

論 說 報 告

土木學會誌 第十五卷第十二號 昭和四年十二月

SPANNUNGEN DES DURCH REINE BIEGUNG BELASTETEN STAB-ECKES MIT AUSGERUNDETER INNERER ECKE.

Von Takeo Fukuda, Mitglied junior.

Synopsis.

In der vorliegenden Abhandlung wird eine Näherungslösung für die Spannungsverteilung im durch reine Biegung belasteten Stab-Eck entwickelt, dessen einspringende innere Ecke mit einem kleinen Halbmesser ausgerundet ist und dessen gleich grosse Schenkel senkrecht aufeinander stehen. Das Problem wird vor allem als ein ebenes aufgefasst und unter Zugrundlegung der Airyschen Spannungsfunktion wird die Lösung durch strenge Erfüllung der Randbedingungen an der ausgerundeten Ecke und angenäherte Randbedingungen an den äusseren geradelinigen Rändern hergeleitet.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
1. Die Problemstellung und das Prinzip der Näherungslösung...	1
2. Die Airyschen Spannungsfunktion und die Spannungen.....	3
3. Bestimmung der Freiwerte.....	4
4. Der Grenzfall $\mu=0$, einspringende Ecke.....	9
5. Spannungen längs des inneren Randes und die maximale Spannung.....	11
6. Zahlenbeispiele.....	14
7. Schlussbemerkung.....	16

Tafeln.

1. Die Problemstellung und das Prinzip der Näherungslösung.

Den Spannungszustand in den Stab-Ecken, deren einspringenden Ecken keine Ausrundungen haben, hat der Verfasser schon in seiner früheren Abhandlung¹⁾ näherungsweise nach Ritzschen Methode behandelt.

In vorliegender Arbeit wird eine Näherungslösung für ausgerundete Stab-

Reine Biegung des Stab-Eckes mit ausgerundeter innerer Ecke.

1) Journal of the Civil Engineering Society, Vol. XV, No. 6. Tokio, 1929.

Ecke (zwar mit kleine Ausrundung) entwickelt und der Einfluss der Ausrundung auf die Spannungen in den einspringenden Ecken berechnet.

Wir betrachten nun ein durch **Abb. 1** dargestellte Stab-Eck, dessen Schenkel gleiche Breite h haben und dessen Endquerschnitte (AB und CD) durch Biegemomente M belastet sind. Ferner nehmen wir an, dass die Dicke überall Einheit ist, und, was für unsere Aufgabe zulässig ist, betrachten das Stab-Eck als eine in einem ebenen Spannungszustande beanspruchte Scheibe.

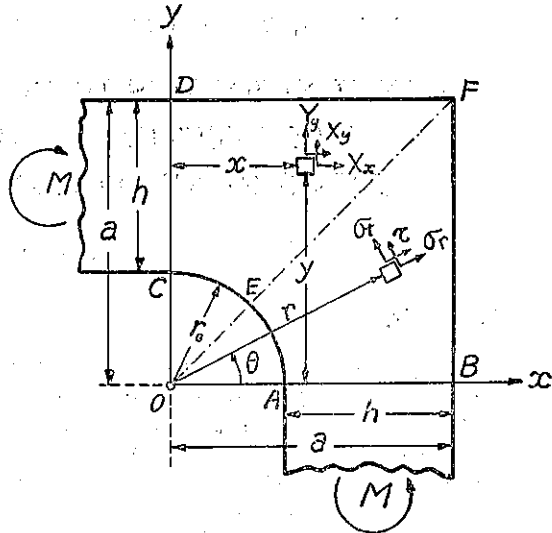


Abb. 1

Wir bezeichnen mit

- X_x, Y_y : die Normalspannungen parallel der x - bzw. y -Richtung,
- X_y : die Schubspannung parallel der x, y -Richtung,
- σ_r : die Normalspannung in der Richtung von r ,
- σ_t : die senkrecht dazu stehende Normalspannung,
- τ : die Schubspannung, die in den rechtwinkligen Schnitten des Polarkoordinatensystems übertragen wird.

Die Randbedingungen für die Endquerschnitten AB und CD sind :

für

$$\theta=0, \frac{\pi}{2} : \int_{r_0}^a \sigma_t r dr = -M, \int_{r_0}^a \sigma_r dr = 0, \int_{r_0}^a \tau dr = 0 \dots \dots \dots (I)$$

Da auf der kreisförmigen Begrenzungsfläche und den geradelinigen Rändern der Scheibe äussere Lasten fehlen, so ergeben sich die Randbedingungen :

$$\text{für } r=r_0 : \sigma_r=0 \text{ und } \tau=0 \dots \dots \dots (II)$$

$$\text{und } \left. \begin{array}{l} \text{,, } x=a : X_x=0 \text{ ,, } Y_x=0 \\ \text{,, } y=a : Y_y=0 \text{ ,, } X_y=0 \end{array} \right\} \dots \dots \dots (III)$$

Die Randbedingungen (I) und (II) sind leicht zu erfüllen. Dagegen ist die strenge Erfüllung der Randbedingungen (III) fast unerreichbar, obwohl es überhaupt nicht als unmöglich angesehen werden möge, so führen wir

statt der Bedingungen (III) angenäherte Bedingungen ein, dass

$$\text{für } B \text{ und } D: \sigma_r=0 \text{ und } \tau=0 \dots\dots\dots(\text{IIIa})$$

$$\text{und } ,, F: X_x=Y_y=X_y=0 \text{ d.h. } \sigma_r=\sigma_t=\tau=0 \dots\dots\dots(\text{IIIb})$$

2. Die Airyschen Spannungsfunktion und die Spannungen.

Wir wollen die Airyschen Spannungsfunktion unserer Aufgabe auf

$$\begin{aligned} F = & C_1 r^2 \left(\log \frac{r}{r_0} - \frac{1}{2} \right) + C_2 a^2 \left(\log r - \frac{r^2}{2r_0^2} \right) \\ & + a \left(r \log r + \frac{r_0^2}{2r} \right) (A_0 \cos \theta + B_0 \sin \theta) \\ & + \left(\frac{r^2 - r_0^2}{a} \right)^2 \sum_{n=1}^4 \left(\frac{r}{a} \right)^{n-2} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) \dots\dots\dots(1) \end{aligned}$$

stellen, wobei C_1 , C_2 , A_0 , B_0 , A_n und B_n die Freiwerte sind, die wir durch die obigen Randbedingungen zu bestimmen haben.

Dass der erste, zweite und dritte Glied der Differentialgleichung

$$\Delta \Delta F = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) F = 0$$

genügen, lässt sich leicht nachweisen. Der letzte Glied genügt der Differentialgleichung nur wenn n gleich 1 oder 2; aber wenn r_0 gleich Null ist, so genügt dieser Glied der Differentialgleichung auch für $n=3$ und 4, und da, wie es weiter unten abgeleitet wird, die Freiwerte A_n und B_n für $n=3$ und 4 viel kleiner als die anderen Freiwerte herauskommen, so kann man schliessen, dass der Ansatz (1) der Spannungsfunktion als genügend angesehen werden darf, wenn der Ausrundungshalbmesser hinreichend klein gegen anderen Abmessungen der Eckscheibe ist.

Da das Stab-Eck durch reine Biegung belastet und gleichschenkelig ist, so muss auf Symmetriegründen die Schubspannung längs des Diagonalschnittes EF überall verschwinden, also $\tau=0$ für $\theta = \frac{\pi}{4}$. Danach bekommt man;

$$B_0 = A_0, B_1 = A_1, A_2 = 0, B_3 = -A_3, B_4 = 0.$$

Aus der Spannungsfunktion (1) findet man dann die Spannungskomponenten zu

$$\sigma_r = \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2C_1 \log \frac{r}{r_0} + \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) \left[-C_2 \left(\frac{a}{r_0}\right)^2 + \left\{ A_0 \frac{a}{r} + 2A_1 \frac{r}{a} \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right) \right\} \right. \\
 &\quad \times (\cos \theta + \sin \theta) + 4B_2 \left(\frac{r_0}{a}\right)^2 \sin 2\theta - 4A_3 \left(\frac{r}{a}\right)^3 \left(1 - 2\frac{r_0^2}{r^2}\right) \\
 &\quad \left. \times (\cos 3\theta - \sin 3\theta) - 2A_4 \left(\frac{r}{a}\right)^4 \left(5 - 7\frac{r_0^2}{r^2}\right) \cos 4\theta \right], \\
 \sigma_t &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \\
 &= 2C_1 \left(1 + \log \frac{r}{r_0}\right) - C_2 \left(\frac{a}{r_0}\right)^2 \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right) \\
 &\quad + \left\{ A_0 \frac{a}{r} \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right) + 2A_1 \frac{r}{a} \left(3 + \frac{r_0^4}{r^4}\right) \right\} (\cos \theta + \sin \theta) \\
 &\quad + 4B_2 \left(\frac{r}{a}\right)^2 \left(3 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) \sin 2\theta + 4A_3 \left(\frac{r}{a}\right)^3 \left(5 - 3\frac{r_0^2}{r^2}\right) \times \\
 &\quad (\cos 3\theta - \sin 3\theta) + 2A_4 \left(\frac{r}{a}\right)^4 \left(15 - 12\frac{r_0^2}{r^2} + \frac{r_0^4}{r^4}\right) \cos 4\theta, \\
 \tau &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) \\
 &= \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) \left[\left\{ A_0 \frac{a}{r} + 2A_1 \frac{r}{a} \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right) \right\} (\sin \theta - \cos \theta) \right. \\
 &\quad - 2B_2 \left(\frac{r}{a}\right)^2 \left(3 + \frac{r_0^2}{r^2}\right) \cos 2\theta + 12A_3 \left(\frac{r}{a}\right) (\sin 3\theta + \cos 3\theta) \\
 &\quad \left. + 4A_4 \left(\frac{r}{a}\right)^4 \left(5 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) \sin 4\theta \right].
 \end{aligned} \tag{2}$$

und für $r=r_0$ verschwinden sowohl σ_r als τ , womit die Randbedingungen (II) erfüllt sind.

3. Bestimmung der Freiwerte.

Aus den Randbedingungen (I) gehen die drei folgenden Bedingungs-
gleichungen hervor :

$$\left(\lambda_1 - \frac{1}{2}\right)C_1 + \left(\frac{2}{2\mu^2} - \lambda_1\right)C_2 - A_0 - 2(1 + \mu^2)A_1 - 4A_3 - (5 - \mu^2)A_4 = \frac{M}{a^2(1 - \mu^2)}, \tag{i}$$

$$2\lambda_1 C_1 + \frac{1}{\mu^2} C_2 + \left(\lambda_1 - \frac{1}{2}\right)A_0 - (3 + \mu^2)A_1 - (5 - \mu^2)A_3 - 2(3 - \mu^2)A_4 = 0, \tag{ii}$$

$$\left(\lambda_1 + \frac{1}{2}\right)A_0 - (1 - \mu^2)(A_1 + 2B_2 - 3A_3) = 0 \tag{iii}$$

worin der Kürze halber

$$\left. \begin{aligned} \mu &= \frac{r_0}{a}, \\ \lambda_1 &= \frac{\log \frac{r_0}{a}}{1 - \frac{r_0^2}{a^2}} = \frac{\log \mu}{1 - \mu^2}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

gesetzt sind.

Da σ_r und τ für $\theta=0$, $\frac{\pi}{2}$ und $r=a$ nach den Bedingungen (IIIa) verschwinden sollen, so ergeben sich :

$$2\lambda_1 C_1 + \frac{1}{\mu^2} C_2 - A_0 - 2(1 + \mu^2)A_1 + 4(1 - 2\mu^2)A_3 + 2(5 - \mu^2)A_4 = 0, \dots\dots\dots (iv)$$

$$A_0 + 2(1 + \mu^2)A_1 + (3 + \mu^2)B_2 - 12A_3 = 0. \dots\dots\dots (v)$$

Wenn man nun die linke Seite der Gl. (ii) aus der Summe der linken Seite der Gl. (iii) und (iv) subtrahiert, so bekommt man

$$B_2 = 6A_3 + 8A_4 \dots\dots\dots (a)$$

Nach Einsetzen der Gl. (a) in den obigen Gleichungen (iii) und (v) und durch die unten gekennzeichneten Verfahren erhält man die vier folgenden, aneinander unabhängigen Bedingungsgleichungen :

$$(iv) - (i): \left(\lambda_1 + \frac{1}{2}\right)C_1 + \left(\lambda_1 + \frac{1}{2\mu^2}\right)C_2 + (1 - \mu^2)(8A_3 + 15A_4) = 0 \dots (b)$$

$$(iv) + (v): 2\lambda_1 C_1 + \frac{1}{\mu^2} C_2 + 4(7 + \mu^2)A_3 + 2(29 + \mu^2)A_4 = 0 \dots\dots\dots (c)$$

$$(ii) - (iv): \left(\lambda_1 + \frac{1}{2}\right)A_0 - (1 - \mu^2)(A_1 + 9A_3 + 16A_4) = 0 \dots\dots\dots (d)$$

$$(v): A_0 + 2(1 + \mu^2)A_1 + 12(2 + \mu^2)A_3 + 16(3 + \mu^2)A_4 = 0 \dots\dots\dots (e)$$

Nach Randbedingungen (IIIb) müssen alle Spannungen an der ausspringenden Ecken F verschwinden ; da unsere Lösung (2) die Schubspannung längs des Diagonalschnittes EF überall verschwinden lässt, so erhalten wir hier noch zwei Bedingungsgleichungen, nämlich $\sigma_t = 0$, $\sigma_r = 0$ für $\theta = \frac{\pi}{4}$, $r = \sqrt{2} a$

oder :

$$-\frac{1}{\mu^2} C_2 + A_0 + \frac{2}{2 + \mu^2} \times \left[\{2 - (2 - \mu^2)\lambda_1\} C_1 + (12 + \mu^4)A_1 + 64A_3 + 2(36 + 8\mu^2 - \mu^4)A_4 \right] = 0 \dots\dots (vi)$$

$$-2\lambda_2 C_1 - \frac{1}{\mu^2} C_2 + A_0 + 2(2 + \mu^2)A_1 + 8(2 + \mu^2)A_3 + 4(10 + \mu^2)A_4 = 0 \dots (vii)$$

wobei

$$\lambda_2 = \frac{\log \frac{r_n^2}{2a^2}}{2 - \frac{r_0^2}{a^2}} = \frac{\log \frac{\mu^2}{2}}{2 - \mu^2} \dots \dots \dots (4)$$

gesetzt ist. Wir erhalten dann durch die gekennzeichneten Verfahren:

$$(vi) - (vii): \frac{1}{2 - \mu^2} (1 + \mu^2 \lambda_2) C_1 + 2A_1 + 2(6 + \mu^2)A_3 + 2(4 + \mu^2)A_4 = 0 \dots \dots (f)$$

$$(f) - (iv) - (vii): \left(2\lambda_1 - \frac{4 - \mu^2}{2 - \mu^2} \lambda_2 - \frac{1}{2 - \mu^2} \right) C_1 + 2(4 - \mu^2)A_3 + 6(7 - 2\mu^2)A_4 = 0 \dots \dots \dots (g)$$

Wir haben nun sechs Gleichungen von (b) bis (g) für die sechs Freiwerte $C_1, C_2, A_0, A_1, A_3, A_4$ und eine Gleichung (a) für B_2 , damit die sämtlichen Freiwerte festgelegt werden können. Löst man die sechs Gleichungen von (b) bis (g) nach den Freiwerte auf und bestimmt B_2 durch die Gl. (a), so erhält man :

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{M}{a^2} \frac{\Delta_1}{\Delta}, & C_2 &= -\frac{M}{a^2} \frac{\Delta_2}{\Delta} \mu^2, & A_0 &= -\frac{M}{a^2} \frac{\Delta_3}{\Delta}, \\ A_1 &= \frac{M}{a^2} \frac{\Delta_4}{\Delta}, & A_3 &= -\frac{M}{a^2} \frac{\Delta_5}{\Delta}, & A_4 &= \frac{M}{a^2} \frac{\Delta_6}{\Delta}, \\ B_2 &= + \frac{2M}{a^2 \Delta} (-3\Delta_5 + 4\Delta_6). \end{aligned} \right\} \dots (5)$$

wobei

$$\left. \begin{aligned} \Delta &= (1 - \mu^2) \left[\left(2\mu^2 \lambda_1^2 - \frac{1}{2} \right) \Delta_1 - 2 \{ 3 + 5\mu^2 + 2\mu^2(7 + \mu^2)\lambda_1 \} \Delta_2 \right. \\ &\quad \left. + 2 \{ 7 + 8\mu^2 + \mu^2(29 + \mu^2)\lambda_1 \} \Delta_3 \right] \\ \Delta_1 &= -\frac{4}{1 - \mu^2} (1 - 7\mu^2)(1 + 2\lambda_1) - 8 \{ 10(3 - \mu^2) + (45 + 3\mu^2 - 5\mu^4)\lambda_1 \} \\ \Delta_2 &= + 2\lambda_1 \Delta_1 - 4(7 + \mu^2)\Delta_3 + 2(29 + \mu^2)\Delta_6 \\ \Delta_3 &= -4(1 - \mu^2) \left[\frac{19 - 15\mu^2}{2 - \mu^2} (1 + \mu^2 \lambda_2) + 2(12 + 5\mu^2)(\lambda_1 - \lambda_2) \right] \\ \Delta_4 &= + \frac{2}{1 - \mu^2} \left[\frac{5(1 + \mu^2 \lambda_2)}{2 - \mu^2} \{ (5 - \mu^2)(5 - 3\mu^2) + 4(6 + \mu^2 - 3\mu^4)\lambda_1 \} \right. \end{aligned} \right\} (6)$$

$$\begin{aligned}
& + 2(\lambda_1 - \lambda_2) \{ 156 - 17\mu^2 - 5\mu^4 + 4(48 + 18\mu^2 + \mu^4)\lambda_1 \} \\
\Delta_5 = & + \frac{4}{1 - \mu^2} \left[\frac{1 + \mu^2 \lambda_2}{2 - \mu^2} \{ 5 - \mu^2 + (1 + 12\mu^2 - 5\mu^4)\lambda_1 \} \right. \\
& \left. + 2(\lambda_1 - \lambda_2) \{ 16 - 5\mu^2 + (20 + 3\mu^2 - \mu^4)\lambda_1 \} \right] \\
\Delta_6 = & - \frac{2}{1 - \mu^2} \left[\frac{1 + \mu^2 \lambda_2}{2 - \mu^2} \{ 1 - 3\mu^2 + 4(1 - 5\mu^2 - \mu^4)\lambda_1 \} \right. \\
& \left. - 2(\lambda_1 - \lambda_2) \{ 9 - 5\mu^2 + 2(2 - \mu^2)(3 + \mu^2)\lambda_1 \} \right].
\end{aligned}$$

Hiermit ist die Aufgabe, die wir uns gestellt hatten, im wesentlichen gelöst, weil wir, nach der Ermittlung der Freiwerte durch die Gl. (5) und (6), die Spannungskomponenten jeder Stelle des Stab-Eckes nach den Gl. (2) ausrechnen können. Wir können aber die Formeln (2) folgenderweise umschreiben :

$$\begin{aligned}
\sigma_r = & \frac{M}{W} \left[\beta_0 + \beta_1 \log \frac{r}{a} \right. \\
& + \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) \left\{ \beta_2 + \left[\alpha_0 \frac{a}{r} + \alpha_1 \frac{r}{a} \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) \right] (\cos \theta + \sin \theta) \right. \\
& - 2\alpha_2 \left(\frac{r_0}{a} \right)^2 \sin 2\theta + \alpha_3 \left(\frac{r}{a} \right)^3 \left(1 - 2 \frac{r_0^2}{r^2} \right) (\cos 3\theta - \sin 3\theta) \\
& \left. \left. - \alpha_4 \left(\frac{r}{a} \right)^4 \left(5 - 7 \frac{r_0^2}{r^2} \right) \cos 4\theta \right\} \right], \\
\sigma_t = & \frac{M}{W} \left[\beta_0 + \beta_1 \left(1 + \log \frac{r}{a} \right) + \beta_2 \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) \right. \\
& + \left\{ \alpha_0 \frac{a}{r} \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) + \alpha_1 \frac{r}{a} \left(3 + \frac{r_0^4}{r^4} \right) \right\} (\cos \theta + \sin \theta) \\
& - 2\alpha_2 \left(\frac{r}{a} \right)^2 \left(3 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) \sin 2\theta - \alpha_3 \left(\frac{r}{a} \right)^3 \left(5 - 3 \frac{r_0^2}{r^2} \right) \times \\
& (\cos 3\theta - \sin 3\theta) + \alpha_4 \left(\frac{r}{a} \right)^4 \left(15 - 12 \frac{r_0^2}{r^2} + \frac{r_0^4}{r^4} \right) \cos 4\theta \left. \right], \\
\tau = & \frac{M}{W} \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) \left[\left\{ \alpha_0 \frac{a}{r} + \alpha_1 \frac{r}{a} \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) \right\} (\sin \theta - \cos \theta) \right. \\
& + \alpha_2 \left(\frac{r}{a} \right)^2 \left(3 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) \cos 2\theta - 3\alpha_3 \left(\frac{r}{a} \right)^3 (\sin 3\theta + \cos 3\theta) \\
& \left. + 2\alpha_4 \left(\frac{r}{a} \right)^4 \left(5 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) \sin 4\theta \right],
\end{aligned} \tag{7}$$

worin W das Widerstandsmoment des Schenkels ist, also

$$W = \frac{h^2}{6} = \frac{a^2(1-\mu)^2}{6} \dots\dots\dots (8)$$

Die Freiwerte in den Gl. (7) sind mit denen in Gl. (2) durch die folgenden Gleichungen geknüpft :

$$\left. \begin{aligned} \beta_0 &= -\frac{2W}{M} \log \mu \quad C_1 = -\frac{\Delta_1}{\Delta'} \log \mu \\ \beta_1 &= +\frac{2W}{M} C_1 = +\frac{\Delta_1}{\Delta'}, & \beta_2 &= -\frac{W}{\mu^2 M} C_2 = +\frac{1}{2} \frac{\Delta_2}{\Delta'}, \\ \alpha_0 &= +\frac{W}{M} A_0 = -\frac{1}{2} \frac{\Delta_3}{\Delta'}, & \alpha_1 &= +\frac{2W}{M} A_1 = +\frac{\Delta_4}{\Delta'}, \\ \alpha_3 &= -\frac{4W}{M} A_3 = +2 \frac{\Delta_5}{\Delta'}, & \alpha_4 &= +\frac{2W}{M} A_4 = +\frac{\Delta_6}{\Delta'}, \\ \alpha_2 &= -\frac{2W}{M} B_2 = +\frac{2}{\Delta'} (3\Delta_5 - 4\Delta_6), \end{aligned} \right\} (9)$$

worin

$$\Delta' = 3 \left(\frac{1+\mu}{1-\mu} \right) \left[\left\{ 2\mu^2 \lambda_1^2 - \frac{1}{2} \right\} \Delta_1 - 2 \{ 3 + 5\mu^2 + 2\mu^2(7 + \mu^2) \lambda_1 \} \Delta_2 + 2 \{ 7 + 8\mu^2 + \mu^2(29 + \mu^2) \lambda_1 \} \Delta_3 \right] \dots\dots\dots (10)$$

Aus diesen Formeln ergibt sich die nachstehende Zahlentafel, welche durch die Kurven der **Tafel I.** des Anhanges dargestellt ist.

Zahlentafel 1. Die Beiwerte.

$\mu = \frac{r_0}{a}$	β_0	β_1	β_2	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4
0.0*	$-\infty$	-7.5784	$+\infty$	0	7.9526	5.0173	2.3663	0.2602
0.01	-19.2414	-4.1782	14.6704	-0.1026	4.1363	2.5552	1.2103	0.2602
0.05	-11.8271	-3.9480	7.8036	-0.1615	3.7332	2.2700	1.0782	0.1206
0.1	-10.1153	-4.3930	5.9878	-0.2462	3.9558	2.3699	1.1281	0.1268
0.2	-9.4374	-5.8638	4.8075	-0.4929	4.8076	2.8039	1.3390	0.1516
0.3	-9.3070	-7.7302	4.2655	-0.8701	5.8014	3.2984	1.5796	0.1800
0.4	-9.0623	-9.8901	3.8363	-1.4108	6.8404	3.7964	1.8223	0.2090
0.5	-8.6472	-12.4752	3.4345	-2.1818	8.0130	4.3406	2.0908	0.2415
0.6	-8.1441	-15.8342	3.0662	-3.3315	9.5636	5.0635	2.4473	0.2848
0.7	-7.6170	-21.3553	2.6474	-5.2907	12.1340	6.2863	3.0501	0.3580
0.8	-7.2785	-32.6173	2.1556	-9.4407	17.6846	8.9799	4.3764	0.5187

*) Vgl. hierzu den nächsten Paragraph 4.

4. Der Grenzfall $\mu=0$, einspringende Ecke.

Wenn μ verschwindend klein ist, also wenn r_0 gegen a hinreichend klein ist, so kann man μ und die höheren Potenzen von μ gegen 1 vernachlässigen, so dass aus Gl. (6) und (10) folgt

$$\Delta_1 = -4(61 + 92 \log \mu)$$

$$\Delta_2 = -8(97 + 106 \log 2 + 92 \log \mu) \log \mu$$

$$\Delta_3 = -2(19 + 24 \log 2)$$

$$\Delta_4 = 24(16 \log 2 + 5) \log \mu$$

$$\Delta_5 = 2(40 \log 2 + 1) \log \mu$$

$$\Delta_6 = 4(6 \log 2 - 1) \log \mu$$

$$\Delta' = 12(29 - 36 \log 2) \log \mu$$

Für den Grenzfall $\mu=0$ ergeben sich die Freiwerte zu :

$$\begin{aligned} \beta_0 &= -\frac{\Delta_1}{\Delta'} \log \mu = + \lim_{\mu=0} \frac{61 + 92 \log \mu}{3(29 - 36 \log 2)} = -\infty \\ \beta_1 &= +\frac{\Delta_1}{\Delta'} = - \lim_{\mu=0} \frac{61 + 92 \log \mu}{3(29 - 36 \log 2) \log \mu} \\ &= -\frac{92}{3(29 - 36 \log 2)} = -7.5784 \\ \beta_2 &= +\frac{1}{2} \frac{\Delta_2}{\Delta'} = - \lim_{\mu=0} \frac{97 + 106 \log 2 + 92 \log \mu}{3(29 - 36 \log 2)} = +\infty \\ \alpha_0 &= -\frac{1}{2} \frac{\Delta_3}{\Delta'} = + \lim_{\mu=0} \frac{19 + 24 \log 2}{12(29 - 36 \log 2) \log \mu} = 0 \\ \alpha_1 &= +\frac{\Delta_4}{\Delta'} = +\frac{2(16 \log 2 + 5)}{3(29 - 36 \log 2)} = +7.9526 \\ \alpha_3 &= 2 \frac{\Delta_5}{\Delta'} = +\frac{40 \log 2 + 1}{3(29 - 36 \log 2)} = +2.3663 \\ \alpha_4 &= +\frac{\Delta_6}{\Delta'} = +\frac{6 \log 2 - 1}{3(29 - 36 \log 2)} = +0.2602 \\ \alpha_2 &= 3\alpha_3 - 4\alpha_4 = +\frac{72 \log 2 + 11}{3(29 - 36 \log 2)} = +5.0173 \end{aligned} \quad (11)$$

Wie man daraus sieht, werden β_0 und β_2 für $\mu=0$ unendlich gross ; aber in diesem Fall kommt nur $(\beta_0 + \beta_2)$ ins Betracht und $(\alpha_0 + \beta_2)$ bleibt, wie es unten abgeleitet wird, endlich auch wenn $\mu=0$ wird.

$$\beta_0 + \beta_1 = -\frac{2(18 + 53 \log 2)}{3(29 - 36 \log 2)} = -9.0178$$

Durch Einsetzen dieser Werte der Konstanten in den Gl. (7) gehen die Spannungskomponenten herüber in :

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_r &= \frac{2M}{a^2(29-36 \log 2)} \left[-2(18+53 \log 2) - 92 \log \frac{r}{a} \right. \\
 &\quad + 6(5+16 \log 2) \left(\frac{r}{a} \right) (\cos \theta + \sin \theta) \\
 &\quad \left. + (40 \log 2 + 1) \left(\frac{r}{a} \right)^3 (\cos 3\theta - \sin 3\theta) - 5(6 \log 2 - 1) \left(\frac{r}{a} \right)^4 \cos 4\theta \right], \\
 \sigma_t &= \frac{2M}{a^2(29-36 \log 2)} \left[-2(18+53 \log 2) - 92 \left(1 + \log \frac{r}{a} \right) \right. \\
 &\quad + 18(5+16 \log 2) \left(\frac{r}{a} \right) (\cos \theta + \sin \theta) \\
 &\quad - 6(72 \log 2 + 11) \left(\frac{r}{a} \right)^2 \sin 2\theta - 5(40 \log 2 + 1) \left(\frac{r}{a} \right)^3 (\cos 3\theta - \sin 3\theta) \\
 &\quad \left. + 15(6 \log 2 - 1) \left(\frac{r}{a} \right)^4 \cos 4\theta \right], \\
 \tau &= \frac{2M \left(\frac{r}{a} \right)}{a^2(29-36 \log 2)} \left[6(16 \log 2 + 5) (\sin \theta - \cos \theta) \right. \\
 &\quad + 3(72 \log 2 + 11) \left(\frac{r}{a} \right) \cos 2\theta - 3(40 \log 2 + 1) \left(\frac{r}{a} \right)^2 (\cos 3\theta + \sin 3\theta) \\
 &\quad \left. + 10(6 \log 2 - 1) \left(\frac{r}{a} \right)^3 \sin 4\theta \right].
 \end{aligned} \right\} (12)$$

Daraus sieht man, dass τ für $r=0$ verschwindet aber σ_r und σ_t für die nächsten Umgebung der einspringenden Ecke unendlich gross werden. Wenn man jedoch beachtet, dass der Ausdruck für σ_r in (12) aus

$$\begin{aligned}
 \sigma_r &= \frac{2M}{a^2(29-36 \log 2)} \lim_{r_0 \rightarrow 0} \left[61 \left(1 - \frac{\log \frac{r}{a}}{\log \frac{r_0}{a}} \right) - 92 \left(\log \frac{r}{a} - \frac{r_0^2}{r^2} \log \frac{r_0}{a} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) \left\{ -(97+106 \log 2) + \frac{1}{4} (24 \log 2 + 19) \frac{\cos \theta + \sin \theta}{\frac{r}{a} \log \frac{r_0}{a}} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 6(16 \log 2 + 5) \left(\frac{r}{a} \right) \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) (\cos \theta + \sin \theta) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (40 \log 2 + 1) \left(\frac{r}{a} \right)^3 \left(1 - 2 \frac{r_0^2}{r^2} \right) (\cos 3\theta - \sin 3\theta) \right\} \right]
 \end{aligned}$$

$$\left. - (6 \log 2 - 1) \left(\frac{r}{a} \right)^4 \left(5 - 7 \frac{r_0^2}{r^2} \right) \cos 4\theta \right\}$$

abgeleitet worden ist, so kann man sich überzeugen, dass σ_r für die materialseitigen Umgebung der einspringenden Ecke unendlich gross wird aber dann sozusagen plötzlich auf Null abfällt, damit die Randbedingungen erfüllt sind.

5. Spannungen längs des inneren Randes und die maximale Spannung.

Setzt man $r=r_0$ in die Gl. (7) ein, so bekommt man für die Randspannungen längs der inneren kreisförmigen Begrenzungsfläche :

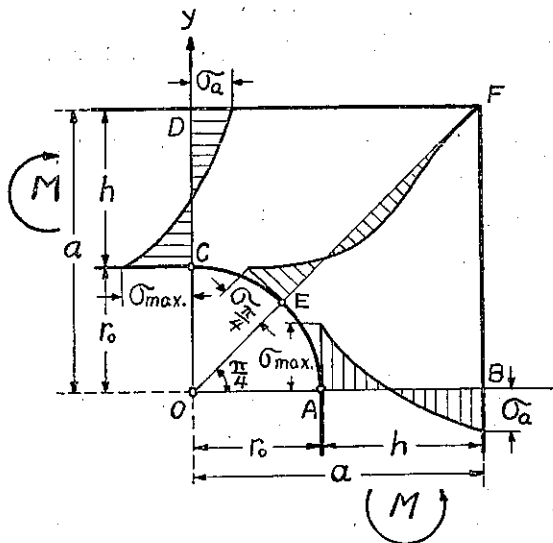


Abb. 2

$$[\sigma_t]_{r=r_0} = \frac{M}{W} \left[\beta_1 + 2\beta_2 + 2 \left(\frac{1}{\mu} \alpha_0 + 2\alpha_1 \mu \right) (\cos \theta + \sin \theta) - 4\alpha_2 \mu^2 \sin 2\theta - 2\alpha_3 \mu^3 (\cos 3\theta - \sin 3\theta) + 4\alpha_4 \mu^4 \cos 4\theta \right] \dots (13)$$

Setzt man $\theta=0, \frac{\pi}{2}$ in die Gl. (7) ein, so ergeben sich für die Spannungen längs der Schnitte AB und CD :

$$\left[\sigma_t \right]_{\theta=0, \frac{\pi}{2}} = \frac{M}{W} \left[\beta_1 \log \frac{r}{r_0} + \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) \left\{ \beta_2 + \alpha_0 \frac{a}{r} + \alpha_1 \frac{r}{a} \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) + \alpha_2 \left(\frac{r}{a} \right)^3 \left(1 - 2 \frac{r_0^2}{r^2} \right) - \alpha_4 \left(\frac{r}{a} \right)^4 \left(5 - 7 \frac{r_0^2}{r^2} \right) \right\} \right]$$

$$\begin{aligned}
 [\sigma_t]_{\theta=\frac{\pi}{2}} &= \frac{M}{W} \left[\beta_1 \left(1 + \log \frac{r}{r_0} \right) + \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) \left(\beta_2 + \alpha_0 \frac{a}{r} \right) \right. \\
 &\quad + \alpha_1 \frac{r}{a} \left(3 + \frac{r_0^4}{r^4} \right) - \alpha_3 \left(\frac{r}{a} \right)^3 \left(5 - 3 \frac{r_0^2}{r^2} \right) \\
 &\quad \left. + \alpha_4 \left(\frac{r}{a} \right)^4 \left(15 - 12 \frac{r_0^2}{r^2} + \frac{r_0^4}{r^4} \right) \right], \\
 [\tau]_{\theta=\frac{\pi}{2}} &= \mp \frac{M}{W} \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) \left[\alpha_0 \frac{a}{r} + \alpha_1 \frac{r}{a} \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \alpha_2 \left(\frac{r}{a} \right)^2 \left(3 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) + 3 \alpha_3 \left(\frac{r}{a} \right)^3 \right],
 \end{aligned} \tag{14}$$

wobei das obere Vorzeichen der Schubspannung τ für AB und das untere für CD gilt.

Setzt man nun $\theta = \frac{\pi}{4}$ in die Gl. (7) ein, so ergeben sich für die Spannungen längs des Diagonalschnittes EF :

$$\begin{aligned}
 [\sigma_r]_{\theta=\frac{\pi}{4}} &= \frac{M}{W} \left[\beta_1 \log \frac{r}{r_0} + \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) \left\{ \beta_2 + \sqrt{2} \alpha_0 \frac{a}{r} \right. \right. \\
 &\quad + \sqrt{2} \alpha_1 \frac{r}{a} \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) - 2 \alpha_2 \left(\frac{r_0}{a} \right)^2 \\
 &\quad \left. \left. - \sqrt{2} \alpha_3 \left(\frac{r}{a} \right)^3 \left(1 - 2 \frac{r_0^2}{r^2} \right) + \alpha_4 \left(\frac{r}{a} \right)^4 \left(5 - 7 \frac{r_0^2}{r^2} \right) \right\} \right], \\
 [\sigma_t]_{\theta=\frac{\pi}{4}} &= \frac{M}{W} \left[\beta_1 \left(1 + \log \frac{r}{r_0} \right) + \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) \left(\beta_2 + \sqrt{2} \alpha_0 \frac{a}{r} \right) \right. \\
 &\quad + \sqrt{2} \alpha_1 \frac{r}{a} \left(3 + \frac{r_0^4}{r^4} \right) - 2 \alpha_2 \left(\frac{r}{a} \right)^2 \left(3 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) \\
 &\quad \left. + \sqrt{2} \alpha_3 \left(\frac{r}{a} \right)^3 \left(5 - 3 \frac{r_0^2}{r^2} \right) - \alpha_4 \left(\frac{r}{a} \right)^4 \left(15 - 12 \frac{r_0^2}{r^2} + \frac{r_0^4}{r^4} \right) \right], \\
 [\tau]_{\theta=\frac{\pi}{4}} &= 0.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Wir wissen ohne weiteres, dass die maximale Normalspannungen an den inneren Rändern auftreten, wie viele Versuchsergebnisse es uns gelehrt haben.

Aus Gl. (13) ergibt sich für $\theta=0$, $\frac{\pi}{4}$ und $\frac{\pi}{2}$

$$\frac{d[\sigma_t]_{r=r_0}}{d\theta} = 0,$$

so dass die Randspannung an den Punkten A , E und C ihre maximale oder

minimale Werte nimmt und zwar an *A* und *C* die maximale und an *E* die minimale.

Bezeichnet man mit

$\sigma_{max.}$: die maximale Normalspannungen an *A* und *C*,

$\sigma_{\frac{\pi}{4}}$: die minimale Randspannung an *E*,

σ_a : die Normalspannung an *B* und *D*,

σ_0 : die für den geraden Balken mit rechteckigem Querschnitt von der Höhe *h* und der Breite 1 aus der einfachen Theorie der Balkenbiegung bekannte Normalspannung der extremen Faser, d.h. $\frac{M}{W}$,

so gelten die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{max.} &= \sigma_0 \left[\beta_1 + 2\beta_2 + 2 \left(\alpha_0 \frac{1}{\mu} + 2\alpha_1 \mu \right) - 2\alpha^2 \mu^3 + 4\alpha_4 \mu^4 \right], \\ \sigma_{\frac{\pi}{4}} &= \sigma_0 \left[\beta_1 + 2\beta_2 + 2\sqrt{2} \left(\alpha_0 \frac{1}{\mu} + 2\alpha_1 \mu + \alpha_2 \mu^2 \right) - 4\alpha_2 \mu^2 - 4\alpha_4 \mu^4 \right], \\ \sigma_a &= \alpha_0 \left[\beta_0 + \beta_1 + (\beta_2 + \alpha_0)(1 + \mu^2) + \alpha_1(3 + \mu^4) - \alpha_2(5 - 3\mu^2) \right. \\ &\quad \left. + \alpha_4(15 - 12\mu^2 + \mu^4) \right]. \end{aligned} \right\} (16)$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich die nachstehenden **Zahlentafel 2** und die **Abbildung 3**:

Zahlentafel 2. $\sigma_{max.}$, $\sigma_{\frac{\pi}{4}}$ und σ_a .

$\mu = \frac{r_0}{a}$	$\sigma_{max.}$	$\sigma_{\frac{\pi}{4}}$	σ_a	
0	∞	∞	$-\frac{2}{3}$	$\times \sigma_0$
0.05	5.946	3.557	-0.492	\times „
0.1	4.239	2.765	-0.561	\times „
0.2	2.647	1.800	-0.716	\times „
0.3	1.883	1.356	-0.849	\times „
0.4	1.461	1.165	-0.940	\times „
0.5	1.230	1.054	-0.989	\times „

Daraus sieht man, dass die maximale Spannung $\sigma_{max.}$, mit der das Stab-Eck am stärksten in *A* und *C* beansprucht wird, mit zunehmendem Ausrundungshalbmesser abnimmt bis sie schliesslich für $\mu=1$ mit σ_0 übereinstimmen wird. Dasselbe gilt auch für die Normalspannung in

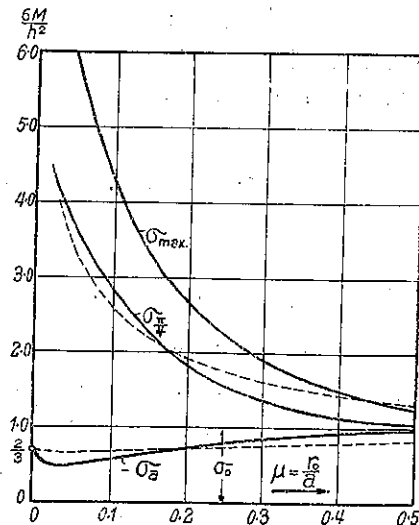


Abb. 3.

---- Kantenspannungen eines auf reine Biegung beanspruchten Stab mit konstanter Krümmung.

$E, \sigma_{\frac{\pi}{4}}$, die immer kleiner als σ_{max} vorkommt. Die Kantenspannung in B und D ist immer kleiner als σ_0 und übereinstimmt mit σ_0 für $\mu=1$.

Um die maximale Spannung σ_{max} in mässigen Grenzen zu halten, wird man die einspringende Ecke mit einer Ausrundung zu versehen haben, deren Halbmesser nicht zu klein gewählt werden darf. Zu diesem Zweck und um den Materialverbrauch zu sparen kommt es uns bei der praktischen Bauanordnung der Rahmenwerken am zweckmässigsten vor, dass man den Ausrundungshalbmesser r_0 gleich die Breite des Schenkels h , also $\mu=0.5$ wählt, sodass sich $\sigma_{max}=1.230 \sigma_0$ ergibt.

6. Zahlenbeispiele.

(a) $\mu=0.1$.

Die Rechnung wird für $\mu=0.1$ durchgeführt; dem entspricht ein Stab-Eck mit Schenkeln von der Breite $h=9$ und einer Ausrundung von $r_0=1$. Das Ergebnis der Durchrechnung ist in der nachstehenden **Zahlentafel 3** zusammengefasst und die **Tafel II** des Anhangs zeigt den Verlauf der Spannungen.

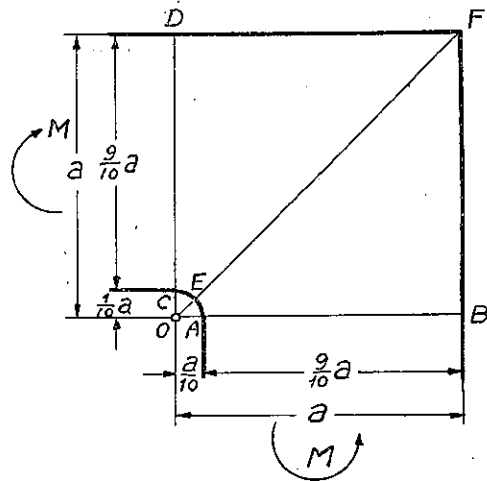


Abb. 4

Zahlentafel 3. Spannungen des Stab-Eckes von $\mu=0.1$.

1. Schnitte AB und $CD: \theta=0, \frac{\pi}{2}$.

$\frac{r}{a}$	0.1	0.15	0.2	0.3	0.4	0.6	0.8	0.9	1.0
σ_r	0	1.110	1.267	0.956	0.484	0.067	-0.078	—	$0 \times \frac{M}{W}$
σ_t	4.239	—	0.895	-0.031	-0.323	-0.366	-0.356	-0.414	-0.561 „
τ	0	± 0.531	± 0.392	± 0.066	∓ 0.113	∓ 0.172	∓ 0.065	—	0 „

2. Schnitte $\theta=\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}$.

$\frac{r}{a}$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.6	0.8	1.0	1.0824
σ_r	0	1.167	1.016	0.734	0.355	0.147	0.017	$-0.035 \times \frac{M}{W}$
σ_t	3.151	0.852	0.119	-0.156	-0.296	-0.310	-0.275	-0.228 „

τ	0	± 0.237	± 0.143	∓ 0.004	∓ 0.062	∓ 0.084	∓ 0.140	∓ 0.176	$\times \frac{M}{W}$
--------	---	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	----------------------

3. Diagonalschnitt EF : $\theta = \frac{\pi}{4}$.

$\frac{r}{a}$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	$\sqrt{2}$	
σ_r	0	1.149	1.055	0.821	0.454	0.230	0.086	0.001	0	$\times \frac{M}{W}$
σ_t	2.765	0.827	0.155	-0.007	-0.252	-0.237	-0.158	-0.058	0	„
τ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	„

Bemerkung. Die obere Vorzeichen der Schubspannungen gelten für $\theta < \frac{\pi}{4}$ und die untere für $\theta > \frac{\pi}{4}$.

(b) $\mu = 0.5$.

Die Rechnung wird für $\mu = 0.5$ durchgeführt; dem entspricht ein Stab-Eck, dessen einspringende Ecke mit einem Halbmesser abgerundet ist, der gleich die Breite des Schenkels ist. Die nachstehende **Zahlentafel 4** und die **Tafel III** des Anhangs zeigen das Ergebnis der Durchrechnung.

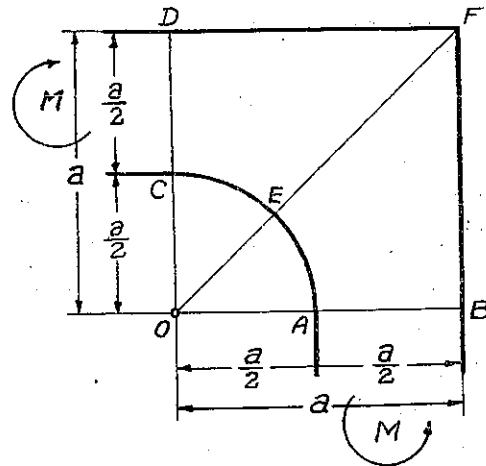


Abb. 5

Zahlentafel 4. Spannungen des Stab-Eckes von $\mu = 0.5$.

1. Schnitte AB und CD : $\theta = 0, \frac{\pi}{2}$.

$\frac{r}{a}$	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	
σ_r	0	0.098	0.059	0.006	-0.017	0	$\times \frac{M}{W}$
σ_t	1.230	0.583	0.136	0.208	-0.569	-0.989	„
τ	0	± 0.028	± 0.019	∓ 0.012	∓ 0.032	0	„

2. Schnitte $\theta = \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}$.

$\frac{r}{a}$	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.0824	
σ_r	0	-0.136	0.163	0.159	0.098	0.030	-0.043	$\times \frac{M}{W}$
σ_t	1.145	0.512	0.125	-0.147	-0.315	-0.402	-0.411	„

τ	0	± 0.043	± 0.045	± 0.017	∓ 0.040	∓ 0.125	∓ 0.212	„	
2. Diagonalschnitt EF : $\theta = \frac{\pi}{4}$.									
$\frac{r}{a}$	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	$\sqrt{2}$
σ_r	0	0.138	0.181	0.174	0.139	0.090	0.039	-0.003	0 $\times \frac{M}{W}$
σ_t	1.054	0.466	0.118	-0.087	-0.179	-0.201	-0.169	-0.107	0 „
τ	0	0	0	0	0	0	0	0	0 „

Bemerkung. Die obere Vorzeichen der Schubspannungen gelten für $\theta < \frac{\pi}{4}$ und die untere für $\theta > \frac{\pi}{4}$.

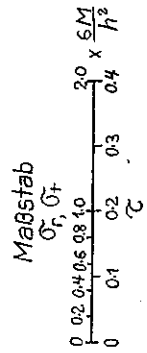
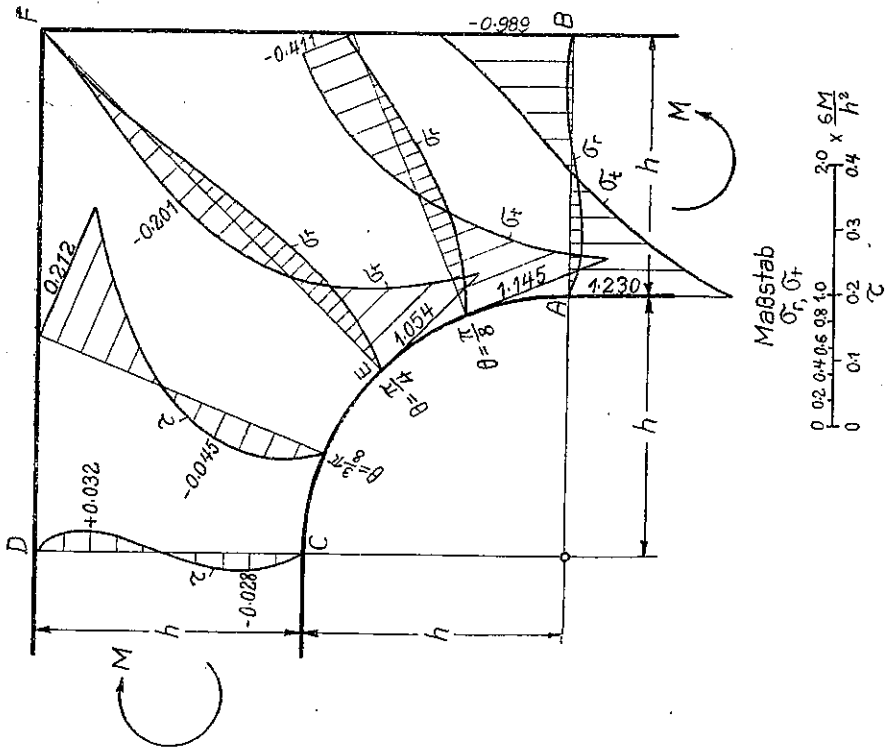
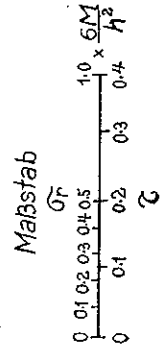
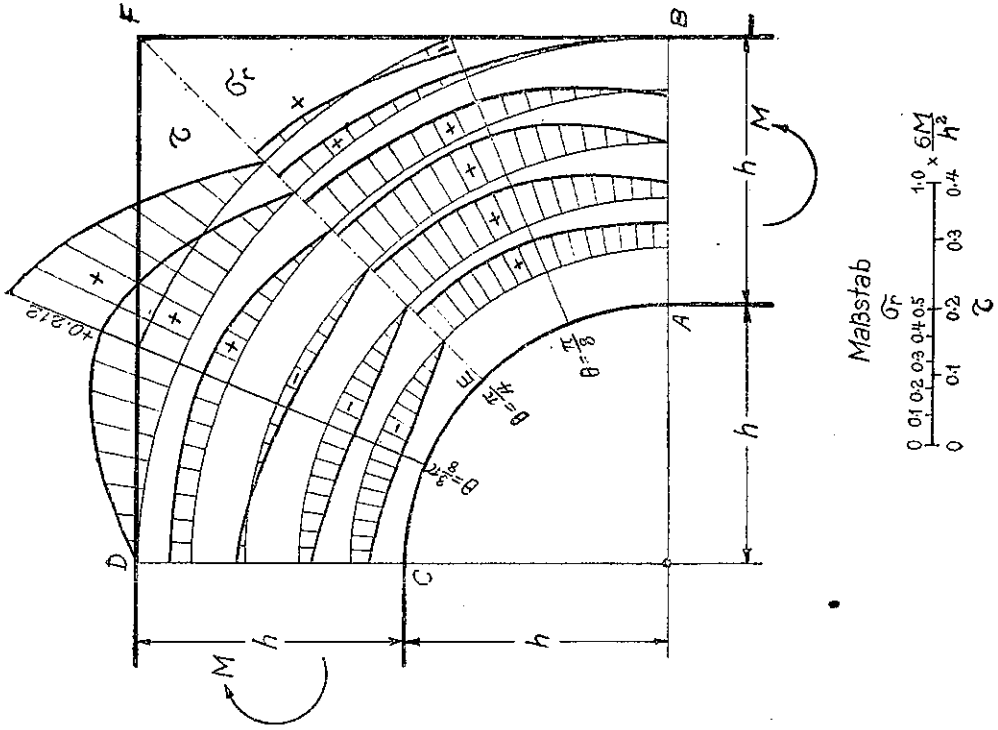
7. Schlussbemerkung.

Die Lösung, die wir oben für die Spannungen eines Stab-Eckes hergeleitet haben, befriedigt die Randbedingungen an der kreisförmigen Begrenzungsfläche und die Gleichgewichtsbedingungen an den Schnitten $x=0$ und $y=0$; jedoch erfüllt sie die Randbedingungen an den beiden anderen Rändern nicht, nämlich verschwinden die Normal- und Schubspannungen X_x und Y_x für $x=a$, Y_y und X_y für $y=a$ nicht.

Hiernach muss man zur Erfüllung dieser Randbedingungen für $x=a$ und $y=a$ an diesen beiden Rändern eine Belastung anbringen, die gleich aber entgegengesetzt ist den dort sich ergebenden Normal- und Schubspannungen. Aber da diese Belastung sich im Gleichgewicht befinden soll und sehr klein gegen die dort in der Richtung der Rändern wirkenden Spannungen ist, so kann man von dem in sich das Saint-Venantsche Prinzip schliessenden Satz, dass die Art der Verteilung lokal angreifender Kräfte nur zu lokalen Störungen Anlass gibt, Gebrauch machen und die oben genannten Korrektur-Rechnung verzichten, was für eine Näherungstheorie vollständig genügt.

Schliesslich darf nicht unerwähnt bleiben, dass in strenger Form sich die vollständige Lösung auf dem hier eingeschlagenen Weg überhaupt nicht geben lässt; aber wenn der Halbmesser der Ausrundung hinreichend klein gegen anderen Abmessungen ist, so können wir hoffen, dass unsere Lösung ein hinreichend genaue Ergebnis liefern wird, während bei Stab-Ecken mit grösserem Verhältniss von $r_0 : a$ die Spannungsverteilung längs des Schnittes AB oder CD nahezu geradelinig ist, sodass man die maximale Spannung ohne wesentlichen Fehler einfach nach dem gewöhnlichen geradelinigen Gesetz berechnen kann.

Tafel III.



930-2