討　　議

土木學會誌　第十五卷第八號　昭和四年八月

桁構造の撓曲振動に就て

（第十四卷第六號及第十五卷第四號所載）

著者　准員　工學士　重　松　　愿

研究多忙な折柄眞島博士が拙著に對し御一讀の餘暇を與へて下さつた事は深く感謝する所であります。

偖て質疑の要點としては **1**）强制運動式の形式，**2**）其の微分方程式の解法，**3**）自由及强制振動の正規函數の形式及內容關係，を主とし，他に **4**）二，三の算出公式中に存する項の可否，に就て詳說を要求されてありますから次にこれ等の點に就き明に致したいと思ひます。

1.　桁の振動に關する力として其の慣性に基く彈性重の外に抵抗力及振動外力を與ふれば，これらの力は既定條件の下に各自効果を發揮することは言ふまでもなく，この中で振動外力を最初簡單な場合として桁の支端が軸に直角方向の單運動をなすために起るものとし，便宜上運動する桁の支端を通る軸線を坐標橫軸に撰定して其の單運動と等價の逆加速力を桁系に與ふることを假定すれば，D'alembert の原理によつて假定靜止支點線に關する微分方程式を得る。このとき振動力の形式は支點の變位を含む項で表され得るが或はこれを支點に對する加速度を含む項（震度を含むもの）で表せば坐標 x, y に無關係の形となる。即ち桁に關する運動微分方程式は，

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+\lambda^2\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\frac{f}{EI}\frac{\partial y}{\partial t}-\frac{kw}{EI}\cos 2\pi rt=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (25)$$

これと同一內容の振動性を有する運動式として今一つ別の形式で表すことが出來ます。即ち t 時刻に於ける桁の或點 i の變位を y_i で表して，

$$y_i+\sum^{x}\left(\frac{w_x}{g}\frac{\partial^2 y_x}{\partial t^2}\delta_{ix}\right)+\sum^{x}\left(f\frac{\partial y_x}{\partial t}\delta_{ix}\right)-\sum^{x}(w_x k\delta_{ix})\cos 2\pi rt=0 \,..(I)\text{（原文に缺く）}$$

但　　$y_i=\eta_i\cos\,(2\pi rt-\gamma)$,　　　δ_{ix}＝撓度相互係數

式 (I) は式 (25) で表され得る事柄を單に分割的に考へたに過ぎず，從つて例へば多數集中荷重の場合或は (25) で表される微分方程式が解けない場合には甚だ有用な式であるが，(25) が簡便に役立つ今の場合に際してこの式 (I) を用ふることは其の應用及勞力の點に於て到底前式に比較は出來ないのであります。式 (I) は討議に於て暗示された式と同性質のも

のでありますが，著者はこれを結構橋桁に適用するは一便法と考へて嘗て雑誌都市工學に載せたことがあります。尙式 (25) の振動外力の項は x の任意の函數であつて差支ないから，解法は異るが，原文第二章構造振動にはこれを x の一次整函數として構材兩端の異る變位に對する振動基本式を誘導したのであります。

2. 式(25)の解法の難點とする所は式中に抵抗力の存するにあるので，これを無視すれば解も極めて平易となり討議も無くて濟んだ筈と思はれます。(25) を原文の如く變形すれば，

$$\cos\gamma\left(\frac{d^4\eta}{dx^4}-4\pi^2r^2\lambda^2\eta\right)+\sin\gamma\frac{2\pi rf}{EI}\eta-\frac{kw}{EI}=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (b)$$

$$\sin\gamma\left(\frac{d^4\eta}{dx^4}-4\pi^2r^2\lambda^2\eta\right)-\cos\gamma\frac{2\pi rf}{EI}\eta=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (c)$$

所要の微分正規函數は原式の性質上 $d^4\eta/dx^4$, η 及絕對項の存在する形に於て (b), (c) から聯立的に求められねばならない。これを滿たすものは，

$$\frac{d^4\eta}{dx^4}-4\pi^2r^2\lambda^2\eta-\frac{kw}{EI}\cos\gamma=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (27)$$

然るに (b) と (c) からは微分の第四階を缺く次の如き形も求め得るのですが，

$$\eta=\frac{kw}{2\pi rf}\sin\gamma \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (II)$$ (原文に缺く)

この式 (II) で表はされたものは振動桁の彈性極限を意味するもの，即ち剛性桁が與へられた環境の下に中立位置の前後に振動するときの正規函數であります。故に式 (II) の如き特別の解は其の儘にして置き，式 (27) を條件を滿たす彈性桁の微分振動式として適用するは差支ないと思ひます。式 (27) の全解式 (28) を時間の函數としたものは (b) 及 (c) を介して原式 (25) を滿足します。又式 (27) の特解として得らるゝ値は一見式 (II) と似て居るが，これは運動する桁の支點を座標軸に撰定したときと，運動の中立位置をそれに撰定したときとの，桁の最大變形の時相 ($2\pi rt=\gamma$ のとき) に於ける坐標差の値に相當します。斯の如くして式 (27) の誘導には式 (b) 及 (c) 以外他に何等の引用もしてありません。

次に振動時相の遲れ γ を求むるに，これは元來桁に對する抵抗力の存在に基き，桁の慣性と外力との各振動性の相異により色々に大小變化して表れるのですから，其の形式中には f, n, r を含むことが豫想せられる。從つて桁の慣性式 (2) と式 (c) とを組合せて γ を求めた方がよく又計算も簡易であります。而して γ は强制振動數 r に依つて變化するが x に關しては常數であるから，これを何れの式から導くにしても微分振動式の解法に對し何等牴觸せないと思ひます。

3. 桁の自由振動式と强制振動式とは夫々，

$$y=(A_1 \sin mx+A_2 \sinh mx+A_3 \cos mx+A_4 \cosh mx) \cos\frac{m^2}{\lambda}t \quad \cdots\cdots \quad (4)$$

$$y=\frac{kw}{m_r^4 EI} \cos\gamma(-1+A_1 \sin m_r x+A_2 \sinh m_r x+A_3 \cos m_r x+A_4 \cosh m_r x)$$

$$\times\cos\left(\frac{m_r^2}{\lambda}t-\gamma\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (27)$$

玆に各式中の $A_1\cdots\cdots A_4$ は各種の桁の支端條件で決定せらるべき系數であつて其の値は二，三の場合に就て原文に誘出してあります。討議には自由振動式中の m を任意の m_r に代へてそれを强制振動として追究せないは甚しき數理の誤解であると述べてありますが，著者も同感であります。即ち系數 A を一定不變の常數として mx を變へて見たとて，それは振動に對し何の意義をも與へないが，本文の $A_1\cdots\cdots A_4$ にはその自由振動に關するものには m が，又强制振動に關するものには m_r 等が含まれてあるから，振動數が 0～∞ の間に變化すると共に强制振動式中の A も變り，振動曲線は連續性を有する曲線群 (family of curve) を作ります。而して其の群中には桁の種類及與へられた强制振動力の形によつて其の自由振動曲線が全部或は一部含まれて居ります。(例へば突桁の基點を廻轉なしに動かす强制振動曲線群には總ての自由振動曲線が含まれて居ります) 而してこの兩振動の共通は所謂共鳴であります。尙自由振動と自由減衰振動とは其の振動曲線の形及數は等しく振動數が多少異つて來ますが，減衰振動式には自由振動の材件が總て含まれてあり，即ち $f=0$ とすることにより自由振動が得らるゝから自由減衰振動の全解に對して自由振動の組合は不用であることは言ふまでも無く，結局强制振動と自由減衰とで振動が一般的に表され，唯構造物の一構材としての强制振動には自由減衰振動を實用上から無視して差支ないと思ひます。

4. 式 (28) の括孤の外の系數即ちさきに述べた支點の假定變位の項は其の儘括孤なしに加へて置いても差支ないのですが，第一章の範圍では外へ出して置いた方が $A_1\cdots\cdots A_4$ の形が多少簡單になるので斯くした次第であります。其の他の式に於ても同樣で計算には誤はありません。

次に式 (29) 乃至 (31) に於て强制振動式に自由減衰振動式を附加して全振動としたは前記 3 で述べた主意に外ありません。平滑なる桁上を何等の衝動的外力に作用せられずして滑走する荷重に因つて，桁に漸進的撓度以外に若し振動が現れたとすれば，夫れは多くの場合自由減衰振動であつて强制と自由減衰振動との形或は時相の關係に依つて一時惹起されるものと推定されます。著者は鋼帶 ($EI≒4\times10^4$ gm. cm^2) を實驗桁として色々に試みましたが何かの衝動原因を考へずしては强制振動に加ふるに自由減衰振動の起ることを目擊することが困難でありました。何うしても强制振動のみが獨り優勢に起ります。構造物に對して斯る不安定な自由減衰振動の如きものが積加されることは單に形式上のみに止まり，事實上には

現はれないことを望む次第であります。(終)

原文中二，三の誤が有りましたから序に訂正致します。

頁	行	誤	正
850	4	$\eta=-\dfrac{kw}{m_i^4\ EI}$	$\eta=-\dfrac{kw}{m_i^4\ EI}\cos\ \gamma$
853	9	其の時の支端の最大變位	其の最大變形時の支端の變位
862	公式 (43) 分母	$cS-sC$	$sC-cS$