論 說 報 告

土木學會誌 第十五卷第二號 昭和四年二月

砂礫の運動

會員 工學士 鶴 見 一 之

Motion of Depositing Material

By Kazuyuki Tsurumi, C. E., Member.

內 容 梗 概

本篇は砂礫の河川內に於ける運動に就て論ぜるものにして第一に掘渫，第二に沈澱に對して記述せり。

先づ掘渫又は運搬沈澱物量に對する諸家の說を述べ次で緩流にある河川の一斷面內の流速變化の模樣を假定して河底にて運搬さるゝ砂礫量に對し一算法を示し第二に河流中の浮游土砂の沈澱を論じ沈砂池の設計に對する一考案を揭げたるものなり。

Synopsis

In this paper, the author discusses the motion of depositing material in a river, such as scouring and sedimentation. With reference to the several authors on scouring and motion of depositing material in a river, the author recommends his own method of determining the quantity of moving material on the bottom of a river with gentle flow, assuming a mode of velocity distribution at a section and also he proposes a new mode of designing a decantation basin based on his study on the law of sedimentation.

第一章 總 論

一 固體と流體との接面抵抗

靜止せる流體中にて固體の運動をなす際に受くる抵抗が如何なる大さにて表はさるゝやを知ることは極めて重要なる問題なり。逆に固體を靜止せしめて，流水の如き流體が之に衝突する時の抵抗を知るも，同樣に，理論的に抵抗を論ずる根本的の必要事項なり。從來船舶の航行中に受くる抵抗力の硏究を爲され，近來は同樣に飛行機，飛行船の如き空氣中に走航する固體と空氣なる流體との間に生ずる抵抗を知ることが必要に迫られたるため，諸種の實驗が行はれ，諸家が硏究中にあり，理學工學の方面中の難問の一と見做され居るなり。

今予は流體が水の場合にて，固體が靜止せるものに流水の衝突する場合の衝力に就て考ふ

ることゝせん。

Newton は平板面に水が直角に衝突する際に起る衝力を次式にて表はし得となせり。

$$R=\frac{\gamma}{g}Fv^2$$

R は衝力を kg. にて表はす,

γ は水の $1\,m^3$ の重量を kg. にて表はす，即 1 000 kg. なり，

F は板面の面積にて m^2 を單位とす，

v は板面に衝突する水の流速を m/sec にて表はす，

g は地球の重力による加速度にて $9.80\,m/sec^2$ なり。

Euler は同様の記號を用ひ

$$R=\frac{\gamma}{2g}Fv^2$$

となす。即ち Newton の示せる値の $\frac{1}{2}$ なり。

Dubuat は同様の記號を用ひ

$$R=k\gamma F\frac{v^2}{2g}$$

なる式を得たり。式中 k は $v=0.91\sim1.3$ m/sec なる時に次の値を有すとなす

$$k=1.513\sim1.402,\qquad 平均\ k=1.433$$

Piobert, Morin Didion は板の面積 $0.03\sim0.25\,m^2$. なる時に $k=2.81$ なる値を得たり。

Poncelet は $k=2.81$ なる値は水深の小なる時には用ふるを得れど，然らざる場合には用ふるを得ずとなせり。而して板の衝突を受くる面積を F とし，其の流れの方向の奥行を L とすれば，k の値は $L/\sqrt{F}$ によりて異ること次の如しとなす。

$L/\sqrt{F}$	0	1	2	3	實驗者
k	1.433	1.172	—	1.102	Dubuat
	1.254	1.282	1.306	1.362	Duchemin

Beufoy に從へば，$F=0.3m\times0.3m=0.09\,m^2$, $L=3m$, 水深 1.8m. の處にて種々の速力にて板を曳きたる時の k の値を求めたるに次の如くなりしと云ふ。

v (m/sec)	4	2	0.5
k	1.44	1.5	1.58

Gebers 及 Engels は 1906 年～1907 年 に諸種の實驗を行ひ，次の事實を知れり。

(一)　半ば浸水せる柱狀體の抵抗と同面積の板の抵抗とを比するに，前者に對し後者の受くる抵抗は流速小なる時には大にして，流速大なるに及びて小となる。

（二）　柱狀體の方は波が生ずるために抵抗は多少板狀のものに比し大なり。

（三）　柱狀體の L が增すに從て抵抗が增加す。

次に全部浸水せる物體に對しては次の如し。

（一）　平板と柱狀體が等面積 F を以て流水に衝突され，柱狀體にては L なる長さを有し等速の流水より受くる抵抗は短き L の時には板よりは抵抗小にして，L が F の一邊の長さの 30 倍に達せる時は板の抵抗と等しくなるべし。

（二）　正方形の面に水が衝突する時は L が一邊の長さの 2 倍の時に抵抗は最小なり。

（三）　深さの異るに從て抵抗は不規則に變化すと雖も其の法則は未だ明ならず。

William Froude は 1872 年に發表せし所によれば抵抗は殆ど v^2 にて變化すとなせるも，共の指數 2 は實驗の結果 1.83 乃至 2.16 に達するものにして，多くは 2.0 なりとの報告をなせり。又砂粒に對して大中小の粒に就ての實驗に對し抵抗は殆ど全部 v^2 に比例するを知りたり。實驗中唯一回 $v^{2.06}$ に比例する結果を得たりと云ふ。

Tidemann は 1875 年～1876 年に Amsterdam に於て實驗せる所によれば Froude と同結果を得たりと。

Gebers は船の模型に就ての實驗の結果，抵抗は $v^{1.975}$ に比例すとなせり。

以上記述せる抵抗は皆流速の大なる水と固體面との間に生ずる抵抗にして，v の指數は殆んど 2 にて他の指數を用ふるよりも 2 とする方便利なるが故に，多くは 2 を用ひ流水の固體に衝突する際に起る抵抗力，更に言葉を換て云ふならば，其の際の損失エネルギー量は v^2 に比例して減ずるものとなす，而して此の場合の流狀は，すべて混亂流狀 (turbulent flow) にある時のみにて流線狀 (stream line flow) の水流に對しては本法則は應用するを得ず。

二　混亂流狀と流線流狀

水力學に於て吾人は流水が其の運動すると共に摩擦を受け，之に打ち勝て流るゝために，エネルギーを消費するものなることを知る。而して此の消費エネルギー量は，水流の狀態即ち簡單に流狀の異るによりて異ることは實驗の示す所なり。

吾人は河川內に於て生ずる流狀を 2 種類に別つ。

一．流線狀態，　　　二　混亂狀態

而して此の 2 種流狀間には著しき差異のあることは吾人の知る所なり。其の重要なる點を擧ぐれば次の如し。

（イ）　流線狀態にては水分子は殆ど平行の線狀をなして流れ，混亂流狀にては水分子の主なる流向は，所謂沿軸方向 (axial direction) なれど，水分子個々は甚しく不規則に上下左右前後と一定せずして，互に衝突し合ひ恰かも煙が空中にて不規則なる狀態を呈するも風の吹

く方向に送られつゝあるは空氣の分子が風なる氣流を形成して流れつゝあることを示すものなり。

（ロ）　流線狀態にては水の溫度は流速に從ひて消費エネルギーに大なる影響を有すれど，混亂流狀にては其の影響を感ぜざる程小なり，換言すれば水の粘性は流線狀態にては考慮を要する問題なれど，混亂流狀にては其の影響を考ふるの要なし。

（ハ）　流れに對する抵抗即ち消費エネルギー量は流線狀態にては流速に正比例して增減すれど，混亂流狀にては流速の二乘又は殆ど二乘に正比例して增減す，而して水流に接する面の粗度の大小は消費エネルギーの增減を來す主因たり。

三　流線狀と混亂狀との限界

2 種の流狀の限界は之を限界速度 (Critical velocity) と稱し，Reynolds 敎授の示せる所によれば次式にて算出するを得。

$$v_c'=0.023(1+0.0336\,t+0.000221\,t^2)^{-1}D^{-1}\ldots\ldots(1)$$

$$v_c=0.00575(1+0.0336\,t+0.000221\,t^2)^{-1}R^{-1}\ldots\ldots(2)$$

v_c', v_c は限界速度を每秒メートルにて示す。

t は水の溫度にて攝氏の度にて示す。

D は圓管の直徑をメートルにて表はし，(2) 式は (1) 式の D の代りに流徑 (Hydraulic mean radius) R を用ひたるものにて，R はメートルを單位とす。

Barnes 及 Coker 兩敎授は實驗によりて，(1) 及 (2) 式にて求めたる限界速度は一定の値を與ふれど實際に之よりも，大又は小なる流速の 2 種の限界速度の存する事を示せり。其の大なる限界速度を高限界速度と名け，小なるを低限界速度と云ふ。而して前者は (1) 及 (2) に示す値の殆んど 1.57 倍にして，低限界速度は (1) 及 (2) 式にて得たる値の 0.157 倍なりと云ふ。

Reynolds 敎授も亦後に Barnes 及 Coker 兩敎授の如く第二限界速度たる低限界速度の存することを認め，(1) 及 (2) 式にて得たる値の 0.10 なることを示し，玆に二つの限界速度の存することは明瞭となれり。

此の二つの限界速度の生ずるは，一は小なる流速より，次第に流速を增して限界速度を見出す際の値にして此の時は高限界速度を得，一は次第に流速を減じて見出す所の限界速度にして低限界速度を得るものなり。

上記の高限界速度と稱するものも之を算出する時は極めて小なる流速にて，吾人が日常河川其の他に於て遭遇する流速とは著しき差あることは，次の數字例に就て之を知るを得べし今 $t=10°\mathrm{C}$ として (2) 式に入るゝに

$$v_c = 0.0042\,R^{-1}$$

故に $R=1\,\mathrm{m}$ とすれば，　$v_c = 0.0042\,\mathrm{m/sec}.$

故に低限界速度は更に之の 0.1 倍即 0.00042 m/sec となるべし。

仍て吾人の遭遇する場合の河川の流狀は常に混亂流狀にありと稱するを得べし。

四　混亂流狀の種類

混亂流狀は更に之を2種に分類するを得，其の一は緩流狀にして他の一は射流狀なり。

緩流狀とは strömende Bewegung 又は單に strömen の狀態にある流れに對し名けたるものにして，射流狀は Schiessende der reissende Bewegung 又は單に schiessen と名けられ，前者は緩流に生じ後者は急流に生ずるが故に上記の名を與ふることゝせり。

此の2種の流狀の差異を列擧すれば次の如し。

(イ)　同一の流量に對し同一形狀の水路に水を流す時に，限界深 (critical depth) と稱する深さに對し緩流狀に於ては水深は之よりも大なるも，射流にては之より小なり。

即ち t_c を限界深，t_s を緩流水深，t_r を射流水深とすれば

$$t_s > t_c > t_r$$

(ロ)　緩流狀に於ける流速を v_s，射流狀の流速を v_r とすれば

$$v_s < \sqrt{gt} < v_r$$

t は水深，g は地球の重力による加速度なり。

t は夫れ夫れの流狀の水深を示す，而して $v_c=\sqrt{gt}$ を波の傳播速度と稱す。

(ハ)　今 Chezy 公式 $v=c\sqrt{Ri}$ に於ける粗度係數を c，勾配を i とするに，緩流と射流との二つの場合に於て次の關係を得，

$$\frac{c^2 i}{g} < 1 \text{........緩流の場合}$$

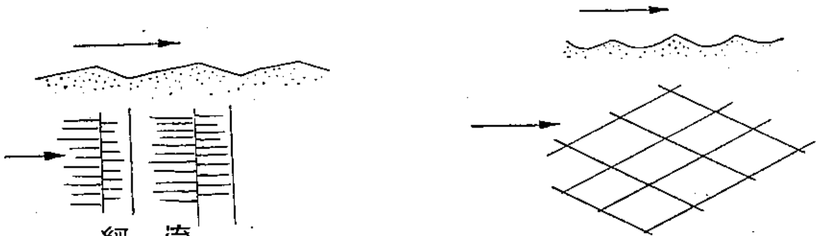
$$\frac{c^2 i}{g} > 1 \text{........射流の場合}$$

$$\frac{c^2 i}{g} = 1 \text{........限界の場合}$$

(ニ)　水路が砂床よりなる場合には，河床に生ずる砂波 (sand wave) が二つの流狀の異るに從て其の形狀を異にす。

緩流にては流れの方向に直角に波を生じ，射流にては斜に之を生ず。第一圖は之を示すものなり。

第一圖

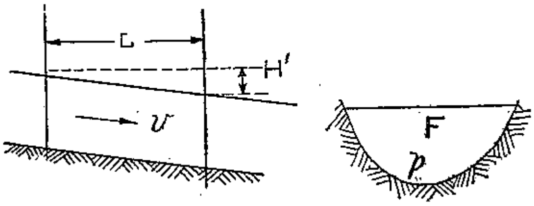


緩流　　射流

五　混亂流狀に於て起るエネルギー消費量

混亂流狀に於ては，河流は河床面に於て其の摩擦に打ち勝つため，及其の粗面によりて水分子が跳躍し，又內部の水分子も互に衝突するが如き際にエネルギーを消費するものにして其の消費さるゝエネルギー量を表はすものは水面勾配，又はエネルギー線の高さの差によりて，之を知るを得べし。而して其の量は平均流速の二乘に殆ど比例することは，吾人の既に知れる所なり。

第二圖



均流の場合に於ては二斷面の水面の高さの差を H' とすれば $\gamma H'Q$ なるエネルギーを消費することゝなるなり，Q は流量なり。

故に H' を表はすに m. を以てし $\gamma=1\,000\,\mathrm{kg/m^3}$，$Q$ を表はすに $\mathrm{m^3/sec}$ とすれば，第一，第二斷面間に於て每秒 $1\,000\,QH'$ m.kg. のエネルギーを消費さるゝことゝなるべし。而して此のエネルギーは主として潤面に於ての流水の摩擦に打ち勝つために費さるゝものなり。

若し流速公式として Chezy 公式を用ふれば

$$H'=\frac{v^2}{c^2R}L$$

なるが故に消費エネルギーの量を E_a にて表はせば，其の値は次の如くなるべし。

$$E_a=1\,000\,Q\frac{v^2}{c^2R}L$$

又 $Q=vF$ にて表はし得るが故に

$$E_a=1\,000\,F\frac{v^3}{c^2R}L$$

今潤周 (wetted perimeter) の長さを p m. とすれば $R=F/p$ なるが故に

$$E_a=1\,000\,\frac{v^3}{c^2}pL \qquad \text{m.kg./sec.}$$

本式は均流の成立し居る際の二斷面間に於て消費さるゝエネルギー量なり。

更に進んで一般的に考ふるに定流に於て不均流の場合にも上下流二斷面間に於て消費さるゝエネルギー量としては

$$\gamma Q(H_1-H_2) \qquad \text{m.kg./sec.}$$

なり。式中 H_1 は上流斷面の有效水頭にて，H_2 は下流斷面の夫なり，即ち或基面を考ふれば，$H=Z+p/\gamma+v^2/2g$ なるが故に

$$H_1=Z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{v_1^2}{2g}, \qquad H_2=Z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{v_2^2}{2g}$$

にして河流が共に等壓の大氣壓を受くる時には

$$H_1-H_2=(Z_1-Z_2)+\frac{v_1^2-v_2^2}{2g}=H'$$

故に

$$E_a=\gamma Q\left[(Z_1-Z_2)+\frac{v_1^2-v_2^2}{2g}\right]$$

而して上式が丁度成り立つ時には，所謂定常狀態 (Beharrungs-zustand) にあり。然るに H_1 にして H_2+H' よりも大なる場合には，第一斷面より第二斷面に流るゝ間に於て河床に於て Q なる流量の水を流すに足る外，更に餘勢が存することを示すものなるが故に，此の餘勢を以て仕事をなし得る原因が存する場合には，或仕事をなさんとするものなり。例へば河床に於て砂礫を動かし掘淩をなすが如き之なり。之に反して $H_1<H_2+H'$ なる時には水と共に砂礫を動かしつゝありし場合には，今や之を動かすに足るのエネルギーを有せざるに由りて，砂礫の運動は止み，又浮游中の土砂粒は之を有する丈けのエネルギーが不足して之を放ち沈澱せしむるに至るべし。

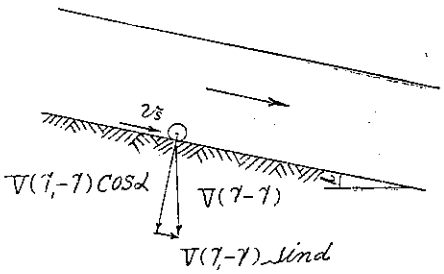
以上記述の理によりて河床の掘淩又は沈澱は僅かのエネルギー量の變化によりても生じ定常狀態が破らるゝものなるを知るを得。

第二章　底速の衝力による河床砂礫の運動

一　河床に於ける砂礫の運動

第三圖は河底に一の球狀粒子あり，河底の流速を v m/sec とし，其の容積は V m^3 に

第　三　圖



して，其の $1\,\mathrm{m}^3$ の重量を γ_1 kg. とすれば，水の衝突によりて其の粒子の運動を起すには二つの方法あるべきは力學の教ふる所なり。其の一は摺動にして其の二は回轉なり。此の2種の運動の極限の場合を考ふるに次式を得べし。

摺動の極限に對して

$$\gamma k\, F\frac{v_s^2}{2g}+V(\gamma_1-\gamma)\sin\alpha = V(\gamma_1-\gamma)\cos\alpha\, f \quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

f は摩擦係數なり。回轉に對して

$$\left[\gamma k\, F\frac{v_s^2}{2g}+V(\gamma_1-\gamma)\sin\alpha\right]\frac{D}{2}=V(\gamma_1-\gamma)\cos\alpha\, f_r \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

f_r は回轉に對する摩擦係數，D は球狀粒子の直徑を m. にて表はす。

球狀粒子に於ては

$$F=\frac{\pi D^2}{4},\qquad V=\frac{\pi D^3}{6}$$

なるが故に (1) 式より次の二式を得。

$$\left.\begin{aligned} D &\leqq \frac{3}{2}\,\frac{\gamma}{\gamma_1-\gamma}\,\frac{k}{(f\cos\alpha-\sin\alpha)}\,\frac{v_s^2}{2g} \\ \frac{v_s^2}{2g} &\geqq \frac{2}{3}\,\frac{\gamma_1-\gamma}{\gamma}\,\frac{f\cos\alpha-\sin\alpha}{k}D \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(2) 式より次式を得。

$$\frac{v_s^2}{2g}=\frac{4}{3}\,\frac{\gamma_1-\gamma}{\gamma k}\left[f_r\cos\alpha-\sin\alpha\ \frac{D}{2}\right] \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

若し α が小なる時には (3) 及 (4) 式は次の如くなるべし。

$$\frac{v_s^2}{2g}=\frac{2}{3}\,\frac{\gamma_1-\gamma}{\gamma}\,\frac{f}{k}\,D \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3a)$$

$$\frac{v_s^2}{2g}=\frac{4}{3}\,\frac{\gamma_1-\gamma}{\gamma}\,\frac{f_r}{k} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4a)$$

回轉と摺動との限界に對して直徑を求むるには，(3a) と (4a) とを等しく置けば可なり。即ち

$$D=\frac{2f_r}{f}$$

f に就ては諸種の面に對して其の數が與へられあるも，f_r に就ては石面へ石材の回轉摩擦率の實驗されたるものなし，f は大約 0.5～0.7 なり。f_r は鐵と鐵とに對し 0.05 cm. なるが故に，上記の如く石と石との面に對する値を有せざるが故に之を其の儘使用することゝし，$f=0.5$ とすれば次式を得。

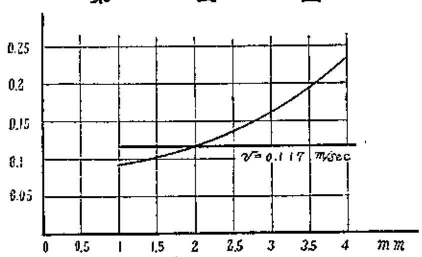
$$D=\frac{2\times 0.0005}{0.5}=0.002\ \mathrm{m.}=2\ \mathrm{mm.}$$

以上記述する所によれば，直徑 2mm. 以下の球狀砂粒は如何なる流速にても回轉せずして摺動するのみ。而して直徑 2 mm. 以上の球狀粒子は或は回轉し或は摺動するものなるが，今極限の場合を考へ $D=2$ mm.$=0.002$ m，$\gamma_1=2\,400\ \mathrm{kg/m^3}$，$f=0.5$，$k=2.0$ (球狀體に對し)，(3a) 式より v を求むる時は之を滑動せしむるには

$$v=0.117\ \mathrm{m/sec}$$

以上に至らざるべからず。更に $f_r=0.05$ cm. として，(4a) 式を用ひ上記の 2 mm. の球粒が如何なる流速にて回轉を起さしめ得るかを求めんに同樣に $v=0.117$ m/sec に於て將に回轉を起さんとする事は明なり。而して $D=2$ mm. 以上の球粒に於ては回轉を起さしむる流速が摺動を起さしむる流速より小なるが故に容易に回轉を起すことゝなる。上記の結果を圖示すれば**第四圖**の如し。

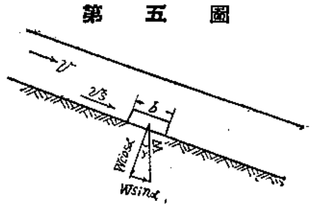
第　四　圖



二　河床に堆積せる礫の大さと流速との關係

河床に長方體の砂礫が存する場合に就て考ふることゝせん。此の場合には容易に回轉を起さずして摺動をなすのみなることは容易に證明するを得べし。

第　五　圖



前節と同樣の考を以て摺動をなさしむるには速度 v_s は次の條件を滿足せざるべからず。

$$v_s^2\geqq\left\{\frac{2gf\cos\alpha}{k}\right\}\left(\frac{\gamma_1-\gamma}{\gamma}\right)b$$

此の河川に於て平均斷面流速を求むるに Chezy 公式を應用すれば

$$v=c\sqrt{R\sin\alpha}$$

而して斷面平均流速 v と底速 v_s とは正比例するものと假定すれば，

$$v=k_1v_s$$

ゝを得。(此の假定は屢々應用さるゝが故に任意の假定には非ず)。此の關係を前式に入るれば

$$c^2 R \sin\alpha = \frac{k_1^2}{k} \frac{(\gamma_1-\gamma)}{\gamma} 2gfb\cos\alpha$$

$$\therefore \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{k_1^2}{k} \frac{\gamma_1-\gamma}{\gamma} \frac{2gfb}{c^2 R}$$

式中 $\frac{k_1^2}{k} \frac{\gamma_1-\gamma}{\gamma} \frac{2gf}{c^2}$ は其の變化の小なるもの，又は常數なるが故に之を常數 C にて置き換ふる時は

$$\operatorname{tg}\alpha = C\frac{b}{R}$$

b は礫の大さなるが故に河流によりて異るべく，嘗て Valentini は Adda 河の一部に於て上流部にては

$$\operatorname{tg}\alpha = 0.871\frac{b}{R} \quad \cdots\cdots\cdots (A)$$

又 同氏は山川 (Gebirgsfluss) に於ては次式が成立すと云ふ，

$$\operatorname{tg}\alpha = 0.093\frac{b}{R} \quad \cdots\cdots\cdots (B)$$

Gravelius は上式に對し次の如く訂正すべしと稱す。

$$\operatorname{tg}\alpha = 0.871\frac{b}{R}(1\pm 0.108) \quad \cdots\cdots\cdots (A_1)$$

$$\operatorname{tg}\alpha = 0.093\frac{b}{R}(1\pm 0.106) \quad \cdots\cdots\cdots (B_1)$$

三 Loire 河に於ける砂波の移動

前記の砂礫は底速 v によりて動かされ滑りつゝ河流の方向に移行するが故に，其の河底に沈澱したる砂波移動の模樣を調査することは肝要なり。

Sainjon は Loire 河にて觀測したる所によれば，砂波の進行速度 V は次式にて表はすを得べしとなす。

$$V = 0.00013\,(v_0^2 - 0.11)$$

V は m/sec を以て單位となし，v_0 は河流の表面流速にて m/sec を單位とす。本式は $v_0 < 1.016$ m/sec の時に成り立つと云ふ。

然るに其の後 1871 年に v_0 なる表面流速の代りに底速 v_s を用ひ，河底 1 m. の幅に就て流砂量を求むるに次式を用ひ得ることを示せり，

$$q_s=0.00037\,(v_s^2-0.06)\quad 但し\ v_s<0.55\ \mathrm{m/sec}$$

v_s が大となる時には

$$q_s=0.00037\,v_s^2$$

上の式に依れば $v_s=0.25$ m/sec の時には $q_s=0$ となる故に Loire 河の砂は $v_s=0.25\sim0.55$ m/sec の時に動き居るものと稱するを得べし，然れども砂の大さ石質及運動が摺動なるや回轉なるやは明かならず。

四　河床に堆積せる砂礫の大さに就て

一邊の長さ b なる立方體の砂礫ありとして，之が河床に於て河流のため摺動を起すためには流速は少くとも次式の値を有すべきことを必要とするは既知の如し。

$$v_s=\sqrt{\frac{2gf\cos\alpha}{k}\ \frac{\gamma_1-\gamma}{\gamma}\,b}$$

上式中 b を除きたる諸値は與へられたる河床，物體に對しては常數と見做さるゝが故に

$$v_s=k_0\sqrt{b}$$

となすを得べく，k_0 は物體の形狀を異にするに從つて變ずる常數なり。Leslie に從へば k_0 の値は立方體の礫にては 3.23，球體の礫に就ては 4.58 なりと云ふ。

v_s は m/sec にて示し，b は m. を單位とす。上式に從へば比重の大なるものは，小なるものに比して著しく摺動に對する抵抗力大なり，而して b の大なるものは其の抵抗力も從つて大なり。今吾人は立方體の礫の重量を水中にて W とせんに

$$W=(\gamma_1-\gamma)\,b^3$$

$$\therefore\quad b=\left(\frac{W}{\gamma_1-\gamma}\right)^{\frac{1}{3}}=CW^{\frac{1}{3}}\qquad 但し\ C=\left(\frac{1}{\gamma_1-\gamma}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\therefore\quad v_s=k_0C^{\frac{1}{2}}W^{\frac{1}{6}}$$

今 $k_0C^{\frac{1}{2}}=k$ と置けば

$$v_s=kW^{\frac{1}{6}}$$

底速は礫の重量の 1/6 乘に比例することゝなる。此の事は 1753 年に既に Brahms の唱道せる所にして，其の後 Airy は 1834 年及 1835 年に之を公にし，Law は 1885 年に之を論ぜし事ありたり。

v_s は前陳の如く底速なるも一斷面の平均流速を v とする時には $v=k_1v_s$ となすを得ることは前掲の如し，故に

$$v=k_1k\,W^{\frac{1}{6}}=k_0'W^{\frac{1}{6}}$$

Sternberg は礫が次第に摺動して，下流に送らるゝ間に磨滅し，重量の減ずるは其の自重と摩擦係數に比例し，且つ之が送られたる距離に比例するとなし次式を示せり。

$$dW = = c_1 f W dx$$

dW は dx なる長さの間送らるゝに際し磨り減らされたる重量を示すものなり，又 c_1 は或常數なり。

$$\therefore \quad \frac{dW}{W} = c_1 f \, dx$$

$$\log_e W = c_1 f x + c$$

而して $x=0$ の時 W を W_0 とすれば

$$\log_e \frac{W}{W_0} = c_1 f x, \qquad W = W_0 \, e^{c_1 f x}$$

例へば Heyne は Graz 附近の Mur 河にて調査せる所によれば，基點に於て 224 cm^3 の石が 120 km. 下流附近にて 21 cm^3 の大さに磨滅せりと云ふ。此の事實より $c_1 f$ を求むる時は

$$c_1 f = \frac{1}{120} \log_e \frac{224}{21} = 0.0181 \ @ \ \mathrm{km.}$$

此の關係を前に得たる v の式に入るゝ時は

$$v = k_0' W_0^{\frac{1}{6}} e^{\frac{c_1 f x}{6}}$$

以上の理論を正しとすれば，一般に $Q = vF$ なるが故に矩形斷面に於て $F = Bt$ (B を幅，t を深さとす)

$$t = \frac{Q}{vB} = \frac{q}{v}$$

q は單位幅の流量を m^3/sec にて表はす。

又 $v = c\sqrt{ti}$ なる Chezy 公式を用ふれば $i = \dfrac{dh}{dx}$ なる水面勾配なるが故に

$$v = c\sqrt{t \frac{dh}{dx}}$$

$$v^2 = c^2 t \frac{dh}{dx}$$

$$\therefore \quad \frac{dh}{dx} = \frac{v^3}{c^2 q} = \frac{k_0'^3 W_0^{\frac{1}{2}}}{c^2 q} e^{\frac{c_1 f x}{2}}$$

$$\therefore \quad h=\frac{k_0^{1/3}W_0^{\frac{1}{2}}}{c^2q} \quad \frac{2}{c_1 f}\, e^{\frac{c_1 fx}{2}}+C$$

然るに $x=0$ に對し $h=0$ とすれば

$$C=-\frac{k_0^{1/3}W_0^{\frac{1}{2}}}{c^2q} \quad \frac{2}{c_1 f}$$

$$\therefore \quad h=\frac{2k_0^{1/3}W_0^{\frac{1}{2}}}{c^2qc_1 f}\left(e^{\frac{c_1 fx}{2}}-1\right)$$

$c_1 f$ に就ては Erdmann に從へば次の如し。

	1 km. に付き $c_1\ f$ の値
花崗岩	0.003～0.0042
石灰岩	0.0092～0.0183
砂　岩	0.00585～0.0075
頁　岩	0.00159～0.00316

五　砂礫を運搬する河川の流速

淸水が v なる流速にて流され，其の流量 Q なる時には定流に於て或一斷面を通過するエネルギーは γQv なり。今他よりエネルギーを加へず，又特に他の原因にて之を失ふことなしとすれば，同一のエネルギーを以て動かし得べき物料あらば，之を動かすべく，水と共に砂礫を運搬する時には其の流速を v_1 とし，其の物料の量を αQ とすれば次式を得べし。

$$\gamma Qv=[\gamma Q+\alpha Q(\gamma_1-\gamma)]v_1$$

$$\therefore \quad v_1=v\,\frac{\gamma}{\gamma+\alpha(\gamma_1-\gamma)}$$

例へば $\gamma_1=2\,400\ \mathrm{kg/m^3}$, $\alpha=0.2$ とすれば

$$v_1=v/1.28$$

即ち濁水は淸水よりは流速が減少するを知るべし。此の事實の證明として Mougin の示せる所次の如し。

觀測時	量水標	表面流速	水質
14, IV 16 時	$+16^{\mathrm{m}}$	$4.16^{\mathrm{m/sec}}$	濁れる雪融け水
15, IV 17 時	+20	3.85	水源の山の融雪のため黑色を帶びたる粘氣の濁水
16, IV 朝	+15	4.25	夜寒かりしため淸水となる

之を見るに第二，第三の觀測に於ては淸水の時は水位減じて，然も濁水の場合に比し流速大なり。又選鑛の際，鑛石粉を水流にて流送するや其のために流速が淸水の場合に比し減少するは正に此の理に由るものなり。

今淸水に對し Chezy 公式 $v=c\sqrt{Ri}$ が成り立ち，濁水に對して $v_1=c_1\sqrt{Ri}$ が成り立つとすれば

$$\frac{v}{v_1}=\frac{c}{c_1}=\frac{\gamma+\alpha(\gamma_1-\gamma)}{\gamma}$$

即ち

$$c_1=\frac{\gamma}{\gamma+\alpha(\gamma_1-\gamma)}c$$

を得べし。吾人は旣に

$$v_s^2=\frac{2gf}{k}\ \frac{\gamma_1-\gamma}{\gamma}\ \cos\alpha\times b$$

を得たるが，前に考へたるが如く $v=k_1v_s$ とすれば，

$$v=k_1\sqrt{\frac{2gf}{k}\ \frac{\gamma_1-\gamma}{\gamma}\cos\alpha\times b}$$

本式より得る v は與へられたる γ_1, f, α, k に對し b なる石の大さに丁度相當する値にて，之を v_0 にて表はすことゝせん。河流の斷面平均流速が此の v_0 よりも大なれば，更に餘勢を有するが故に河床に動かし得べき物料の存する時には，之を動かし得べく，又之に反し旣に幾許かの物料を動かして釣合を保てる河流が速度減少したる時には其の運搬物料を失ふに至るべし。尙ほ又丁度 v なる平均流速を有し物料を運搬する力が丁度釣合ひ居り流速の增減なく物料の沈澱又は靜止或は掘浚等の生ぜざる場合には河流は其の物料にて飽和狀態にありと稱せらる。

扨て今河流の流速が v_0 より大なる場合に就きて考へんに此の場合には掘浚を生ずるに至るべし。此の時に幾許量の砂礫が動かさるゝやを算出せんに次の如く考ふるを得べし。

今或水位に對し平均流速 v に餘勢ありたる場合には前に考へたるが如く

$$v_1=\frac{\gamma}{\gamma+\alpha(\gamma_1-\gamma)}v$$

而して $v_1=v_0$ となる時丁度釣合ふ狀態となれば，此の關係より α を求め得べし。

$$k_1\sqrt{\frac{2gf}{k}\ \frac{\gamma_1-\gamma}{\gamma}\ \cos\alpha\times b}=\frac{\gamma v}{\gamma+\alpha(\gamma_1-\gamma)}$$

$$\therefore\quad \alpha=\frac{\gamma}{\gamma_1-\gamma}\left[\frac{\gamma v}{k_1\sqrt{\dfrac{2gf}{k}\ \dfrac{\gamma_1-\gamma}{\gamma}\cos\alpha\times b}}-1\right]$$

故に掘浚さるゝ砂礫量は之を Q_s とすれば

$$Q_s=\alpha Q=\frac{\gamma Q}{\gamma_1-\gamma}\left[\frac{v}{k_1\sqrt{\frac{2gf}{k}\ \frac{\gamma_1-\gamma}{\gamma}\cos\alpha\times b}}-1\right]$$

或は

$$Q_s=\frac{\gamma Q}{\gamma_1-\gamma}\left(\frac{v}{v_b}-1\right)$$

第三章　掃力理論による砂礫運動

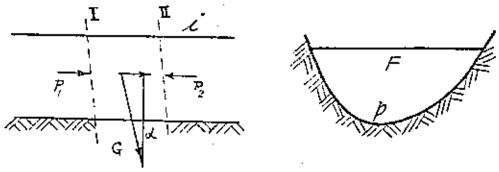
一　掃力理論

佛人 du Boys はRhone 河に於て得たる觀測の結果，1879年 掃力理論 (Schlepp Kraft theorie) を發表せり，此の理論を基として，爾後諸家の理論的に又は實驗的に幾多の研究をなされたるものあり。河底に於ける砂礫の運動に就ても，本理論によりて幾多の研究あり，故に前揭の理論とは別方面より砂礫の運動を考ふる事とせん。

抑も du Boys の此の理論は頗る簡單なる式にて表はさるれど，之に就て理論的の證明をなすこと困難にして未だ一定の說を得ず。次に示すものは理論的には不完全なれど此の理論の一證明法と見るを得べし。

du Boys に先ちて du Buat は次の如く考へたり。河の縱斷面を**第六圖**に示すが如く考へ，單位長を距れる二橫斷面を考へ，其の間に挾まれたる水體の平衡に就て式を作る時は流れの方向に於ける分力は次式の如くなるべし。G を此の水體の重量とすれば $G\sin\alpha$ は考へつゝある分力なり。

第六圖



$$G=F\times 1\times\gamma=\gamma F$$

$$\therefore\quad R=P_1-P_2+\gamma F\sin\alpha$$

P_1, P_2 は圖示せるが如く兩端斷面の全壓力にして R は周面に於ける抵抗力なり。R の働く面積は $p\times 1$ にて R の $1\mathrm{m}^2$ の値は R/p にて之を S にて表はす時は

$$S=\frac{P_1-P_2}{p}+\gamma\ \frac{F}{p}\sin\alpha$$

而して $P_1=P_2$ なる時には

$$S=\gamma\ \frac{F}{p}\sin\alpha=\gamma R\sin\alpha$$

$\sin\alpha$ を表はすに J を以てすれば

$$S=\gamma RJ\qquad \mathrm{kg/m^2}$$

之は du Buat の掃力理論なり。

矩形渠にては R なる流深は t なる水深と等しくとり得ることは水深が水面幅に比して小なる時に屢々行ふ假定なるを以て $R=t$, 然る時は

$$S=\gamma tJ \qquad \mathrm{kg/m^2}$$

是 du Boys の掃力理論なり。t 及 J は之を測定するに便利の値にして底速及平均流速の測定よりは容易なるは本理論應用に便となすべき點なり。本理論を誘導する方法は幾分不透徹の點あれど觀測の結果と比較して大差なしとの事より之を基として諸種の結果を誘導せられたるものあり。

本理論應用の範圍は均流ならざる時にも小區域をとりて考ふれば之を應用して差支なし。又渠底も平面ならざる場合にても其の勾配小ならば差支なしとなさる。

尙ほ本理論の證明として Wang 著 Grundriss der Wildbachverbauung に de Thierry の提出せる方法あり。

二　掃力理論による砂礫の運搬量

du Boys は砂礫が縱に層々重なり居るものと考へ，其の一層の厚を e とし，掃力が大なる時は其の數層を逐次に動かし其の全力を消費するものとし，掃力小となれば次第に下の方から運動を止め，遂に全く動かすに足る力なくなるが故に運搬さるゝ量が皆無となるに至ると考ふ。

今 n 層の砂利が不動層の上を動くに γtJ なる全掃力を費すものとすれば

$$\gamma tJ=f\,n\,e(\gamma_1-\gamma)$$

γ_1 は石質により變ずる $1\,\mathrm{m^3}$ の重量を kg. にて表はす，f は摩擦係數とす。

今一層の砂利が v_0 なる速度にて動かさるれば最下層のものは不動層の上を v_0 にて動き，其の直上の層は不動層に比し $2v_0$ の速度にて動き，同樣の方法にて最上層は不動層に對し $(n-1)\,v_0$ にて動くことゝなるべし。故に全動層の量は川幅 1 m. に就て次の如し，

$$G=e[v_0+2v_0+3v_0+\cdots\cdots+(n-1)v_0]=ev_0\frac{n(n-1)}{2}$$

然るに最上層又は任意の一層を動かすに要する掃力を S_0 とすれば

$$S_0=f\,e(\gamma_1-\gamma)$$

なり，故に　　$nS_0=\gamma tJ$　　又は　　$n=\dfrac{\gamma tJ}{S_0}$

仍て　　$$G=\frac{e\,v_0}{2}\,\frac{\gamma tJ}{S_0}\left(\frac{\gamma tJ}{S_0}-1\right)=\frac{ev_0\gamma tJ}{2S_0^2}(\gamma tJ-S_0)$$

今　$\psi=\frac{ev_0}{2S_0^2}\gamma^2$ とすれば

$$G=\psi tJ\left(tJ-\frac{S_0}{\gamma}\right)$$

ψ は主として一層の厚さ，石質等によるものにして ψ は之等を定數とすれば定數となるべく，又類似の礫に對しては不變と考へて可なる場合も多しとす。

次に S_0 は掃力なるが故に $S_0=\gamma t_0 J$ なる形にて表はすを得べし。之を上式に入るゝ時は

$$G=\psi t(t-t_0)J^2 \qquad \mathrm{m^3/m/sec}$$

尙ほ Chezy 公式によれば $v=c\sqrt{tJ}$

$$\therefore\quad G=\psi\frac{v^2}{c^2}\left(\frac{v^2}{c^2}-\frac{S_0}{\gamma}\right)$$

此の式を見るに $\frac{v^2}{c^2}>\frac{S_0}{\gamma}$ なるに至りて始めて G は値を有するに至るべし，即 $v>c\sqrt{\frac{S_0}{\gamma}}$ なる時に G は或値を有すべし。本式によりて明なるが如く，v が增す事によりて G は v^4 にて變化するを知るべし。

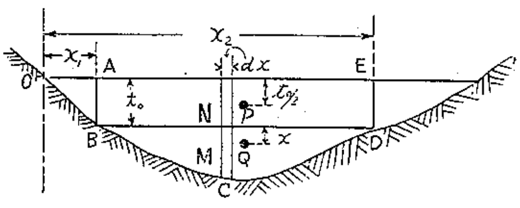
以上の理論は全く摺動をなす礫のみに就て論ぜるものなるが，砂礫は摺動のみならず，回轉をなし，又は飛躍をなすが故に本式を以て全部の運搬砂礫の量を求め得べからざるや明なり。Schoklitsch は Graz 工科大學に於て實驗せる所によれば，礫は一度運動をなすや，一時留まり，次で又運動するが如くなり，此の靜止せるものを運動せしむるために，掃力の大部分を費すならんと云ふ。故に上記の du Boys の式は正當の如きも幾分の修正をなすべしとて次式を發表せり。

$$G_1=0.54\frac{\gamma^2}{\gamma_1-\gamma}tJ(tJ-t_0J_0)$$

t_0, J_0 は $S_0=\gamma t_0J_0$ にて表はし，其の石質，大さを掃力にて示せるものなり。

三　任意の横斷面に於ける運動砂礫量

第七圖



前項に示せる運動砂礫量は幅 1 m の河幅に就ての量にして，又前記の如く $S_0=\gamma t_0 J$ とす。J は今考へつゝある區域の水面勾配なり。今河底が同一石質の同大の礫より成り居るとすれば t_0 よりも小なる水深の河床にては礫の運動を生ぜず。t_0 より大なる部分にのみ其の運動を生ずるを知るべし。

München 工科大學教授 Kreuter は任意の形の一横斷面中の全運動礫量を次の如くにして計算することを發表せり。今河底の礫によりて S_0 を知り，與へられたる J によりて t_0 を定め，水面より t_0 を**第七圖**の如くとりて考ふるに河底にて礫の運動を生ずるは BCD の部のみにて AB 及 DF の部にては毫も運動を生ぜず。故に圖の如く O を原點として考ふる時は全量を得んとすれば次式によるべし。

$$G_0=\psi J^2\int_{x_1}^{x_2} t(t-t_0)dx$$

本式を積分するために次の如くにす，

$$G_0=\psi J^2\left[\int_{x_1}^{x_2} t^2dx-t_0\int_{x_1}^{x_2} tdx\right]$$

第一項の積分を考ふるに

$$\int_{x_1}^{x_2} t\ 2\left(\frac{t}{2}\right)dx=2\int_{x_1}^{x_2} t\ \frac{t}{2}\ dx$$

tdx は圖の如く小なる幅の斷面形を示し其の重心は水面より $\frac{t}{2}$ にあり，故に $tdx\times\frac{t}{2}$ は水面 OA に關し面積 $ABCDE$ の力率を示すものなり。故に之を $ABDE$ 及 BCD の二部に別ちて考ふるに N=面積 $ABDE$, M=面積 BCD, N の重心 P は水面より $t_0/2$ にあり，M の重心 Q は BD 線下 x にありとすれば水面よりは t_0+x にあり，故に

$$2\int_{x_1}^{x_2} t\ \frac{t}{2}\ dx=2\left[N\frac{t_0}{2}+M(t_0+x)\right]=Nt_0+2M(t_0+x)$$

次に第二項の積分は

$$t_0\int_{x_1}^{x_2} tdx=t_0(M+N)$$

$$\therefore\quad G_0=\psi J^2\{Nt_0+2M(t_0+x)-t_0(M+N)\}$$

即　$$G_0=\psi J^2M(t_0+2x)\qquad \mathrm{m^3/sec}$$

四　泥土を運搬する濁水に就て

礫砂は漸次河底に於て磨滅し又互に衝突して細粒に粉碎され，所謂 Silt（英），Schlamm（獨）となりて水中に浮游す。此の種の沈澱物に關しては其の研究未だ十分ならず，然れども前掲の Schoklitsch 教授の實驗式中の t_0, J_0 の値は粉狀の泥粒に關しては殆んど零と見做し得るが如く小なるが故に

$$G_s=0.54\frac{\gamma^2}{\gamma_1-\gamma}t^2J^2$$

之と Chezy 公式　$v=c\sqrt{tJ}$　とを結び付くれば

$$G_s=0.54\,\frac{\gamma^2}{\gamma_1-\gamma}\,\frac{v^4}{c^4}\qquad \mathrm{m^3/m/sec.}$$

本式は河幅 1 m. に對する値なるが故に若し河水 1 m³ 中に含まるゝ泥量を知らんとせば，vt にて之を除すれば可なり。即ち

$$G'_s=0.54\,\frac{\gamma^2}{\gamma_1-\gamma}\,\frac{v^3}{c^4t}$$

此の際注意すべきは式中の c の値にして濁水に於ての c と清水に於ける c とは異り。Schoklitsch 教授の示せる所によれば Bazin の式 $c=\dfrac{87}{1+\dfrac{\gamma}{\sqrt{R}}}$ 中の γ の値は清水にて 0.265 なりしものが，濁水となりたる時には次式にて示す値を有すと云ふ。

$$\gamma=0.265+\sqrt[4]{5\,000(tJ-t_0J_0)}$$

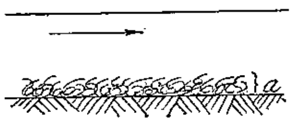
du Boys も亦沈澱物が運動を始むれば Chezy 公式の c は最早其の儘應用し得ずとなせり。

第四章　諸家の研究

一　Gilbert の實驗

G. K. Gilbert は U. S. Geological Survey の Professional Paper 86 にて 1914 年に，砂大が河底にて運搬せらるゝ狀況に就て同氏が Berkley 大學にて行へる實驗の結果を發表せり。同氏によれば河底砂礫の運動に當り摺動をなすものは極めて稀にして跳躍するもの及回轉するものゝ方多しと云ふ。而して回轉するものは同大より成る礫に於ては先づ夫れ自身の礫さ即ち其の直徑に等しき高を轉げ上りたる後に進まざるべからず，此の如く昇りたる時には跳び行くに十分なる速力を有すべく，大小粒混合したる河床にて細砂の上に粗粒のものがある時は，徐々に回轉すること車輪の如し，而して其の轉跡を細砂上に印す，其の際には摩擦が接面に働くを以て流水のエネルギーは之がために費され，流水の速度よりは粗粒礫の動く速度は小となる。河底に跳躍する粒子の狀況は第八圖の如くなると云ふ。不動層上に或厚さ a 丈け濁りて見ゆる層あり，之を跳躍層 (Zone of Saltation) と名けたり。

第八圖



Gilbert は粒子の大さを直徑 D 呎とする時には次式が成立つと云ふ。

$$D=0.0025\,v^{2.7}=\frac{0.0042}{s-1}\,v^{2.7}$$

v は平均流速を ft/sec にて示し，s は石の比重なり。之をメートル式に改むる時には

$$D=\frac{0.0318}{s-1}\,v^{2.7}=\frac{31.8}{\gamma_1-\gamma}\,v^{2.7}$$

今 $\gamma_1=2\,650\,\mathrm{kg/m^3}$ とする時には $D=0.0193v^{2.7}$, 又 $v=4.28D^{0.37}\fallingdotseq 4.28D^{0.4}$

本式を前に記せる Leslie の式 $v_s=4.58D^{0.5}$ と比する時には其の形及數の近似せるを見るべく頗る注目に値する事實なりと稱すべし。

Gilbert によれば運搬さるゝ砂礫量は水面勾配 J^nに比例し，n は 1.2 乃至 2.0 にして平均 1.5 なりと云ふ，而して J を不變に保つ時には大小粒混合せる水底にての運動砂量は次式にて示さるべしと云ふ。

$$G=c_2(Q-c_3)^{0.81\sim1.24}$$

c_2，c_3 は共に常數にして，Q は流水量なり。本式は前に求めたる

$$Q_s=\frac{\gamma Q}{\gamma_1-\gamma}\left(\frac{v}{v_0}-1\right)=\frac{\gamma}{\gamma_1-\gamma}\,\frac{v_0}{v}\left(Q-Q\frac{v}{v_0}\right)$$

と相對せしむる時は又共の形に於て相似たるものあるを知るべく，運動砂礫量が殆んど Q なる流水量に正比例して增減するの事實を示せるは大に注目すべき事なりとす。

二 Schoklitsch の研究

du Boys の掃力理論は前述の如く十分なる說明をなし得ざるが砂礫の堆積せる河床に掃力が働く場合に單に砂礫面に接する水の受くる摩擦に打ち勝つのみならず餘分の掃力の存する時には此の餘力を以て砂礫を運搬し始むるに至るべし，之に反する場合は運動中の砂礫を靜止するに至るなり。

今 F を或斷面積，J を勾配とすれば，全斷面掃力 S は次の如くなるは既に du Buat の與へたる所の如し。

$$S=\gamma FJ$$

然るに全掃力は，全力を擧げて砂礫を運ぶことなく其の一部丈けが砂礫運搬のために消費さるゝが故に，砂礫運搬に消費さるゝ掃力を S とすれば，S は次の形にて表はさるべし。

$$S=\gamma J(F-F_0)$$

此の際に砂礫が動かさるゝも，動かされざるも J は不變なりと假定し，又掃力の働きの點の速度は砂礫運動の平均速度に等しとす。此の二假定は未だ明かならざる事實なるも大差なからんとの意味にて假定されたるものなり。尙ほ一の假定は砂礫運動の速度は平均斷面速度に正比例するものとす，今後者を v とすれば前者は c_1v にて表はし得べし。然らば掃力のなす仕事は之を L とすれば

$$L=c_1v\times S=c_1\gamma J(F-F_0)v=c_1\gamma J(Q-Q_0)$$

G なる運動砂礫量は L に比例すること明なるが故に

$$G=c\gamma J(Q-Q_0)$$

c は他の常數なり，c,γ,J は常數なるが故に上式を次の如く書き換ふ。

$$G=C(Q-Q_0)$$

之れ Schoklitsch 教授の與へたる基本式なり。之を Gilbert の式と比するに相似たる點の存するを知るべし，Gilbert は

$$G=c_2(Q-c_3)^{0.81\sim1.24}$$

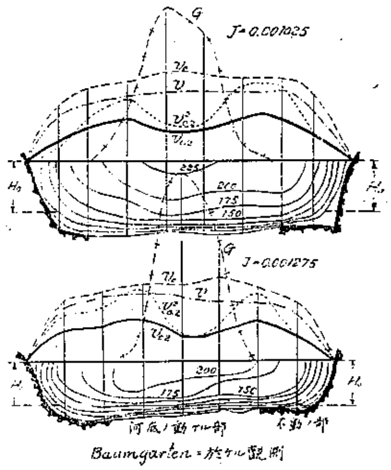
となす，c_3 は Q と同じ單位の數なるべきが故に之を Q_0 とし，c_2 を c として書き換ふれば，Q に對する指數が Schoklitsch 式にては 1 にて，Gilbert 式にては 0.81～1.24 となさるゝの差あり，從つて dimension を考ふる時には c と c_2 とは差あれど，c_2 の dimension は指數の異るに從て異るべきが故に，若し 0.81 と 1.24 の平均を 1.0 とすれば全然同樣の形となれるは注目すべき事なりとす。Schoklitsch は 1～2 mm の粒徑の砂に就て J を不變に保ちて砂の運動したる量を次式にて表はし得ることを示せり。

$$G=19.05\,BJ(Jq-0.5)$$

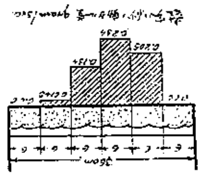
B は水路の幅，q は水路幅 1m に對する流量なり，故に上式は次の如く變ずるを得べし。

$$G=19.05J^2\left(Q-\frac{0.5B}{J}\right)$$

第九圖



第十圖



抑も流水のために河底が動かされ始むるや，先づ大小粒の內にて小粒のものが水中に混じ，次でより大なるものが動きたる後は動き難き形をなせるもの，又は重きものが相重りて河底に留まるべし，而して其の狀概ね板狀をなして重疊す，故に前式に示せる極限的の掃力は之を見出す事は實際の河川には之なし。自然の河床にては大小混合の度合も河の中央と兩岸とにては異るが故に，等大，等質，等形の石礫の重疊するものと考ふるを得ざることは Kurzmann の Tiroler Ache の Baumgarten にて實測せし結果を參照せば思半ばに過ぐるものあらん。參考のため同氏の示せる圖表（**第九圖**）を揭げん。

單に自然河川のみならず，實驗室に於て規則正しき模型水路に均等質の大小混合の砂を有する床の水路にて實驗するも，尙ほ各部に於て不規則なる砂の運動を生ずるを見る（**第十圖**參照），之流水が靜かに均一の深さと勾配とを以て平行に流るゝことなきに歸因し，到底其の眞相を詳になし得ざるが故に止むを得ず，實際のものに模倣したる模型にて其の影響の大勢を知るの外なし。又既述の

$$G=C(Q-Q_0)$$

の如き簡單なる形の基礎式を用ひ，Q と Q_0 とを測定して C の如き係數を實測の結果より求め，之に類似の場合には C の內類似の場合の値を用ふるの外なし。若し河流が氾濫することなき一定の河床中に流るゝ時には一年を通じて又或期間中の G 等も求め得べし。例へば Schoklitsch は Mur 河の Frohnleiten に於て G を求めて $C=0.00019$ を得たり。此の場合の $Q-Q_0=688\,000\,000\,\mathrm{m}^3$ なりしと云ふ。

抑も濁水が河床に流るゝや斷面中の各部に於て其の沈澱物の含有量は異り。即ち河床に接する部は表面よりは多量の泥土を含み，尙ほ動かし得る餘勢あらば泥土を掘浚す。或斷面中各部の泥土含有量の變化の模樣は一々之を明にすることは困難なるも，諸處にて實測されたる所によれば不均一なることは例證多々あり。然れども一般に謂へば河床に接する附近は粗粒の沈澱物を含み，之より距るに從て細粒となる。概言すれば自然河川に於ての流水は沈澱物を以て飽和され居るものに非ず，故に同一流水量に對しても其の含有沈澱物量には差異あり，仍て浮游沈澱物量は流水量に比例するものに非ずと稱するを得。

三　Kennedy 其の他の諸家の研究

土渠內に於て土粒の沈澱もせず，掘浚も生ぜざる丁度飽和狀態にて水の流るゝ如き流速に就て注意せるは du Buat を以て始とす。du Buat は此の如き流速に Vitesse de regime なる稱呼を與へたるが，後に英人 Kennedy は之を critical velocity と稱せるが故に今之を限界速度と稱するゝとせん。du Buat の限界速度に對する考へ方は現今にても同樣に信ぜらるゝ所なるも du Buat は河床潤面の粗度に就て毫も考へざりしは誤謬なりしなり。其の後 Darcy は粗度の大小が甚しく流速に影響する所あるを發表したり，仍て du Buat の考へたるが如く潤面に於て水分子は滑るが如き狀態にて流るゝものに非ざることを示し，今日も亦一般に此の說を信ずるものなり。Darcy が此の說を發表せるは 1855 年～1858 年なるが其の後 Dupuit は 1863 年に於て彼の說を發表せる所によれば各部分の流速の異るが故に砂礫が運動せしめらるゝものなりとす。然るに 1867年 Great Ganges Canal の技師 Login は溺游土砂の粒を運動に保つための力は流速に比例し，水深に逆比例することを發表せり。而して土砂粒は滑動するよりも回轉運動をなす方多しと云へり。故に深は同一なるも流速大なれば溺游土砂量多く，流速は同一にても深さの大なる場合には運搬土砂量多しと稱せり，之有名なる Indian theory にて之は一般に認容さるゝ理論なり。

R. G. Kennedy は Proc. Inst. C.E. 1894 に東印度の Punjab に於ける Bari Doab に於て種々の大さの灌漑用運河にて觀測の結果

$$v_c = ct^m$$

なる式を得たり。式中 v_c を限界速度と稱し，t なる深さの運河にて丁度今有する沈澱物を流し又更に河床の泥土を運搬せんとする限界の速度は上式にて表はさるべしとなす。c は定數

にして m なる指數は土性によりて異り，Punjab 地方の細粒の土に對しては $c=1.8$, $m=0.64$, Sind 地方の土に對しては $c=1.2$, Schwebo 及 Burma 國 Mandalay 運河にては c は Punjab の 1.8 よりは小なりと云ふ。而して限界速度以外の任意の流速 v に對しては或は沈澱を生じ，又は更に掘浚を起すべく其の量は Punjab 地方の水路に對し $v_c=ct^{0.64}$ を用ふる時は次式にて表はさるべしとなす*。

$$G_c-G=G_c\left[1-\left(\frac{v}{v_c}\right)^{2.5}\right]$$

或は

$$G=G_c\left(\frac{v}{v_c}\right)^{2.5}$$

G_c は限界速度に於ける沈澱物量にして，G は v なる流速の時の夫れなり。(G_c-G) が正ならば沈澱を生じ，G_c-G が負ならば掘浚を生ず。又 Du Buat の實驗によれば次表の如き關係を得らるべしと云ふ。

	運動の開始さるゝ底速 m/sec.	運動に保つべき底速 m/sec.	沈澱を始むる底速 m/sec.
黑色の粘土にて陶器を造るに適する土，比重 2.64	0.105	0.080	—
粗なる黄色の砂，比重 3.36	0.321	0.213	0.186
細礫，比重 2.55	0.160	0.105	0.080
豌豆大の細礫，比重 2.55	0.213	0.186	0.160
大豆大の礫，比重 2.55	0.468	0.321	0.213
徑 2.5^{cm} の礫，比重 2.61	0.969	0.642	0.468
鷄卵大の礫，比重 2.25	1.20	0.960	0.642

又 P. M. Parker は Kennedy の v_c に相當する値に就て次の如き値を與ふ。

細泥土，其の粒徑 0.25^{mm}	$v_c=0.58\ t^{0.5}$
粗砂，徑 1.0^{mm}	$v_c=t^{0.33}$
豌豆大の細礫	$v_c=1.02\ t^{0.25}$
粗大なる礫	$v_c=2.04\ t^{0.25}$

又 Stiny は Zeitschrift des österreich. Ing. und Arch. Ver. 1923 に發表せる所によれば，一般に出水の際には沈澱物を多量に含むべく，集水面積の大なる河川は其の小なるものに比して，沈澱物含量は割合に小なりと云ふ。

四　Schaffernak の研究

Wien 大學教授 Schaffernak は其の實驗室にて實驗を重ね又實際河川にて觀測せる結果より次の如くして運搬砂礫量を知らんとせり。

砂礫を動かす勢力は底速なるが故に之を基として計算することとせり。

* $v_c=ct^{0.64}$ $\therefore\ t=c'v_c^{1.56}$ 然るに $vt=q$ $\therefore\ q=c'v_c^{2.56}\fallingdotseq cv_c^{2.5}$

$$G=f_1(v_s)$$

v_s は底速なり即ち砂礫量は v_s の或函數なりとす。次に v_s は水深 t により變ずべく，t は又量水標の讀數 h により變化するが故に次式を得べし。

$$v_s=f_2(t) \quad \text{又は} \quad v_s=f_3(h)$$
$$\therefore\ G=f_4(t) \quad \text{又は} \quad G=f_5(h)$$

而して $Q=f_6(h)$ 即ち流水量は量水標讀數の或函數なり，故に

$$G=f_7(Q)$$

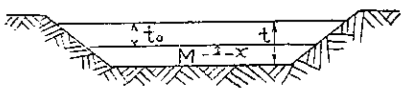
或期間を通じて h の觀測をなし，Q を知るを得ると同樣に G をも求め得るなり。然るに前掲せる所によれば同一の h にては G も同一値なりとなせるも，勿論此の事は正確ならずして其の概數を知るに止まるのみなり。

流量と水位との變化を示す流量曲線に於ても同一の h に對して同一の Q を得らるゝは均流の成立せる，常に等しき表面勾配を有する時に限るが故に，一般には均流時の勾配を J とすれば J^n の如き値によりても Q は變化すると同樣に G も亦 J^m の如きものゝ函數となるべきが如し。故に前に $Q=f_6(h)$ とせるが $Q=f_6(h, J)$ となすべきなり，從て $G=f_7(Q)=f_8(h, J)$ となるべきなり，此の事は土木學會誌第十卷第二號に於て中山教授の示されたる所なり。

五　Kreuter 式の變形

前述の如く Kreuter 教授の提出せる砂礫運搬量は次の如し。

第十一圖



$$G=\psi J^2 M(t_0+2x)$$

式中　$\psi=\dfrac{ev_0^2}{2S_0^2}$

Kreuter は ψ に就て特に如何なる數なるやを示さゞりしも，$S_0=\gamma t_0 J$ にて表はし得るが故に之を上式に入るゝ時には

$$G=\frac{ev_0^2}{2\gamma^2 t_0^2}\frac{J^2}{J^2}M(t_0+2x)=\frac{ev_0^2}{2\gamma^2 t_0^2}M(t_0+2x)$$

M は水面より t_0 をとりたる下部の斷面積にて，之を $(F-F_0)$ にて表はすを得べし，F は全斷面積，F_0 は t_0 を水面よりとりたる上の部の斷面積とす。又 x は幅の廣き第十一圖の如き梯形又は之に近似の矩形とすれば $(t-t_0)\frac{1}{2}$ にて表はすを得べし。

$$\therefore\quad G=\frac{ev_0^2}{2\gamma^2 t_0^2}(F-F_0)t$$

今　$v=c\sqrt{tJ}$　とすれば　$t=\dfrac{v^2}{c^2 J}$

$$\therefore \quad G=\frac{ev_0^2 v^2}{2\gamma^2 t_0^2 c^2 J}\times(F-F_0)=\frac{ev_0^2 v}{2\gamma^2 t_0^2 c^2 J}(Fv-F_0 v)$$

故に $G=C(Q-Q_0)$ なる形に變形し得べし。

六 Resumé

以上說明せる沈澱物量を求むる式は諸說あり，其の結果を摘記し其の類似の點に就て知る所あらん。

底速を主動力として求めたるもの	$G=\left(\frac{\gamma}{\gamma_1-\gamma}\right)\left(\frac{v}{v_b}-1\right)Q$ ……(1)
Kreuter	$G=\psi J^2 M(t_0+2x)$ ……(2)
Gilbert	$G=C(Q-Q_0)^{0.81\sim1.24}$ ……(3)
Schoklitsch	$G=C(Q-Q_0)$ ……(4)
Kennedy	$G=\left[\left(\frac{v}{v_c}\right)^{2.5}-1\right]G_c$ ……(5)
Schaffernak	$G=f(Q)$ ……(6)

上記の式の中 (3) と (4) とは殆んど同類の式なることは既に記したるが如し。然るに (2) と (4) とは同樣に掃力論を基として進みたるものにて掃力の値をとる時に Kreuter と Schoklitsch とは其の一は砂礫の堆積せる狀況に假定を置きて出立し，其の二は實驗により求めたる式を基として二樣の進み方をなしたるによるのみにて，其の全斷面內に掘浚を受けざる斷面積を假定することは同樣なり。故に著しく其の形の異るが如く見ゆるも實質に於ては大差あるに非ずして，之を同類の式と見做し得ること式の變形をなせば容易に之を知るを得。

次に (1) と (5) とを比較するに式中の v_c と v_b とは其の意味同じにして v も然り，而して (1) 式の$\left(\frac{\gamma}{\gamma_1-\gamma}\right)\left(\frac{v}{v_b}-1\right)$ を一の常數と見做す時は $G=cQ$ となり，(5) 式は同樣に $G=cG_c$ となり，一は G は Q に直接に比例し他は G_c に比例す，而して G_c は Q に比例すると考ふれば，(1) と (5) とは同類なれど然らざれば之を同類と考ふるを得ず。(6) 式は $G=f(Q)$ と云ふのみにて其の一の形は正に $G=cQ$ ならんも，之も一般に (1) 式と同樣に考ふるを得ず，但し全部は次の如き形の內に包含せしめ得。

$$G=c(Q-Q_0)^n$$

(1) 式にては $Q_0=0$, $n=1$ にて $c=\left(\frac{\gamma}{\gamma_1-\gamma}\right)\left(\frac{v}{v_b}-1\right)$, (2) 式にては之が $c(Q-Q_0)$ にて表はし得るが故に $n=1$, (3) 式にては $n=0.81\sim1.24$, (5) 式は $c=\left[\left(\frac{v}{v_c}\right)^{2.5}-1\right]k$,

$G_c=k\,(Q-Q_0)^n$ と考ふれば一般式となるなり。

故に G を求むるに全く實驗によりて c，Q_0，n 等を定むべきことを Schoklitsch 敎授は提言し居るなり。然れども理論を基として求めたる式の內の未知の原因又は理論中の假定の不確實等を補ふために實驗を補助とすることが一般に行はるゝ方法なるを以て，予は今次に河床砂礫を動かすべき水の速度より進みて運動砂礫量を求むる式を誘導せり。

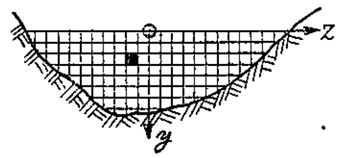
第五章　著者の計算法

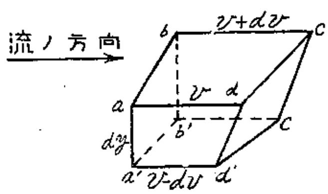
一　河川の橫斷面中の流速分布の狀況

河川の橫斷面內各點の流速が異ることは明かなる事にて，其の變化の模樣が如何なる式にて表はさるゝやに就ては，未だ充分の硏究を經たるものなし，殊に流速の大なる射流の場合には之に就て論ぜられたるを聞かず。

次に示すものは緩流の場合に就て成立する所說にして其の假定としては往時考へられたるが如く潤面の摩擦の流速に及ぼす影響を著しからざるものと考へ，斷面內の最も抵抗少き部は中央表面にして，之より相距る事遠き程粘力抵抗のために流速が減ぜらるゝものと考ふ，故に斷面を第十二圖の示すが如く分割して考ふることゝす。

第十二圖





水が層々相平行して流るゝ時には之と隣接する層に對して粘力抵抗あり，故に圖示の如く相平行したる水平及垂直平面にて包圍されたる小立體（第十二圖中黑く塗れる部）を考へ水面の中央に原點をとり圖の如く oz, oy の軸を直角に o を通して考へ，o より紙面に直角に ox 軸をとる時は或瞬間に各軸に平行なる dx，dy，dz の三邊にて圍まれたる立方體は次の瞬間には下圖の如く變形したる立體にて表さるべし。z の方向にては bc の長さが $v+dv$ の流速を表はすとすれば，dz 丈け中央より岸の方に近づけば v となり，又 dy 丈け深ければ v の流速は $v\text{-}dv$ の如く流速を減ずべきなり，即ち $bc>ad$, $bc>b'c'$, $ad>a'd'$, $b'c'>a'd'$ 此の如く表面より次第に深を增すに從て速度を減じ，中心線より岸に近づくに從て速度を減ず，之れ粘性のために次第に運動を阻まるゝによるものなり。

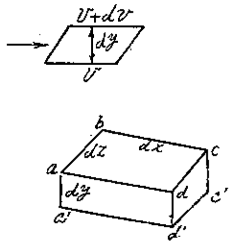
粘力は Newton の示せるが如く，次式の如き形にて表はさるべし。

$$F=\mu\frac{dv}{dy}f$$

式中 μ＝粘性係數

f＝表面の大さ

第十三圖



F＝粘力

今粘力を考慮に加へて水柱體の力の關係を式にて表はさんとす。先づ重力を考ふるに i なる緩勾配にて下流の方に傾斜するため此の柱體の流れの方向に沿ふ所の重力の分力は次の如し。

$$P=\gamma i dx\, dy\, dz$$

次に面力を考ふるに先づ $abcd$ と $a'b'c'd'$ との兩面に於て $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ なる速度變化の割合を有するとすれば粘力は $\mu dx dz\dfrac{\partial v}{\partial y}$ なり，而して此の粘力の微分値が流れを阻止する力となるが故に此の力は次の如くなるべし。

$$\frac{\partial\left[\mu\ dx\ dy\ dz\dfrac{\partial v}{\partial y}\right]}{\partial y}dy=\mu dx\ dy dz\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

同様に $bb'c'c$ と $aa'd'd$ との兩面に關しては粘力抵抗の微分差は　$\mu\ dx\ dy\ dz\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}$ を得べし。以上の三力が互に釣合ふて，加速も減速も生ぜざることゝなるが故に次の方程式を得。

$$\gamma i\ dx\ dy\ dz+\mu\ dx\ dy\ dz\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\mu\ dx\cdot dy\ dz\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=0$$

$$\therefore\quad -\frac{\gamma i}{\mu}=\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

之を積分すれば

$$v=-\frac{\gamma i}{4\mu}(y^2+z^2)+C$$

然るに中央の最大流速を與ふる水面に於て最大流速を有すると考ふるが故に，而して此處を通じて x, y, z の軸を取りて考へたるが故に　$y=0$, $z=0$ に於て $v=v_c$ とすれば

$$v=v_{0c}-\frac{\gamma i}{4\mu}(y^2+z^2)$$

之一般解によりて得たる v の値を求むる式なり。今特別の場合として水深が川の幅員に比して非常に小なる場合を考ふるに，此の時には $\dfrac{\partial v}{\partial z}=0$，從て $\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}=0$ なるが故に

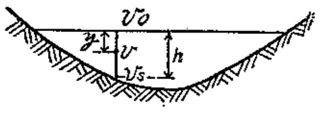
$$\frac{-\gamma i}{\mu}=\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

$$\therefore\quad v=-\frac{\gamma i}{2\mu}y^2+C$$

然るに此の場合には $y=0$ の時 $v=v_0$ とすれば

$$v=v_0-\frac{\gamma i}{2\mu}y^2$$

第十四圖



本式は一縦斷面内の速度變化の模様を示す式なり。上式を求むるに當り幅員に比して水深が小なる時には $\frac{\partial v}{\partial z}=0$ としたるが，此の意味は z 軸の方向には流速の變化せざることを示すものにして，一見其の假定が如何にも獨斷的なるが如きも此の事に就ては Bazin は既に次の事實あることを示せり。曰く水深が川幅の 1/5 以下なる時は岸の影響は中央部に及ぼすことなしと。此の說に從へば上の演繹も實際と大差なかるべきを知り得べし。却て水深を h とし底速を v_s にて表はす時には

$$v_s=v_0-\frac{\gamma i}{2\mu}h^2$$

從て

$$v=v_0-\frac{v_0-v_s}{h^2}y^2$$

又は

$$v=v_s+\frac{v_0-v_s}{h^2}(h^2-y^2)$$

次に表面又は之と平行なる水平層内の速度分布の狀況を知るには，$\frac{\partial v}{\partial y}=0$ 從て $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$ と假定し，前と同樣に

$$v=-\frac{\gamma i}{2\mu}z^2+C$$

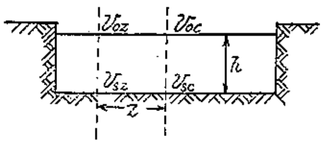
$z=0$ に於ての v を v_{0c} とすれば

$$v=v_{0c}-\frac{\gamma i}{2\mu}z^2$$

式中 μ の値は Koechlin 著 Mecanisme de léau に示す所によれば，メートル及キログラム單位にて $\mu=6.0$，Boulanger 著 Hydraulique generale によれば同じ單位を用ふる時は $\mu=6.3$ なり。

今矩形渠を取りて考へんに第十五圖に示す如き符號を用ふれば

第十五圖



$$v_{sc}=v_{0c}-\frac{\gamma i}{2\mu}h$$

$$v_{sz}=v_{sc}-\frac{\gamma i}{2\mu}z^2$$

$$\therefore\ v_{sz}=v_{0c}-\frac{\gamma i}{2\mu}(h^2+z^2)$$

$\mu=6.0$ とすれば

$$v_{sz}=v_{0z}-83\,(h^2+z^2)\,i$$

Bazin は幅が深さの五倍以上の河川にては中央部に於ける垂直面内の流速分布は無限に廣き河川の場合と異らずとて次式を與ふ

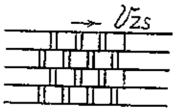
$$\frac{v_0-v}{\sqrt{hi}}=20\left(\frac{y}{h}\right)^2$$

之を上式に比するに，$y=h$ とすれば $v_s=v_0-\dfrac{\gamma i}{2\mu}h^2$ の代りに $v_s=v_0-20\sqrt{hi}$ を得，故に $\mu=50h^{1.5}i^{0.5}$ なり。

二　掘　浚

河床砂礫は凸凹ある面をなし，又其の大さも均一ならざるも，不規律の大さのものが堆積したるものに就ては，如何にとも數字的の取扱をなすを得ざるが故に假に砂礫の一粒は b なる立方體にて第十六圖の如く或規則正しき層狀をなし，互に少許の間隙を有して堆積するものと考ふ。

第十六圖



前に考へたる底速は河底勾配に沿ふて矢の方向に流るゝものと考ふるが故に，凸凹面あるに非れば最上層と雖も衝突力を受くることなきの理なれど，間隙の存するあるによりて衝擊力を受けて之がため砂礫の運動が起さるゝものと考ふ。勿論射流の如き高速の流れにては渦流を生じ之が砂礫の運動を起す主なる原因とならんも，今吾人は緩流の場合に就て考ふることゝし，砂礫の最上層面が其の面に沿ふて，v_{zs} なる流速の水流を有する時は，之よりも小なる或値の流速が其の横面に衝突する速度となるべし，其の如何程 v_{zs} よりは小となるかに就ては明かにせるものなければ，今假りに $v=p_1v_{zs}$ として，p_1 なる 1 より小なる數を乘じて衝突流速を求め得るとすれば，一粒の砂礫の受くる衝力は

$$\gamma kb^2p_1\frac{v_{zs}^2}{2g}$$

第二層の受くる衝力を起す流速は p_1v_{zs} よりは更に小なるべきが故に之を前と同様に考へて $p_1p_2v_{zs}$ とすれば，其の一粒の砂礫の受くる横衝力は $\gamma kb^2p_1^2p_2^2\dfrac{v_{zs}^2}{2g}$ なり。同様に第三層，第四層と第 n 層迄此の考へ方を及ぼせば第 n 層の横衝力は同様に $\gamma kb^2p_1^2p_2^2\cdots p_n^2\dfrac{v_{zs}^2}{2g}$ 而して最下層が漸く動き得る時の n の値は次の如くにして求め得べし。

b^3 なる立方體の砂礫を動かすに足る衝力を $\gamma kb^2\dfrac{v_s^2}{2g}$ とすれば，第 n 層目の横衝力と之

を等しく置くを得，故に

$$p_1^2 p_2^2 \cdots\cdots p_n^2 = \frac{v_s^2}{v_{zs}^2} \qquad \therefore \quad p_1 p_2 \cdots\cdots p_n = \frac{v_s}{v_{zs}}$$

若し $p=p_1=p_2=\cdots\cdots=p_n$ とすれば

$$p^n = \frac{v_s}{v_{zs}} \qquad \therefore \quad n = \frac{\log v_s - \log v_{zs}}{\log p}$$

上式によりて n を求め得べし。但し p に關して其の値が幾許なりやは明かならず，蓋し空隙率と密接の關係を有すべきは想像せらるべし。

三　p の値に就て

或容積の容積空隙率は次の如くにして計算するを得べし。立方體の粒を積み重ね，之が間隙の長を均一と考へなば，立方體の一邊を a とし，其の間隙長を b とすれば容積空隙率は之を p_v とするに

$$p_v = \frac{(a+b)^3 - a^3}{(a+b)^3}$$

にて b が a に比し小なる時には

$$p_v = 3\frac{b}{a}$$

同様に面積空隙率を p_a とすれば

$$p_a = \frac{(a+b)^2 - a^2}{(a+b)^2} = 2\frac{b}{a}$$

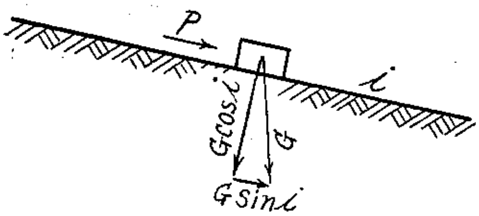
$$\therefore \quad p_a = \frac{2}{3} p_v$$

今平面上に多數の孔を穿ち其の上に或流速にて水が之に沿ふて流れたる場合には，其の流速中有孔部に對しては其の流速が一部失はれて表面に沿ふたる流速は面積に比例すると假定するも或は大なる獨斷に非ざらんかと思はるゝが故に，$p=p_a$ として $p=\frac{2}{3}p_v$ となし得べし。

四　砂礫の動かさるゝ速度

砂礫が或衝力を受けて動かさるゝ速度を求むるため次の如く考ふることゝす。（**第十七圖**参照）

第十七圖



P は河底に平行に働く衝力とす，斜面に沿ふて摺動せんとする力は之を K とすれば

$$K=P+G\sin i-fG\cos i$$

式中 f は摩擦係數なり。

此の力にて α_n なる加速度を以て G なる重量の石が動かされ，之が丁度釣合ふて次の瞬間には更に新たに力が加へられて，α_n の加速度を生ずるものとすれば

$$K=M\alpha_n$$

なるが故に α_n を容易に求め得，又一秒間に如何程の距離を流れ下るかを求めんに，之を S_n とすれば

$$S_n=\frac{1}{2}\alpha_n$$

なることは明かなり，而して S_n は即ち求めんとする砂礫の一秒間の流速なり，今之を v_{sn}' とせんに

$$v_{sn}'=\frac{K}{2M}$$

而して $$M=\frac{G}{g}=\frac{b^3(\gamma_1-\gamma)}{g}$$

$$\therefore \quad v_{sn}'=\frac{1}{2}\left[\frac{Pg}{G}+g\sin i-fg\cos i\right]$$

然るに第 n 層目の P は $\gamma kb^2p^{2n}\frac{v_{zs}^2}{2g}$ なるが故に

$$v_{sn}'=\frac{\gamma kp^{2n}v_{zs}^2}{4(\gamma_1-\gamma)b}+\frac{g\sin i}{2}-\frac{fg\cos i}{2}$$

i が小なる時には

$$v_{sn}'=\frac{\gamma kp^{2n}v_{zs}^2}{4b(\gamma_1-\gamma)}-\frac{fg}{2}$$

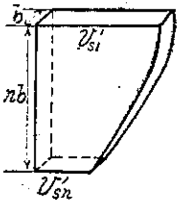
故に第一層の砂の流速は $v_{s1}'=\frac{\gamma kp^2v_{zs}^2}{4b(\gamma_1-\gamma)}-\frac{fg}{2}$

第二層 〃 $v_{s2}'=\frac{\gamma kp^4v_{zs}^2}{4b(\gamma_1-\gamma)}-\frac{fg}{2}$

⋮

第 n 層 〃 $v_{sn}'=\frac{\gamma kp^{2n}v_{zs}^2}{4b(\gamma_1-\gamma)}-\frac{fg}{2}$

第十八圖



底速 v_{sz} なる所の縱斷に於ける小部分の流砂量は**第十八圖**にて示さるべし，今此の小容積を求めんとせば，第一層より第 n 層迄の砂礫流速を加へなば之を得べきの理にて，其の量を奥行 b の幅に就て考へ q_s を以て其の容積を表はせば次の如し。

$$q_s=\frac{b^2\gamma k v_{zs}^2}{4(\gamma_1-\gamma)b}\left[p^2+p^4+p^6+\cdots\cdots+p^{2n}\right]-\frac{nfgb^2}{2}$$

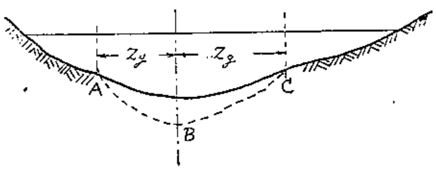
故に dz なる幅に就ては

$$dq_s=\frac{\gamma k v_{sz}^2}{4(\gamma_1-\gamma)}\;p^2\;\frac{p^{2n}-1}{p^2-1}\;dz-\frac{nfgb}{2}\;dz$$

式中　　$n=\dfrac{\log v_s-\log v_{sz}}{\log p}$

v_{sz} の最大は中心垂直斷面に於ての v_{sc} にして此の部に於ては q_s は最大なり。次第に岸に近づくに從て v_{sz} が減じ遂に v_s に等しくなりたる時は唯最上層を動かすのみに止り，夫れより岸に近き處は河床は動かざることゝなるべし。故に一般には**第十九圖**の如き砂礫運動圖表を得べし。

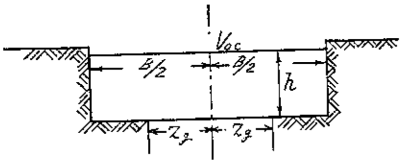
第十九圖



即ち ABC の如き部丈けの砂礫が運搬さるゝに至るべし，而して最大流速を有する中軸より不動河床迄の幅を Z_g にて表はすことゝす即ち Z_g は限界幅なり。

五　矩形渠に於ける砂礫掘浚量

第二十圖



前節に示したる限界幅 Z_g を求むるには次の如くすれば可なり。既述の如く

$$v_{sz}=v_{0c}-\frac{\gamma i}{2\mu}(h^2+z^2)$$

又邊長 b なる立方體の砂礫を動かすに足る流速は次の如し，

$$v_s=\sqrt{\frac{2gf}{k}\;\frac{\gamma\;-\gamma}{\gamma}}\;b$$

pv_{sz} が v_s より大なれば掘浚を生ずべく，$pv_{sz}\leqq v_s$ に至れば掘浚は止むべし，故に Z_g を求むるには

$$v_{0c}-\frac{\gamma i}{2\mu}(h^2+Z_g^2)=\frac{1}{p}\sqrt{\frac{2gf}{k}\;\frac{\gamma_1-\gamma}{\gamma}}\;b$$

$$Z_g=\sqrt{\frac{2\mu}{\gamma i}\left[v_{0c}-\frac{1}{p}\sqrt{\frac{2gf}{k}\,\frac{\gamma_1-\gamma}{\gamma}b}\right]-h^2}$$

而して前に求めたる所によれば

$$dq_s=\frac{\gamma k v_{sz}^2}{4(\gamma_1-\gamma)}p^2\frac{p^{2n}-1}{p^2-1}dz-\frac{nfgb}{2}dz$$

故に對稱軸を有する左右の Z_g の間中心より dq_s を積分すれば全斷面の流砂量を得べし。

$$Q_s=2\int_0^{Z_g}dq_s=$$

$$\frac{\gamma k}{2(\gamma_1-\gamma)}\frac{p^2}{p^2-1}\int_0^{Z_g}\left\{v_{0c}-\frac{\gamma i}{2\mu}(h^2+z^2)\right\}^2\left\{p^{\frac{2}{\log p}\left[\log v_s-\log\left\{v_{0c}-\frac{\gamma i}{2\mu}(h^2+z^2)\right\}\right]}-1\right\}dz$$

$$-fgb\int_0^{Z_g}\left[\log v_s-\log\left\{v_{0c}-\frac{\gamma i}{2\mu}(h^2+z^2)\right\}\right]dz$$

本積分は不能なるも圖式的に解くことを得べし，即ち z を數多の Δz に別ちて第一項と第二項を求むる事により求め得。

第六章 沈澱

一 靜水中に沈降する物體

或物體の單位容積の重量を γ_1 とし，水の夫れを γ とす，物體の容積を V とし，其の平面に投影したる面積を F とす。

物體が靜水中に或速度 v を以て沈降する時には之がため抵抗を受くべく，自重は之を沈降せしめんとし，抵抗は之に反對に働くべく，其の結果或一定の速度に於て沈降するに至るべし。此の速度は所謂沈降速度と稱せらるゝものにて之に達せざる加速をなし居る或瞬間に於ける力の釣合を考ふるに次式を得べし。

$$\frac{\gamma_1 V}{g}\,\frac{dv}{dt}=V(\gamma_1-\gamma)-R$$

R は抵抗力を示し，F なる面積に働く力，此の値は速度 v に對して變ずべく，速度小なる時は v に比例し，之が大なる時は v^2 に比例することは摩擦抵抗を論ぜる際知れる所なり故に吾人は R を次の如く表はすを得。

$$R=kFv^2\ \text{又は}\ R=k_1Fv$$

k は既記の如く實驗によりて得らるゝ値にして球狀の粒子に對しメートル式にて 25.5 なり。

吾人は先づ v^2 に因つて抵抗の變ずる第一の場合を考へ，次で第二の場合を考ふることゝ

せん。然る時には次式を得べし。

$$\frac{\gamma_1 V}{g}\ \frac{dv}{dt}=V(\gamma_1-\gamma)-kFv^2$$

等速に達せる時の v を v_0 とすれば，v_0 に達せる時には $\dfrac{dv}{dt}=0$ なり。故に

$$V(\gamma_1-\gamma)=kFv_0^2$$

$$v_0=\sqrt{\frac{(\gamma_1-\gamma)V}{kF}}, \qquad v_0=\sqrt{\frac{2}{3}\frac{(\gamma_1-\gamma)D}{k}}$$

但し D は球狀粒子の直徑をメートルにて示す。今 $\gamma_1=2\,400\ \mathrm{kg/m^3}$, $\gamma=1\,000\ \mathrm{kg/m^3}$, $k=25.5$ とすれば

$$v_0=6.05\sqrt{D}$$

にて v_0 は m/sec を，D は m. を單位とす。次に v_0 を mm/sec 單位とし，D を mm 單位とすれば，

$$v_0=192\sqrt{D}$$

却說 $V=\dfrac{kFv_0^2}{\gamma_1-\gamma}$ なるが故に之を一般式に入るれば

$$\frac{dv}{dt}\ \frac{\gamma_1 Fkv_0^2}{(\gamma_1-\gamma)g}=\frac{kFv_0^2(\gamma_1-\gamma)}{(\gamma_1-\gamma)}-kFv_0^2$$

$$\therefore\quad \frac{dv}{dt}=\frac{\gamma_1-\gamma}{\gamma_1}g\left(1-\frac{v^2}{v_0^2}\right)$$

今 $\dfrac{\gamma_1-\gamma}{\gamma_1}g=g_0$ と置けば

$$\frac{dv}{dt}=g_0\left(1-\frac{v^2}{v_0^2}\right)$$

g_0 は γ_1 が與へらるれば常數なり。故に

$$g_0dt=\frac{dv}{1-\dfrac{v^2}{v_0^2}}$$

仍て

$$g_0t=\frac{v_0}{2}\log_e\frac{1+\dfrac{v}{v_0}}{1-\dfrac{v}{v_0}}+C$$

今 $t=0$ の時に $v=0$ とすれば $C=0$

$$\therefore\quad \frac{2g_0}{v_0}t=\log_e\frac{1+\dfrac{v}{v_0}}{1-\dfrac{v}{v_0}}$$

即ち
$$\frac{1+\dfrac{v}{v_0}}{1-\dfrac{v}{v_0}}=e^{\frac{2g_0}{v_0}t}$$

仍て
$$v=v_0\frac{e^{\frac{2g_0t}{v_0}}-1}{e^{\frac{2g_0t}{v_0}}+1}$$

本式を見るに $t=0$ の時は $v=0$, $t=\infty$ の時は $v=v_0$, 之を双曲線函數にて表はせば
$$v=v_0\mathrm{tgh}\frac{g_0}{v_0}t$$

本式によれば $t=\infty$ の時には $v=v_0$ となることを示すと雖も，實用的には $\mathrm{tgh}\frac{g_0}{v_0}t$ が殆んど 1 となる如き場合を求むれば可なり。双曲線函數の表を見る時は $\mathrm{tgh}\,2.5=0.9867$ にて殆ど 1 なり，故に實用的には $\frac{g_0}{v_0}t=2.5$ となし得。此の時には v は v_0 となるなり即ち $t_0\geqq\frac{2.5\,v_0}{g_0}$

然るに t_0 は實際に極めて小なる値となるものなり。例へば前例の如く $\gamma_1=2\,400\ \mathrm{kg/m^3}$ とし，$D=1\ \mathrm{mm}$ とすれば
$$v_0=192\quad \mathrm{mm/sec},\qquad g_0=\frac{1\,400}{2\,400}\times 9\,800=5\,720\quad \mathrm{mm/sec^2}$$
$$t_0=\frac{2.5\times 192}{5\,720}=0.084\quad \mathrm{sec.}$$

實用的には $t_0=0$ とするも差支なき場合多々あり。t_0 を求むる式に v_0 と g_0 との値を入るゝ時は次の如くなるべし。
$$t_0=\frac{2.5\,\gamma_1}{g}\sqrt{\frac{2}{3}\,\frac{D}{(\gamma_1-\gamma)k}}$$
γ_1 及 k は石質及形狀が與へらるれば常數なるが故に
$$t_0=C\sqrt{D}$$
なる形にて t_0 を表はし得，即ち t_0 は D の平方根に比例す。次に沈降抵抗が v に比例すると云ふ第二の場合に就て考へん。

二 Stokes の研究

G. G. Stokes は1901 に Mathematical & Physical Research Papers に彼の研究を發表せ

り。其の要點は前掲の式中の R なる抵抗を求むるに液體の粘度を考慮中に入れて次式を得べしと云ふにあり。

$$R=3\pi\eta Dv$$

η は粘度にて c. g. s. 單位に於て攝氏 20° の水に對しては $\eta=0.01$，而して η は攝氏の 1° に對して 2％ の差あり，温ければ減じ冷なれば增す。今之を工學的單位にて表はすとせば R は kg, D は m, v は m/sec を單位とし

$$R=kvD \qquad \text{とし} \quad k=\frac{3\pi\eta}{10g}$$

とすれば $k=0.00096$ なり。

前に考へたると同樣に球狀粒子の沈降に對する式中 $\dfrac{dv}{dt}=0$ の場合の v を v_0 とすれば

$$v_0=C(\gamma_1-\gamma)D^2$$

となり $C=545$ となる，C の dimension は $\dfrac{L^2}{MT}$ なり，γ_1 及 γ は kg/m³ にて，v_0 は m/sec. にて表はさる。

今石の比重を s とし，v_0 及 D を mm 單位にて表はすとすれば

$$v_0=545(s-1)D^2$$

上述の如き v_0 を用ひて之を一般式に入るゝ時は

$$\frac{\gamma_1 V}{g}\ \frac{dv}{dt}=V(\gamma_1-\gamma)-kvD$$

而して $V(\gamma_1-\gamma)=kv_0D$ なるが故に之を上式に入るれば

$$\frac{dv}{1-\dfrac{v}{v_0}}=\frac{kDv_0}{\gamma_1 V}g\ dt=\frac{\gamma_1-\gamma}{\gamma_1}g\ dt=g_0\,dt$$

$$\therefore \quad -v_0\log_e\left(1-\frac{v}{v_0}\right)=g_0t+C$$

然るに $t=0$ の時に $v=0$ とすれば $C=0$ なる故に

$$v=v_0\left(1-e^{-\frac{g_0}{v_0}t}\right)$$

更に $v=v_0$ となるが如き t を求むるためには，$e^{-\frac{g_0}{v_0}}$ が殆んど 0 に等しければ可なり。試に e^{-5} を求むるに 0.0076 にて $1-e^{-5}=0.9924$ 殆んど實用的には 1 に等し故に今 $\dfrac{g_0}{v_0}t=5$ として t_0 を求むれば

$$t_0=\frac{5v_0}{g_0}=\frac{5C\gamma_1D^2}{g}$$

例へば $D=0.1$ mm.$=0.0001$ m, $C=545$, $\gamma_1=2\,400$ kg/m^3, $g=9.8$ m/sec^2 とすれば $t_0=0.0066$ sec

實用的には $t_0=0$ とするも可なる場合多し。此の結果を前の場合と比較するに，其の著しき差は v_0 も t_0 も共に D^2 に正比例して變ずるの點なり。

Stokes は無限に廣き液體に於ける粒子沈降の場合を取扱ひたるものなるが，狹き器の內に於ては周圍面の條件により異るものなり。Ladenburg の研究によれば前に求めたる v_0 を用ひ次式の關係を得べしと云ふ。

$$v=\frac{v_0}{1+2.4\dfrac{D}{D_0}}$$

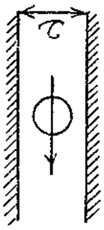
D は球の直徑，D_0 は液體容器の直徑。

之は主として試驗管の如きものゝ內にて定めたるものなり，而して全沈降の高を h にて示し之を三等分して中央の三分の一の高さを降下する速度 v を求めたるに次式を得たり。

$$v=\frac{v_0}{1+1.65\dfrac{D}{h}}$$

又 Lorenz に從へば Stokes の硏究中の R なる抵抗を表はすに境界條件 (boundary condition) を考に入れて次式を求めたり。

第二十一圖



$$R=3\pi\eta Dv\left(1+\frac{9}{32}\frac{D}{\tau}\right)$$

τ は第二十一圖に示せるが如く，器の幅又は直徑の小なるものを示す。

又 Faxen は次式を與ふ。

$$R=3\pi\eta Dv\frac{1}{1-0.502\dfrac{D}{\tau}+0.0523\dfrac{D^3}{\tau^3}-0.0053\dfrac{D^5}{\tau^5}}$$

三　R が v^2 に比例する場合と R が v に比例する場合との限界

既に知れるが如く R が v^2 に正比例する場合には

$$v_0=\sqrt{\frac{2}{3}\frac{(\gamma_1-\gamma)}{k}D}\quad 式中\quad k=25.5$$

R が v に比例する場合には

$$v_0=545(\gamma_1-\gamma)D^2$$

を得たり。此の二者が同一の v_0 を與ふるが如き D を求めんには之を等しく置きて D を求むれば可なり。

$$D=\sqrt[3]{\frac{2}{3\times 25.5\times(545)^2(\gamma_1-\gamma)}}$$

D は m を單位とするも之を mm 單位に變ずるには

$$D=\sqrt[3]{\frac{2\times(1\,000)^3}{3\times 25.5\times(545)^2(\gamma_1-\gamma)}}$$

今 $\gamma_1=2\,400\ \mathrm{kg/m^3}$, $\gamma=1\,000\ \mathrm{kg/m^3}$ とすれば

$$D\fallingdotseq 0.4\ \mathrm{mm}.$$

を得，$\gamma_1=2\,600\ \mathrm{kg/m^3}$ とすれば

$$D=0.38\ \mathrm{mm}.$$

故に大約球狀粒子にて $D=0.4$ mm 以下のものに就ては R は v に比例するものとし，D が 0.4 mm 以上に至らば R が v^2 に比例すると考ふるを得べし。而して 0.4 mm の徑なる場合には v_0 は上記の如く $\gamma_1=2\,400\ \mathrm{kg/m^3}$ とすれば大約 0.12 m/sec となる。

Allen は砂粒に對して限界球徑は 0.17 mm なりとす，之より v_0 を求むる時は 25 mm/sec となる。

砂にては普通 1～0.5 mm の粒徑を有するを粗砂と稱し，0.5～0.2 mm を中砂，0.2～0.1 mm を細砂と稱す。0.1 mm 以下は土の如き粒となる。

コロイド粒と稱するは 0.002～0.0002 mm の粒徑なり，泥の粒の細かきものは此の大さを有す。

四 v_0 に達する迄に沈降する水深の計算

第一 R が v^2 に正比例する場合

$$v=v_0\,\mathrm{tgh}\,\frac{g_0}{v_0}t \quad \text{にて} \qquad t_0=\frac{2.5v_0}{g_0}$$

故に沈降する高さ s は次の如くにして求めらるべし。

$$s=\int v\,dt=v_0\int \mathrm{tgh}\,\frac{g_0}{v_0}t\,dt$$

$$\therefore\quad s=\frac{v_0^2}{g_0}\ln\cosh\frac{g_0}{v_0}t+C$$

然るに $t=0$ に對し $s=0$ なるが故に，$\cosh 0=1$，又 $\ln 1=0$ なるが故に $C=0$，依て

$$s=\frac{v_0^2}{g_0}\ln\cosh\frac{g_0}{v_0}t$$

$$t<t_0 \qquad 即ち \qquad t<\frac{2.5v_0}{g_0}$$

$t=t_0$ とすれば

$$s_0=\frac{v_0^2}{g_0}\ln\cosh\frac{g_0}{v_0}\times\frac{2.5v_0}{g_0}=\frac{v_0^2}{g_0}\ln\cosh 2.5$$

$$\cosh 2.5=6.107, \qquad \ln 6.107=1.809$$

$$\therefore\quad s_0=1.809\frac{v_0^2}{g_0}$$

故に t_0 より大なる t に對しては

$$s=s_0+v_0(t-t_0)$$

$$t<t_0 \qquad s=\frac{v_0^2}{g_0}\ln\cosh\frac{g_0}{v_0}t$$

然るに $v_0^2=\frac{\gamma_1-\gamma}{k}\frac{2}{3}D$ なるが故に，s_0 は概ね小なる値となるなり。

例へば前に示したる例にては，$D=1$ mm, $\gamma_1=2\,400$ kg/m^3, $v_0=192$ mm/sec, $g_0=5\,720$ mm/sec/sec

$$\therefore\quad s_0=1.809\times\frac{(192)^2}{5\,720}=11.7\text{ mm.}$$

第二 R が v に正比例する場合

$$v=v_0(1-e^{-\frac{g_0}{v_0}t}), \qquad t_0=\frac{5v_0}{g_0}$$

$$s_0=\int_0^{t_0}vdt=v_0\left(t_0+\frac{v_0}{g_0}e^{-\frac{g_0}{v_0}t_0}\right)=\frac{v_0^2}{g_0}(5+e^{-5})=5.0076\frac{v_0^2}{g_0}\doteqdot 5\frac{v_0^2}{g_0}$$

今 $v_0=7.63$ mm/sec, $g_0=5\,720$ mm/sec/sec とすれば，$s_0=0.05$ mm, $D=0.1$ mm, $\gamma_1=2\,400$ kg/m^3.

五 上下に流るゝ水中に於ける粒子の沈降

前述せるすべての場合は皆靜水中に於ける沈澱物に就てのみ取扱ひたるが，上の方又は下の方に向て v_1 なる流速を以て流るゝ場合には前記の v の代りに $v\pm v_1$ を用ふべきにて，v_1 の符號の內正號は下の方に水の流るゝ時に用ひ，負號は上の方に流るゝ時に用ふ。

第一 R が v^2 に比例する場合

(イ) v_1 が正なる場合

$$\frac{\gamma_1 V}{g}\,\frac{dv}{dt}=V(\gamma_1-\gamma)-kF(v+v_1)^2$$

前と同様に $\dfrac{dv}{dt}=0$ の時の v を v_0 とすれば，v は 0 より (v_0-v_1) に變ずべく

$$V(\gamma_1-\gamma)=kF(v_0+v_1)^2$$

$$\frac{\gamma_1 V}{g}\,\frac{dv}{dt}=kF(v_0+v_1)^2-kF(v+v_1)^2$$

$$v_1+v_0=\sqrt{\frac{(\gamma_1-\gamma)V}{kF}} \qquad \text{より} \qquad kF=\frac{(\gamma_1-\gamma)V}{(v_1+v_0)^2}$$

$$\therefore \quad \frac{\gamma_1 V}{g}\,\frac{dv}{dt}=(\gamma_1-\gamma)V\left\{1-\frac{(v+v_1)^2}{(v_1+v_0)^2}\right\}$$

$$\frac{dv}{1-\left(\dfrac{v+v_1}{v_1+v_0}\right)^2}=g_0dt$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\left(1+\dfrac{v+v_1}{v_1+v_0}\right)}+\frac{1}{\left(1-\dfrac{v+v_1}{v_1+v_0}\right)}\right]dv=g_0dt$$

$$\frac{v_1+v_0}{2}\left[\frac{1}{v_0+2v_1+v}+\frac{1}{v_0-v}\right]dv=g_0dt$$

$$\frac{v_1+v_0}{2}\left[\ln v_0+2v_1+v-\ln(v_0-v)\right]=g_0t+C$$

然るに $t=0$ の時に $v=0$ とすれば

$$C=\frac{v_1+v_0}{2}\left[\ln(v_0+2v_1)-\ln v_0\right]$$

$$g_0t=\frac{v_1+v_0}{2}\ln\frac{v_0+2v_1+v}{v_0-v}\,\frac{v_0}{v_0+2v_1}$$

之より v を求むる時は

$$v=\frac{v_0(v_0+2v_1)\left(e^{\frac{2g_0t}{v_0+v_1}}-1\right)}{v_0+(v_0+2v_1)e^{\frac{2g_0t}{v_0+v_1}}}=v_0\left[\frac{(v_0+2v_1)\left(e^{\frac{2g_0t}{v_0+v_1}}-1\right)}{v_0+(v_0+2v_1)e^{\frac{2g_0t}{v_0+v_1}}}\right]$$

而して
$$v_0=\sqrt{\frac{2}{3}\,\frac{(\gamma_1-\gamma)}{k}D}-v_1$$

（ロ）v_1 が負なる場合

$$\frac{\gamma_1 V}{g}\frac{dv}{dt}=V(\gamma_1-\gamma)-kF(v\sim v_1)^2$$

v_0 か v_1 より大なる時は粒子は沈降を起すべく v_0 か v_1 よりも小なる時は粒子は浮揚することゝなるべし。今 v_1 は負號を有するも粒子の沈降する場合と浮揚する場合との二つに別ちて考ふることゝせん。

(1) 沈降する場合

$$\frac{\gamma_1 V}{g}\frac{dv}{dt}=V(\gamma_1-\gamma)-kF(v-v_1)^2$$

前と同様に
$$\frac{v_0-v_1}{2}\ln\frac{v_0-2v_1+v}{v_0-v}=g_0t+C$$

然るに $t=0$ に對し，$v\geqq v_1$ ならざれば沈降を生ぜざるが故に最小にて $v=v_1$ なり，故に今 $v=v_1$ とすれば $C=0$ となる。

$$\therefore\quad \frac{v_0-v_1}{2}\ln\frac{v_0+v-2v_1}{v_0-v}=g_0t$$

$$\therefore\quad v=\frac{2v_1+v_0\left(e^{\frac{2g_0t}{v_0-v_1}}-1\right)}{e^{\frac{2g_0t}{v_0-v_1}}+1}=v_0\left[\frac{2\frac{v_1}{v_0}+e^{\frac{2g_0t}{v_0-v_1}}-1}{e^{\frac{2g_0t}{v_0-v_1}}+1}\right]$$

而して球狀粒子に對しては $v_0=v_1+\sqrt{\frac{2(\gamma_1-\gamma)D}{3k}}$，今 v_0 なる沈降速度を得る迄の時を見出すために $v=v_0$ なるためには，[ ] 內の値は 1 とならざるべからず，然るに v_1 は v_0 よりは小なる値にて之を極めて小にとれば $\operatorname{tgh}\left(\frac{g_0t_0}{v_0-v_1}\right)=1$ の時に $v=v_0$ なる速度を得ることゝなる，故に前に考へたると同様に $\operatorname{tgh}2.5=0.9867\fallingdotseq 1$ とすれば

$$t_0=\frac{2.5(v_0-v_1)}{g_0}$$

故に前に說明せるが如く，$t_0\fallingdotseq 0$ として取扱ふ場合多し。

(2) 浮揚する場合

$$-\frac{\gamma_1 V}{g}\frac{dv}{dt}=V(\gamma_1-\gamma)-kF(v_1+v)^2$$

此の場合には最初 $v=0$ にて，終りに v_0 に對し相對的速度は v_0+v_1 となり上昇す。

$$\frac{dv}{dt}=0 \text{ に對して } v=v_0 \text{ とすれば}$$

$$v_0=\sqrt{\frac{V(\gamma_1-\gamma)}{kF}}-v_1$$

前と同様に取扱ふ時は

$$-g_0t+C=\frac{v_1+v_0}{2}\left[\ln(v_0+2v_1+v)-\ln(v_0-v)\right]$$

$t=0$ の 時に $v=0$ とすれば

$$C=\frac{v_0+v_1}{2}\ \ln\frac{v_0+2v_1}{v_0}$$

$$\therefore\quad -g_0t=\frac{v_0+v_1}{2}\left[\ln\frac{v_0+2v_1+v}{v_0-v}\quad\frac{v_0}{v_0+2v_1}\right]$$

之より v を求むる時には

$$v=v_0\left[\frac{v_0+2v_1\left(e^{\frac{-2g_0t}{v_0+v_1}}-1\right)}{v_0+(v_0+2v_1)e^{\frac{-2g_0t}{v_0+v_1}}}\right]$$

第二　R が v に比例する場合

（イ）　v_1 が下向きなる場合

$$\frac{\gamma_1V}{g}\ \frac{dv}{dt}=V(\gamma_1-\gamma)-k(v+v_1)D$$

$$\frac{dv}{dt}=0\ \text{の時の}\ v\ \text{を}\ v_0\ \text{とすれば}$$

$$V(\gamma_1-\gamma)=k(v_0+v_1)D$$

$$\frac{\gamma_1V}{g}\ \frac{dv}{dt}=V(\gamma_1-\gamma)-\frac{v+v_1}{v_0+v_1}V(\gamma_1-\gamma)$$

$$\frac{dv}{dt}=g_0\left(1-\frac{v+v_1}{v_0+v_1}\right),\qquad g_0dt=\frac{dv}{v_0-v}\ (v_0+v_1)$$

$$g_0t+C=-(v_0+v_1)\log_e(v_0-v)$$

$t=0$ に於て $v=0$ なるが故に

$$C=-(v_0+v_1)\ln v_0$$

$$\therefore\quad g_0t=(v_0+v_1)\ln\frac{v_0}{v_0-v}\qquad\qquad \therefore\quad v=v_0\frac{e^{\frac{g_0t}{v_0+v_1}}-1}{e^{\frac{g_0t}{v_0+v_1}}}$$

（ロ）　v_1 が負なる場合

(1)　粒子が沈降する場合

$$\frac{\gamma_1V}{g}\ \frac{dv}{dt}=V(\gamma_1-\gamma)-k(v-v_1)D$$

$$\frac{dv}{dt}=0 \text{ に對し } V(\gamma_1-\gamma)=k(v_0-v_1)D$$

$$\frac{\gamma_1 V}{g}\ \frac{dv}{dt}=V(\gamma_1-\gamma)-V(\gamma_1-\gamma)\frac{v-v_1}{v_0-v_1}$$

$$g_0dt=\frac{dv}{1-\dfrac{v-v_1}{v_0-v_1}}=(v_0-v_1)\ \frac{dv}{v_0-v}$$

$$g_0t+C=-(v_0-v_1)\ln(v_0-v)$$

然るに $t=0$ の時 $v\geqq v_1$，今 $v=v_1$ とすれば

$$g_0t=(v_0-v_1)\ln\frac{(v_0-v_1)}{(v_0-v)}$$

$$v=\frac{v_1+v_0(e^{\frac{g_0t}{v_0-v_1}}-1)}{e^{\frac{g_0t}{v_0-v_1}}}$$

(2) 浮揚する場合

$$-\frac{\gamma_1 V}{g}\ \frac{dv}{dt}=V(\gamma_1-\gamma)-k(v+v_1)D$$

$$\frac{dv}{dt}=0 \text{ に對し } V(\gamma_1-\gamma)=kD(v_0+v_1)$$

$$-\frac{\gamma_1 V}{g}\ \frac{dv}{dt}=\left(1-\frac{v+v_1}{v_0+v_1}\right)V(\gamma_1-\gamma)$$

$$-g_0dt=\frac{dv}{1-\dfrac{v+v_1}{v_0+v_1}}=(v_0+v_1)\ \frac{dv}{v_0-v}$$

$$C+g_0t=(v_0+v_1)\ln(v_0-v)$$

$$t=0 \text{ に於て } v=0 \qquad \therefore\quad C=(v_0+v_1)\ln v_0$$

$$g_0t=(v_0+v_1)\ln\frac{v_0-v}{v_0} \qquad \therefore\quad v=v_0(1-e^{\frac{g_0t}{v_0+v_1}})$$

六 水路中にて砂粒の沈澱する迄に流るゝ水平距離

水路中に於ける浮游砂粒は水の有する流速のために衝力を受けて水中に保たるゝものなれど，理想的に考へ水流が流れの方向に平行に流れ毫も上下左右前後の如き不規則なる運動をなすことなきものと想像すれば，砂粒は自重のため垂直に沈降しつゝ流れの方向にも力に働かれて下流に流さるべし。而して水面にありし砂粒が水底に達する迄の時間丈け水平に流さ

るゝことゝなる。

然るに水面にありし砂粒子が沈降を始めて沈降速度 v_0 に達する迄の時間が幾許なりやに就て前に記述したるが如く極めて短時間にて殆んど直ちに沈降速度に達するものと考ふるを得べきが故に，大なる礫に非ざれば吾人は實用的には表面から v_0 なる沈降速度にて沈澱するものと考ふ。次に水流の一縦断面内の速度分布は前に論じたるが如く

$$v=v_0-\frac{v_0-v_s}{h^2}y^2$$

にて表はし得るものとす。

今表面流速の v_0 と沈降速度を表はす v_0 と同記號なるが故に之を區別するため沈降速度を表はすに V_0 を以てせん。y なる深さを沈降するには y/V_0 秒を要するが故に

$$y=V_0t \quad 又 \quad h=V_0T$$

とす。又 dt 時間には v なる流速を以てすれで ds 丈流るゝものとすれば

$$ds=vdt=\left[v_0-\frac{v_0-v_s}{h^2}V_0^2t^2\right]dt$$

$$s=\int ds=\int_0^T\left[v_0-\frac{v_0-v_s}{h^2}V_0^2t^2\right]dt=\frac{h}{3V_0}(2v_0+v_s)$$

又表面にありし粒子が底迄沈澱する途の曲線は

$$y=V_0t, \qquad x=v_0t-\frac{v_0-v_s}{3h^2}V_0^2t^3$$

より t を消去すれば得らるべく

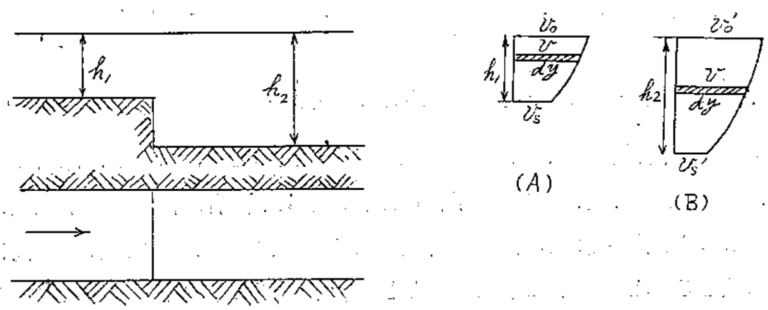
$$x=\frac{v_0y}{V_0}-\frac{(v_0-v_s)y^3}{3h^2V_0}$$

次に沈澱池に關する諸種の場合に就て前掲の諸結果を應用することゝせん。

第一　河幅を同一に保ち水深を急に變じたる場合に沈澱物が水底に達する迄の水平距離

單位幅の流量は水深のみを變化したる場合には h_1 の水深と h_2 との水深とに對し速度變化

第二十二圖



が既に知れる如き關係を保つものとすれば次式を得（但し段階の下流幾許かの長さの間は不均流の不規則なる流れを生ずるものなるが，此の事に就ては茲に觸れざることゝし，定流の連續方程式の關係丈けに就て論ずることゝせり）。

$$dq=v\times 1\times dy$$

$$\therefore\quad q=\int vdy=\int_0^{h_1}\left(v_0-\frac{v_0-v_s}{h^2}y^2\right)dy=\frac{h_1}{3}(2v_0+v_s)\ \text{同樣に}\ q=\frac{h_2}{3}(2v_0'+v_s')$$

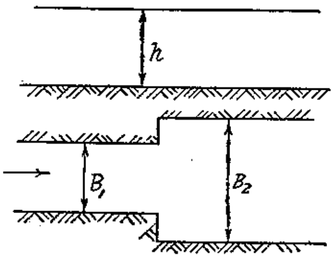
仍て

$$h_1(2v_0+v_s)=h_2(2v_0'+v_s')$$

而して前に知れるが如く，h_1 なる水深の處を沈澱する迄に流さるゝ沈澱物の水平距離 $s=\frac{h_1}{3V_0}(2v_0+v_s)$ を流され，h_2 の水深に對しては $s'=\frac{h_2}{3V_0}(2v_0'+v_s')$，從て $s=s'$ なる關係を得べし。但し h_1 の水深を保持して沈澱する迄には h_1/V_0 sec を要し，h_2 となる時は h_2/V_0 sec を要するの差あるのみ。仍て單に沈澱を生ぜしむるためには水深を增加するの要なくして凹處は單に沈澱物を保留する貯藏所となるに過ぎず。

第二　水深を等一にして幅を急に增したる場合

第二十三圖



前に考へたると同樣に全斷面に對する流量を Q とすれば

$$Q=B_1q_1=B_2q_2$$

q_1，q_2 は夫れ夫れ上下流の兩斷面の單位幅の流量なり，而して

$$q_1=\frac{h_1}{3}(2v_0+v_s)$$

$$q_2=\frac{h_2}{3}(2v_0'+v_s')$$

なることは前と同樣に考ふるを得べし。Q は兩斷面にて等しかるべきが故に

$$B_1\frac{h_1}{3}(2v_0+v_s)=B_2\frac{h_2}{3}(2v_0'+v_s')$$

然るに此の場合にては $h=h_1=h_2$ なるが故に

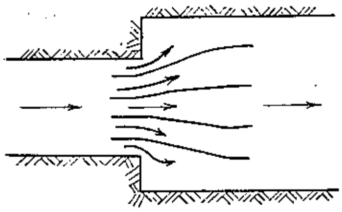
$$B_1(2v_0+v_s)=B_2(2v_0'+v_s')$$

而して h なる水深にて B_2 の幅員なる時は水平距離として沈澱する迄には次式に示すが如く流さるべし。

$$s'=\frac{h}{3V_0}(2v_0'+v_s')$$

$$\therefore\quad s'=\frac{h}{3V_0}\frac{B_1}{B_2}(2v_0+v_s)$$

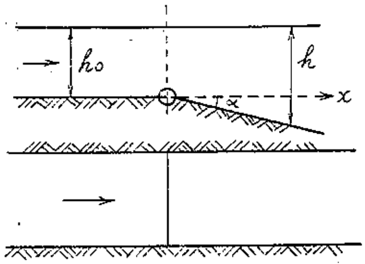
第二十四圖



而して幅を等一にせる時には $s=\dfrac{h}{3V_0}(2v_0+v_s)$ なるが故に，s と s' との關係は $s'=s\dfrac{B_1}{B_2}$ となり，B_2 を大にすれば s' を著しく減じ得るが故に，B_2 の全幅を通じて均一なる流速を與ふる樣にせば s' を減ずるに効あり，仍て沈澱池には流入口に**第二十四圖**の如き流速分布器を附するを以て有效なりとす。

第三　幅員を等一に保ち河底を漸次深くせる場合

第二十五圖



前に考へたると同樣に h_0 より h に水深の變化したる時は，幅員に變化なければ次式を得。

$$\frac{h_0}{3}(2v_0+v_s)=\frac{h}{3}(2v_0'+v_s')$$

而して一縱斷面に於て單位幅に於ける各層の流速分布を前に考へたるが如く $v=v_0-\dfrac{v_0-v_s}{h^2}y^2$ なりとし，其の斷面の平均流速を v とすれば，$v_m=\dfrac{1}{h}\displaystyle\int_0^h vdy$ なるべければ

$$v_m=\frac{1}{h}\int_0^h\left(v_0-\frac{v_0-v_s}{h^2}y^2\right)dy=\frac{1}{3}(2v_0+v_s)$$

故に第一斷面の平均流速を用ひ，單位幅の流量を出せば v_mh_0 にして，之は第二斷面の單位幅流量たる $v_m'h$ に等しからざるべからず，即ち

$$v_mh_0=v_m'h$$

而して河底勾配を $1:a$ なりとすれば $h=h_0+ax$ となる，故に $ds=v_m'dt=\dfrac{v_mh_0}{(h_0+ax)}dt$

然るに t 時間の後に表面にありし粒子は V_0t 丈け沈降すれど，水深の深くなる量が之よりも大なる時には水底迄沈降することなきに至るべし。故に t 時間後の水深の增加は之を ax とすれば $ax\leqq V_0t$ なる條件を滿足せざれば沈澱物を底に達せしめ得ず。今 $ax=V_0t$ なる限界に就て考へんに $x=\dfrac{V_0t}{a}$ となるが故に

$$ds=v_mh_0\frac{dt}{(h_0+V_0t)}$$

$$\therefore\quad s=\frac{v_mh_0}{V_0}\log_e(h_0+V_0t)+C$$

然るに $t=0$ 對し $s=0$ とすれば

$$C=-\frac{v_m h_0}{V_0}\log_e h_0$$

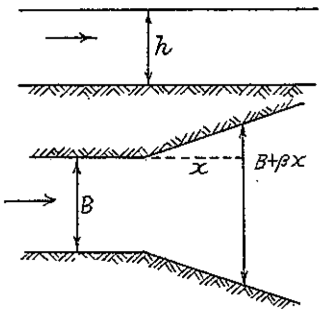
仍て
$$s=\frac{v_m h_0}{V_0}\log_e\left(1+\frac{V_0}{h_0}t\right)$$

今 t を水深を增加せざる時に水面にありし粒子が水底に達する時間，即ち $t=\frac{h_0}{V_0}$ とすれば

$$s=0.69\frac{v_m h_0}{V_0}$$ となる。

第四　水深を等しくして幅員を漸增せる場合

第二十六圖



B なる幅員を x なる距離に於て βx 丈け增したるものとす，而して水深は均一に保持する時は定流の連續方程式が成立する故に次式を得。

$$Bq=(B+\beta x)q'$$

q，q' は夫れ夫れ增幅前後の單位幅の流量にて，其の二つの場合の平均縱斷速度を v_m 及 v_m' とすれば

$$q=v_m h,\quad q'=v_m' h$$

$$Bv_m h=(B+\beta x)v_m' h \qquad \therefore\quad v_m'=\frac{Bv_m}{B+\beta x}$$

$$ds=v_m dt,\quad \int_0^T ds=s \qquad \text{但し}\quad T=\frac{h}{V_0}$$

$$s=Bv_m\int_0^T\frac{1}{B+\beta x}dt$$

前式の x は t の函數なるが，其の關係を求むるために次の如く考ふることゝす。

今 t 秒にて x の間を流るゝとすれば其の平均流速を初速と終速との平均にて表はすとす，

$$\therefore\quad \frac{x}{t}=\frac{v_m+v_m'}{2}=\frac{v_m}{2}\left[1+\frac{B}{B+\beta x}\right]$$

之より x を求むる時には

$$2\beta x^2+(2B-\beta v_m t)x-2Bv_m t=0$$

$$x=\frac{1}{4\beta}\left[\beta v_m t-2B+\sqrt{4B^2+12\beta Bv_m t+\beta^2 v_m^2 t^2}\right]$$

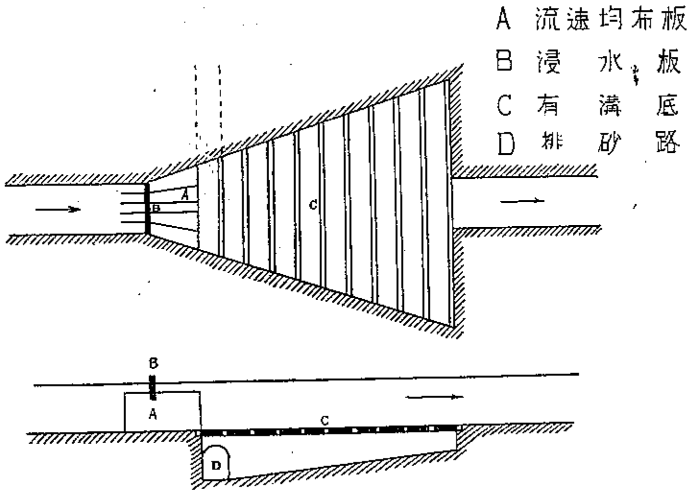
$$\therefore\quad s=4v_m B\int_0^T\frac{dt}{4B+[(\beta v_m t-2B)+\sqrt{4B^2+12\beta Bv_m t+\beta^2 v_m^2 t^2}]}$$

本式は積分し得ざるが故に T を求め之を ΔT に幾等分かして t は $m(\Delta T)$ となして計算する外なし。此の場合に於ても水路の中心部は兩岸よりも速度大なるにより沈澱物は遠く送らるべく，之を均布的に沈澱せしめんには流速均布法を講ずるを可とすべし。

七　沈澱池の改良意見

沈澱池内にて浮游土砂粒を除去するためには前述の結果によれば，水深を増すよりも幅員を増大したる池に流導し速に底に迄沈澱せしめ，尙は茲には沈澱堆積せるものが水深を減ずるの原因とならざる様にするを可とす。故に此の理由に基き沈澱池の水深は之を增加するの要なく，堆積土は砂室にて掃除期間丈け之を貯へ，堆積土砂が水流斷面積を減ずるの因をなさゞる様にするを可とすべし。

第二十七圖



輓近 Defour の考案になる沈砂池なるものが多少弘く用ひらるゝに至れるが，此の工法も一部上記の理論に合致するも水流の幅員增大が左程大ならざるものにして，主として掃除の際二池を交互に用ひ得るの便を與ふる樣に考案せられたるの感あり。

予は第二十七圖の如き要領によりて沈砂池を築造したらば有效ならんと思考するが故に茲に一考案として拙案を提供し弘く諸士の批判を仰がんとす。（終）