集中外力は次式を以て表さる。

$$P_o = P_B = -0.00176 pb^2$$

$$P_A = P_C = -0.00229 pb^2$$

附加分布反力及び合成分布反力に對する各係數は次の如し。

第 十 四 表

$\frac{x}{a}$	\bar{Q}_{OB}	\bar{R}_{OB}	$\frac{y}{b}$	\bar{Q}_{OA}	\bar{R}_{OA}	\bar{Q}_{AC}	\bar{R}_{AC}
0/4	0.000	0.000	0/4	0.000	0.000	0.000	0.000
1/4	0.021	0.101	1/4	0.024	0.080	0.027	0.217
2/4	0.018	0.115	2/4	0.042	0.141	0.022	0.236
3/4	-0.021	0.101	3/4	0.045	0.152	0.027	0.217
4/4	0.000	0.000	4/4	0.000	0.000	0.000	0.000

前の場合と同様に、計算の結果及び圖表を根據として $epab$ に相當する e の値を求めれば、 $e=0.515$ となり、理論的の値 0.5 との誤差僅かに 3% なり。

B. 四邊に於て完全に固定せらるゝ場合

此の場合の算例としては、 $a/b=2/3$, $K^2=(2/3)^2$, $\mu=6$ なる平板が滿載等布荷重を受くる場合に付き記述すべし。

i) 係數 A_n 及び B_m の計算

公式 (105) 及び (106) に依り、 L_n 及び K_m を計算すれば第十五表の如し。

第 十 五 表

n	L_n	K_{ns}				
		$s=1$	$s=3$	$s=5$	$s=7$	$s=9$
1	0.0216186	0.1714038	0.0224195	0.0047809	0.0015777	0.0006731
3	-0.0169592	0.6556745	0.1020828	0.0285492	0.0117887	0.0059023
5	-0.0223574	0.6763595	0.1381021	0.0510596	0.0249411	0.0138629
7	-0.0203029	0.6132487	0.1566777	0.0685250	0.0367652	0.0217584
9	-0.0177287	0.5573352	0.1670991	0.0811338	0.0463484	0.0287148
11	-0.0155026	0.5097653	0.1714917	0.0894888	0.0535696	0.0343979
13	-0.0137043	0.4700419	0.1723165	0.0948461	0.0588929	0.0389194
15	-0.0122509	0.4363934	0.1709526	0.0978206	0.0627076	0.0424212
17	0.0110622	0.4074728	0.1682489	0.0997417	0.0653358	0.0450710

n	L_n	K_{ns}			
		$s=11$	$s=13$	$s=15$	$s=17$
1	0.0216186	0.0003372	0.0001884	0.0001171	0.0000730
3	-0.0169592	0.0033178	0.0020196	0.0013043	0.0008318
5	-0.0223574	0.0083746	0.0053773	0.0036191	0.0025287
7	-0.0203029	0.0137736	0.0091736	0.0063585	0.0045511
9	-0.0177287	0.0188336	0.0129139	0.0091638	0.0066876
11	-0.0155026	0.0232236	0.0162938	0.0117860	0.0087397
13	-0.0137043	0.0268951	0.0192333	0.0141353	0.0106206
15	-0.0122509	0.0298855	0.0217126	0.0161678	0.0122839
17	-0.0110622	0.0322600	0.0237501	0.0178818	0.0137135

公式(95)の右邊の第一, 第二, 第三, ……項を夫々 $U_n^{(1)}, U_n^{(2)}, U_n^{(3)}, \dots$ 等とすれば計算の結果次の如くなる。

第 十 六 表

n	$U_n^{(1)}=L_n$	$U_n^{(2)}$	$U_n^{(3)}$	$U_n^{(4)}$	$U_n^{(5)}$	$U_n^{(6)}$
1	0.0216186	0.0031644	0.0008625	0.0002664	0.0000862	0.0000284
3	-0.0169592	0.00113564	0.0036605	0.0011952	0.0003945	0.0001308
5	-0.0223574	0.0101108	0.0045322	0.0016158	0.0005493	0.0001839
7	-0.0203029	0.0074688	0.0048823	0.0018788	0.0006537	0.0002207
9	-0.0177287	0.0052957	0.0050906	0.0020794	0.0007359	0.0002479
11	-0.0155026	0.0035895	0.0051859	0.0022210	0.0007962	0.0002714
13	-0.0137043	0.0022619	0.0052109	0.0023192	0.0008400	0.0002880
15	-0.0122509	0.0012280	0.0051855	0.0023826	0.0008697	0.0002916
17	-0.0110622	0.0004038	0.0051322	0.0024219	0.0008993	0.0003057

n	$U_n^{(7)}$	$U_n^{(8)}$	$U_n^{(9)}$	$U_n^{(10)}$	$U_n^{(11)}$	$A_n = \sum U_n$
1	0.0000094	0.0000031	0.0000010	0.0000004	0.0000001	0.02604
3	0.0000434	0.0000144	0.0000048	0.0000016	0.0000005	-0.00016
5	0.0000612	0.0000204	0.0000068	0.0000023	0.0000008	-0.00527
7	0.0000736	0.0000245	0.0000082	0.0000027	0.0000009	-0.00509
9	0.0000835	0.0000278	0.0000093	0.0000031	0.0000010	-0.00415
11	0.0000908	0.0000303	0.0000101	0.0000034	0.0000011	-0.00330
13	0.0000962	0.0000321	0.0000107	0.0000036	0.0000012	-0.00264
15	0.0000999	0.0000333	0.0000111	0.0000037	0.0000012	-0.00214
17	0.0001024	0.0000342	0.0000114	0.0000038	0.0000013	-0.00175

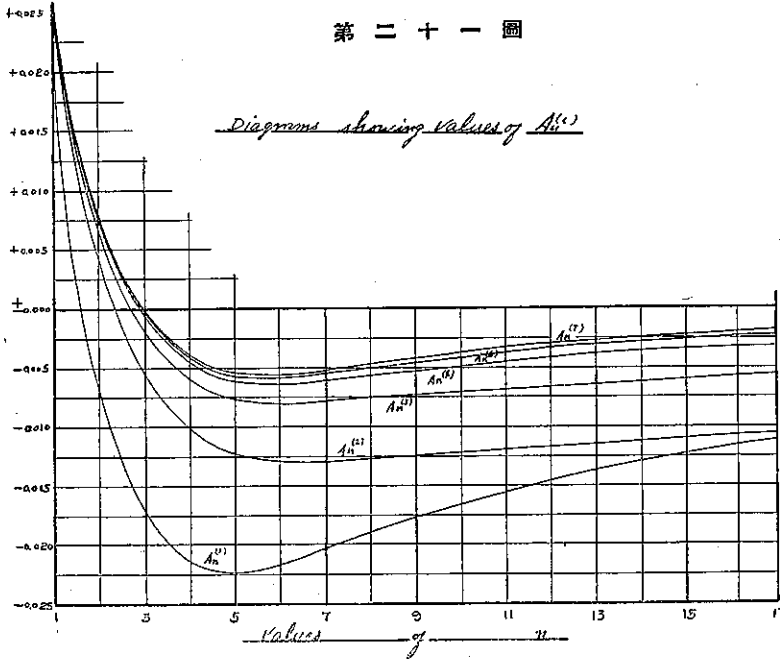
前表に見る如く、實際の場合に於ては初めの六項即ち $U_n^{(6)}$ 位迄計算すれば可なるべく、且 $\bar{\xi}$, \bar{M} 等の計算は、 n は 1, 3, 5 位迄を取り夫れ以上のは無視するも大なる誤差を生ぜざるものとす。又公式 (50) の第一式の關係より

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n = 8 \sum \sum A_{rs} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \pi^2} - \sum \sum A_{rs} = 0$$

なる筈なるも、第十六表の結果に依れば

$$\sum_{n=1}^{17} A_n = 0.00154$$

となる、是れ計算上並に $U_n^{(12)}$ 以上の項を無視せるに因る誤差なり。



第二十一圖に示す $A_n^{(1)}$ の圖表は, A_n の收斂の狀況を知らむがため

$$\begin{aligned} A_n^{(1)} &= U_n^{(1)} && = U_n^{(1)} \\ A_n^{(2)} &= U_n^{(1)} + U_n^{(2)} && = A_n^{(1)} + U_n^{(2)} \\ A_n^{(3)} &= U_n^{(1)} + U_n^{(2)} + U_n^{(3)} && = A_n^{(2)} + U_n^{(3)} \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

等の n の種々の値に對する數値を圖示せるものなり。

各 n に對する A_n の値を知れば, 公式(105)の第二式に依り, 任意の m に對する B_m の値を計算することを得べし。而して其の結果は第十七表に示すが如し。

第 十 七 表

n	A_n	$\frac{A_n}{n\pi}$	$\frac{A_n}{n^2\pi^2}$	$\frac{A_n}{n^3\pi^3}$
1	+0.02604	+0.00829	+0.00264	+0.00084
3	-0.00016	-0.00002	-0.00000	-0.00000
5	-0.00527	-0.00034	-0.00002	-0.00000
7	-0.00509	-0.00023	-0.00001	-0.00000
9	-0.00415	-0.00015	-0.00001	-0.00000
11	-0.00330	-0.00010	-0.00000	-0.00000
13	-0.00264	-0.00006	-0.00000	-0.00000
15	-0.00214	-0.00005	-0.00000	-0.00000
17	-0.00175	-0.00003	-0.00000	-0.00000

m	B_m	$\frac{B_m}{m\pi}$	$\frac{B_m}{m^2\pi^2}$	$\frac{B_m}{m^3\pi^3}$
1	+0.05545	+0.01765	+0.00562	+0.00179
3	-0.01907	-0.00262	-0.00021	-0.00002
5	-0.01193	-0.00076	-0.00005	-0.00000
7	-0.00723	-0.00033	-0.00001	-0.00000
9	-0.00460	-0.00016	-0.00001	-0.00000
11	-0.00308	-0.00009	-0.00000	-0.00000
13	-0.00216	-0.00005	-0.00000	-0.00000
15	-0.00158	-0.00003	-0.00000	-0.00000
17	-0.00119	-0.00002	-0.00000	-0.00000

ii) 撓度 (附圖第五参照)

第十七表に示す A_n 及び B_m を用ひて $\xi^{(1)}$ を計算し, $\xi = \xi^{(0)} + \xi^{(1)}$ より ξ を求むれば第十八表に示すが如し。

第十 八 表

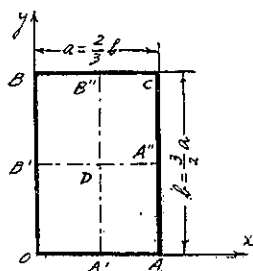
$\frac{x}{a}$	$\bar{\xi}$ along $B'A''$	$\frac{y}{b}$	$\bar{\xi}$ along $A'B''$
0/4	0.00000	0/4	0.00000
1/4	0.00027	1/4	0.00035
2/4	0.00048	2/4	0.00048

iii) 彎曲力率 (附圖第五参照)

第十 九 表

$\frac{x}{a}$	\bar{M}_x along $B'A''$	\bar{M}_y along $B'A''$	\bar{M}_x along OA	\bar{M}_y along OA
0/4	-0.0359	-0.0027	0.0000	0.0000
1/4	0.0071	0.0010	-0.0039	-0.0163
2/4	0.0207	0.0028	-0.0063	-0.0168
$\frac{y}{b}$	\bar{M}_x along $A'B''$	\bar{M}_y along $A'B''$	\bar{M}_x along OB	\bar{M}_y along OB
0/4	-0.0063	-0.0182	0.0000	0.0000
1/4	0.0129	0.0036	-0.0274	-0.0020
2/4	0.0207	0.0028	-0.0359	-0.0027

第二十二圖



二つの中心線及び四邊の各點に於ける M_{xy} は零なり。

iv) 剪裁力並に分布反力 (附圖第五参照)

二邊 OA 及び OB 上の各點に於ける \bar{S}_y 及び \bar{S}_x の値は第二十表に示す如し、而して此の場合に於ては附加分布反力を生ずることなきを以て $(\bar{S}_y)_{y=0} = \bar{R}_{OA}$, $(\bar{S}_x)_{x=0} = \bar{R}_{OB}$ なること明かなり。又 \bar{R}_{OA} 及び \bar{R}_{OB} の圖表より得べき合成反力と其の理論的値との誤差は約 14% なり。

第二 十 表

$\frac{x}{a}$	$\bar{S}_y = \bar{R}_{OA}$ along OA	$\frac{y}{b}$	$\bar{S}_x = \bar{R}_{OB}$ along OB
0/4	0.000	0/4	0.000
1/4	0.165	1/4	0.304
2/4	0.257	2/4	0.353

反力の總和の理論的値は、 a, b, K 等の如何に關せず常に $\int_0^a \int_0^b p_{xy} dx dy$ を以て表はさるゝこと、即ち凡ての場合に對して (11) 式の關係の成立することは、各場合の公式よりも之れを證明することを得べし。

附 言

以上各章に於て記述せる所は、Huber 氏の公式に基く二軸の方向に於ける彎曲剛率が異なる矩形平板に對する一般的解式にして、Marcus 氏の公式及び二軸の方向に於ける彎曲剛

率相等しき場合、或は更に特別の場合たる完全なる均質弾體に對する公式は凡て前記各公式より直接誘導することを得べし。而して著者の採用せる方法は、更に之れを擴張して連続平板(此の場合 C_{mn} , C_{mn}' , ..., D_{mn} , D_{mn}' , ... 等は連続平板の common support に於ける條件に依りて左右せらるゝものとす) 又は平板の一侧が彈性基礎に支持せらるゝ場合にも應用することを得べし。

(終)

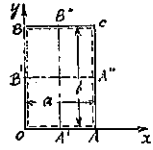
附圖第一

Rectangular plate whose four sides are simply supported and is subjected to a full uniform load.

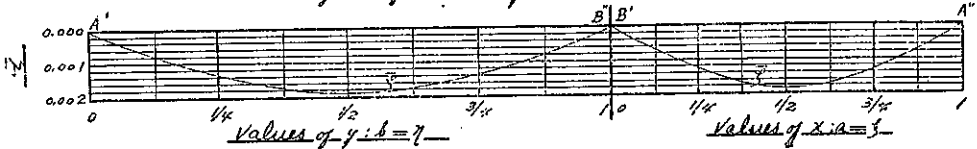
$$k = \frac{J_y}{J_x} = \left(\frac{b}{a}\right)^2$$

$$\mu = 6$$

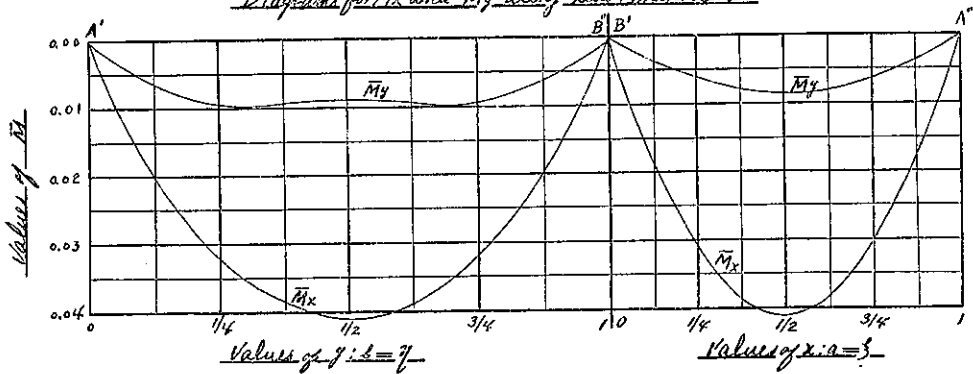
$$a : b = 2/3$$



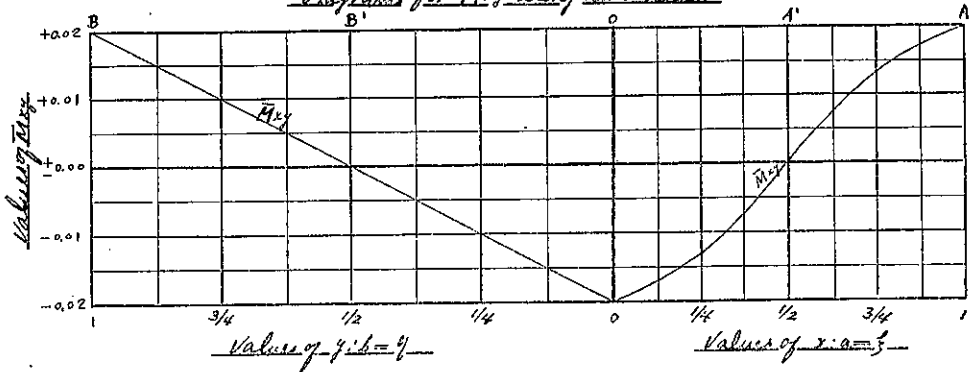
Diagrams for \bar{z} along two centre lines



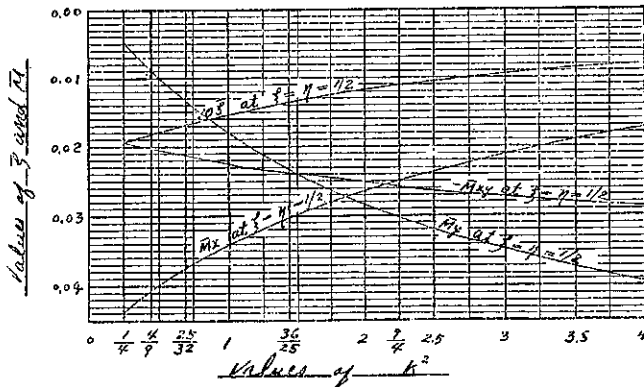
Diagrams for M_x and M_y along two centre lines



Diagrams for M_{xy} along two sides



Diagrams for \bar{z} , M_x , M_y and M_{xy} at $\xi = \eta = 1/2$, corresponding to various values of k^2



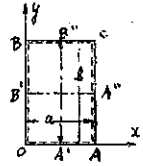
附圖第二

Rectangular plate whose four sides are simply supported and is subjected to a full uniform load

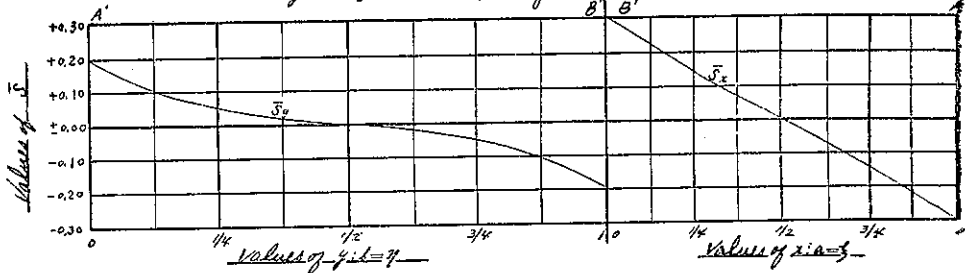
$$\mu = 6$$

$$k^2 = J_y : J_x = (2/3)^2$$

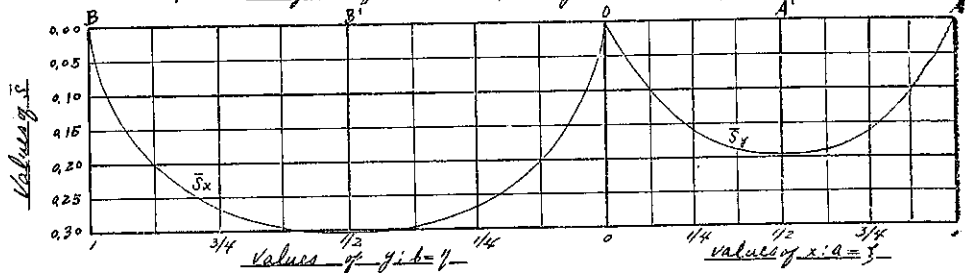
$$a : b = 2/3$$



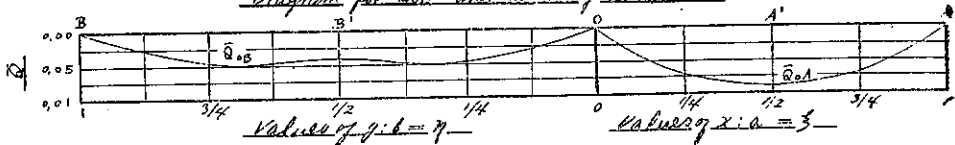
Diagrams for \bar{S}_x and \bar{S}_y along two centre lines



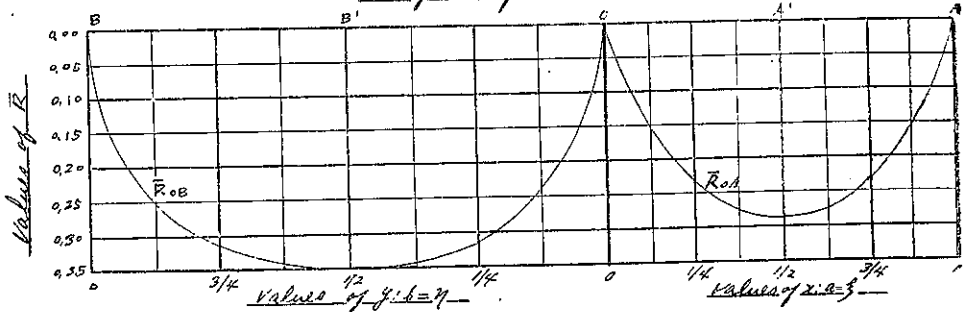
Diagrams for \bar{S}_x and \bar{S}_y along two sides



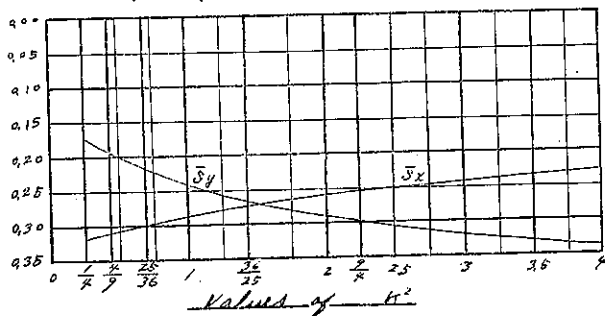
Diagrams for \bar{Q}_{0B} and \bar{Q}_{0A} along two sides



Diagrams for \bar{R}_{0B} and \bar{R}_{0A}



Diagrams for \bar{S}_x at $\zeta = 0, \eta = 1/2$, and \bar{S}_y at $\zeta = 1/2, \eta = 0$, corresponding to different values of k^2

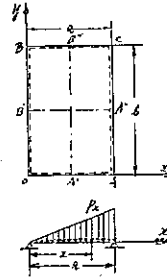
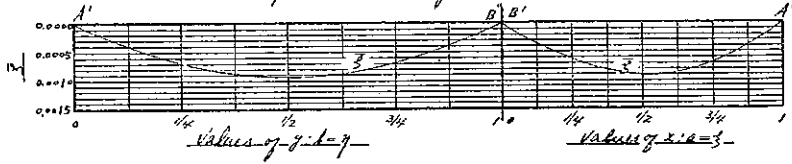


附圖第三

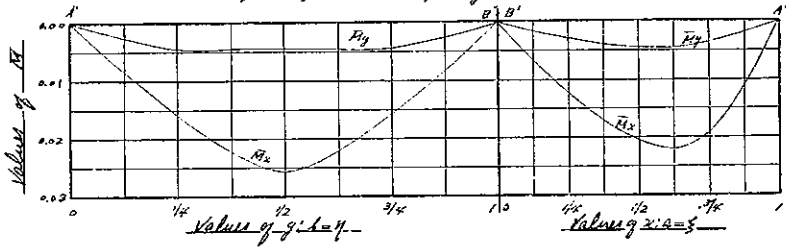
Rectangular plate whose four sides are simply supported and is subjected to a triangular load

$\mu = T_y : T_x = (2/3)^2$
 $\mu = 6$
 $a : b = 2/3$

Diagrams for δ along two centre lines



Diagrams for M_x and M_y along two centre lines



Note
 M_y along the centre line parallel to x axis vanishes

Diagrams for T_{xy} along these sides

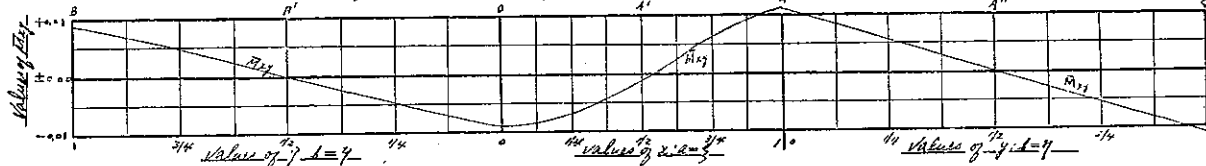


Diagram for δ at $\xi = \eta = 1/2$ corresponding to different values of μ^2

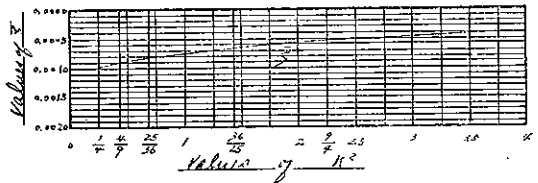
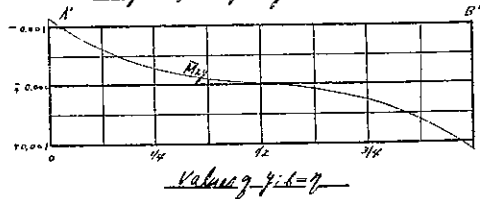


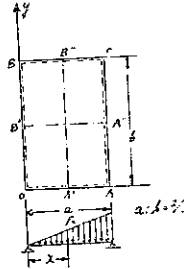
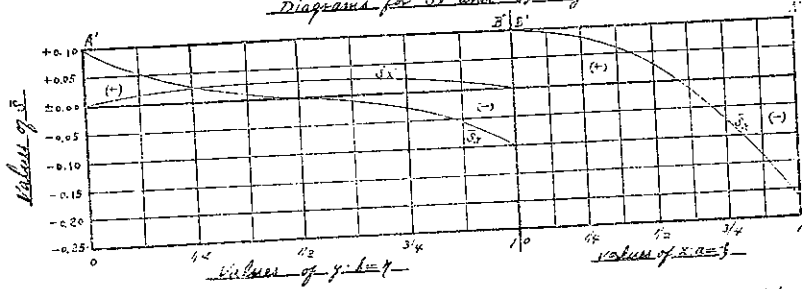
Diagram for T_{xy} along a centre line $\delta B'$



附圖第四

Rectangular plate whose three sides are simply supported and is subjected to a triangular load
 $\kappa = \tau_y; \tau_x = (y/3)^2 \quad \mu = 6$

Diagrams for \bar{v}_x and \bar{v}_y along two center lines



Diagrams for \bar{v}_x and \bar{v}_y along three sides

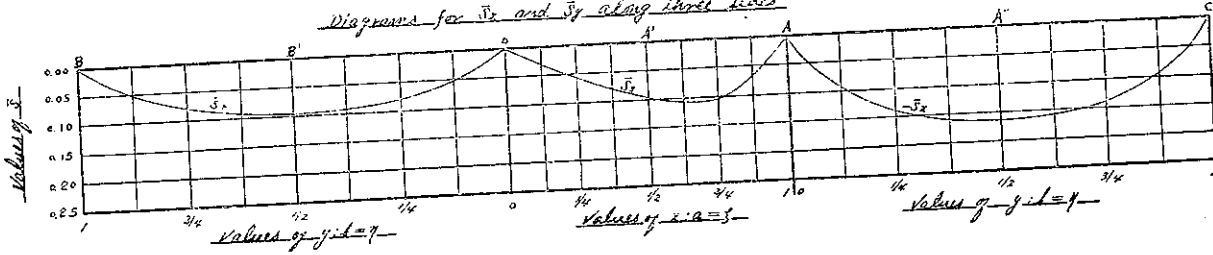


Diagram for \bar{w} along three sides

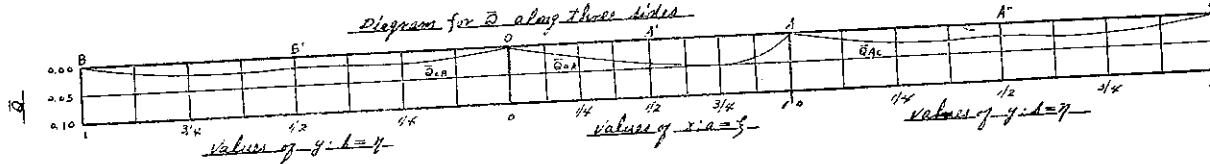
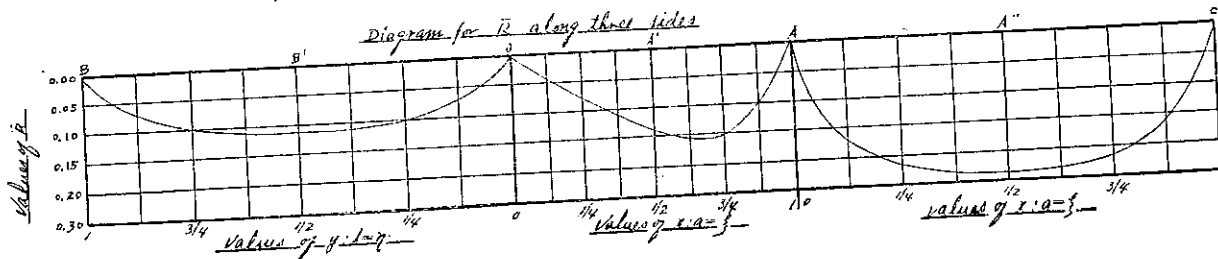


Diagram for \bar{v} along three sides

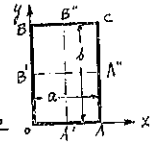


附圖第五

Rectangular plate whose four sides are perfectly fixed and is subjected to a full uniform load

$\mu = 6$
 $K = \frac{1}{4} T_x = (\frac{2}{3})^2$

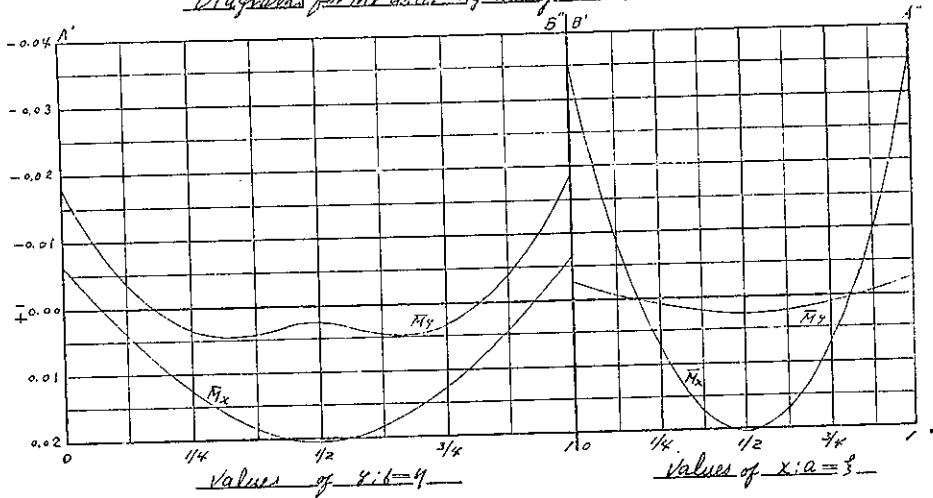
$a : b = 2/3$



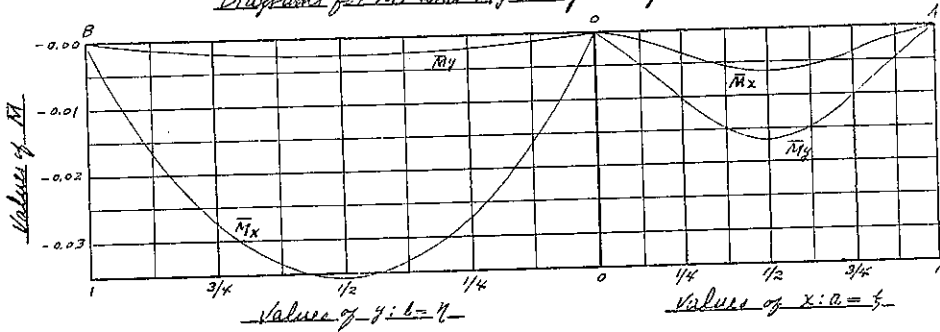
Diagrams for \bar{z} along two centre lines



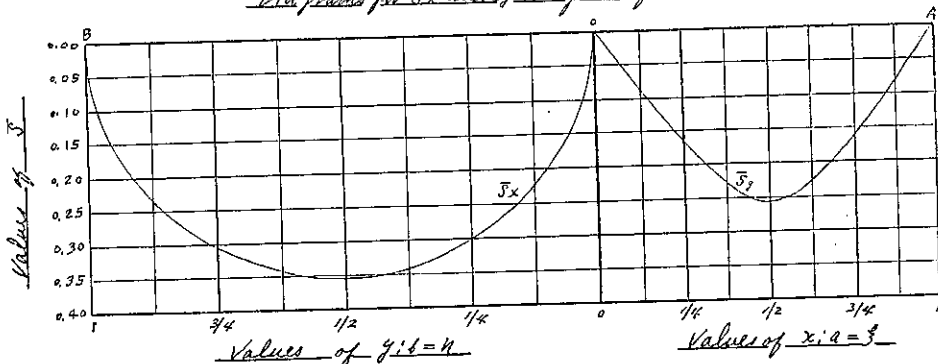
Diagrams for \bar{M}_x and \bar{M}_y along two centre lines



Diagrams for \bar{M}_x and \bar{M}_y along two fixed sides



Diagrams for \bar{S}_x and \bar{S}_y along two fixed sides



土木系 構造力學 第十講 附圖