

論 說 報 告

土木學會誌 第十五卷第六號 昭和四年六月

SPANNUNG UND FORMAENDERUNG DES ORTHOGONALEN, HOMOGENEN STAB- ECKES OHNE AUSRUNDUNG

Von Dipl.-Ing. Takeo Fukuda, Mitglied junior.

Synopsis.

Die vorliegende Abhandlung befasst sich mit der Bestimmung der Beanspruchung und Formänderung des orthogonalen homogenen Stab-Eckes, welches als eine in einem ebenen Spannungszustande beanspruchte Scheibe betrachtet werden kann. Zunächst wird die Airysche Spannungsfunktion nach der Methode von W. Ritz in einer Reihe von zweckmässig ausgewählten Funktionen dargestellt. Spannungen, Verzerrungen und Formänderungen werden dann näherungsweise festgelegt. Schliesslich wird die bisher noch nicht gelöste Winkeländerung des Stab-Eckes hergeleitet.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Einleitung	2
I. Aufstellung der Grundformeln.	
1. Ausgangsspannungsfunktion	4
2. Ansatzspannungsfunktion	6
3. Methode zur Bestimmung der Freiwerte	8
II. Näherungslösung für die Spannungen.	
4. Bestimmung der Freiwerte für $(\frac{m}{n})=0,1$	9
5. Spannungskomponenten.	10
6. Spannungskomponenten in Polarkoordinaten.	12
7. Hauptspannungen.	14
8. Hauptspannungslinie und Hauptschublinie.	14
III. Elastische Formänderung.	
9. Rekapitulation der allgemeinen Theorie.	15
10. Aufstellung der Näherungslösung.	16

11. Bestimmung der Freiwete β	18
12. Verschiebungs- und Verzerrungskomponenten, die Neutral- linie.	20
13. Winkeländerung des Stab-Eckes.	21
IV. Das gleichschenkelige Stab-Eck.	
14. Die Spannungskomponenten.	22
15. Die elastische Formänderung.	23
16. Das durch reine Biegung beanspruchte gleichschenkelige Stab-Eck.	24
Zahlenbeispiel.	26
Tafeln.	

EINLEITUNG.

Bei der Statik von Rahmenbauten wird fast ohne einziger Ausnahme die Verbindung der in einem Knoten zusammenstossenden Stäbe absolut steif gedacht, wie sie bei einem Fachwerk gelenkig gedacht wird.

Dass diese Annahmen unter Umständen recht weit von der Wahrheit abweichen können, wird niemand bezweifeln, der sich mit diesen Fragen schon eingehender beschäftigt hat. Dieser Umstand ist das Leitmotiv der vorliegenden Abhandlung.

Die Aufgabe besteht in der Bestimmung der Spannung und Formänderung des rechtwinkeligen, homogenen Stab-Eckes. Man könnte nun meinen, dass das Stab-Eck mit Hilfe der Elastizitätstheorie durch das Aufsuchen der Airyschen Spannungsfunktion hinsichtlich seines inneren Gleichgewichtes vollständig bestimmbar wäre. Dies trifft jedoch nicht zu, weil das Stab-Eck die Grundbedingungen der stetigen ebenen Begrenzung des untersuchten Körpers keineswegs erfüllt. Das heisst aber nicht dass es keine Lösung gibt, sondern dass man nicht imstande sei, sie durch elementare Funktionen darzustellen.

Hier muss man sich entweder mit Schätzungen und willkürlichen Annahmen oder mit Näherungslösungen behelfen. Jedenfalls wird man bestrebt sein müssen, die Fehler, die dadurch hereingebracht werden, nach Möglichkeit abzuschwächen, also versuchen müssen, an Stelle einer blossen Schätzung wenigstens eine Näherungslösung zu setzen.

Abgesehen von der zahlreichen Versuchsergebnisse von vielen Forscher¹⁾ über diese Probleme, sind die theoretische Behandlungen nicht so viel.

Im Jahre 1919 hat E. Posch einen Beitrag²⁾ geliefert. Dabei sind jeder der beiden Schenkeln als ein auf dem anderen elastisch gelagerter Stab gedacht und er hat die Theorie des elastisch gelagerten Trägers von Winkler und Zimmermann benutzt. Dabei hat er sich leider beschränkt, nur die Verteilung des Normalspannungen in den Randschnitten OA oder OB zu berechnen (**Abb. 1**). Die von ihm erhaltene Lösung ist eine sehr komplizierte Funktion von trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen, die eine grosse Rechnung erfordert um sie auszurechnen.

Obwohl seine Lösung der Wahrheit nahe zu sein scheint, ist man keineswegs dadurch klarer geworden, wie sich die Spannungen im Inneren des Stab-Eckes verlaufen.

A. Jackson hat in seiner Dissertation³⁾ die Spannungen im Inneren des Stab-Eckes erwähnt aber behält als Randbedingung die einfachere geradlinige Spannungsverteilung. Deswegen kann man auf der Genauigkeit seines Ergebnisse kein Vertrauen setzen.

A. und L. Föppl haben in ihrer Werke „Drang und Zwang“⁴⁾ den Weg gezeigt, mit welchem man den Spannungszustand in einem durch reine Biegung beanspruchten Stab-Eck berechnen könnte. Dort ist der Satz über die kleinste Formänderungsarbeit benutzt aber die vollständige Rechnung ist nicht durchgeführt.

1) Die wichtige Arbeiten hierüber sind :

C. Bach: Forschungsheft des V.d.I., Heft 4, 1901.
Elastizität und Festigkeit 1911, S. 508.

O. Hönigsberg: Einrichtung für Versuche an beanspruchten durchsichtigen Körpern in polarisiertem Lichte. (Zeitschr. d. Oesterr. Ing.-Arch.-Vereins 1906, Nr. 35.)

K. Wieghardt: Forschungsheft des V.d.I., Heft 49, 1908.

E. Preuss: Zeitschr. des V.d.I. 1912, S. 1349 u. f.

Forschungsheft des V.d.I., Heft 126, 1912.

W. Birnbaum: Optische Untersuchung des Spannungszustandes. (Zeitschr. f. techn. Physik 1924, S. 143.)

Th. Wyss: Die Kraftfelder in festen elastischen Körpern 1926, S. 308 u. f.

Z. Tuzi: Photographic and kinematographic study of photo-elasticity 1928. (Sci. Papers of Inst. Phys. Chem. Research, Tokio, No. 149.)

Journal of the Civil Engineering Society 1928, Vol. XIV. No. 3.

2) E. Posch: Das homogene Stab-Eck 1919, Verlag von Oldenbourg.

3) A. Jackson: Spannungslinie bei Berücksichtigung der lokalen Pressungen σ_y , Dissertation, Stuttgart, 1917.

4) A. und L. Föppl: Drang und Zwang, Bd. 1, 1924, S. 340.

Das in der vorliegenden Abhandlung benutzte Verfahren ist die Methode des jung verstorbenen Göttinger Mathematikers und Physikers Walter Ritz.

Zuerst wird eine an sich mögliche Spannungsverteilung im Stab-Eck aufgestellt, die allen statischen Bedingungen genügt, ohne Rücksicht darauf ob sie nun tatsächlich zu erwarten ist oder nicht. Zu dieser Spannungsverteilung wird eine Reihe von zweckmässig ausgewählten Spannungsverteilungen hinzugefügt und um die dadurch sich ergebende Fehler nach Möglichkeit abzuschwächen, wird der Satz über die kleinste Summe der Fehlerquadrate im Gebrauch genommen.

Es sei hier noch bemerkt werden, dass in dieser Abhandlung nur die Stab-Ecke ohne innere Ausrundungen oder Vouten betrachtet werden. Der Verfasser bemüht sich zurzeit um den Problem der Stab-Ecke mit der inneren Ausrundungen und hofft dass er bald das Ergebnis veröffentlichen können wird.

Schliesslich hofft der Verfasser, dass diese kleine Arbeit dem Praktiker für die zweckmässige Annordnung des Rahmenwerks nützlich sein möge und den Theoretiker zu forschender Mitarbeit anregen möge.

I. AUFSTELLUNG DER GRUNDFORMELN.

1. Ausgangsspannungsfunktion.

Wir betrachten jetzt die in **Abb. 1** dargestellte Scheibe, die nicht nur durch Momente M' und M'' sondern auch durch Normal- und Querkräfte belastet ist. Die Spannungen in der weit von dem Eck entfernte Schenkeln lässt sich

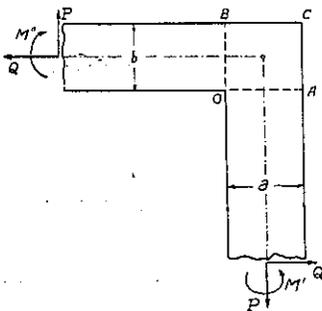


Abb. 1.

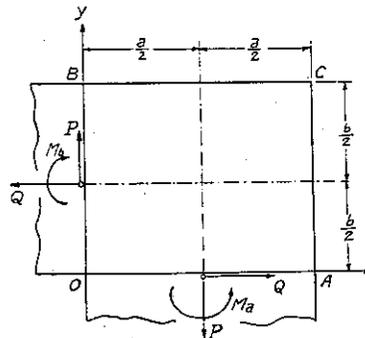


Abb. 2.

leicht in bekannter einfacher Weise berechnen.

Wir betrachten aber jetzt nur die Eckscheibe, die durch **Abb. 2** dargestellt

ist. Hier sind die Schenkeln weggeschnitten, so dass nur noch die Eckscheibe übrig geblieben ist. Als Lasten denken wir an den Schnittflächen $x=0$ und $y=0$ die in **Abb. 3** dargestellten Biegemomente, Normal- und Scherkräfte. Die Kanten $x=a$ und $y=b$ sind frei von Lasten. Die Dicke der Scheibe ist der Kürze halber als Einheit angenommen.

Als Vorstufe zur gesuchten Lösung wollen wir zuerst eine an sich mögliche Spannungsverteilung in der Scheibe aufsuchen, die allen Randbedingungen streng genügt. Dazu gelangt man ohne besondere Schwierigkeit, indem man die geradlinige Verteilung der Normalspannungen und die parabelförmig verteilten Schubspannungen an den Schnitten OA und OB voraussetzt.

Auf diesem Wege finden wir als Airyschen Spannungsfunktion

$$F_0 = \frac{1}{a^3 b^3} \left[\begin{aligned} &M_0 \{ b^3 x^2 (3a - 2x) + a^3 y^2 (3b - 2y) - x^2 y^2 (3a - 2x)(3b - 2y) \} \\ &\frac{1}{2} a^2 P \{ (a - x)^2 (2y - 3b) y^2 + b^3 x^2 \} + \frac{1}{2} b^2 Q \{ (b - y)^2 (2x - 3a) x^2 + a^3 y^2 \} \end{aligned} \right] \quad (1)$$

worin
$$M_0 = M_a + \frac{1}{2} b Q = M_b + \frac{1}{2} a P \quad (2)$$

Bezeichnet man mit

X, Y die Normalspannungskomponenten parallel der x, y -Richtung,

T die Schubspannungen parallel der x, y -Richtung,

so bekommt man aus Gl. (1) für die Spannungskomponenten

$$\left. \begin{aligned} X_0 &= \frac{\partial^2 F_0}{\partial y^2} = \frac{(a-x)^2}{a^3 b^3} \{ 6M_0(a+2x)(b-2y) - 3a^2 P(b-2y) + b^2 Q(a+2x) \} \\ Y_0 &= \frac{\partial^2 F_0}{\partial x^2} = \frac{(b-y)^2}{a^3 b^3} \{ 6M_0(a-2x)(b+2y) + a^2 P(b+2y) - 3b^2 Q(a-2x) \} \\ T_0 &= \frac{\partial^2 F_0}{\partial x \partial y} = \frac{6(a-x)(b-y)}{a^3 b^3} \{ 6M_0 xy - a^2 P y - b^2 Q x \} \end{aligned} \right\} (3)$$

und man überzeugt sich leicht, dass davon die Randbedingungen an allen vier Rändern erfüllt sind. Aber sie genügt der Differentialgleichung

$$\Delta \Delta F = \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \quad (4)$$

nicht, die die Spannungsaufgabe erst zu einer eindeutigen macht.

Der Spannungszustand F_0 , wie wir ihn der Kürze halber nennen wollen, ist ein Spannungszustand, der wegen der elastischen Eigenschaften des Körpers

nicht wirklich bestehen kann. Wir können aber F_0 als einen Ausgangszustand betrachten und ihn so weit verbessern, dass er sich dem tatsächlich zu erwartenden Zustand F möglichst gut anpasst.

Dazu kann man nach der Methode von Ritz gelangen, indem man

$$F = F_0 + \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \dots = F_0 + \sum \alpha_n F_n \dots \dots \dots (5)$$

setzt, wenn unter F_n eine Spannungsfunktion verstanden wird, die die Ränder $x=a$ und $y=b$ der Scheibe frei von Lasten lässt und an den Schnitten $x=0$ und $y=0$ keine Momente und keine resultierende Kräfte auftreten lässt. $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ sind die Freiwerte.

2. Ansatzspannungsfunktion.

Die Ansatzspannungsfunktion F_n muss zwar den im vorigen Paragraphen gegebenen Bedingungen genügen aber sie ist sonst eine beliebig erdachte Funktion. Nur muss die Reihe (5) im Bereich der Scheibe eine konvergente Reihe sein.

Wir wollen nun die Ansatzspannungsfunktion auf

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \alpha_{mn} F_{mn} = \sum_{m,n=0}^{\infty} \alpha_{mn} (x^2 + y^2) \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{m+2} \left(1 - \frac{y}{b}\right)^{n+2} \dots \dots \dots (6)$$

setzen, worin m und n irgend zwei ganze Zahl sind, die gleich oder grösser als Null sind. Ob diese unendliche Reihe eine konvergente Reihe bildet, lässt man für das späteren Studium über.

Aus (6) erhält man für die zu F_{mn} gehörige Spannungskomponenten:

$$\left. \begin{aligned} X_{mn} &= \frac{\partial^2 F_{mn}}{\partial y^2} = \frac{1}{b^2} \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{m+2} \left(1 - \frac{y}{b}\right)^n [2b^2 - 4(n+3)by \\ &\quad + (n+3)(n+4)y^2 + (n+1)(n+2)x^2], \\ Y_{mn} &= \frac{\partial^2 F_{mn}}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \left(1 - \frac{x}{a}\right)^m \left(1 - \frac{y}{b}\right)^{n+2} [2a^2 - 4(m+3)ax \\ &\quad + (m+3)(m+4)x^2 + (m+1)(m+2)y^2], \\ T_{mn} &= -\frac{\partial^2 F_{mn}}{\partial x \partial y} = \frac{1}{ab} \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{m+1} \left(1 - \frac{y}{b}\right)^{n+1} [2(n+2)(a-x)x \\ &\quad + 2(m+2)(b-y)y - (m+2)(n+2)(x^2 + y^2)], \end{aligned} \right\} \dots (7)$$

und aus ihnen kann man sich überzeugen, dass sowohl X_{mn} als T_{mn} für $x=a$ und ebenso auch Y_{mn} und T_{mn} für $y=b$ überall verschwinden.

Für die Schnitten OA ($y=0$)

$$\int_0^a Y_{mn} dx = \left[\left(\frac{\partial F_{mn}}{\partial x} \right)_{y=0} \right]_0^a$$

$$\int_0^a T_{mn} dx = - \left[\left(\frac{\partial F_{mn}}{\partial y} \right)_{y=0} \right]_0^a$$

$$\int_0^a \left(x - \frac{a}{2} \right) Y_{mn} dx = \left[\left(x - \frac{a}{2} \right) \left(\frac{\partial F_{mn}}{\partial x} \right)_{y=0} - (F_{mn})_{y=0} \right]_0^a$$

Die partielle Ableitungen von F_{mn} sind

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F_{mn}}{\partial x} &= \frac{1}{a} \left(1 - \frac{x}{a} \right)^{m+1} \cdot \left(1 - \frac{y}{b} \right)^{n+2} \cdot [2(a-x)x - (m+2)(x^2 + y^2)] \\ \frac{\partial F_{mn}}{\partial y} &= \frac{1}{b} \left(1 - \frac{x}{a} \right)^{m+2} \cdot \left(1 - \frac{y}{b} \right)^{n+1} \cdot [2(b-y)y - (n+2)(x^2 + y^2)] \end{aligned} \right\} \dots (8)$$

und sie verschwinden für $x=y=0$ und $x=a, y=0$, so dass

$$\int_0^a Y_{mn} dx = 0, \quad \int_0^a T_{mn} dx = 0, \quad \int_0^a \left(x - \frac{a}{2} \right) Y_{mn} dx = 0.$$

Sie bedeuten dass der Spannungszustand F_{mn} in den Schnitt OA keine resultierende Kräfte und Momente erzeugt. Dasselbe gilt auch in den Schnitt OB ($x=0$); und man überzeugt sich hiermit, dass die Zufügung von F_{mn} zu F_0 die allen Rand- und Gleichgewichtsbedingungen nicht stört.

Fügen wir die zu $\sum \alpha_{mn} F_{mn}$ gehörige Spannungskomponenten aus (7) zu den aus (3), so erhalten wir für die durch Zufügung von $\sum \alpha_{mn} F_{mn}$ verbesserten Spannungskomponenten

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{(a-x)^2}{a^3 b^3} [6M_0(a+2x)(b-2y) - 3a^2 P(b-2y) + b^2 Q(a+2x)] \\ &+ \frac{(a-x)^2}{a^2 b^2} \sum_{m,n=0}^{\infty} \alpha_{mn} \left(1 - \frac{x}{a} \right)^m \cdot \left(1 - \frac{y}{b} \right)^n \cdot [2b^2 - 4(n+3)by \\ &\quad + (n+3)(n+4)y^2 + (n+1)(n+2)x^2] \\ Y &= \frac{(b-y)^2}{a^3 b^3} [6M_0(a-2x)(b+2y) + a^2 P(b+2y) - 3b^2 Q(a-2x)] \\ &+ \frac{(b-y)^2}{a^2 b^2} \sum_{m,n=0}^{\infty} \alpha_{mn} \left(1 - \frac{x}{a} \right)^m \cdot \left(1 - \frac{y}{b} \right)^n \cdot [2a^2 - 4(m+3)ax \\ &\quad + (m+3)(m+4)x^2 + (m+1)(m+2)y^2] \\ T &= 6 \frac{(a-x)(b-y)}{a^3 b^3} [6M_0 xy - a^2 Py - b^2 Qx] \\ &+ \frac{1}{ab} \sum_{m,n=0}^{\infty} \alpha_{mn} \left(1 - \frac{x}{a} \right)^{m+1} \cdot \left(1 - \frac{y}{b} \right)^{n+1} \cdot [2(n+2)(a-x)x \\ &\quad + 2(m+2)(b-y)y - (m+2)(n+2)(x^2 + y^2)] \end{aligned} \right\} \dots (9)$$

3. Methode zur Bestimmung der Freiwerte.

Wir sind jetzt in der Lage, durch passende Wahl von Freiwerte α_{mn} den Spannungszustand F dem tatsächlich zu erwartenden so gut anzuschliessen, als es nur irgendwie verlangt werden könnte.

Der Satz von der kleinsten Formänderungsarbeit, der in vielen solchen Fällen mit Erfolg verwendet werden kann, scheint für unsere Aufgabe nicht geeignet zu sein. Vielmehr geht man besser von dem Satze über die kleinste Summe der Fehlerquadrate aus.

Wir wissen dass die richtige Spannungsfunktion der Differentialgleichung (4) genügen muss. Deshalb haben wir die Freiwerte so zu wählen, dass sie die Summe der Fehlerquadrate möglichst klein machen. Hiernach müssen wir das über die ganze Eckscheibe erstreckte Flächenintegral

$$\iint [\Delta\Delta F]^2 dx dy = \iint \left[\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} \right]^2 dx dy$$

nach α_{mn} differenzieren und den Differentialquotient gleich Null setzen. Wir bekommen dann ebenso viele Gleichungen wie die Freiwerte von der Form

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_{mn}} \iint [\Delta\Delta F]^2 dx dy = 0 \dots \dots \dots (10)$$

d.h.
$$\iint \left[\Delta\Delta F_{mn} \left\{ \Delta\Delta F_0 + \sum_{m,n} \alpha_{mn} \Delta\Delta F_{mn} \right\} \right] dx dy = 0 \dots \dots \dots (10a)$$

Diese Gleichungen sind linear in den Freiwerten und die Auflösung nach ihnen würde dann den der Wahrheit am nächsten kommenden Spannungszustand liefern. Für diese Rechenarbeit werden hier die Werte von $\Delta\Delta F_{mn}$ gegeben:

$$\Delta\Delta F_0 = -\frac{12}{a^3 b^3} \cdot [6 M_0(a-2x)(b-2y) + (b-2y) P a^2 + (a-2x) Q b^2] \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \Delta\Delta F_{mn} = & \frac{1}{a^{m+2} b^{n+2}} (a-x)^{m-2} \cdot (b-y)^{n-2} \cdot \\ & \cdot [16(a-x)^2(b-y)^2 \{ (n+1)(n+2)(a-x)^2 + (m+1)(m+2)(b-y)^2 \} \\ & - 8(m+2)x(a-x)(b-y)^2 \{ (n+1)(n+2)(a-x)^2 + m(m+1)(b-y)^2 \} \\ & - 8(n+2)y(a-x)^2(b-y) \{ n(n+1)(a-x)^2 + (m+1)(m+2)(b-y)^2 \} \\ & + (x^2 + y^2) \{ (n-1)n(n+1)(n+2)(a-x)^4 \\ & + 2(m+1)(m+2)(n+1)(n+2)(a-x)^2(b-y)^2 \} \end{aligned}$$

$$+ (m-1)m(m+1)(m+2)(b-y)^4 \} \dots \dots \dots (12)$$

II. NÄHERUNGSLÖSUNG FÜR DIE SPANNUNGEN.

4. Bestimmung der Freiwerte für $\binom{m}{n}=0,1$.

Für eine Näherungstheorie muss man eine möglichst weitgehende Abkürzung der Rechenarbeit anstreben, so dass es als genügend angesehen werden darf, wenn die Rechnung für $\binom{m}{n}=0,1$ durchgeführt wird.

Setzt man $\binom{m}{n}=0,1$ in (6) ein, so folgt

$$F = F_0 + \frac{(x^2 + y^2)}{a^3 b^3} (a-x)^2 (b-y)^2 [\alpha_{00} ab + \alpha_{10} b(a-x) + \alpha_{01} a(b-y) + \alpha_{11} (a-x)(b-y)] \dots (13)$$

Aus Gl. (11) und (12) erhalten wir

$$\Delta\Delta F_0 = -\frac{12}{a^3 b^3} [6M_0(a-2x)(b-2y) + a^2 P(b-2y) + b^2 Q(a-2x)]$$

$$\Delta\Delta F_{00} = \frac{8}{a^2 b^2} [(2a-3x)^2 + (2b-3y)^2]$$

$$\Delta\Delta F_{10} = \frac{8}{a^3 b^2} \left[\begin{aligned} &3(b-y)^2(3a-5x) + 3(a-x)(b^2-6by+6y^2) \\ &+ (a-x)(4a^2-14ax+13x^2) \end{aligned} \right]$$

$$\Delta\Delta F_{01} = \frac{8}{a^2 b^3} \left[\begin{aligned} &3(a-x)^2(3b-5y) + 3(b-y)(a^2-6ax+6x^2) \\ &+ (b-y)(4b^2-14by+13y^2) \end{aligned} \right]$$

$$\Delta\Delta F_{11} = \frac{24}{a^3 b^3} \left[\begin{aligned} &(a-x)^2(3b-5y) + (b-y)^2(3a-5x) \\ &+ (a-x)(b-y)(a^2-8ax+10x^2+b^2-8by+10y^2) \end{aligned} \right]$$

Man erhält dann

$$\int_0^a \int_0^b \Delta\Delta F_0 \cdot \Delta\Delta F_{00} dx dy = -\frac{48}{a^2 b^2} (bP + aQ) \equiv l_1$$

$$\int_0^a \int_0^b \Delta\Delta F_0 \cdot \Delta\Delta F_{10} dx dy = -\frac{8}{5a^3 b^3} [150b^2 M_0 + 15ab^2 P + (27a^2 + 50b^2)bQ] \equiv l_2$$

$$\int_0^a \int_0^b \Delta\Delta F_0 \cdot \Delta\Delta F_{01} dx dy = -\frac{8}{5a^2 b^3} [150a^2 M_0 + (50a^2 + 27b^2)aP + 15a^2 bQ] \equiv l_3$$

$$\int_0^a \int_0^b \Delta\Delta F_0 \cdot \Delta\Delta F_{11} dx dy = -\frac{12}{5a^3 b^3} [90(a^2 + b^2)M_0 + (25a^2 + 9b^2)aP + (9a^2 + 25b^2)bQ] \equiv l_4$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^a \int_0^b (\Delta\Delta F_{00})^2 dx dy &= \frac{64}{15} \cdot \frac{1}{a^3 b^3} (11a^4 + 30a^2 b^2 + 11b^4) \equiv k_1 \\
 \int_0^a \int_0^b (\Delta\Delta F_{10})^2 dx dy &= \frac{64}{35} \cdot \frac{1}{a^3 b^3} (54a^4 + 105a^2 b^2 + 182b^4) \equiv k_2 \\
 \int_0^a \int_0^b (\Delta\Delta F_{01})^2 dx dy &= \frac{64}{35} \cdot \frac{1}{a^3 b^3} (182a^4 + 105a^2 b^2 + 54b^4) \equiv k_3 \\
 \int_0^a \int_0^b (\Delta\Delta F_{11})^2 dx dy &= \frac{288}{5} \cdot \frac{1}{a^3 b^3} (4a^4 + 5a^2 b^2 + 4b^4) \equiv k_{10} \\
 \int_0^a \int_0^b \Delta\Delta F_{00} \cdot \Delta\Delta F_{10} dx dy &= \frac{32}{15} \cdot \frac{1}{a^3 b^3} (64a^4 + 75a^2 b^2 + 42b^4) \equiv k_2 \\
 \int_0^a \int_0^b \Delta\Delta F_{00} \cdot \Delta\Delta F_{01} dx dy &= \frac{32}{15} \cdot \frac{1}{a^3 b^3} (42a^4 + 75a^2 b^2 + 64b^4) \equiv k_3 \\
 \int_0^a \int_0^b \Delta\Delta F_{00} \cdot \Delta\Delta F_{11} dx dy &= \frac{8}{5} \cdot \frac{1}{a^3 b^3} (62a^4 + 105a^2 b^2 + 62b^4) \equiv k_4 \\
 \int_0^a \int_0^b \Delta\Delta F_{10} \cdot \Delta\Delta F_{01} dx dy &= \frac{8}{5} \cdot \frac{1}{a^3 b^3} (66a^4 + 145a^2 b^2 + 66b^4) \equiv k_5 \\
 \int_0^a \int_0^b \Delta\Delta F_{10} \cdot \Delta\Delta F_{11} dx dy &= \frac{48}{35} \cdot \frac{1}{a^3 b^3} (44a^4 + 125a^2 b^2 + 238b^4) \equiv k_7 \\
 \int_0^a \int_0^b \Delta\Delta F_{01} \cdot \Delta\Delta F_{11} dx dy &= \frac{48}{35} \cdot \frac{1}{a^3 b^3} (238a^4 + 125a^2 b^2 + 44b^4) \equiv k_8
 \end{aligned} \tag{14}$$

Setzt man diese Werte in Gl. (10a) ein, so ergeben sich

$$\left. \begin{aligned}
 k_1 \alpha_{00} + k_2 \alpha_{10} + k_3 \alpha_{01} + k_4 \alpha_{11} + l_1 &= 0 \\
 k_2 \alpha_{00} + k_5 \alpha_{10} + k_6 \alpha_{01} + k_7 \alpha_{11} + l_2 &= 0 \\
 k_3 \alpha_{00} + k_6 \alpha_{10} + k_8 \alpha_{01} + k_9 \alpha_{11} + l_3 &= 0 \\
 k_4 \alpha_{00} + k_7 \alpha_{10} + k_9 \alpha_{01} + k_{10} \alpha_{11} + l_4 &= 0.
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

Die Auflösung dieser Gleichungen nach die Freiwerte wird dann den unter den gebotenen Möglichkeiten der Wahrheit am nächsten kommenden Spannungszustand liefern. Es sei hier noch bemerkt werden, dass die Koeffizienten k_1, k_2, \dots für die gegebenen Abmessungen des Stab-Eckes konstant und l_1, l_2, \dots linear in Bezug auf M_0, P und Q sind. Die Freiwerte $\alpha_{10}, \alpha_{01}, \dots$ sind auch linear in M_0, P und Q und haben die Dimension der Spannung.

5. Spannungskomponenten.

Setzt man $\binom{m}{n} = 0, 1$ in Gl. (9) ein, so bekommt man die Näherungs-

lösung für die Spannungskomponenten in der rechtwinkligen Koordinaten:

$$\left. \begin{aligned} X &= X_0 + 2 \frac{(a-x)^2}{a^3 b^3} \cdot \left[\begin{aligned} &b \{ a \alpha_{00} + \alpha_{10}(a-x) \} (x^2 + b^2 - 6by + 6y^2) \\ &+ \{ a \alpha_{01} + \alpha_{11}(a-x) \} (b-y)(3x^2 + b^2 - 8by + 10y^2) \end{aligned} \right] \\ Y &= Y_0 + 2 \frac{(b-y)^2}{a^3 b^3} \cdot \left[\begin{aligned} &a \{ b \alpha_{00} + \alpha_{01}(b-y) \} (a^2 - 6ax + 6x^2 + y^2) \\ &+ \{ b \alpha_{10} + \alpha_{11}(b-y) \} (a-x)(a^2 - 8ax + 10x^2 + 3y^2) \end{aligned} \right] \\ T &= T_0 + \frac{(a-x)(b-y)}{a^3 b^3} \cdot \left[\begin{aligned} &2ax(a-2x) \{ 2b \alpha_{00} + 3 \alpha_{01}(b-y) \} \\ &+ 2by(b-2y) \{ 2a \alpha_{00} + 3 \alpha_{10}(a-x) \} \\ &+ x(a-x)(2a-5x) \{ 2b \alpha_{10} + 3 \alpha_{11}(b-y) \} \\ &+ y(b-y)(2b-5y) \{ 2a \alpha_{01} + 3 \alpha_{11}(a-x) \} \end{aligned} \right] \end{aligned} \right\} (16)$$

Hiermit ist die Aufgabe, die wir uns gestellt hatten, im wesentlichen gelöst, denn nach Einsetzen von α_{00} , α_{10} , α_{01} und α_{11} aus Gl. (15) in (16) kann man die Spannungen für jede Stelle des Stab-Eckes ausrechnen.

Insbesondere für die Schnitt OA gehen Gl. (16) über in

$$\left. \begin{aligned} X &= \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 \cdot \left[A_0 + A_1 \left(\frac{x}{a}\right) + A_2 \left(\frac{x}{a}\right)^2 + A_3 \left(\frac{x}{a}\right)^3 \right] \\ Y &= B_0 + B_1 \left(\frac{x}{a}\right) + B_2 \left(\frac{x}{a}\right)^2 + B_3 \left(\frac{x}{a}\right)^3 \\ T &= \left(\frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{x}{a}\right) \cdot \left[C_0 + C_1 \left(\frac{x}{a}\right) + C_2 \left(\frac{x}{a}\right)^2 \right], \end{aligned} \right\} \dots (17)$$

wobei der Kürze halber gesetzt sind:

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{b^2} (6M_0 - 3aP + bQ) + 2(\alpha_{00} + \alpha_{10} + \alpha_{01} + \alpha_{11}), \\ A_1 &= \frac{2}{b^2} (6M_0 + bQ) - 2(\alpha_{10} + \alpha_{11}), \\ A_2 &= 2 \frac{a^2}{b^2} (\alpha_{00} + \alpha_{10} + 3\alpha_{01} + 3\alpha_{11}), \\ A_3 &= -2 \frac{a^2}{b^2} (\alpha_{10} + 3\alpha_{11}), \\ B_0 &= \frac{1}{a^2} (6M_0 + aP - 3bQ) + 2(\alpha_{00} + \alpha_{10} + \alpha_{01} + \alpha_{11}), \\ B_1 &= -\frac{6}{a^2} (2M_0 - bQ) - 6(2\alpha_{00} + 3\alpha_{10} + 2\alpha_{01} + 3\alpha_{11}), \\ B_2 &= 12(\alpha_{00} + 3\alpha_{10} + \alpha_{01} + 3\alpha_{11}), \quad B_3 = -20(\alpha_{10} + \alpha_{11}), \\ C_0 &= -6 \frac{Q}{a} + 2 \frac{a}{b} (2\alpha_{00} + 2\alpha_{10} + 3\alpha_{01} + 3\alpha_{11}), \end{aligned} \right\} \dots (18)$$

$$C_1 = -\frac{a}{b} (8\alpha_{10} + 14\alpha_{20} + 12\alpha_{01} + 21\alpha_{11}),$$

$$C_2 = 5 \frac{a}{b} (2\alpha_{10} + 3\alpha_{11}).$$

Durch blosse Buchstabenvertauschungen (X, Y) , (a, b) , (P, Q) , (x, y) , $(\alpha_{10}, \alpha_{01})$ kann man die analogen Formeln für die Spannungskomponenten längs des Schnittes OB ($x=0$) erhalten.

Bemerkungen.

Hier sei noch besonders hervorgehoben, dass in der nächsten Umgebung der einspringenden Ecke besondere Spannungserhöhungen zu erwarten sind und für den Grenzfall $x=y=0$, $X=Y=\infty$ werden. Man kann natürlich von der vorliegenden Näherungstheorie keine unmittelbare Auskunft darüber erhalten, weil unsere Lösungen keine singuläre Eigenschaften für $x=y=0$ besitzen. Auch wenn wir die strenge Lösung erhalten können werden, werden sie in dieser Hinsicht nicht mehr gelten, da die Beanspruchung des Baustoffes in der Umgebung des einspringenden Eckes ausserhalb der Elastizitätsgrenze liegt und der Hookeschen Gesetz nicht mehr gilt. Aber sonst wird unsere Näherungstheorie eine hinreichend genaue Lösung liefern, was man sich von der Eigenschaften der Methode von Ritz überzeugen kann.

6. Spannungskomponenten in Polarkoordinaten.

Führt man die Polarkoordinaten r und θ (**Abb. 3**) statt der rechtwinkligen Koordinaten (x, y) ein, so bekommt man für

σ_r die Normalspannung in der Richtung von r

σ_t die senkrecht dazu stehende Normalspannung

τ die Schubspannung, die in den rechtwinkligen Schnitten des Polarkoordinatensystems übertragen wird

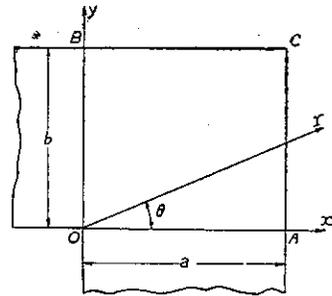


Abb. 3.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial r} \\ \sigma_t &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \\ \tau &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \right\} \dots (19)$$

Oder durch Transformation bekommt man

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= X \cdot \cos^2 \theta + Y \cdot \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta \cdot T \\ \sigma_t &= X \cdot \sin^2 \theta + Y \cdot \cos^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta \cdot T \\ \tau &= \sin \theta \cos \theta (Y - X) + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) T \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (20)$$

Am wichtigsten kommen die Spannungen längs des Diagonalschnittes OC in Betracht. Setzt man nun

$$R = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \sin \theta = \frac{b}{R}, \quad \cos \theta = \frac{a}{R}$$

und

$$w = \frac{r}{R},$$

so bekommt man für den Diagonalschnitt

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{(1-w)^2}{a^2 b^2} \cdot \left[\frac{1}{R^2} \{ a^4 (6M_0 - 3aP + bQ) + b^4 (6M_0 + aP - 3bQ) \} \right. \\ &\quad + \frac{2}{R^2} \{ a(3a^4 - 6a^2 b^2 + b^4)P + b(a^4 - 6a^2 b^2 + 3b^4)Q \} w \\ &\quad + 2 \left\{ -\frac{12}{R^2} (a^4 - 3a^2 b^2 + b^4) M_0 + \alpha_{00} (a^4 - 4a^2 b^2 + b^4) \right\} w^2 \\ &\quad + 2 \{ \alpha_{10} (a^4 - 6a^2 b^2 + 3b^4) + \alpha_{01} (3a^4 - 6a^2 b^2 + b^4) \} (1-w) w^2 \\ &\quad + 6 \alpha_{11} (a^4 - 3a^2 b^2 + b^4) (1-w)^2 w^2 \\ &\quad \left. + 2a^2 b^2 (1-w)^2 \cdot \{ \alpha_{00} + (\alpha_{10} + \alpha_{01})(1-w) + \alpha_{11} (1-w)^2 \} \right] \\ \sigma_t &= 2(1-w)^2 \cdot \left[\frac{1}{R^2} (6M_0 - aP - bQ) + \alpha_{00} + \alpha_{10} + \alpha_{01} + \alpha_{11} \right. \\ &\quad + \left\{ \frac{10}{R^2} (aP + bQ) - 10\alpha_{00} - 13(\alpha_{10} + \alpha_{01}) - 16\alpha_{11} \right\} w \\ &\quad - 3 \left\{ \frac{20}{R^2} M_0 - 5\alpha_{00} - 11(\alpha_{10} + \alpha_{01}) - 19\alpha_{11} \right\} w^2 \\ &\quad \left. - 7 \{ 3(\alpha_{10} + \alpha_{01}) + 10\alpha_{11} \} w^3 + 28\alpha_{11} w^4 \right] \\ \tau &= \frac{(1-w)^2}{ab} \cdot \left[\frac{1}{R^2} \{ b^2 (6M_0 + aP - 3bQ) - a^2 (6M_0 - 3aP + bQ) \} \right. \\ &\quad + 2 \left\{ (2b^2 - 3a^2) \left(\frac{2}{R^2} aP - \alpha_{01} \right) + (3b^2 - 2a^2) \left(\frac{2}{R^2} bQ - \alpha_{10} \right) \right. \\ &\quad \left. \left. + 2(a^2 - b^2) (\alpha_{00} + \alpha_{11}) \right\} w \right. \\ &\quad \left. + 2 \left\{ (a^2 - b^2) \left(\frac{30}{R^2} M_0 - 5\alpha_{00} - 11\alpha_{11} \right) + 4\alpha_{10} (3b^2 - 2a^2) \right\} \right] \end{aligned} \right\} \dots \dots (21)$$

$$\left. \begin{aligned}
 &+ 4\alpha_{01}(2b^2 - 3a^2)\} w^2 \\
 &+ 2\{16(a^2 - b^2)\alpha_{11} + 3\alpha_{10}(2a^2 - 3b^2) + 3\alpha_{01}(3a^2 - 2b^2)\} w^3 \\
 &\quad - 14\alpha_{11}w^4\}.
 \end{aligned} \right\}$$

7. Hauptspannungen.

Die Grösse der Hauptspannungen beim ebenen Spannungszustand sind

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_0 &= \frac{X+Y}{2} + \sqrt{\left(\frac{X-Y}{2}\right)^2 + T^2} \\
 \sigma_{\frac{\pi}{2}} &= \frac{X+Y}{2} - \sqrt{\left(\frac{X-Y}{2}\right)^2 + T^2}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

und der Winkel φ , der die eine Hauptspannungsachse (σ_0) mit der x -Achse einschliesst, ergibt sich aus

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2T}{X-Y} \dots\dots\dots (23)$$

Der Maximalwerte der Schubspannungen ist

$$\tau_{max} = \pm \sqrt{\left(\frac{X-Y}{2}\right)^2 + T^2} \dots\dots\dots (24)$$

Der Winkel φ' , den die Schnittrichtungen, für die die grösste Schubspannung sich ergeben wird, mit der x -Achse einschliesst, ergibt sich aus

$$\operatorname{tg} 2\varphi' = \frac{X-Y}{2T} \dots\dots\dots (25)$$

Daraus folgt dass die Winkel φ und φ' sich um $\frac{\pi}{4}$ unterscheiden. Die Vorzeichen in der Gl. (24) sind gleichgültig, da sie nur durch die willkürliche Festsetzung darüber bedingt sind, in welcher Richtung τ_{max} als positiv gerechnet werden sollte.

8. Hauptspannungslinie und Hauptschublinie.¹⁾

Die Differentialgleichung der Hauptspannungslinie bei einem im ebenen Spannungszustande gespannten elastischen Körper sind

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi = -\frac{X-Y}{2T} \pm \sqrt{1 + \left(\frac{X-Y}{2T}\right)^2} \dots\dots\dots (26)$$

1) Als Tensorlinien sind solche Kurve gemeint, deren Tangenten mit einem der Haupttensoren der betreffenden Punkte übereinstimmen. Als solche sind zu nennen: Hauptspannungslinie, Hauptschubspannungslinie, Hauptdehnungslinie und Hauptschiebungslinie u.s.w.

Diese Differentialgleichung stellt wegen der Vorzeichen des zweiten Gliedes zwei Systeme von senkrecht aufeinander stehende Kurvenscharen dar.

Als Grundlage für die Hauptschubspannungslinie wird die Maximalschubspannungen angenommen. Als Differentialgleichung für die Hauptschubspannungslinie ergibt sich aus Gl. (25)

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi' = -\frac{2T}{X-Y} \pm \sqrt{1 + \left(\frac{2T}{X-Y}\right)^2} \dots \dots \dots (27)$$

so dass es auch zwei Systeme von Hauptschubspannungslinien gibt, die sich aufeinander rechtwinklig stehen. Beide Systeme weisen an ihren Schnittpunkten die gleichen skalaren Werte auf.

Die Integration dieser Differentialgleichungen (26) und (27) ist jedoch für unseren Fall unmöglich, so dass man gezwungen wird, sich mit Näherungs- oder Graphischemethoden zu behelfen.¹⁾

III. ELASTISCHE FORMÄNDERUNG.

9. Rekapitulation der allgemeinen Theorie.

Als Einleitung zur weiteren Behandlung der elastischen Formänderung im Stab-Eck sollen hier einige Teile der allgemeinen Theorie für den ebenen Spannungszustand kurz rekapituliert werden. Hier sollen bezeichnet mit

ξ, η, ζ die Verschiebungskomponenten eines Punktes (x, y, z) parallel der x, y, z -Richtung;

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ die spezifische Dehnungen oder Verzerrungskomponenten parallel der x, y, z -Richtung;

$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ die Winkeländerungen, welche die zwei Strecke dx und dy , dy und dz , bzw. dz und dx erfahren;

dabei die z -Achse senkrecht zur xy -Ebene genommen wird.

Dann bestehen zwischen diesen Grössen die folgenden Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial \xi}{\partial x}, & \varepsilon_y &= \frac{\partial \eta}{\partial y}, & \varepsilon_z &= \frac{\partial \zeta}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0, & \gamma_{zx} &= \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} = 0. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (28)$$

Sie sind mit den Spannungskomponenten geknüpft durch

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} \left(X - \frac{1}{m} Y \right), & \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \left(Y - \frac{1}{m} X \right), & \varepsilon_z &= -\frac{1}{mE} (X + Y), \\ & & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} T, & & \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (29)$$

worin E den Elastizitätsmodul, G den Schubmodul und m die Poissonsche Konstante bedeuten.

Wie man daraus sieht, im Fall des ebenen Spannungszustandes in xy -Ebene, ist jede zur xy -Ebene parallele Ebene spannungsfrei, doch sind die Verschiebungen ξ, η, ζ im allgemeinen nicht unabhängig von z . Insbesondere verschwindet die Verzerrungskomponente ε_z nicht und ist auch nicht konstant.

1) Für die graphische Näherungsmethode zur Ermittlung des Tensorlinienverlaufes kann man aus Th. Wyss, Die Kraftfelder in festen elastischen Körpern, 1926 (S. 181 u.f.) Kenntnisse erwerben.

Wir wollen aber jetzt einen quasiebenen Spannungszustand annehmen, d.h.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0.$$

Dann folgt

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{E} \left(X - \frac{1}{m} Y \right), & \varepsilon_y &= \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{E} \left(Y - \frac{1}{m} X \right), \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{G} T \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (30)$$

und

$$\varepsilon_z = 0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial z} = 0 \dots \dots \dots (31)$$

Dies heisst dass die Ebene parallel zur xy -Ebene dauernd eben und parallel bleiben. Bei Scheiben, deren Dicke im Verhältnis zu den übrigen Abmessungen klein sind, besonders wenn es sich um Körper mit grossen Elastizitätsmodul handelt, sind die Abweichungen von der Wahrheit ausserordentlich gering. Die Poissonsche Konstante m sind für verschiedenen Stoffe stark voreinander verschieden, so dass für Näherungstheorie es als genügend angesehen werden darf, auch wenn man $m = \infty$ setzt. Setzt man $m = \infty$ in Gl. (30) ein, so folgt

$$\varepsilon_x = \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{E} X; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{E} Y; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{G} T. \dots \dots \dots (30 a)$$

Aber unsere vorher erhaltene Lösungen für Spannungskomponenten genügen den Gl. (30) oder (30a) nicht, da sie der Differentialgleichung (4) nicht genügen. Und hier wird man auch gezwungen sich mit einer Näherungslösung zu behelfen.

10. Aufstellung der Näherungslösung.

Wir wollen nun

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{1}{E} \left[\int X dx - \frac{1}{m} \cdot \frac{\partial F}{\partial x} + f_2(y) + K_1 \right] \\ \eta &= \frac{1}{E} \left[\int Y dy - \frac{1}{m} \cdot \frac{\partial F}{\partial y} + f_1(x) + K_2 \right] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (32)$$

setzen, wobei $f_1(x)$ und $f_2(y)$ irgend zwei Funktionen von x bzw. von y und K_1 und K_2 zwei Konstante sind. Dann sieht man leicht dass sie den ersten zwei Gleichungen von (30) oder (30 a) genügen.

Die zwei Integrale in (32) lauten:

$$\left. \begin{aligned} \int X dx &= -\frac{(a-x)^3}{a^3 b^3} \cdot \left[3M_0(a+x)(b-2y) - a^2 P(b-2y) + \frac{1}{2} b^2 Q(a+x) \right] \\ &- \sum_{m,n} \frac{\alpha_{mn} (a-x)^{m+3} (b-y)^n}{(m+3)(m+4)(m+5) a^{m+2} b^{n+2}} \\ &\quad \cdot \left[(n+1)(n+2) \{ 2a^2 + 2(m+3)ax + (m+3)(m+4)x^2 \} \right. \\ &\quad \left. + (m+4)(m+5) \{ 2b^2 - 4(n+3)by + (n+3)(n+4)y^2 \} \right], \end{aligned} \right\} (33)$$

analoge Formel für $\int Y dy$.

Die Ableitungen von F lauten:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{3}{a^3 b^3} x(a-x)(b-y)^2 \{2M_0(b+2y) - b^2 Q\} \\ &+ \frac{P}{ab^3} \{a(3b-2y)y^2 + x(b+2y)(b-y)^2\} \\ &+ \sum_{m,n} \alpha_{mn} \frac{(a-x)^{m+1}(b-y)^{n+2}}{a^{m+2} \cdot b^{n+2}} \{2x(a-x) - (m+2)(x^2+y^2)\}, \end{aligned} \right\} (34)$$

analoge Formel für $\frac{\partial F}{\partial y}$.

Um die Verschiebungszustand eindeutig festzustellen, haben wir irgend eine Basis für die Verschiebungen anzunehmen. Als solche Basis wird hier angenommen, dass der Punkt O keine Änderung seiner Lage erleidet und der Punkt C nach der Formänderung sich zur neue Lage C' verschiebt, so dass die Richtung OC' mit der von OC zusammenfällt. (Abb. 4)

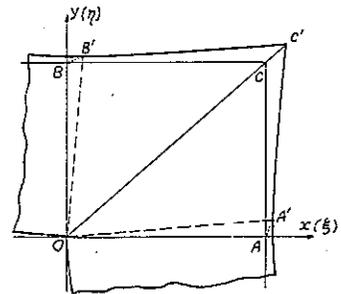


Abb. 4.

Dass heisst dass wir annehmen:

$$\left. \begin{aligned} \text{für } x=y=0 & \quad \xi = \eta = 0 \\ \text{für } x=a, y=b & \quad \xi : a = \eta : b. \end{aligned} \right\} \dots (35)$$

Wir haben nun für $x=y=0$:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad f_1(x) = f_2(y) = 0,$$

und für $x=a, y=b$:

$$\int X dx = \int Y dy = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q,$$

so dass aus Gl. (32) und (35) sich ergeben:

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= \frac{a}{b^2} \left[3M_0 - aP + \frac{1}{2}bQ \right. \\ &+ 2 \sum_{m,n} \frac{\alpha_{mn}}{(m+3)(m+4)(m+5)} \{ (n+1)(n+2)a^2 + (m+4)(m+5)b^2 \} \Big], \\ K_2 &= \frac{b}{a^2} \left[3M_0 + \frac{1}{2}aP - bQ \right. \\ &+ 2 \sum_{m,n} \frac{\alpha_{mn}}{(n+3)(n+4)(n+5)} \{ (n+4)(n+5)a^2 + (m+1)(m+2)b^2 \} \Big], \end{aligned} \right\} (36)$$

und

$$b\left[f_2(b) + K_1 - \frac{1}{m}P\right] = a\left[f_1(a) + K_2 - \frac{1}{m}Q\right] \dots\dots\dots (37)$$

Wir wollen nun die Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(y)$ auf

$$f_1(x) = L_1 \sum_s \beta_s \left(\frac{x}{a}\right)^s, \quad f_2(y) = L_2 \sum_s \beta_s \left(\frac{y}{b}\right)^s \dots\dots\dots (38)$$

stellen, wobei

$$L_1 = \frac{b}{a} \left(K_1 - \frac{1}{m}P\right), \quad L_2 = \frac{a}{b} \left(K_2 - \frac{1}{m}Q\right) \dots\dots\dots (39)$$

und s irgend eine ganze Zahl grösser als Null ist. β sind die Freiwerte. Wir bekommen dann aus Gl. (37)

$$a \left\{ L_1 \sum_s \beta_s + \frac{b}{a} L_2 \right\} = b \left\{ L_2 \sum_s \beta_s + \frac{a}{b} L_1 \right\}$$

und daraus sich ergibt

$$\beta_1 + \beta_2 + \dots = 1. \dots\dots\dots (40)$$

11 Bestimmung der Freiwerte β .

Wenn s sich von 1 bis s erstreckt, sind $(s-1)$ voneinander unabhängige Freiwerte vorhanden. Um diese Freiwerte zweckmässig zu wählen, wollen wir an die dritten Gleichung von (30) oder (30a) zurückgehen. Aus ihr bekommen wir nämlich

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{G} T.$$

Wenn man nun beachtet, dass

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial y} &= \frac{1}{E} \left[\frac{\partial}{\partial y} \int X dx - \frac{1}{m} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{df_2(y)}{dy} \right], \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} &= \frac{1}{E} \left[\frac{\partial}{\partial x} \int Y dy - \frac{1}{m} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{df_1(x)}{dx} \right], \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} &= -T, \quad \frac{1}{G} = 2 \frac{m+1}{mE}, \end{aligned}$$

so folgt aus Gl. (30)

$$\frac{\partial}{\partial y} \int X dx + \frac{\partial}{\partial x} \int Y dy - 2T + \frac{df_1(x)}{dx} + \frac{df_2(y)}{dy} = 0. \dots\dots\dots (41)$$

Die Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(y)$ aus Gl. (38) genügen dieser Gleichung

1) m ist die Poissonsche Zahl.

nicht, so dass wir durch passende Wahl von den Freiwerten den dadurch sich ergebenden Fehler zu einem Minimum machen. Wie bei der Ermittlung der Spannungen, wird hier auch der Staz über die kleinste Fehlerquadrate angewunden.

Also wird β_s bestimmt werden durch

$$\frac{\partial}{\partial \beta_s} \int \int \left[\frac{df_1(x)}{dx} + \frac{df_2(y)}{dy} + H \right]^2 dx dy = 0 \dots\dots\dots (42)$$

und

$$\beta_1 + \beta_2 + \dots = 1, \dots\dots\dots (40)$$

wobei zur Abkürzung

$$H = \frac{\partial}{\partial y} \int X dx + \frac{\partial}{\partial x} \int Y dy - 2T. \dots\dots\dots (43)$$

Weil es sich hier um eine Näherungslösung handelt, wollen wir $s=1, 2$ und $\beta_2 = \beta$ setzen, d. h.

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 &= 1 - \beta \\ f_1(x) &= \frac{L_1}{a^2} x \{a - \beta(a-x)\} \\ f_2(y) &= \frac{L_2}{b^2} y \{b - \beta(b-y)\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (44)$$

Daraus folgt

$$\frac{df_1(x)}{dx} + \frac{df_2(y)}{dy} = \frac{1}{ab} (bL_1 + aL_2) - \frac{\beta}{a^2 b^2} [b^2 L_1(a-2x) + a^2 L_2(b-2y)] \dots (45)$$

Aus Gl. (42) erhält man dann für Bestimmung von β

$$\frac{d}{d\beta} \int_0^a \int_0^b [ab(bL_1 + aL_2 + abH) - \beta \{b^2 L_1(a-x) + a^2 L_2(b-2y)\}]^2 dx dy = 0$$

oder

$$\beta = \frac{ab \int_0^a \int_0^b (bL_1 + aL_2 + abH) \{b^2 L_1(a-x) + a^2 L_2(b-y)\} dx dy}{\int_0^a \int_0^b \{b^2 L_1(a-x) + a^2 L_2(b-y)\}^2 dx dy} \dots (46)$$

Setzt man nun für die Spannungskomponenten die in Gl. (16) erhaltenen Werte ein, so ergibt sich

$$\beta = \frac{1}{ab(b^2 L_1^2 + a^2 L_2^2)} \cdot \left[3(a^3 L_1 + b^3 L_2) M_0 + \frac{1}{10} \{a^2(10b^2 - 9a^2)L_1 P + b^2(10a^2 - 9b^2)L_2 Q\} \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{5} \alpha_{00} ab \{b(5b^2 - 2a^2)L_1 + a(5a^2 - 2b^2)L_2\} \\
& + \frac{1}{70} \alpha_{10} b \{(42a^4 - 28a^2b^2 + 9b^4)L_2 - 14a^3bL_1\} \\
& + \frac{1}{70} \alpha_{01} a \{9a^4 - 28a^2b^2 + 42b^4\}L_1 - 14ab^3L_2\} \\
& + \frac{1}{140} \alpha_{11} \{a^3(9a^2 - 28b^2)L_1 + b^3(9b^2 - 28a^2)L_2\} \Big]. \dots (47)
\end{aligned}$$

β hat die Dimension einer absoluten Zahl.

12. Verschiebungs- und Verzerrungskomponenten, die Neutrallinie.

Setzt man $(\frac{m}{n})=0,1$ in Gl. (33) ein und die Poissonsche Zahl unendlich annimmt, so bekommt man aus Gl. (32) und (44) für die Verschiebungskomponenten

$$\begin{aligned}
\xi = & -\frac{(a-x)^3}{a^3b^3E} \cdot \left[3M_0(a+x)(b-2y) - a^2P(b-2y) + \frac{1}{2}b^2Q(a+x) \right. \\
& + \frac{1}{15} \alpha_{00} ab \{(a^2 + 3ax + 6x^2) + 10(b^2 - 6by + 6y^2)\} \\
& + \frac{1}{30} \alpha_{10} b(a-x) \{(a^2 + 4ax + 10x^2) + 15(b^2 - 6by + 6y^2)\} \\
& + \frac{1}{15} \alpha_{01} a(b-y) \{3(a^2 + 3ax + 6x^2) + 10(b^2 - 8by + 10y^2)\} \\
& + \frac{1}{10} \alpha_{11} (a-x)(b-y) \{(a^2 + 4ax + 10x^2) + 5(b^2 - 8by + 10y^2)\} \Big] \\
& + \frac{1}{b^3E} [b^3K_1 + (1-\beta)abK_2y + \beta aK_2y^2], \\
\eta = & -\frac{(b-y)^3}{a^3b^3E} \cdot \left[3M_0(a-2x)(b+y) + \frac{1}{2}a^2P(b+y) - b^2Q(a-2x) \right. \\
& + \frac{1}{15} \alpha_{00} ab \{10(a^2 - 6ax + 6x^2) + (b^2 + 3by + 6y^2)\} \\
& + \frac{1}{15} \alpha_{10} b(a-x) \{10(a^2 - 8ax^2 + 10x^3) + 3(b^2 + 3by + 6y^2)\} \\
& + \frac{1}{30} \alpha_{01} a(b-y) \{15(a^2 - 6ax + 6x^2) + (b^2 + 4by + 10y^2)\} \\
& + \frac{1}{10} \alpha_{11} (a-x)(b-y) \{5(a^2 - 8ax + 10x^2) + (b^2 + 4by + 10y^2)\} \Big] \\
& + \frac{1}{a^3E} [a^3K_2 + (1-\beta)abK_1x + \beta bK_1x^2],
\end{aligned} \dots (48)$$

worin

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= \frac{a}{b^2} \left[3M_0 - aP + \frac{1}{2}bQ + \frac{1}{30}a^2(2\alpha_{00} + \alpha_{10} + 6\alpha_{01} + 3\alpha_{11}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{6}b^2(4\alpha_{00} + 3\alpha_{10} + 4\alpha_{01} + 3\alpha_{11}) \right], \\ K_2 &= \frac{b}{a^2} \left[3M_0 + \frac{1}{2}aP - bQ + \frac{1}{6}a^2(4\alpha_{00} + 4\alpha_{10} + 3\alpha_{01} + 3\alpha_{11}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{30}b^2(2\alpha_{00} + 6\alpha_{10} + \alpha_{01} + 3\alpha_{11}) \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots (49)$$

Diese Formeln entsprechen für die durch (35) gegebene Verschiebungsbasis; natürlich kann man über diese Verschiebungen eine beliebige, in einem starren Körper mögliche kleine Verschiebung überlagern.

Zu den Verzerrungskomponenten kann man ohne Schwierigkeit durch

$$\varepsilon_x = \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{E} \left(X - \frac{1}{m} Y \right), \quad \varepsilon_y = \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{E} \left(Y - \frac{1}{m} X \right)$$

gelangen, da die Spannungskomponenten X und Y uns schon bekannt sind.

Die Neutrallinie ist solche Kurve, die aus lauter Punkten besteht, auf denen die Normaldehnung ε_t zu den radialen Schnitten verschwinden soll. (**Abb. 5.**)

Die Gleichung der Neutrallinie ist dann

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E} \left(\sigma_t - \frac{1}{m} \sigma_r \right) = 0 \quad \text{d.h.} \quad \sigma_t - \frac{1}{m} \sigma_r = 0 \quad \dots\dots\dots (50)$$

Wenn man $m = \infty$ annimmt, wird sie zu

$$\sigma_t = 0. \quad \dots\dots\dots (50a)$$

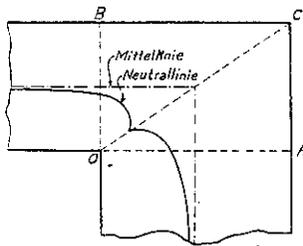


Abb. 5.

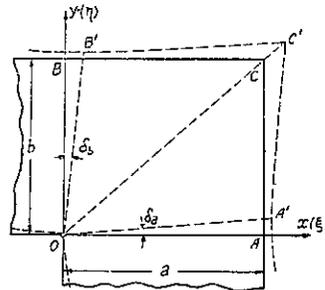


Abb. 6.

13. Winkeländerung des Stab-Eckes.

Nach der elastischen Formänderung wird das Stab-Eck $OACB$ eine neue

Gestalt $OA'C'B'$ nehmen. (Abb. 6.) Wir bezeichnen nun

$$\delta_a = \frac{AA'}{a}, \quad \delta_b = \frac{BB'}{b}$$

und nennen

$$\delta = \delta_a + \delta_b = \frac{AA'}{a} + \frac{BB'}{b} \dots \dots \dots (51)$$

„ die Winkeländerung des Stab-Eckes. ”

Da $AA' = \eta_{x=a, y=0}$, $BB' = \xi_{x=0, y=b}$,

so gelangt man ohne besondere Schwierigkeiten zu

$$\begin{aligned} \delta = \frac{1}{a^3 b^3 E} \cdot & \left[6(a^4 + a^2 b^2 + b^4) M_0 - \frac{1}{2} a^3 (4a^2 + b^2) P - \frac{1}{2} b^3 (a^2 + 4b^2) Q \right. \\ & + \frac{11}{15} a^2 b^2 (a^2 + b^2) \alpha_{00} + \frac{1}{30} b^2 (21a^4 + 41a^2 b^2 + 6b^4) \alpha_{10} \\ & + \frac{1}{30} a^2 (6a^4 + 41a^2 b^2 + 21b^4) \alpha_{01} + \frac{1}{10} (a^6 + 11a^4 b^2 + 11a^2 b^4 + b^6) \alpha_{11} \\ & \left. - \frac{1}{m} ab(a^2 + b^2)(bP + aQ) \right] \dots \dots \dots (52) \end{aligned}$$

IV. DAS GLEICHSCHENKELIGE STAB-ECK.

14. Die Spannungskomponenten.

Für den Fall, wo die Breite der beiden Schenkeln gleich gross sind, also für den Fall $a=b$, wird eine Vereinfachung der Grundgleichungen herbeigeführt. (Abb. 7.)

Setzt man $b=a$ in Gl. (14) ein und löst damit Gl. (15) auf, so bekommt man

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{00} &= 1.997m_0 + 0.064(p+q) \\ \alpha_{10} &= -1.312m_0 - 0.251P + 0.299q \\ \alpha_{01} &= -1.312m_0 + 0.299p - 0.251q \\ \alpha_{11} &= 1.555m_0 + 0.042(p+q), \end{aligned} \right\} \dots \dots (52)$$

wobei zur Abkürzung

$$m_0 = \frac{M_0}{a^2}, \quad p = \frac{P}{a}, \quad q = \frac{Q}{a} \dots \dots \dots (53)$$

Setzt man nun $u=x/a$, $v=y/a$, so gehen die Gl. (16) für die Spannungskomponenten herüber in

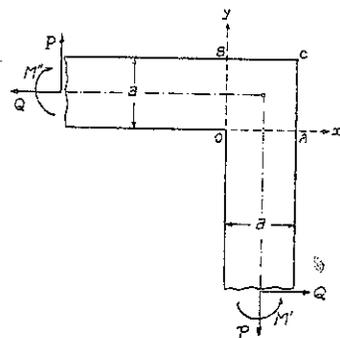


Abb. 7.

$$\left. \begin{aligned}
 X &= (1-u)^2 \cdot [6m_0(1+2u)(1-2v) - 3p(1-2v) + q(1+2u) \\
 &\quad + 2\{\alpha_{v_0} + \alpha_{10}(1-u)\}(1-6v+6v^2+u^2) \\
 &\quad + 2\{\alpha_{01} + \alpha_{11}(1-u)\}(1-v)(1-8v+10v^2+3u^2)], \\
 Y &= (1-v)^2 \cdot [6m_0(1-2u)(1+2v) + p(1+2v) - 3q(1-2u) \\
 &\quad + 2\{\alpha_{00} + \alpha_{p1}(1-v)\}(1-6u+6u^2+v^2) \\
 &\quad + 2\{\alpha_{10} + \alpha_{11}(1-v)\}(1-u)(1-8u+10u^2+3v^2)], \\
 T &= (1-u)(1-v) \cdot [36m_0uv - 6(pv+qu) + 4\alpha_{00}\{u(1-2u)+v(1-2v)\} \\
 &\quad + 2\alpha_{10}(1-u)\{u(2-5u)+3v(1-2v)\} \\
 &\quad + 2\alpha_{01}(1-v)\{3u(1-2u)+v(2-5v)\} \\
 &\quad + 3\alpha_{11}(1-u)(1-v)\{u(2-5u)+v(2-5v)\}].
 \end{aligned} \right\} \dots (54)$$

Für den Schnitt OA , d.h für $y=0$:

$$\left. \begin{aligned}
 X &= (1-u)^2(A_0 + A_1u + A_2u^2 + A_3u^3) \\
 Y &= B_0 + B_1u + B_2u^2 + B_3u^3 \\
 T &= u(1-u)(C_0 + C_1u + C_2u^2),
 \end{aligned} \right\} \dots (55)$$

wobei zur Abkürzung

$$\left. \begin{aligned}
 A_0 &= 7.858m_0 - 2.693p + 1.307q, & A_1 &= 11.513m_0 + 0.418p + 1.318q, \\
 A_2 &= 2.831m_0 + 1.672p - 0.529q, & A_3 &= -6.707m_0 + 0.248p - 0.752q, \\
 B_0 &= 7.858m_0 + 1.307p - 2.693q, & B_1 &= -24.605m_0 - 0.589p + 2.110q, \\
 B_2 &= 16.988m_0 - 3.173p + 10.030q, & B_3 &= -4.870m_0 + 4.180p - 6.822q, \\
 C_0 &= 4.202m_0 + 1.297p - 5.804q, & C_1 &= -14.530m_0 - 1.466p - 2.567q, \\
 C_2 &= 10.211m_0 - 1.878p + 3.623q.
 \end{aligned} \right\} (56)$$

Durch blosse Buchstabenvertauschung (X, Y), (u, v), (p, q) kann man die analogen Formeln für die Spannungskomponenten längs des Schnittes OB erhalten.

Setzt man $b=a$ und $w=r\sqrt{a^2+b^2}$ in Gl. (21) ein, so bekommt man für die Spannungskomponenten längs des Diagonalschnittes OC

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_r &= (1-w)^2 [m_0(7.858 - 4.694w + 12.091w^2 + 11.467w^3 - 6.220w^4) \\
 &\quad - (p+q)(0.693 + 2.898w - 0.221w^2 - 0.075w^3 + 0.170w^4)], \\
 \sigma_t &= (1-w)^2 [m_0(7.858 - 21.496w + 4.054w^2 - 107.540w^3 + 87.086w^4) \\
 &\quad - (p+q)(0.693 - 6.135w - 9.872w^2 + 7.923w^3 - 2.374w^4)], \\
 \tau &= 2(p-q)(1-w)^3(1 + 0.550w - 1.650w^2).
 \end{aligned} \right\} \dots (57)$$

15. Die elastische Formänderung.

Die Beiwerte in den Gl. (48) für die Verschiebungskomponenten sind:

$$\left. \begin{aligned}
 K_1 &= a(3.561m_0 - 0.803p + 0.513q), \\
 K_2 &= a(3.561m_0 + 0.513p - 0.803q), \\
 L_1 &= K_1 - \frac{a}{m}P, \quad L_2 = K_2 - \frac{a}{m}Q, \\
 \beta &= \frac{a}{L_1^2 + L_2^2} \left[3(L_1 + L_2)(m_0 + \frac{1}{5}\alpha_{00} - \frac{1}{70}\alpha_{11}) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{70}\alpha_{10}(23L_2 - 14L_1) + \frac{1}{70}\alpha_{01}(23L_1 - 14L_2) \right]
 \end{aligned} \right\} \dots (58)$$

Hiermit kann man die Verschiebungskomponenten jeder Stelle der Scheibe durch Gl. (48) ausrechnen.

Ferner bekommen wir aus Gl. (52) für die Winkeländerung des Stab-Eckes

$$\delta = \frac{1}{E} \left[18.715m_0 - \left(2.197 + \frac{2}{m} \right) (p + q) \right] \dots \dots \dots (59)$$

16. Das durch reine Biegung beanspruchte gleichschenkelige Stab-Eck.

Wir betrachten jetzt ein gleichschenkeliges Stab-Eck, welches wie in **Abb. 8** durch einem Biegemomente M_0 belastet ist. In diesem Fall fallen die Glieder von p und q aus allen Gleichungen weg.

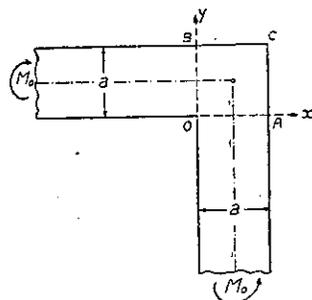


Abb. 8.

a) Werte von α .

$$\left. \begin{aligned}
 \alpha_{00} &= 1.997m_0 \\
 \alpha_{10} = \alpha_{01} &= -1.321m_0 \\
 \alpha_{11} &= 1.555m_0
 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (60)$$

b) Die Spannungskomponenten.

$$\left. \begin{aligned}
 X &= 6m_0(1-u)^2 [1.310 + 1.919u + 0.472u^2 - 1.118u^3 \\
 &\quad - 4.101v + 2.831v^2 - 0.817v^3 \\
 &\quad - uv(1.958 + 0.234u + 6.189v - 1.555u^2 - 5.184v^2)] \\
 Y &= 6m_0(1-v)^2 [1.310 - 4.101u + 2.831u^2 - 0.817u^3 \\
 &\quad + 1.919v + 0.472v^2 - 1.118v^3 \\
 &\quad - uv(1.958 + 6.189u + 0.234v - 5.184u^2 - 1.555v^2)] \\
 T &= 6m_0(1-u)(1-v) \cdot [0.700(u+v) - 2.422(u^2 + v^2) + 1.702(u^3 + v^3) \\
 &\quad + uv \{ 5.513 + 2.820(u+v) - 3.888(u^2 + v^2) \}].
 \end{aligned} \right\} \dots (61)$$

Für den Schnitt $O.A$ ($y=0$):

$$\left. \begin{aligned} X &= 6m_0(1-u)^2(1.310 + 1.919u + 0.472u^2 - 1.118u^3) \\ Y &= 6m_0(1.310 - 4.101u + 2.831u^2 - 0.817u^3) \\ T &= 6m_0u(1-u)(0.700 - 2.422u + 1.702u^2). \end{aligned} \right\} \dots\dots (61a)$$

Die Formeln für die Spannungskomponenten längs des Schnittes OB kann man aus (61a) durch blosse Buchstabenvertauschung erhalten.

Längs des Diagonalschnittes OC ($x=y$):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= 6m_0(1-w)^2(1.310 - 0.782w^2 + 2.015w + 1.991w^3 - 1.037w^4) \\ \sigma_t &= 6m_0(1-w)^2(1.310 - 3.583w + 0.676w^3 - 17.923w^3 + 14.514w^4) \\ \tau &= 0. \end{aligned} \right\} \dots\dots (61b)$$

Daraus sieht man dass längs des Diagonalschnittes OC keine Schubspannung sich ergibt, so dass σ_r und σ_t die Hauptspannungen sind.

c) Zahlentafeln für die spezifischen Spannungskomponenten.

Die **Zahlentafeln 1,2 und 3** geben die Werte der Spannungskomponenten für den Fall $m_0=1$, die wir „spezifische Spannungskomponenten“ nennen wollen.¹⁾ Wenn das Stab-Eck durch eine Biegemomente M belastet ist, bekommt man die Spannungskomponenten durch Multiplikation dieser Werte mit M/a^2 , ohne dass man die vorigen Gleichungen auszurechnen braucht.

d) Die Verschiebungskomponenten.

Aus Gl. (58) ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} L_1 = L_2 = K_1 = K_2 = 3.561 am_0 \\ \beta = 1.208. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (62)$$

Damit kann man die Verschiebungen jeder Stelle des Stab-Eckes durch Gl. (48) ausrechnen. Insbesondere ist die Verschiebung der Schnittfläche OA gegeben durch

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{am_0}{E} u (13.510 - 19.266 u + 11.235 u^2 + 0.215 u^3 \\ &\quad - 3.249 u^4 + 1.118 u^5) \\ \eta &= \frac{am_0}{E} u (8.335 + 1.991 u - 0.969 u^2), \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (63)$$

und für die Kante AC :

1) Sie sind in den **Tafeln I-III** in Kurven dargestellt.

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{\alpha m_0}{E} (3.561 - 0.739 v + 4.300 v^2) \\ \eta &= \frac{\alpha m_0}{E} [7.122 + (1-v)^3(2.235 + 2.076 v \\ &\quad - 0.536 v^2 - 0.437 v^3)]. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (63a)$$

Durch blosse Buchstabenvertauschung lassen sich diese Formeln auch auf die Schnittfläche *OB* und die Kante *BC* übertragen. Rechnet man diese Formeln aus, so bekommt man die **Zahlentafeln 4** in Anhang und sie sind in den Abbildungen der **Tafel IV** dargestellt.

e) Die Winkeländerung des Stab-Eckes.

Aus Gl. (59) bekommt man nämlich für die Winkeländerung des durch reine Biegung belasteten Stab-Eckes

$$\delta = 18.72 \frac{m_0}{E} \dots\dots\dots (64)$$

oder

$$\delta = 1.56 \frac{M_0}{EJ} a, \dots\dots\dots (64a)$$

worin *J* das Trägheitsmoment des Schenkels ist, d.h. $J = \frac{a^3}{12}$.

ZAHLENBEISPIEL.

Es soll ein Stab-Eck aus Stahl untersucht werden, welches die in **Abb. 9** dargestellte Form hat. Gegeben sind:

$$P = \frac{1}{2} (2\ 000) = 1\ 000 \text{ kg}, \quad Q = 0,$$

$$M_x = 1\ 000 \left(15 + \frac{1}{2} \times 10 \right) = 20\ 000 \text{ kg cm.}$$

$$M = 1\ 000 \times 15 = 15\ 000 \text{ kg cm,}$$

$$a = b = 10 \text{ cm,}$$

d.h.

$$m_0 = \frac{20\ 000}{10 \times 10} = 200 \text{ kg/qcm,}$$

$$p = \frac{1\ 000}{10} = 100 \text{ kg/qcm,} \quad q = 0.$$

Aus Gl. (52) folgen

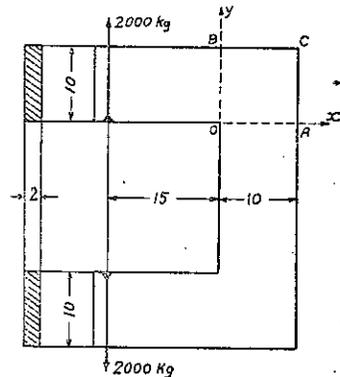


Abb. 9.

$$\alpha_{00} = 406 \text{ kg/qcm}, \quad \alpha_{10} = -287 \text{ kg/qcm}, \\ \alpha_{01} = -232 \text{ kg/qcm}, \quad \alpha_{11} = 315 \text{ kg/qcm}.$$

Die Spannungskomponenten sind dann nach Gl. (54) gegeben durch

$$X = (1-u)^2 [1\,304 + 2\,344\,u + 736\,u^2 - 1\,316\,u^3 \\ - 4\,722\,v + 4\,416\,v^2 - 1\,660\,v^3 \\ - uv(2\,574 + 498\,u + 7\,896\,v - 1\,890\,u^2 - 6\,300\,v^2)] \\ Y = (1-v)^2 [1\,704 - 4\,992\,u + 3\,096\,u^2 - 560\,u^3 \\ + 2\,434\,v + 516\,v^2 - 1\,423\,v^3 \\ - uv(1\,914 + 8\,556\,u + 168\,v - 6\,300\,u^2 - 1\,890\,v^2)] \\ T = (1-u)(1-v) \cdot [u(974 - 3\,061\,u + 1\,855\,u^2) \\ + v(264 - 3\,171\,v + 2\,405\,v^2) \\ + uv(6\,534 + 3\,831\,u + 3\,171\,v - 4\,725\,u^2 + v^2)].$$

Die Spannungen längs des Diagonalschnittes OC sind:

$$\sigma_r = (1-w)^2 (1\,504 - 1\,230\,w + 2\,440\,w^2 + 222\,w^3 - 1\,260\,w^4) \\ \sigma_t = (1-w)^2 (1\,504 - 3\,706\,w + 1\,836\,w^2 - 22\,302\,w^3 + 17\,640\,w^4) \\ \tau = 10(1-w)^2 (20 - 9\,w - 44\,w^2 + 33\,w^3).$$

In der **Zahlentafel 5** sind die Spannungen längs der Schnitten $u=0, 0.5$; $v=0, 0.5$; $u=v$ und die Randspannungen angegeben und diese Ergebnisse sind in den Abbildungen der **Tafel V** dargestellt.

Die Winkeländerung des Stab-Eckes ergibt sich aus Gl. (59), mit der Poissonschen Zahl $m=3.5$, zu

$$\delta = \frac{1}{E} \left[18.72 \times 200 - \left(2.197 + \frac{2}{3.5} \right) \times 100 \right] \\ = \frac{1}{E} (3\,732 \text{ kg/qcm}).$$

Sie gibt für Stahl von $E=2.1 \times 10^6 \text{ kg/qcm}$

$$\delta = \frac{3\,732}{2.1 \times 10^6} = 0.00178 = 0^\circ - 6' - 7''$$

Bei der Abteilung Bauwesen,
Kais. Universität zu Tokio,
Mai, 1929.

Zahlentafel 1. Die spezifischen Normalspannungskomponenten
für die zur x-Achse parallelen Schnitte.

(Vgl. Tafel I.)

$v \backslash u$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	7.858	5.562	3.575	1.865	0.403	-0.844	-1.907	-2.815	-3.601	-4.296	-4.930
0.1	7.315	5.332	3.562	1.978	0.588	-0.621	-1.658	-2.533	-3.254	-3.829	-4.267
0.2	6.541	4.879	3.354	1.943	0.679	-0.443	-1.417	-2.238	-2.829	-3.402	-3.734
0.3	5.579	4.238	2.966	1.779	0.688	-0.294	-1.154	-1.876	-2.452	-2.867	-3.106
0.4	4.492	3.460	2.461	1.509	0.621	-0.185	-0.895	-1.492	-1.959	-2.281	-2.441
0.5	3.371	2.628	1.893	1.182	0.521	-0.103	-0.645	-1.101	-1.452	-1.679	-1.777
0.6	2.294	1.805	1.311	0.827	0.364	-0.063	-0.442	-0.861	-1.002	-1.156	-1.209
0.7	1.350	1.071	0.874	0.500	0.227	-0.027	-0.251	-0.436	-0.574	-0.655	-0.670
0.8	0.618	0.490	0.357	0.224	0.095	-0.016	-0.133	-0.221	-0.287	-0.324	-0.323
0.9	0.156	0.125	0.092	0.060	0.026	-0.005	-0.031	-0.053	-0.068	-0.075	-0.072
1.0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

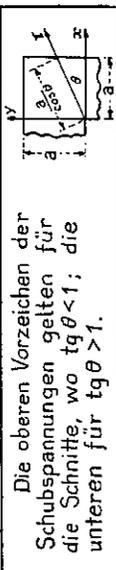
Bemerkung: Der Symmetrie wegen gelten dieselbe Werte
auch für die zur y-Achse parallelen Schnitte.

Zahlentafel 2. Die zur rechtwinkligen Koordinaten parallelen
spezifischen Schubspannungen. (Vgl. Tafel II.)

$v \backslash u$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	0	0.257	0.273	0.160	0.006	-0.127	-0.202	-0.203	-0.142	-0.054	0
0.1	0.257	0.764	0.986	1.032	0.976	0.850	0.706	0.553	0.401	0.226	0
0.2	0.273	0.986	1.413	1.603	1.659	1.561	1.381	1.127	0.815	0.443	0
0.3	0.160	1.032	1.603	1.915	2.085	2.022	1.831	1.514	1.097	0.590	0
0.4	0.006	0.976	1.659	2.085	2.282	2.251	2.064	1.721	1.250	0.669	0
0.5	-0.127	0.850	1.561	2.022	2.251	2.269	2.098	1.758	1.276	0.682	0
0.6	-0.202	0.706	1.381	1.831	2.064	2.098	1.948	1.635	1.188	0.632	0
0.7	-0.203	0.553	1.127	1.514	1.721	1.757	1.635	1.374	0.996	0.527	0
0.8	-0.142	0.401	0.815	1.097	1.250	1.276	1.188	0.996	0.720	0.379	0
0.9	-0.054	0.226	0.443	0.590	0.669	0.681	0.632	0.527	0.379	0.198	0
1.0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Zahlentafel 3. Die spezifischen Spannungen längs der vom Nullpunkt ausgehenden Strahlen. (Vgl. Tafel III.)

Spannungsart	$\frac{y}{x}$	$\text{tg } \theta = \frac{y}{x}$	$W = r \cos \theta \cdot \beta$					
			0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
σ_r	0,25; 4	7,858	5,879	3,750	1,820	0,553	-0,201	
	0,5; 2	"	5,404	3,443	1,896	0,684	-0,355	
	0,75; 4/3	"	5,207	3,216	1,835	0,694	-0,176	
	1	"	4,790	3,056	1,770	0,606	0	
σ_t	0,25; 4	7,858	3,399	0,299	-1,849	-3,024	-3,219	
	0,5; 2	"	3,037	-0,303	-2,232	-2,548	-1,442	
	0,75; 4/3	"	2,538	-1,019	-2,405	-1,929	-0,317	
	1	"	1,945	-1,708	-2,484	-1,045	0	
τ	0,25; 4	0	$\pm 0,053$	$\pm 0,166$	$\pm 0,205$	$\pm 0,030$	$\mp 0,604$	
	0,5; 2	0	$\pm 0,065$	$\pm 0,282$	$\pm 0,307$	$\pm 0,072$	$\mp 0,821$	
	0,75; 4/3	0	$\pm 0,020$	$\pm 0,190$	$\pm 0,165$	$\pm 0,212$	$\mp 0,238$	
	1	0	0	0	0	0	0	



Die oberen Vorzeichen der Schubspannungen gelten für die Schnitte, wo $\text{tg } \theta < 1$; die unteren für $\text{tg } \theta > 1$.

Zahlentafel 4. Verschiebungen der Schnittfläche OA und der Kante AC. (Vgl. Tafel IV.)

U	Schnittfläche OA										
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\frac{u}{r}$	0	0,78	1,46	2,06	2,57	2,98	3,24	3,42	3,52	3,55	3,56
$\frac{v}{r}$	0	0,86	1,74	2,56	3,29	4,52	5,51	6,48	7,45	8,40	9,36
		Kante AC									
V	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\frac{u}{r}$	3,56	3,53	3,59	3,73	3,95	4,27	4,67	5,15	5,72	6,38	7,12
$\frac{v}{r}$	9,36	8,90	8,47	8,08	7,76	7,51	7,33	7,21	7,15	7,13	7,12

(土木建築第十五卷第一號附誌)

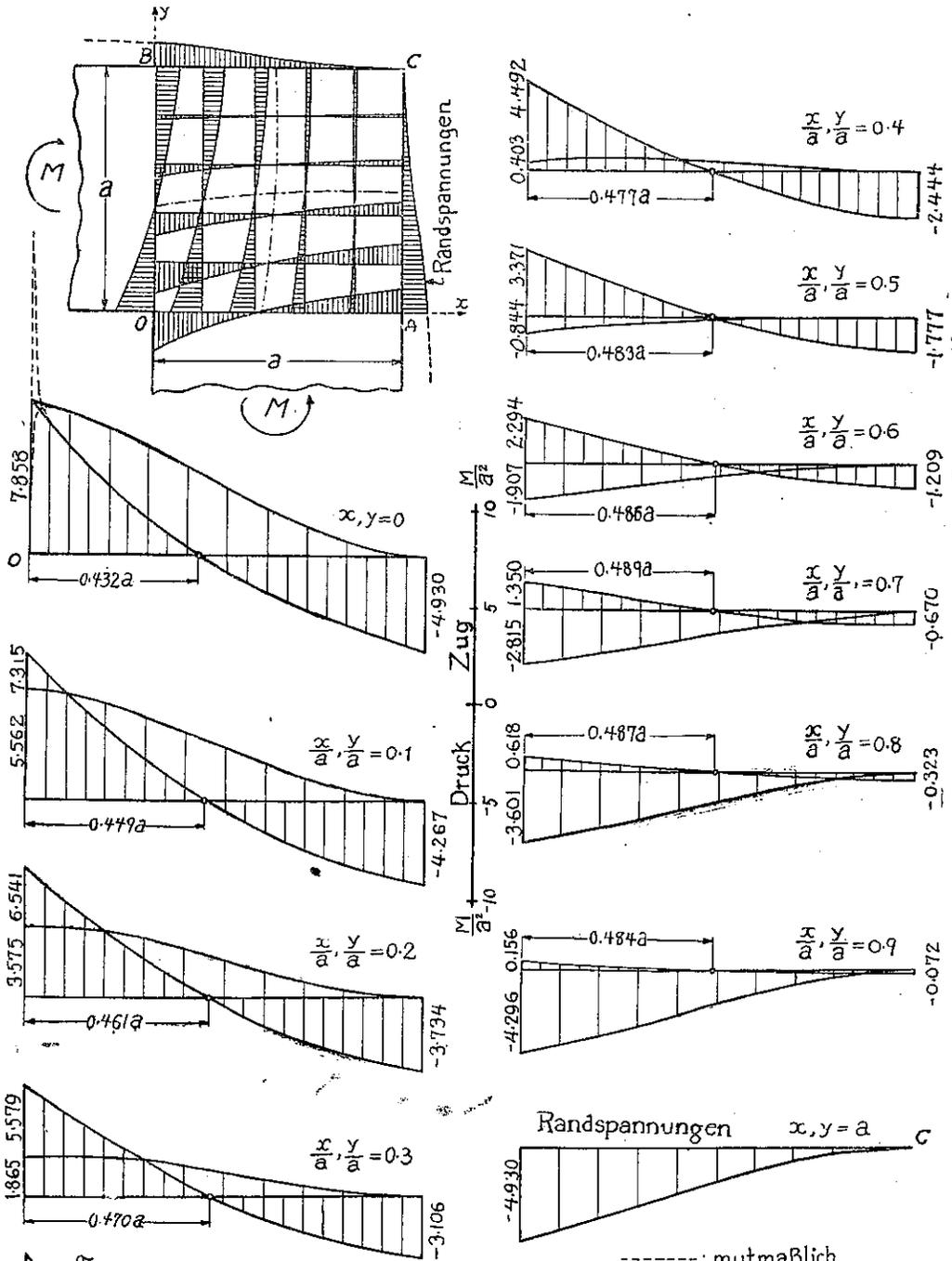
Zahlentafel 5.

Spannungen in einem Haken-Eck. (Vgl. Tafel V.)

x	Längs der zur x-Achse parallelen Schnitte.											
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
X	1804	1651	1146	998	823	624	432	223	119	31	0	
OA	Y	1704	1235	827	470	168	-88	-297	-466	-594	-688	-752
	T	0	62	71	47	11	-23	-47	-55	-46	-25	0
y=5	X	-161	-797	-109	-81	-57	-36	-23	-19	-6	-2	0
	Y	720	574	425	278	138	6	-110	-210	-288	-343	-367
	T	-180	32	151	301	361	378	357	302	220	117	0
BC	X	-682	-682	-648	-575	-474	-380	-248	-187	-63	-17	0
	Y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

y	Längs der zur y-Achse parallelen Schnitte											
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
X	1904	874	524	239	16	-161	-298	-406	-498	-579	-662	
OB	Y	1704	1580	1387	1197	965	720	488	286	131	33	0
	T	0	-3	-44	-99	-149	-180	-186	-163	-117	-33	0
x=5	X	624	476	333	197	79	-36	-139	-227	-296	-344	-381
	Y	-88	-57	-32	-13	0	6	5	4	3	1	0
	T	-23	148	268	344	371	378	342	284	205	109	0
AC	Y	-752	-748	-692	-602	-485	-367	-249	-146	-68	-17	0
	I/O	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	
OC	σ_r	1504	1138	868	662	498	362	245	145	67	17	0
	σ_t	1504	957	439	48	-237	-394	-416	-325	-179	-50	0
	τ	200	154	102	69	40	21	11	3	1	0	0

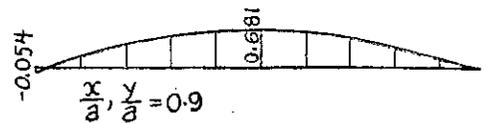
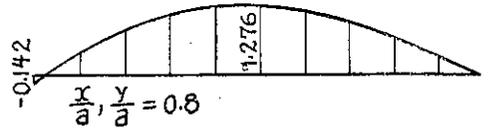
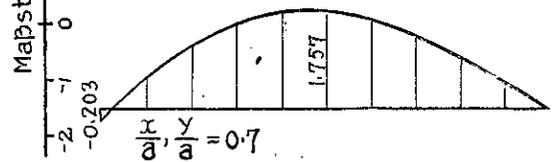
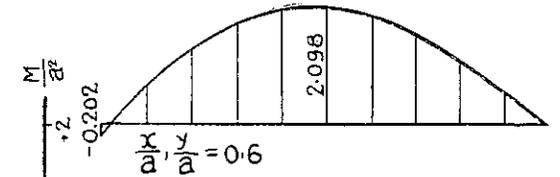
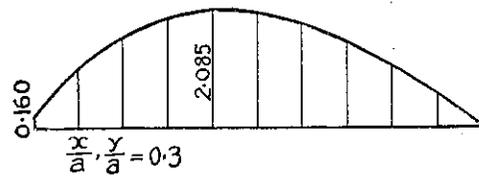
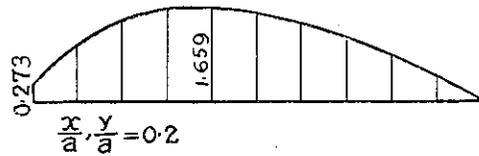
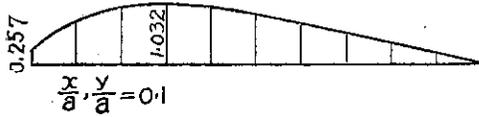
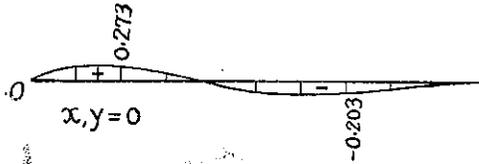
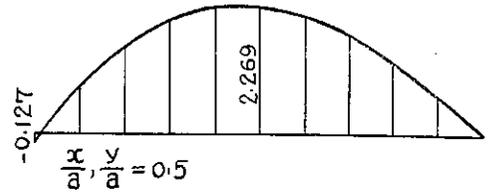
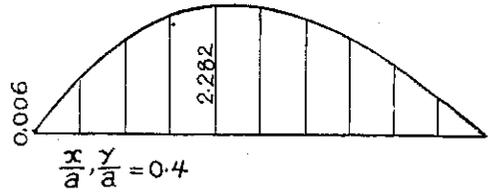
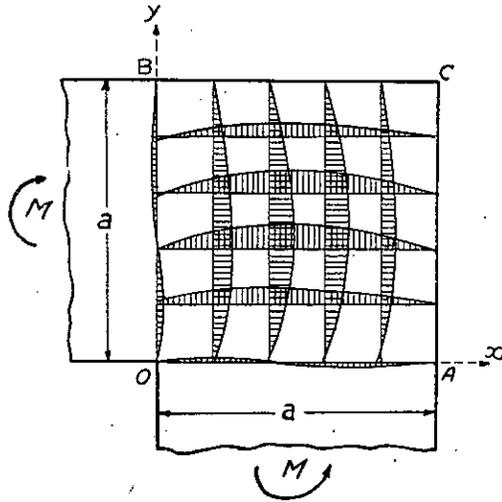
Tafel I. Das durch reine Biegung belastete gleichschenkelige Stab-Eck—Normalspannungen.



(原圖係根據十國標準繪成者)

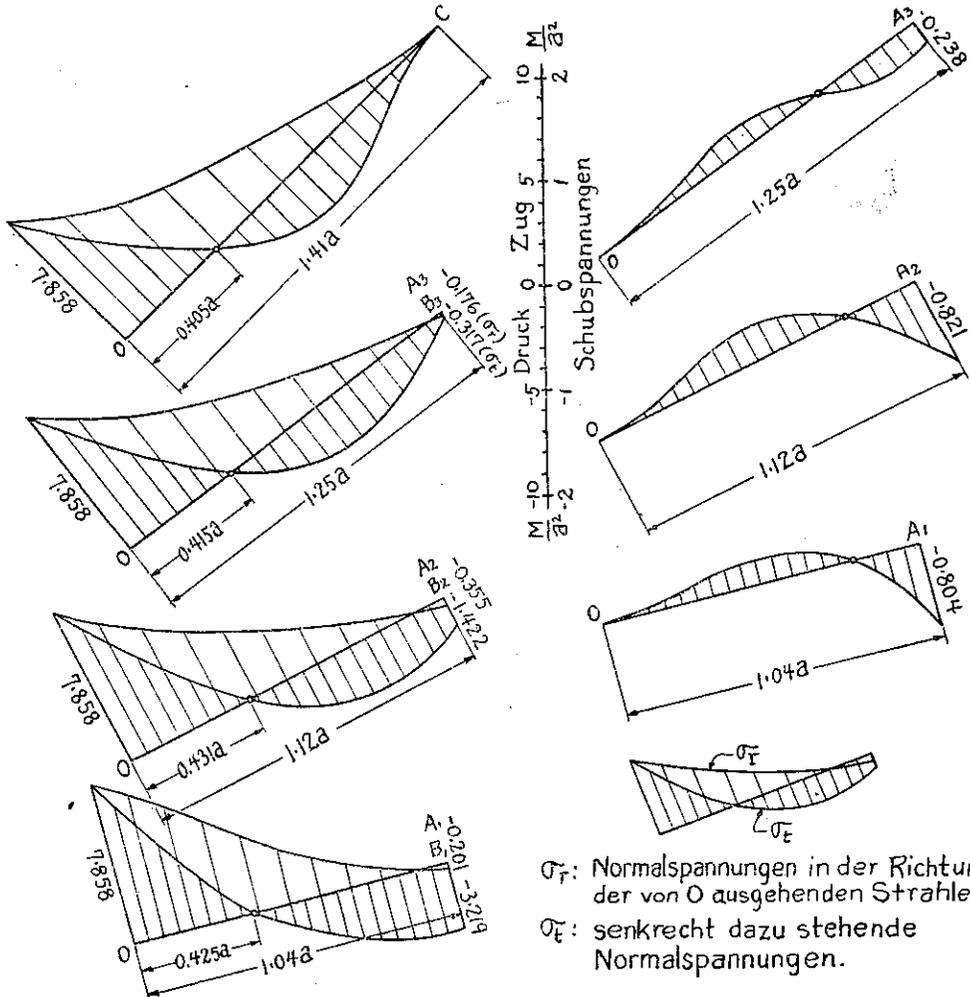
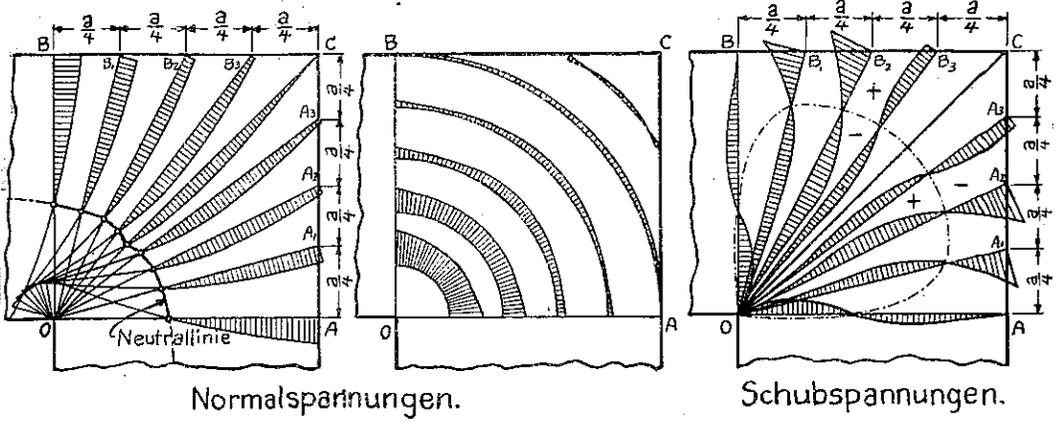
σ_1 : Normalspannungen auf den zur x, y -Achse parallelen Schnitten,
 σ_2 : Zur σ_1 senkrecht stehende Normalspannungen.

Tafel II. Das durch reine Biegung belastete gleichschenkelige Stab-Eck. Schubspannungen



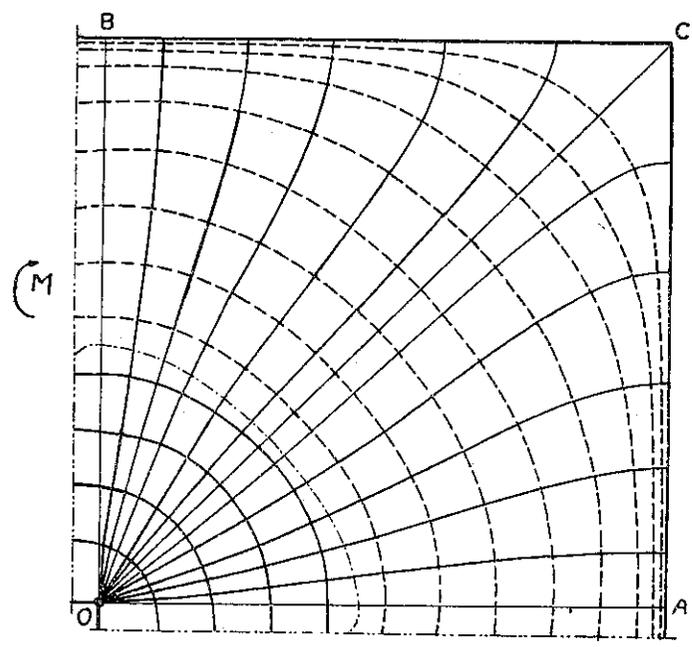
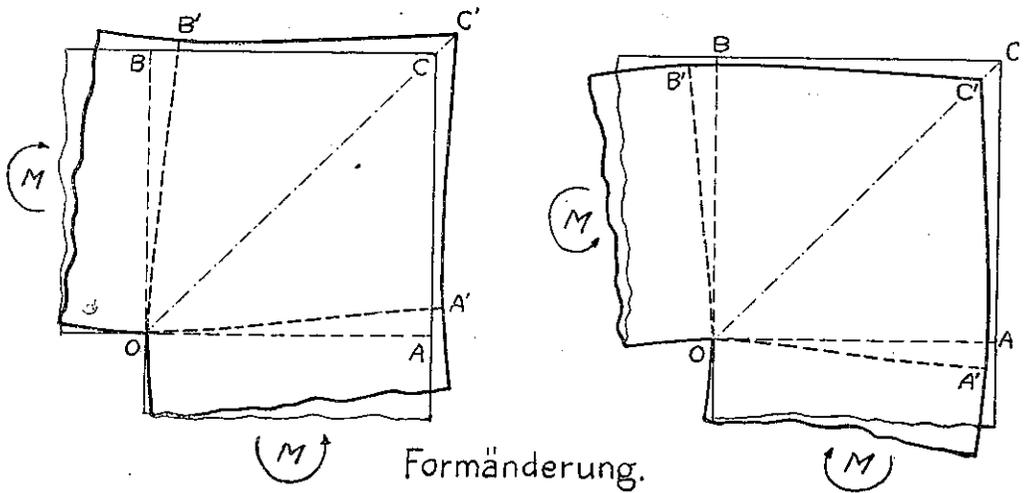
Maßstab $\frac{M}{a^2}$

Tafel III. Das durch reine Biegung belastete gleichschenkelige Stab-Eck.
Spannungen in Polarkoordinaten.



σ_r : Normalspannungen in der Richtung der von O ausgehenden Strahlen;
 σ_t : senkrecht dazu stehende Normalspannungen.

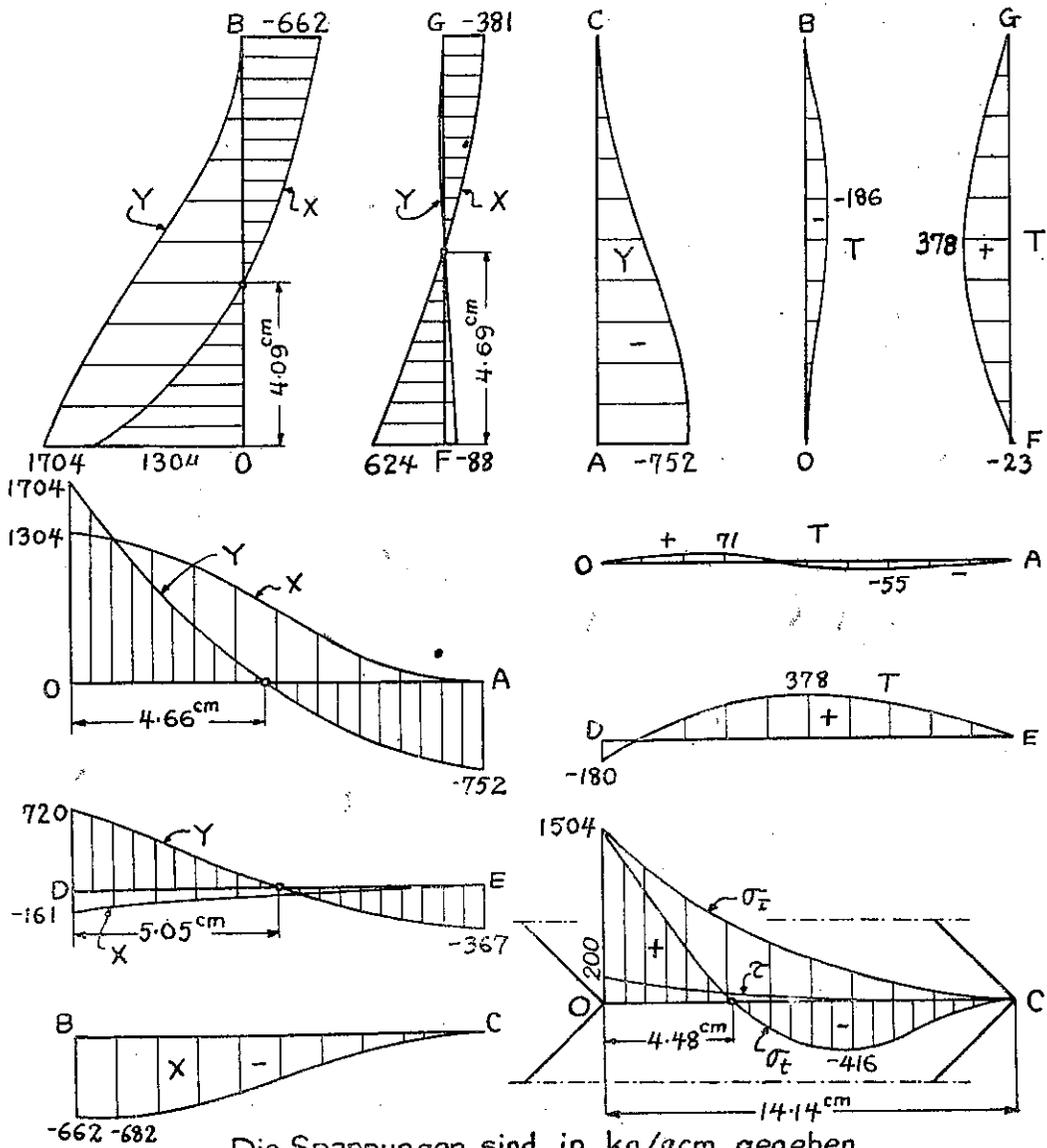
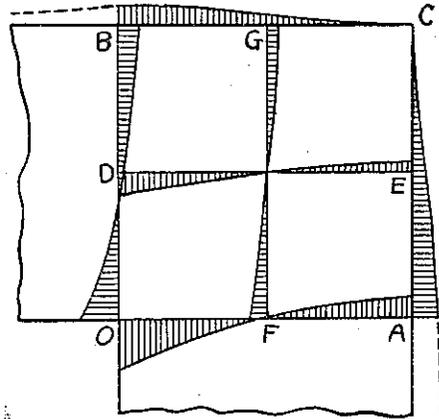
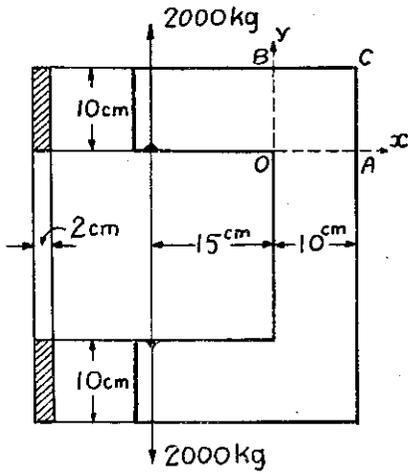
Tafel IV. Das durch reine Biegung belastete gleichschenkelige Stab-Eck.



— Zug - - - - Druck
Hauptspannungslinie.

(土木學會誌第十五卷第六號附圖)

Tafel V. Spannungen im Haken-Eck.



Die Spannungen sind in kg/qcm gegeben.