參考資料

土木學會誌　第十五卷第七號　昭和四年七月

彈性學の問題に關する Ritz の解法に就いて

(Note on the Method of Ritz for the solution of Problems in Elasticity. G. R. Goldsbrough. Philosophical Magazine Vol. 7, No. 42. Feb. 1929)

此れは同著者が既に Proceedings of the Royal Society Vol. 117, p. 692 (1928) に發表した Tides in Oceans on a Rotating Globe に用ひた方法を Ritz の解いた矩形埋込板の彎曲及自由振動に應用して Ritz の解法と同一ものとなることを示した面白い論文である。

Ritz は $a\times b$ の大さを有し p なる横壓力强度を受ける矩形板の彎曲を求めるのに

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=\frac{p}{D} \quad \cdots\cdots(1)$$

[但 D は板の撓性剛度]

及

$$\left.\begin{aligned} &x=0 \text{ 及 } a \text{ に於て } w=0 \text{ 及 } \frac{\partial w}{\partial x}=0 \\ &y=0 \text{ 及 } b \text{ に於て } w=0 \text{ 及 } \frac{\partial w}{\partial y}=0 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(2)$$

を滿足する w を求むる代りに變微分法を用ひて

$$\int_0^a\int_0^b\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2-\frac{pw}{D}\right\}dxdy \cdots\cdots(3)$$

を不變 (stationary, 最小又は最大にするの意) にするといふ條件と (2) とを合せて解いた。Ritz はこの場合 w には (2) を滿足する式として

$$w=\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\alpha_{mn}\xi_m\left(\frac{x}{a}\right)\xi_n\left(\frac{y}{b}\right) \quad \cdots\cdots(4)$$

但

$$\left.\begin{aligned} \xi_m\left(\frac{x}{a}\right)&=\cos\frac{k_m x}{a}-\cosh\frac{k_m x}{a} \\ &\quad-\left(\sin\frac{k_m x}{a}-\sinh\frac{k_m x}{a}\right)\frac{\cos k_m-\cosh k_m}{\sin k_m-\sinh k_m} \\ &[\text{但 } \cos k_m\cosh k_m=1] \\ \xi_n\left(\frac{y}{b}\right)&=\cos\frac{k_n y}{b}-\cosh\frac{k_n y}{b} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(5)$$

なる有限項（即 M, N 有限）の級數を用ひ $\dfrac{p}{D}$ には

$$\frac{p}{D}=\sum_m\sum_n f_{mn}\xi_m\left(\frac{x}{a}\right)\xi_n\left(\frac{y}{b}\right) \quad \cdots\cdots(6)$$

但 $\xi_m\xi_n$ は上式（5）と同じで $f_{mn}=\dfrac{1}{ab}\displaystyle\int_0^b\int_0^a\frac{p}{D}\,\xi_m\left(\frac{x}{a}\right)\xi_n\left(\frac{y}{b}\right)dx\,dy \quad \cdots\cdots(7)$

を用ひてゐる。

然るときは（3）式は

$$\int_0^a\int_0^b\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2-\frac{pw}{D}\right\}dx\,dy$$

$$=\sum_m\sum_n\frac{1}{2}\alpha_{mn}^2\left(\frac{k_m^4}{a^4}+\frac{k_n^4}{b^4}\right)+2\sum_m\sum_n\sum_r\sum_s\alpha_{mn}\alpha_{rs}\frac{\sigma_{mr}\sigma_{sn}}{a^2b^2}$$

$$-\sum_m\sum_n\frac{1}{ab}f_{mn}\alpha_{mn} \quad \cdots\cdots(8)$$

但

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{mr}=\sigma_{rm}&=\frac{1}{a}\int_0^a\frac{\partial^2\xi_m\left(\frac{x}{a}\right)}{\partial x^2}\xi_r\left(\frac{x}{a}\right)dx\\ \sigma_{sn}=\sigma_{ns}&=\frac{1}{b}\int_0^b\frac{\partial^2\xi_n\left(\frac{y}{b}\right)}{\partial y^2}\xi_s\left(\frac{y}{b}\right)dy\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(9)$$

(8) が不變 (stationary) なる爲には

$$\alpha_{mn}\left(\frac{k_m^4}{a^4}+\frac{k_n^4}{b^4}\right)+2\sum_{r=1}^{M}\sum_{s=1}^{N}\alpha_{rs}\frac{\sigma_{mr}\sigma_{sn}}{a^2b^2}=\frac{1}{ab}f_{mn} \quad \cdots\cdots(10)$$

此の式より α_{mn} を求め得。

但し m は 1 より始めて M に至る自然數，n は 1 より始めて N に至る自然數をとり得る。こういふ幾つかの α_{mn} を求めて（4）に入るれば求むる撓度 w を得。Ritz は M, N を大にすればする程益々 w は正確なる w となり M, N を無限大にすれば收歛級數として完全なる w を得ることを結論してゐる。

著者は (10) と同一式を次の如くにして容易に迅速に得られる方法を發案した。即（4）式を（3）に入るゝ代りに（1）に入れ

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}-\frac{p}{D}$$

$$
=\sum_m\sum_n\alpha_{mn}\left[\left\{\left(\frac{k_m}{a}\right)^4+\left(\frac{k_m}{b}\right)^4\right\}\xi_m\left(\frac{x}{x}\right)\xi_n\left(\frac{y}{b}\right)\right.
$$

$$
\left.+\frac{2}{a^2b^2}\frac{\partial^2\xi_m\left(\frac{x}{a}\right)}{dx^2}\frac{d^2\xi_n\left(\frac{y}{b}\right)}{dy^2}\right]-\sum_m\sum_n\frac{1}{ab}f_{mn}\,\xi_m\left(\frac{x}{a}\right)\xi_n\left(\frac{y}{b}\right)\cdots\cdots(11)
$$

此の式は實は x, y に關せず零となるべき筈である。今 $\dfrac{d^2\xi_m\left(\frac{x}{a}\right)}{dx^2}$ 及 $\dfrac{d^2\xi_n\left(\frac{y}{b}\right)}{dy^2}$ を下の如く置くを得

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{d^2\xi_m\left(\frac{x}{a}\right)}{dx^2}&=\sum_{r=1}^{M}\sigma_{mr}\,\xi_r\left(\frac{x}{a}\right)\\
\frac{d^2\xi_n\left(\frac{y}{b}\right)}{dy^2}&=\sum_{s=1}^{N}\sigma_{ns}\,\xi_s\left(\frac{y}{b}\right)
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(12)
$$

但 σ は (9) と同式である。

此れを (11) に入れて $\xi_m\left(\frac{x}{a}\right)$ 及 $\xi_n\left(\frac{y}{b}\right)$ の係數を零と置けば (10) と全く同一式を得。矩形板の自由振動についても同一筆法が使へる。 (山口昇抄譯)