論說報告

土木學會誌 第十五卷第十號 昭和四年十月

楕圓函數による捩角壔の研究

會員 工學士 久野重一郎

Torsional Stress in Some Twisted Prisms Solved by the Elliptic Functions

By Jiuichiro Kuno, C.E., Member.

內容梗概

本文は，矩形壔及三角壔が捩れし場合の應力を，楕圓函數によつて，解いたものである。

目次

第一章 一般理論

1. 捩應力及周の條件

等方性角壔の一端が固定，他端へ捩力率作用し，壔單位長につき角 γ 捩れしとす。固定橫斷面を x,y 坐標面にとり，直交 3 坐標軸に平行な分變位を

$$u_1=-\gamma yz,\quad u_2=\gamma xz,\quad u_3=\gamma\varphi(x,y)$$

と假定すれば

$$\sigma_x=\sigma_y=\sigma_z=\tau_z=0,$$

$$\tau_x=G\gamma\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+x\right),\quad \tau_y=G\gamma\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-y\right),$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0.$$

應力狀態は橫斷面の位置に關しない，よつて z 方向は，以後考へず，文字 z は他に使用す。

$\varphi(x,y)$ と共軛な函數 $\psi(x,y)$ をとれば，斷面の內部に於て，

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0 \qquad \text{(內部の條件)},$$

斷面の周に於て（C は常數）

$$\psi-\frac{1}{2}(x^2+y^2)=C \qquad \text{(周の條件と)}.$$

φ と ψ は，Cauchy-Riemann 方程式を介して結ばれる。いま $(\varphi+i\psi)$ を數平面上にとり，更に $z=x+iy$, $w=s+it$ を考へて，

$$p+iq=\frac{d(\varphi+i\psi)}{dz}, \qquad w=\frac{d(p+iq)}{dz}$$

とすれば，

$$\tau_x=G\gamma(x-q), \qquad \tau_y=G\gamma(p-y).$$

橫斷面の第 r 邊（番號は，正方向卽ち面分を左手に見てすゝむ）の微長を dL とし，周の條件を L にて 2 度微分すれば，

$$\frac{d^2\psi}{dL^2}=1.$$

然るに

$$\frac{d^2\psi}{dL^2}=\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{dL}\right)^2+2\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}\frac{dx}{dL}\frac{dy}{dL}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dL}\right)^2$$
$$+\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{d^2x}{dL^2}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{d^2y}{dL^2}$$

該邊が x 軸となす角を θ_r（正實軸の上側より正方向に廻り第 r 邊の外側に及ぶ，卽ち測角路は多角形外部に描く）とすれば，

$$\frac{dx}{dL}=\cos\theta_r, \quad \frac{dy}{dL}=\sin\theta_r, \quad \frac{d^2x}{dL^2}=\frac{d^2y}{dL^2}=0.$$

よつて，周の條件は，

$$S\sin 2\theta_r+t\cos 2\theta_r=1.$$

本直線は，w 原點を中心とする單位圓に接し，實軸 S に對し $(-2\theta_r)$ 傾く。斷面の 1 邊每に，w 直線 1 本對應し，n 邊 z 多角形（斷面多角形）に對して，n 邊 w 多角形（條件多角形）成立す。z 第 r 頂點の內角は（該頂點を中心として正方向に測角す）

$$\alpha_r\pi=\pi+\theta_r-\theta_{r+1},$$

これに對應する w 第 r 頂點の內角は

$$\alpha'_r\pi=(1+2m_r-2\alpha_r)\,\pi,$$

m は正の整數（零を含む）である。w 邊が，z 邊の 2 倍づゝ廻轉する結果として，w 圖形の表示は，一般に，2 葉若しくはそれ以上の Riemann 面を必要とす。

2. 等角寫像

z 圖形の第 n 頂點を原點に，第 n 邊（第 $n-1$ 頂點より第 n 頂點に至る）を實軸にとれば，

$$\theta_n=2\pi.$$

こゝに於て Schwarz の變換

$$z=C\int_\infty^\xi\frac{d\xi}{\Pi(\xi-\xi_r)^{1-\alpha_r}}$$

$(\xi_1<\xi_2<\ldots.<\xi_{n-1}$, 連乘は $r=1$ より $n-1$ まで$)$

は，多角形內部を ξ 上半面へ等角寫像し，z 周を ξ 實軸へ（z 第 r 頂點を實値 ξ_r へ），z 原點を ξ 無限大へ對應せしめる。

次に z 周邊の寫像上へ，條件多角形の對應邊を，順序正しく重ねあはせるため，Schwarz 變換式を少しく變形し，

$$w=\int\frac{C_1F(\xi)\,d\xi}{\Pi(\xi-\xi_r)^{2\alpha_r-2m_r}}+C_2,$$

（連乘は $r=1$ より $n-1$ まで）

につきて寫像性を吟味す。$F(\xi)$ は ξ の有理整函數であつて，w 圖形が Riemann 面上に存することに備へるため，假りに添へたものである。

いま，z 第 h 邊の寫像 $(\xi_{h-1}\sim\xi_h)$ 上へ w 第 h 邊を重ねあはせ得たとし，ξ をそのうへに考へれば $r=h\sim(n-1)$ については

$$(\xi-\xi_r)^{2\alpha_r}=\{|\xi-\xi_r|e^{\pi i}\}^{2\alpha_r}$$

これら因子中の e 以外の部分及 m を指數とするものを綜合して R（實函數）と置けば，w 式の分母は

$$\prod_{r=h}^{n-1}(\xi-\xi_r)^{2\alpha_r-2m_r}=R\prod_{r=h}^{n-1}e^{2\pi i\alpha_r}.$$

然るに z 第 r 頂點では

$$\pi-\pi\alpha_r=\theta_{r+1}-\theta_r,$$

$r=h\sim n$ に對するこの關係式を邊々加へれば

$$(n-h)\pi-\sum_{r=h}^{n-1}\pi\alpha_r=\theta_n-\theta_h$$
$$=2\pi-\theta_h,$$

よつて

$$\prod_{r=h}^{n-1}e^{2\pi i\alpha_r}=e^{2i\theta_h}.$$

故に w 式は

$$\frac{dw}{d\xi}\cdot e^{2i\theta_h}=\frac{F(\xi)}{R} \qquad \text{(a)}$$

一方に於て，w 第 h 邊そのものは，

$$S\sin 2\theta_h+t\cos 2\theta_h=1,$$

J をもつて虚部を意味するものとせば，上式は

$$J\{we^{2i\theta_h}\}=i,$$

従て

$$J\left\{\frac{dw}{d\xi}e^{2i\theta_h}\right\}=0.$$

(a) がこれに牴觸しないならば，w 式は目的の寫像を遂行す。そのためには，(a) に於て $F(\xi)$ が實係數の函數でなければならぬ。よつて，簡單のため，指數 m を有する實係數の部分を，これに併合すれば，

$$w=C_1\int F(\xi)\prod_{r=1}^{n-1}(\xi-\xi_r)^{-2\alpha_r}d\xi+C_2,$$

$F(\xi)$ は，依然，ξ の有理整函數であつて，いま，N 次とす。

次に捩應力による，壔單位長の Strain energy は，

$$E=\frac{1}{2G}\int\!\!\int(\tau_x^2+\tau_y^2)\,dxdy=\frac{1}{2}G\gamma^2\{(y-p)^2+(x-q)^2\}\,dx\,dy$$

この値，及その一部 $\int\!\!\int(p^2+q^2)\,dx\,dy$ は，ともに，常に有限の筈である，よつて $(p+iq)$ は，z 及 ξ 面分上に極をもち得ない。しかして

$$p+iq=\int w\,dz+C=\int w\frac{dz}{d\xi}d\xi+C$$
$$=C'\int\!\!\int\xi^N\prod_{r=1}^{n-1}(\xi-\xi_r)^{-\alpha_r-1}d\xi\,d\xi+\cdots\cdots$$

いま第 n 邊上にある動點 z が，第 n 頂點へ限りなく接近せし場合を考へれば，

$$\prod_{r=1}^{n-1}(\xi-\xi_r)^{\alpha_r+1}=\sim\prod_{r=1}^{n-1}\xi^{\alpha_r+1}=\xi^m,$$

$$m=\sum_{r=1}^{n-1}(\alpha_r+1)=2n-3-\alpha_n,$$

故に

$$p+iq=\sim C''\xi^{N-2n+5+\alpha_n}+\cdots\cdots$$

これが，z 原點に於て，有限であるためには，

$$N-2n+5+\alpha_n<0.$$

よつて，第 n 頂點の張る內角が，π を越えない場合には，

$$N\lesseqgtr 2n-6,$$

該內角が π を越える場合には，

$$N\lesseqgtr 2n-7.$$

適當に z 原點を選べば，前者を以て一般を覆ひ得。

捩力をうくる角壔の問題は，こゝに至つて，次の如く解決す。

$$\left.\begin{aligned}z&=C_1\int_\infty^\xi\prod_{r=1}^{n-1}(\xi-\xi_r)^{\alpha_r-1}d\xi,\\ w&=C_2\int_\infty^\xi F(\xi)\prod_{r=1}^{n-1}(\xi-\xi_r)^{-2\alpha_r}d\xi+C_3,\\ F(\xi)&=c_0+c_1\xi+c_2\xi^2+\cdots\cdots+c_{2n-6}\xi^{2n-6}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\left.\begin{aligned}p+iq&=\int w\,dz+C_4,\\ \tau_x&=G\gamma(x-q),\quad \tau_y=G\gamma(p-y).\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

問題を解くには，まづ (1) の 2 積分を遂行し，常數を問題に合ふやうに決定する，次に z 式と w 式から，ξ を消去し，w を z の函數として (2) の第 1 式へ入れる，そして積分を行ひ，$p+iq$ を求める，その虛實を分離して (2) の後式へ代入すれば，直に應力が得られる。全行程がすべて機械的である。

(2) は如何なる場合にも變りないが，(1) は z, ξ の對應如何によつて，內容の變るべき性質のものである。もし壔横斷面の邊上の 1 點を z 原點に選び，それを ξ 無限大へ對應せしめた場合には（原點のある邊を z 實軸にとることは前に同じとす），(1) に換へるに，次の (3) を以てせねばならぬ，證明は前と同樣にされる。もしまた，z 原點を ξ 原點へ寫像した場合には，積分下限を零に置く。

$$z=C_1\int_\infty^\xi\prod_{r=1}^{n}(\xi-\xi_r)^{\alpha_r-1}d\xi+C,$$

$$\left.\begin{aligned} w &= C_2\int_{\infty}^{\xi} F(\xi)\prod_{r=1}^{n}(\xi-\xi_r)^{-2\alpha_r}\,d\xi + C_3,\\ F(\xi) &= c_0 + c_1\xi + c_2\xi^2 + \cdots\cdots + c_{2n-5}\,\xi^{2n-5}. \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

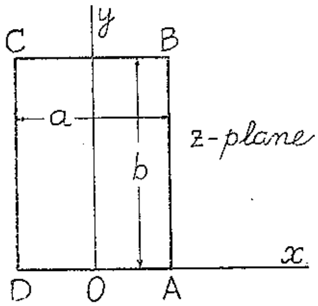
第二章 矩形壔

1. 矩形斷面を半平面へ寫像

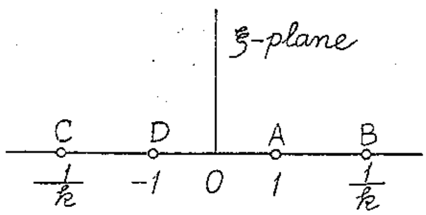
矩形 $ABCD$ を横斷面とする直壔が，捩力率をうけて捩れし場合を考へる。短邊 DA（長さ a）の方向を，數平面 z の實軸にとり，DA の中點を z 原點に選び，矩形は虚軸の正側に置く（第一圖）。長邊の長さを b，邊比を μ とす。

$$\mu=\frac{b}{a}, \qquad 1 \leqq \mu < \infty.$$

第一圖



第二圖



z 斷面の周を ξ 實軸へ，またその内部を ξ 上半面へ等角寫像するにあたり，k を Jacobi 楕圓函數の母數とし，點對應を

z 平面	原點	$A\left(\frac{1}{2}a\right)$	$B\left(\frac{1}{2}a+ib\right)$	$C\left(-\frac{1}{2}a+ib\right)$	$D\left(-\frac{1}{2}a\right)$
ξ 平面	原點	$A\ (1)$	$B\ (1/k)$	$C\ (-1/k)$	$D\ (-1)$

と定めれば（第二圖），前章（3）に於て $C=0$。この場合，z 内角については，

$$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=\frac{1}{2}.$$

故に前章（3）の第 1 式は，

$$z=C_1k\int_0^{\xi}\{(1-\xi^2)(1-k^2\xi)\}^{-\frac{1}{2}}\,d\xi,$$

從て

$$\xi=\mathrm{sn}\left(\frac{z}{C_1k}\right).$$

こゝに sn は Jacobi の楕圓函數であつて，基本週期 $4K$, $2iK'$ を有す。常數を決定するため，まづ A 點の對應を考へれば，

$$\frac{1}{2}\frac{a}{C_1k}=K,$$

故に

$$\frac{1}{C_1k}=\frac{2K}{a},$$

よつて

$$\xi=\mathrm{sn}\frac{2Kz}{a}.\qquad\qquad(1)$$

次に B 點の對應を考へれば，

$$\frac{2K}{a}\left(\frac{1}{2}a+ib\right)=K+iK',$$

故に

$$\frac{K'}{K}=2\mu.\qquad\qquad(2)$$

よつて Jacobi の常數は，（前章 (2) の q とは別物である）

$$q=e^{-2\mu\pi}\qquad\qquad(3)$$

種々の μ に對して q を計算すれば，第一表の如くである。

第一表 A

μ	q	q^2	q^3
1.0	0.00186 74427	0.0^{5} 3487	0.0^{8} 65
1.5	0.00008 06995	0.0^{8} 6512	0.0^{12} 53
2.0	0.00000 34873	0.0^{10} 1216	0.0^{16} 42
2.5	0.00000 01507	0.0^{13} 2271	0.0^{20} 34
3.0	0.00000 00065	0.0^{16} 4241	0.0^{24} 28

第一表 B

μ	q	μ	q
1.0	0.00187	1.5	0.00008
1.1	0.00099	1.6	0.00004
1.2	0.00053	1.7	0.00002

1.3	0.00028	1.8	0.00001
1.4	0.00015	1.9	0.00000

小數第 4 位まで有效數字を必要とする程度の計算に於ては，q の 2 乘及それ以上を完全に閑却し得ることがわかる。また大約 $\mu>2$ に對しては q を省略しても，小數第 4 位へその影響が及ばない。故に正方形に極めて近い場合に 0.5% 以下の誤差あるべきを覺悟すれば，q をも常に省略することが出來る。

いま K と k を，まづ Theta 函數 (Jacobi の Small Theta-functionの意，以下同樣) にて表はし，然る後無限總和形に展開して，上の省略を行へば，

$$\left.\begin{aligned} K&=\frac{\pi}{2}(1+4q), \\ k&=4q^{1/4}(1-4q). \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(4)$$

これより

$$\left.\begin{aligned} K'&=2\mu K, \\ k'&=\sqrt{1-k^2}. \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(5)$$

2. 條件多角形の半平面寫像

壔橫斷面の矩形へ對應する條件多角形の 4 邊は，

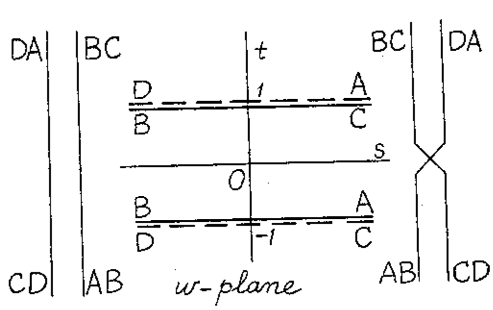
邊	$-2\theta_r$	邊の方程式
AB	$-\pi$	$t=-1$
BC	-2π	$t=1$
CD	-3π	$t=-1$
DA	-4π	$t=1$

故に w 多角形は，實軸を中心として 2 なる幅を有する無限帶狀域となり，2 葉の Riemann 面上に表示せらる (第三圖)。この內部を ξ 上半面 (第二圖) へ等角寫像する函數は，前章 (3) にもとづき

$$w=C_2\int_0^{\xi}\frac{F(\xi)\,d\xi}{(\xi^2-1)(\xi^2-k^{-2})}+C_3,$$

$$F(\xi)=c_0+c_1\xi+c_2\xi^2+c_3\xi^3.$$

第三圖



被積分函數を部分分數に分割し，然る後積分を行へば，次式を得。

$$w=C_3-\frac{1}{2}C_2\left(\frac{k}{k'}\right)^2\left[c_1\log\frac{\xi^2-1}{\xi^2-k^{-2}}+(c_0+c_2)\log\frac{\xi-1}{\xi+1}\right.$$

$$+(c_0k+c_2k^{-1})\log\frac{\xi+k^{-1}}{\xi-k^{-1}}$$

$$+c_3\{\log(\xi^2-1)-k^{-2}\log(\xi^2-k^{-2})\}\Big].$$

こゝに log は，函數論上の對數函數を意味す，ξ の變域が上半面に限られ居るから，log は，無限多價の性質は發揮しない。而して ξ が實軸上を動くとき，w 圖形の條件として，

$$\left.\begin{array}{r}\xi<-1/k\\-1<\xi<1\\1/k<\xi\end{array}\right\}\text{ に對し }\qquad w=s+i,$$

$$\left.\begin{array}{r}-1/k<\xi<-1\\1<\xi<1/k\end{array}\right\}\text{ に對し }\qquad w=s-i$$

なるを要す。よつて常數を次の如く定めれば，目的に合す。

$$C_2=\frac{4}{\pi},\qquad C_3=i,$$

$$c_0=0,\qquad c_1=\left(\frac{k'}{k}\right)^2,$$

$$c_2=0,\qquad c_3=0.$$

從て

$$w=i-\frac{2}{\pi}\log\frac{1-\xi^2}{k^{-2}-\xi^2}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

これによつて，w 帶域は，ξ 上半面へ一對一，等角的，連續的に寫像せられる。

3. 應 力 式

運算を遂行するに當り，前節の値を Weierstrass 系の楕圓函數に變換す。まづ點對應を

Jacobi 系	$-\frac{1}{k}$	-1	1	$\frac{1}{k}$
Weierstrass 系	∞	e_3	e_2	e_1

に變へ，且つ新函數の基本週期を

$$2\omega_1=2K,\qquad 2\omega_3=2iK'$$

に定めて，その比を

$$\frac{\omega_3}{\omega_1}=\frac{iK'}{K}=i2\mu$$

に保てば，

$$\omega_1\sqrt{e_1-e_3}=K$$

より

$$\sqrt{e_1-e_3}=1.$$

次に個々の e 及 ζ 函數の常數を計算するにあたり，q に關する省略を行へば，

$$e_1=-\frac{\eta_1}{\omega_1}+\left(\frac{\pi}{w_1}\right)^2\left\{\frac{1}{4}+2\sum_{n=1}^{\infty}q^{2n}(1+q^{2n})^{-2}\right\}$$

$$=\frac{2}{3}(1-8q),$$

$$e_2=-\frac{\eta_1}{\omega_1}+2\left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^2\sum_{n=1}^{\infty}\{q^{2n-1}(1+q^{2n-1})^{-2}\}$$

$$=-\frac{1}{3}(1-32\,q),$$

$$e_3=-\frac{\eta_1}{\omega_1}-2\left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^2\sum_{n=1}^{\infty}\{q^{2n-1}(1+q^{2n-1})^2\}$$

$$=-\frac{1}{3}(1+16\,q),$$

$$\eta_1=\frac{\pi^2}{\omega_1}\left\{\frac{1}{12}-2\sum_{n=1}^{\infty}nq^{2n}(1-q^{2n})^{-1}\right\}$$

$$=\frac{1}{6}\pi(1-4\,q).$$

これらの e は，その基本的條件

$$e_1+e_2+e_3=0$$

に背かない。また η の殘りのものは，Legendre の關係式

$$\eta_1\omega_3-\eta_3\,\omega_1=\frac{1}{2}\pi\,i,$$

$$\eta_3\omega_2-\eta_2\,\omega_3=\frac{1}{2}\pi\,i$$

より

$$\eta_2=-(1-4\,q)\left(\frac{1}{6}\pi+\frac{1}{3}\mu\pi i-i\right),$$

$$\eta_3=i\,(1-4\,q)\left(\frac{1}{3}\mu\pi-1\right).$$

更に Weierstrass の常數 g については

$$g_2=\left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^4\left\{\frac{1}{12}+20\sum_{n=1}^{\infty}n^3q^{2n}(1-q^{2n})^{-1}\right\}$$

$$=\frac{4}{3}(1-16\,q),$$

$$g_3=\left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^6\left\{\frac{1}{216}-\frac{7}{3}\sum_{n=1}^{\infty}n^5q^{2n}(1-q^{2n})^{-1}\right\}$$

$$=\frac{8}{27}(1-24\,q).$$

尚これらの値に誤なきや否やを検するため，別の方面より計算を行へば，(式中の θ は Theta 函數を表はす)

$$e_1=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2[\theta_3^4(0)+\theta_0^4(0)]=\frac{2}{3}(1-8\,q),$$

$$e_2=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2[\theta_2^4(0)-\theta_0^4(0)]=-\frac{1}{3}(1-32\,q),$$

$$e_3=-\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2[\theta_2^4(0)+\theta_3^4(0)]=-\frac{1}{3}(1+16\,q),$$

$$g_2=2\,(e_1^2+e_2^2+e_3^2)=\frac{4}{3}(1-16\,q),$$

$$g_3=4\,e_1\,e_2\,e_3=\frac{8}{27}(1-24\,q).$$

いづれも先きの値に一致す。

さて問題に戻り，z 矩形の寫像上へ，w 帯域を重ねた場合，(1) と (6) より ξ を消去すれば，

$$\left.\begin{aligned}w&=i-\frac{4}{\pi}\log(k\,\mathrm{cd}\,u),\\ u&=2Kz/a\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

こゝに $\mathrm{cd}\,u$ は Glaisher の記法による Jacobi 函數の一つである。Weierstrass の σ 函數を用ひて，これを書直せば，

$$\sqrt{e_1-e_3}=1$$

なるを以て

$$\mathrm{cd}\,u=\frac{\sigma_1 u}{\sigma_2 u}=e^{(\eta_1-\eta_2)u}\frac{\sigma\omega_2}{\sigma\omega_1}\;\frac{\sigma(u-\omega_1)}{\sigma(u-\omega_2)}$$

然るに

$$\sigma\omega_1=\frac{2\omega_1}{\pi}e^{\eta_1\omega_1/2}\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n})^2(1-q^{2n})^{-2}$$

$$=\frac{2K}{\pi}e^{\eta_1\omega_1/2},$$

$$\sigma\omega_2=-\sqrt{i}\,\frac{\omega_1}{\pi}e^{\eta_2\omega_2/2}q^{-1/4}\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1})^2(1-q^{2n})^{-2}$$

$$=\frac{K}{\pi}e^{5\pi i/4}e^{\eta_2\omega_2/2}(1+q)\,q^{-1/4}.$$

故に (7) は

$$w=A_1+A_2u+\frac{4}{\pi}\log\frac{\sigma u_2}{\sigma u_1} \qquad (8)$$

但し

$$A_1=i-\frac{4}{\pi}\log k\frac{\sigma\omega_2}{\sigma\omega_1}$$

$$=\frac{4}{\pi}\log 2-\frac{2}{3}\mu\pi(\mu-i)-2\mu-3i,$$

$$A_2=-\frac{4}{\pi}(\eta_1-\eta_2)$$

$$=-\frac{4}{3}(1-4q)\left(1+\mu i-\frac{1}{\pi}3i\right),$$

$$u_1=u-\omega_1=\frac{2Kz}{a}-K,$$

$$u_2=u-\omega_2=\frac{2Kz}{a}+K+iK'.$$

而して

$$du=du_1=du_2=\frac{2K}{a}dz,$$

故に

$$dz=\frac{a}{2K}du=\frac{a}{2K}du_1=\frac{a}{2K}du_2.$$

よつて w を z につきて積分すれば，

$$p+iq=\int w\,dz+C_4$$

$$=A_1\int dz+\frac{a}{2K}A_2\int u\,du$$

$$+\frac{4}{\pi}\ \frac{a}{2K}\Big[\int\log\sigma u_2\,du_2-\int\log\sigma u_1\,du_1\Big]+C_4\ \cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

上式左邊の q は，第一章 (2) に示すものであつて，Jacobi の常數ではない。しかして

$$\log\sigma v=\log v+\int_0^v\left\{\zeta v-\frac{1}{v}\right\}dv$$

$$=\log v-\frac{1}{240}g_2v^4-\frac{1}{840}g_3v^6-\frac{1}{67\,200}g_2^2v^8$$

$$-\frac{1}{184\,800}g_2g_3\,v^{10}-\cdots\cdots$$

いま

$$F(v)=\int_0^v\log\sigma v\,dv$$

$$=v\log v-v-\frac{1}{1\,200}g_2v^5-\frac{1}{5\,880}g_3v^7$$

$$-\frac{1}{604\,800}g_2^2v^9-\frac{1}{2\,032\,800}g_2g_3\,v^{11}-\cdots\cdots$$

と置く。(9) の積分限界は 0 より z に至る，然るに $z=0$ は

$$u=0,\quad u_1=-K,\quad u_2=K+iK'$$

に對應するを以て，

$$\int_0^z\log\sigma u_1\,dz=\frac{a}{2K}\int_{-K}^{u_1}\log\sigma u_1\,du_1$$

$$=\frac{a}{2K}\,[F(u_1)-F(-K)],$$

$$\int_0^z\log\sigma u_2dz=\frac{a}{2K}\,[F(u_2)-F(K+iK')].$$

故に (9) は

$$p+iq=C_4+A_1z+\frac{1}{4}\frac{a}{K}A_2u^2$$

$$+\frac{4}{\pi}\frac{a}{2K}[F(u_2)-F(u_1)+F(-K)-F(K+iK')]\ \cdot\cdot(10)$$

應力は，斷面の中心に於て零でなければならぬから，

$$z=\frac{1}{2}bi \quad \text{に於て} \quad p=\frac{1}{2}b, \quad q=0,$$

$$u=\mu iK, \quad u_1=(\mu i-1)K, \quad u_2=(1+3\mu i)K.$$

この値に對して (10) の右邊は $\frac{1}{2}b$ に等しくなければならぬ，これによつて常數 C_4 が決定す。よつて右邊の虚實を分離して前章 (2) の後式へ代入すれば，應力の一般式を得。實際に數値を求むる場合には

$$u_1=r_1 e^{i\theta_1}, \quad u_2=r_2 e^{i\theta_2}$$

と置きて計算するを便とす。

また μ の大なる値に對しては，(7) を次の如く變形することが出來る。まづ (7) に於て

$$u=\sqrt{e_1-e_3}\,u', \quad \frac{u'}{2\omega_1}=v$$

と置けば，

$$u=\frac{2Kz}{a}, \quad \sqrt{e_1-e_3}=1, \quad 2\omega_1=2K$$

なるを以て

$$v=\frac{z}{a}.$$

しかるに

$$\mathrm{cn}\,u=\sqrt{\frac{k'}{k}}\frac{\theta_2 v}{\theta_3 v},$$

$$\mathrm{dn}\,u=\sqrt{k'}\,\frac{\theta_3 v}{\theta_0 v},$$

$$\theta_2 v=2q^{\frac{1}{4}}\cos\pi v\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})\prod_{n=1}^{\infty}(1+2q^{2n}\cos 2\pi v+q^{4n}),$$

$$\theta_3 v=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})\prod_{n=1}^{\infty}(1+2q^{2n-1}\cos\pi v+q^{4n-2}).$$

故に

$$k\,\mathrm{cd}\,u=2\,k^{\frac{1}{2}}\,q^{\frac{1}{4}}\cos\pi v.$$

よつて

$$A=i-\frac{4}{\pi}\log 2k^{1/2}q^{1/4}=3\mu+i-\frac{8}{\pi}\log 2,$$

$$X=\frac{2iv}{2n-1}=\frac{1}{a}\frac{2iz}{2n-1},$$

$$dX=\frac{2i}{2n-1}dv=\frac{1}{a}\frac{2i}{2n-1}dz$$

と置けば，(7) は

$$w=A-\frac{4}{\pi}\log\prod_{n=1}^{\infty}(1+X^2)$$

$$=A-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\log(1+X^2),$$

從て

$$p+iq=C_4+\int_0^z w\,dz$$

$$=C_4+Az+2ia(2n-1)\pi^{-1}\int_0^X\sum_{n=1}^{\infty}\log(1+X^2)\,dX \quad \cdots\cdots(11)$$

而して

$$\int_0^X\sum_{n=1}^{\infty}\log(1+X^2)\,dX=\sum_{n=1}^{\infty}\left[X\log(1+X^2)-2X-i\log\frac{1+Xi}{1-Xi}\right]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[X\log(1+X^2)-2X+2\tan^{-1}X\right]$$

これ以後の計算は，(10) の場合と同樣である。また v が 1/2 をこえない場合には

$$\log\cos x=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{45}x^6-\cdots\cdots$$

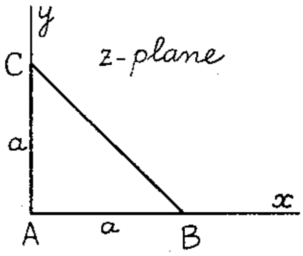
を利用するが便である。

第三章 三角壔

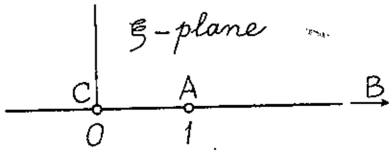
1. 直角二等邊三角形の横斷面を有する直壔

直角二等邊三角形 ABC を z 平面にとり（**第四圖**），これを ξ 上半面へ等角寫像するに當り，點對應を次の如くさだむ（**第五圖**）。

第四圖



第五圖



頂點	A	B	C
z 平面上の位置	原點	a	ia
ξ 平面上の位置	1	∞	原點

然るときは

$$z=C_1\int_1^{\xi}\xi^{-3/4}(\xi-1)^{-1/2}\,d\xi+C,$$

こゝに於て

$$v^2=1-\xi^{-1/2}$$

と置けば，上式は

$$\frac{z-C}{2\sqrt{2}\,C_1}=\int_0^v\left\{(1-v^2)\left(1-\frac{1}{2}v^2\right)\right\}^{-1/2}dv,$$

故に

$$v=\mathrm{sn}\left\{\frac{z-C}{2\sqrt{2}\,C_1},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right\},$$

從て

$$\xi^{-1/2}=\mathrm{cn}^2\left\{\frac{z-C}{2\sqrt{2}\,C_1},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}.$$

然るに A 點に關して

$$\frac{-C}{2\sqrt{2}\,C_1}=0,$$

B 點に關して

$$\frac{a-C}{2\sqrt{2}\,C_1}=K,$$

C 點に關して

$$\frac{ia-C}{2\sqrt{2}\,C_1}=iK.$$

これより

$$C=0,$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}\,C_1}=\frac{K}{a},$$

$$K=K'$$

を得，よつて

$$\xi^{-1/2}=\mathrm{cn}^2\frac{Kz}{a}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

また

$$k=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad k^2=\frac{1}{2}$$

なるを以て，

$$k'=\frac{1}{\sqrt{2}}=0.707107$$

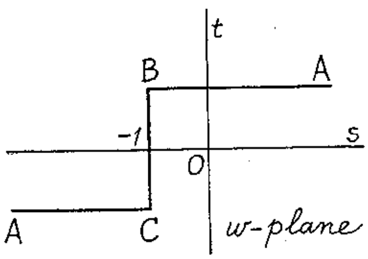
$$K=K'=1.854075$$

次に條件多角形の各邊は，

邊	$-2\theta_r$ の値	邊の方程式
AB	0	$t=1$
BC	$-\frac{1}{2}3\pi$	$s=-1$
CA	$-\pi$	$t=-1$

これによつて，w 圖形は，1葉の數平面上にあり，(**第六圖**)。これを ξ 上半面へ重ね合はす函數は，

第六圖



$$w=C_2\int\frac{d\xi}{\xi^{1/2}(\xi-1)}+C_3$$

從て

$$w=C_2\log\frac{\xi^{1/2}-1}{\xi^{1/2}+1}+C_3,$$

こゝに ξ が實軸上を進行するとき，

$-\infty<\xi<0$	$w=-1+ti,$
$\xi=0$	$w=-1-i,$
$0<\xi<1$	$w=s-i,$
$\xi=1$	$w=\infty$
$1<\xi=\infty$	$w=s+i,$
$\xi=\infty$	$w=-1+i$

なるを要す，そのためには

$$C_2=-\frac{2}{\pi},$$

$$C_3=-1+i.$$

よつて，w を ξ へ寫像する函數は，

$$w=i-1-\frac{2}{\pi}\log\frac{1-\xi^{-1/2}}{1+\xi^{-1/2}}\quad\cdots\cdots(2)$$

こゝに於て (1) と (2) より ξ を消去すれば，

$$\left.\begin{aligned}&w=i-1-\frac{4}{\pi}\log(k\,\mathrm{sd}\,u),\\&u=\frac{Kz}{a}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(3)$$

を得。矩形壔の場合の (7) に對應するものである。

次に Weierstrass の函數に於ける基本週期を

$$2\,\omega_1=2K,\qquad 2\,\omega_3=2iK'$$

に選べば

$$\frac{\omega_3}{\omega_1}=\frac{iK'}{K}=i,$$

$$\sqrt{e_1-e_3}=1,$$

$$q=e^{-\pi}=0.04321$$

となり，更に

$$\mathrm{sn}\,u=\frac{\sigma\,u}{\sigma_3 u},$$

$$\mathrm{dn}\,u=\frac{\sigma_2 u}{\sigma_3 u},$$

$$\sigma_2 u=\frac{e^{-\eta_2 u}\,\sigma\,(u+\omega_2)}{\sigma\,\omega_2},$$

$$\omega_2=-(1+i)\,K$$

なるを以て

$$\mathrm{sd}\,u=\frac{e^{\eta_2 u}\,\sigma\omega_2\,\sigma u}{\sigma\,(u+\omega_2)},$$

よつて (3) は

$$w=A-\frac{4}{\pi}\eta_2 u+\frac{4}{\pi}\log\frac{\sigma(u+\omega_2)}{\sigma u} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

こゝに

$$A=i-1-\frac{4}{\pi}\log(k\,\sigma\omega_2),$$

$$\eta_1=\frac{\pi^2}{K}\left\{\frac{1}{12}-2\sum_{n=1}^{\infty}nq^{2n}(1-q^{2n})^{-1}\right\},$$

$$\eta_2+(1+i)\,\eta_1=\frac{\pi i}{2K},$$

$$\sigma\omega_2=\frac{K}{\pi}e^{\frac{5\pi i}{4}}e^{\eta_2\omega_2/2}q^{-1/4}\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1})^2(1-q^{2n})^{-2},$$

$$g_2=\left(\frac{\pi}{K}\right)^4\left\{\frac{1}{12}+20\sum_{n=1}^{\infty}n^3q^{2n}(1-q^{2n})^{-1}\right\},$$

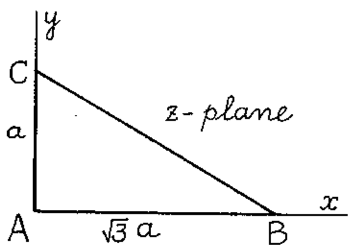
$$g_3=\left(\frac{\pi}{K}\right)^6\left\{\frac{1}{216}-\frac{7}{3}\sum_{n=1}^{\infty}n^5q^{2n}(1-q^{2n})^{-1}\right\}.$$

これより先きは，矩形壔の場合と同様に計算せらる。

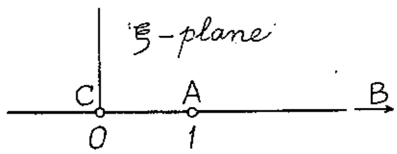
2. 60 度角を有する直角三角形を横斷面とする直壔

直角三角形 ABC に於て，A を直角頂，B 角を 30 度，C 角を 60 度とし，AB 邊（長さ $\sqrt{3}\,a$）を z 平面の實軸に，AC 邊（長さ a）をその虛軸に選ぶ（**第七圖**）。これを ξ 平面の上半部に等角寫像するにあたり，點對應を次のやうにさだめる（**第八圖**）。

第七圖



第八圖



頂　點	A	B	C
z 平面上の位置	0	$\sqrt{3}\,a$	ia
ξ 平面上の位置	1	∞	0

かやうにすると，寫像函數は

$$z=C_1\int_1^\xi \frac{d\xi}{\xi^{2/3}(\xi-1)^{1/2}}+C.$$

こゝに於て

$$x=\xi^{1/3}$$

と置けば，上式は

$$z-C=3C_1\int_1^x \frac{dx}{\sqrt{x^3-1}}.$$

さらに

$$y=\frac{x^3-1}{(x-1)^2}=\frac{x^2+x+1}{x-1},$$

$$y_1=\sqrt{3}\,(2+\sqrt{3}),$$

$$y_2=-\sqrt{3}\,(2-\sqrt{3}).$$

と置けば，

$$\frac{z-C}{3C_1}=\int_\infty^y \frac{dy}{\sqrt{y(y-y_1)(y-y_2)}}.$$

次に

$$\sin\varphi=+\left\{\frac{y_2-y_1}{y-y_1}\right\}^{1/2},$$

$$\cos\varphi=-\left\{\frac{y-y_2}{y-y_1}\right\}^{1/2},$$

$$\lambda=2\,(y_2-y_1)^{-1/2}=0.760,$$

$$k^2=\frac{-y_1}{y_2-y_1}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}=\sin^2\frac{1}{12}\pi,$$

$$k'=\sqrt{2+\sqrt{3}}\Big/2=\sin\frac{11}{12}\pi$$

と置けば，

$$\frac{z-C}{3\lambda C_1}=\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

故に

$$\sin\varphi=\mathrm{sn}\frac{z-C}{3\lambda C_1},$$

$$\cos\varphi=\mathrm{cn}\frac{z-C}{3\lambda C_1}.$$

然るに

$$\cos\varphi=-\left\{\frac{y-y_2}{y-y_1}\right\}^{1/2}=-\frac{x-1-\sqrt{3}}{x-1+\sqrt{3}},$$

故に

$$\mathrm{cn}\,\frac{z-C}{3\lambda C_1}=\frac{\sqrt{3}+1-\xi^{1/3}}{\sqrt{3}-1+\xi^{1/3}}.$$

次に常數を決定するため，點對應を考へれば，A 點に關して，

$$\frac{-C}{3\lambda C_1}=0,$$

B 點に關して

$$\frac{a\sqrt{3}-C}{3\lambda C_1}=2K,$$

よつて

$$C=0,$$

$$\frac{1}{3\lambda C_1}=\frac{2K}{\sqrt{3}\,a},$$

故に

$$\mathrm{cn}\,\frac{2Kz}{\sqrt{3}\,a}=\frac{\sqrt{3}+1-\xi^{1/3}}{\sqrt{3}-1+\xi^{1/3}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

尙 C 點を吟味するに，この場合

$$k=\sin 15^\circ,\quad k'=\sin 75^\circ$$

なるを以て，

$$K=1.598142$$

$$K'=2.768063$$

$$\frac{2K}{\sqrt{3}}=1.845376$$

よつて $z=ia$ なる C 點に於て，函數 (5) の左邊は，

$$\mathrm{cn}\left(\frac{2Ki}{\sqrt{3}},\quad k\right)=\mathrm{nc}\left(\frac{2K}{\sqrt{3}},\quad k'\right)$$

にして正でなければならない。しかして k' を母數とする函數にありては，上の記號にて，

$$\frac{K}{K'}=0.5774=1/\sqrt{3}$$

であるから，Jacobi の常數は

$$q=e^{-0.5774}=0.1630$$

となる。また

$$\mathrm{cn}\left(\frac{2K}{\sqrt{3}},\ k'\right)=\sqrt{2-\sqrt{3}}\,\frac{\theta_2 v}{\theta_0 v},$$

$$v=\frac{2K}{\sqrt{3}}\Big/2K'=\frac{1}{3}$$

にして，

$$\theta_2\left(\frac{1}{3}\right)=2q^{1/4}\left(\cos\frac{1}{3}\pi+q^2\cos\pi+q^6\cos\frac{5}{3}\pi+\cdots\cdots\right)$$

$$=0.6016$$

$$\theta_0\left(\frac{1}{3}\right)=1-2q\cos\frac{2}{3}\pi+2q^4\cos\frac{4}{3}\pi-2q^9\cos 2\pi+\cdots\cdots$$

$$=1.1623$$

$$\theta_2\left(\frac{1}{3}\right)\Big/\theta_0\left(\frac{1}{3}\right)=0.5177$$

$$\sqrt{2-\sqrt{3}}=0.5177$$

故に

$$\mathrm{cn}\,\frac{2Ki}{\sqrt{3}}=3.731$$

これに對して，(5) の右邊は，ξ 上の C 點に於て

$$\frac{\sqrt{3}+1-0}{\sqrt{3}-1+0}=3.732$$

故に (5) は斷面の三角形を，希望通り，ξ 上半面へ等角寫像す。

(5) はまた次のごとく書かれる。

$$\xi^{1/3}-1=\sqrt{3}\,\frac{1-\mathrm{cn}\,(2Kz/a\sqrt{3})}{1+\mathrm{cn}\,(2Kz/a\sqrt{3})}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

次に w 平面上に描くべき條件多角形の邊は，

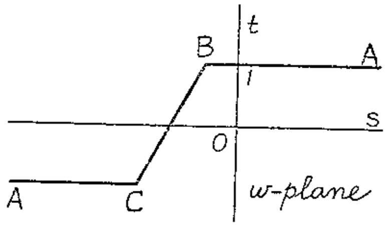
邊	$-2\theta_r$	邊の方程式
AB	0	$t-1=0$
BC	$-\frac{5}{3}\pi$	$\sqrt{3}s-t+2=0$
CA	-3π	$t+1=0$

これ**第九圖**の如きブロークン・ラインであつて，w がこの上を進行するとき，ξ は一直線（實軸）上を動くべきものとす。而して點對應は

頂　　點	A	B	C
w 平面上の位置	∞	$-1/\sqrt{3}+i$	$-\sqrt{3}-i$
ξ 平面上の位置	1	∞	0

であるから，寫像函數は

第九圖



$$w=C_2\int\frac{d\xi}{\xi^{2/3}(\xi-1)}+C_3.$$

いま　$x=\xi^{1/3}$ とおけば

$$w-C_3=3\,C_2\int\frac{dx}{x^3-1}$$

となり，

$$\frac{1}{x^3-1}=\frac{1}{6}\left[\frac{2}{x-1}-\left(\frac{1}{x+\lambda_1}+\frac{1}{x+\lambda_2}\right)+i\sqrt{3}\left(\frac{1}{x+\lambda_1}-\frac{1}{x+\lambda_2}\right)\right]$$

$$\lambda_1=\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3}),\quad \lambda_2=\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$$

なるを以て，

$$w-C_3=\frac{1}{2}C_2\left[\log\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+i\sqrt{3}\log\frac{2x+1-i\sqrt{3}}{2x+1+i\sqrt{3}}\right]\ldots.(7)$$

但し　$x=\xi^{1/3}$.　常數を決定するため，B 點の對應を考へれば，

$$C_3=-1/\sqrt{3}+i,$$

また C 點の對應を考へれば，

$$C_2=\frac{4}{\pi}(1+i\sqrt{3})$$

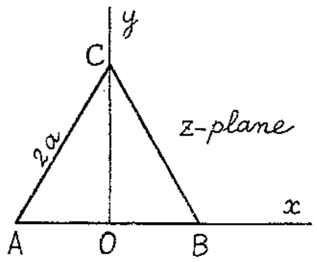
を得。但し對數函數の偏角は最小値をとる。これによつて (7) は完全に定まる。

3. 正三角形の横斷面を有する直壔

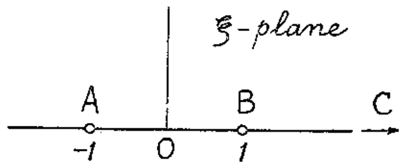
1 邊が $2a$ なる正三角形 ABC に於て，AB を z 實軸に，その中點を z 原點に選び，ξ 平面へ次の如く對應せしめる（**第十圖**）。

頂　　點	A	B	C
z 平面上の位置	$-a$	a	$\sqrt{3}ai$
ξ 平面上の位置	-1	1	∞

第十圖 (a)



第十圖 (b)



この場合の寫像函數は,

$$z=C_1\int_0^{\xi}\frac{d\xi}{(\xi^2-1)^{2/3}}+C,$$

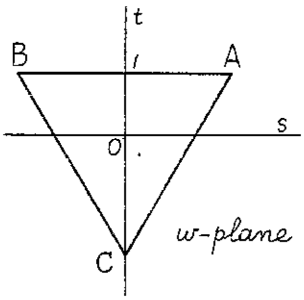
故に

$$\frac{z-C}{C_1}=\int_0^{\xi}\frac{d\xi}{(\xi^2-1)^{2/3}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

第十圖の斷面に對する條件多角形は,**第十一圖**であつて,

邊	$-2\theta_r$	邊の方程式
AB	0	$t-1=0,$
BC	$-\frac{4}{3}\pi$	$\sqrt{3}s+t+2=0,$
CA	$-\frac{8}{3}\pi$	$\sqrt{3}s-t-2=0.$

第十一圖



これを ξ 平面へ寫像する函數は,

$$w=C_2\int_0^{\xi}\frac{d\xi}{(\xi^2-1)^{2/3}}+C_3,$$

故に

$$\frac{w-C_3}{C_2}=\int_0^{\xi}\frac{d\xi}{(\xi^2-1)^{2/3}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

しかるに,(8) と (9) の右邊は全く同じものである。よつてこれを消去すれば,

$$w=C'z+C'',$$

$$C'=C_2/C_1, \qquad C''=C_3-CC_2/C_1$$

を得。一方に於て頂點は,

頂　　點	A	B	C	z 原點
z 平面上の位置	$-a$	$-b$	$\sqrt{3}ai$	0
w 平面上の位置	$\sqrt{3}+i$	$-\sqrt{3}+i$	$-2i$	i

これによつて

$$C'=-\sqrt{3}/a, \qquad C''=i$$

なるを要す。よつて

$$w=i-\sqrt{3}\,z/a \qquad \text{(10)}$$

これを z について積分すれば，

$$p+iq=C+iz-\frac{1}{2}\frac{1}{a}\sqrt{3}\,z^2.$$

z 三角形の重心 $z=ai/\sqrt{3}$ に於て，應力が零なるべきことの條件より，

$$C=\frac{1}{2}\sqrt{3}\,a.$$

よつて

$$p=\frac{1}{2}\sqrt{3}\,a\left(1-\frac{x^2-y^2}{a^2}\right)-y,$$

$$q=x-\sqrt{3}\,xy/a,$$

從て應力は

$$\left.\begin{aligned}\tau_x&=\frac{1}{a}\sqrt{3}\,G\gamma\,xy,\\ \tau_y&=G\gamma\left\{\frac{1}{2}\sqrt{3}\,a\left(1-\frac{x^2-y^2}{a^2}\right)-2y\right\}.\end{aligned}\right\} \qquad \text{(11)}$$

重心 $z=ai/\sqrt{3}$ に於ては，先きに定めたごとく，

$$\tau_x=0, \qquad \tau_y=0.$$

邊の中點（例へば $z=0$）に於ては，

$$\tau_x=0, \qquad \tau_y=\frac{1}{2}\sqrt{3}\,aG\gamma,$$

頂點（例へば $z=a$）に於ては，

$$\tau_x=0, \qquad \tau_y=0.$$

附記。 本篇は，さらに計算例を示すこと、Saint Venant 解式と比較すること，實驗と對照すること，その他若干の事項を附加すべき性質のものではある，種々の事情から，いま，その豫定がたゝないのは，殘念である。

最初，この問題に手をそめたときには，捩力率をうける任意の三角壔，四角壔，六角壔，八角壔が，み

な，同一方法によつて，解けやうかと考へてゐた。しかるに，楕圓函数及楕圓積分の本性を明かにするに及んで，本篇に取扱ふたものゝほかは，いづれも，該數理の埒外にあることが知られた。

さりながら，至廠の數領域に於て，ブロークン・ラインは，一直線に置きかへられるといふことは，それ自身．一の驚異である。この種の性質は，さらに幾多の彈性問題を，解くべき力をもつかと思はれる。

1929 年 6 月