

参 考 資 料

土木學會誌 第十五卷第十一號 昭和四年十一月

無限に長い帶狀板の應力

(Stress System in an Infinite Strip. R. C. J. Howland. Proceedings of the Royal Society. Vol. 124, No. 793, May 1929)

幅の狭い深さの相當にある長い桁を無限に長い帶狀板と考へて generalized plane stress として解くことは London の Prof. Filon が始めてから多くの人々によつて行はれてゐて、桁の上面に横に荷重を受けた場合の問題は殆んど凡て解かれたといつてよいが著者は此の論文で、更に一般的なる解法を示してゐる。ことに桁の上面でなく如何なる點（例へば中心軸の上）に外力が働いてもよい様な場合を研究してゐる。この後者は實用價は少ないかも知れないが桁の中心軸へ集中荷重を横にかけた場合の應力分布は性質上 common theory の場合に非常に近いといふことを證明した點など面白い點が尠くない。

帶狀板を  $x, y$  を坐標軸とする面で表はして Airy の Stress-function  $\nabla^4 \chi = 0$  を用ひてゐる。従つて應力は

$$\widehat{xx} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}, \quad \widehat{yy} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}, \quad \widehat{xy} = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y},$$

邊緣條件を満足させる爲に

$$\chi = \sum_{r=1}^8 \chi_r \dots \dots \dots (1)$$

として  $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_8$  の 8 個の應力函數を作つてこれを組み合せる。  
即ち

$\chi_r$	$y = b$ (上面)		$y = -b$ (下面)	
	$\widehat{yy}$	$\widehat{xy}$	$\widehat{yy}$	$\widehat{xy}$
$\chi_1$	$\phi_1(x)$	0	$\phi_1(x)$	0
$\chi_2$	0	$\psi_2(x)$	0	$-\psi_2(x)$
$\chi_3$	$\phi_3(x)$	0	$-\phi_3(x)$	0
$\chi_4$	0	$\psi_4(x)$	0	$\psi_4(x)$
$\chi_5$	$\phi_5(x)$	0	$\phi_5(x)$	0
$\chi_6$	0	$\psi_6(x)$	0	$-\psi_6(x)$
$\chi_7$	$\phi_7(x)$	0	$-\phi_7(x)$	0
$\chi_8$	0	$\psi_8(x)$	0	$\psi_8(x)$

此れ等の  $\chi_r$  は凡て下式の如く Fourier 積分で表はしてある。

$$\chi_1 = \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \frac{my \operatorname{sh} mb \operatorname{sh} my - (\operatorname{sh} mb + mb \operatorname{ch} mb) \operatorname{ch} my}{m^2(\operatorname{sh} 2mb + 2mb)} \cos mx dm$$

$$\times \int_0^\infty \phi_1(x) \cos mu du \dots \dots \dots (2)$$

$$\chi_2 = \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \frac{y \operatorname{ch} mb \operatorname{sh} my - b \operatorname{sh} mb \operatorname{ch} my}{m(\operatorname{sh} 2mb + 2mb)} \cos mx dm \int_0^\infty \psi_2(u) \sin mu du$$

$$\dots \dots \dots (3)$$

$$\chi_3 = \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \frac{my \operatorname{ch} mb \operatorname{ch} my - (\operatorname{ch} mb + mb \operatorname{sh} mb) \operatorname{sh} my}{m^2(\operatorname{sh} 2mb - 2mb)} \cos mx dx$$

$$\times \int_0^\infty \phi_3(u) \cos mu du \dots \dots \dots (4)$$

$$\chi_4 = \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \frac{y \operatorname{sh} mb \operatorname{ch} my - b \operatorname{ch} mb \operatorname{sh} my}{m(\operatorname{sh} 2mb - 2mb)} \cos mx dx \int_0^\infty \psi_4(u) \sin mu du$$

$$\dots \dots \dots (5)$$

$$\chi_5 = \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \frac{my \operatorname{sh} mb \operatorname{sh} my - (\operatorname{sh} mb + mb \operatorname{ch} mb) \operatorname{ch} my}{m^2(\operatorname{sh} 2mb + 2mb)} \sin mx dm$$

$$\times \int_0^\infty \phi_5(u) \sin mu du \dots \dots \dots (6)$$

$$\chi_6 = \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \frac{b \operatorname{sh} mb \operatorname{ch} my - y \operatorname{ch} mb \operatorname{sh} my}{m(\operatorname{sh} 2mb + 2mb)} \sin mx dm \int_0^\infty \psi_6(u) \cos mu du$$

$$\dots \dots \dots (7)$$

$$\chi_7 = \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \frac{my \operatorname{ch} mb \operatorname{ch} my - (\operatorname{ch} mb + mb \operatorname{ch} mb) \operatorname{sh} my}{m^2(\operatorname{sh} 2mb - 2mb)} \sin mx dm$$

$$\times \int_0^\infty \phi_7(u) \sin mu du$$

$$\chi_8 = \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \frac{b \operatorname{ch} mb \operatorname{sh} my - y \operatorname{sh} mb \operatorname{ch} my}{m(\operatorname{sh} 2mb - 2mb)} \sin mx dm \int_0^\infty \psi_8(u) \cos mu du$$

$$\dots \dots \dots (9)$$

$$\left. \begin{aligned} y=b & \text{ ㊦ } \widehat{yy} = \alpha(x), \widehat{xy} = \beta(x) \\ y=-1 & \text{ ㊦ } \widehat{yy} = \gamma(x), \widehat{xy} = \delta(x) \end{aligned} \right\}$$

となる。任意の外力が上下面に働く場合の  $\chi$  を求めるには上式に於て

$$\phi_1(x) = \frac{1}{4} \{ \alpha(x) + \alpha(-x) + \gamma(x) + \gamma(-x) \} \dots \dots \dots (10)$$

$$\psi_2(x) = \frac{1}{4} \{ \beta(x) - \beta(-x) - \delta(x) + \delta(-x) \} \dots \dots \dots (11)$$

$$\phi_3(x) = \frac{1}{4} \{ \alpha(x) + \alpha(-x) - \gamma(x) - \gamma(-x) \} \dots\dots\dots(12)$$

$$\psi_4(x) = \frac{1}{4} \{ \beta(x) - \beta(-x) + \delta(x) - \delta(-x) \} \dots\dots\dots(13)$$

$$\phi_5(x) = \frac{1}{4} \{ \alpha(x) - \alpha(-x) + \gamma(x) - \gamma(-x) \} \dots\dots\dots(14)$$

$$\psi_6(x) = \frac{1}{4} \{ \beta(x) + \beta(-x) - \delta(x) - \delta(-x) \} \dots\dots\dots(15)$$

$$\phi_7(x) = \frac{1}{4} \{ \alpha(x) - \alpha(-x) - \gamma(x) + \gamma(-x) \} \dots\dots\dots(16)$$

$$\psi_8(x) = \frac{1}{4} \{ \beta(x) + \beta(-x) + \delta(x) + \delta(-x) \} \dots\dots\dots(17)$$

と置けば

$$\chi = \sum_{r=1}^8 \chi_r \dots\dots\dots(18)$$

によつて邊縁條件は完全に満足される。

桁の内部に於て外力の働く場合には四方に無限に擴がれる板の一點に外力の働く場合の應力

函数  $\chi_0$  (此れは通常教科書に出てゐる) と前述の  $\chi_r$  とを併せて用ひ  $y = \pm b$  に沿つて

$\chi_0$  の爲に生ずる  $\widehat{yy}$  及  $\widehat{xy}$  を打ち消せばよい。  $\sum_{r=1}^8 \chi_r$  によつて  $y = \pm b$  上にある如何なる  $\widehat{yy}$ ,  $\widehat{xy}$  の値をも満足すべきによりこの打ち消しは常に可能なるわけである。此の論文には帯状板の中心軸上でこの軸に沿つて一個の集中荷重の働ける場合及この軸に直角の方向に一個の集中荷重の働いた場合を例示し解論してある。今こゝには後者の場合(第一圖)

を抄録して見ると

$$\chi = \chi_0 + \chi_3 + \chi_4$$

こゝで

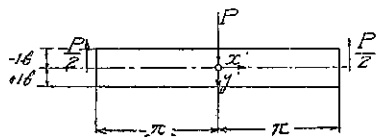
$$\chi_0 = \frac{Pb}{4\pi} \left[ 2x'\theta + \frac{1-2\sigma}{1-\sigma} y' \log \gamma' \right] \dots\dots\dots(19)$$

但

$$x' = \frac{x}{b}, \quad y' = \frac{y}{b}, \quad \gamma' = \sqrt{x'^2 + y'^2}$$

$$\theta = tg^{-1} \frac{y'}{x'}, \quad \sigma = \text{Poisson 比}$$

第一圖



$\chi_3, \chi_4$  は前述の (4) (5) 式で  $\chi_0$  より起る  $y = \pm b$  上の  $\widehat{y}, \widehat{x}$  を打ち消すときは下の形となる。

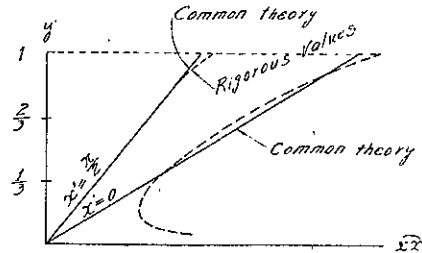
$$\chi_3 = \frac{Pb}{2\pi(1-\sigma)} \int_0^\infty \left\{ \frac{uy' \operatorname{ch} u \operatorname{ch} my' - (\operatorname{ch} u + u \operatorname{sh} u) \operatorname{sh} my'}{u^2(\operatorname{sh} 2u - 2u)} \cos ux' - \frac{y'(y'^2 - 3)}{4u^2} \right\} \{2(1-\sigma) + u\} e^{-u} du \dots \dots \dots (20)$$

$$\chi_4 = \frac{Pb}{2\pi(1-\sigma)} \int_0^\infty \left\{ \frac{y' \operatorname{sh} u \operatorname{ch} my' - \operatorname{ch} u \operatorname{sh} my'}{u(\operatorname{sh} 2u - 2u)} \cos ux' - \frac{y'(y'^2 - 1)}{4u} \right\} \times \{(1-2\sigma) + u\} e^{-u} du \dots \dots \dots (21)$$

但  $u = mb$

此れ等の値を評價 (evaluate) して  $\widehat{x}$  を common theory と比較し圖示すると 第二圖 の如くなる。此の圖では數量的の大きさを詳細に知ること は出來ざるも  $x' = \frac{\pi}{2}$  の處では common theory と可なりに接近してゐる  $x' = 0$  即ち外力の懸れる處でも  $y' = \frac{1}{3}$  より大なる處ではほぼ common theory が使へると言つても差支ない。

第二圖



(山口 昇 抄譯)