

論 說 報 告

土木學會誌 第十四卷第六號 昭和三年十二月

桁構造の撓曲振動に就て

准員 工學士 重 松 愿

On the Transverse Oscillations of Free Beams and
of those Composing a Frame

By Gen Shigematsu, C. E., Assoc. Member.

内 容 梗 概

本文は桁構造の撓曲振動の性状即ち其の週期、變形、應力等の解法を論ずるもので、先づ桁に就て其の減衰及強制等の振動性状を述べ、進んで構造振動の理論解析のために振動部材の應力變形の原則より基本式を誘導して、これを架構等に對し例解せるものであるが、尙ほ最低振動の近似的解法として靜力的撓曲線を利用する方法に就て多少述べ、この場合應用さるゝ撓曲式は同時に其の關する不靜定構造の解法に有利に適用され得べきことを示すものである。

Synopsis

The object of this paper is to present an analysis of the deformations, and stresses in free beams and in those entering into the construction of a frame when set in oscillation. In the first place the phases of oscillation of a beam are explained, and the fundamental formulas are then derived from the theory of stress-strain in individual members for the oscillation of the frame as a whole, and applied to actual structures. Further, a reference is made to the use of statical deflection curve for an approximate solution in the case of a low oscillation. The deflection formula used in the latter case is, at the same time, possible of application to the solution of statically-indeterminate structures of the kind with advantage.

目 次

緒 言	2
第一章 桁の振動	3
第一節 自由振動	3
第二節 強制振動	8
第三節 強制振動數の變階値(%)を求むること	13

第四節 強制振動の性状	14
第五節 軸壓力の振動桁に及ぼす影響	17
第二章 構造の振動	19
第六節 構造振動に関する基本式の誘導	19
第七節 基本式の應用例と局部振動	23
第三章 桁及構造の振動の近似解法及これに関する弾性式	26
第八節 最低振動週期の近似式	26
第九節 弾性拘制を受くる桁材の撓曲式	32
第四章 構造物の振動に関する問題	46
第十節 架構の振動解析	46

緒 言

n 個の集中重量を有する弾性桁の一定面上に於ける横振動は、桁の自重に因る慣性振動を無視すれば、 n 個の振動様式を有するが實際に於ては集中重量の數に關せず無數の様式を有する。これ重量桁では相連繋せる質點列が無數の異なる波狀曲線を以て振動し得るからで、このとき集中重量の各働點は振動曲線の不連続點となる。而して桁の慣性振動を無視する事の可否を不問にすれば、單一重量を有するものゝ振動性は單に其の重量働點の靜力的變位の常數から算定されるが、二つ以上の重量を有するものでは一般に最早靜力的變位から解くことは出來ず特に振動式を誘導せねばならない。然るに都合の好いことには等賦重量桁の如き振動の連続性を有するものでは唯一つの振動式を以て其の無數の振動様式を表し得るから（第一章はこれに就て詳述したものである）總て桁構造の振動性は其の構材數に等しき數の振動式で表し得べく、若し其の節點以外に集中重量の働點があればそれが不連続點であるからそれをも節點と見做し其の數丈けの振動式が増加するわけとなる。而してこの振動式なるものもこれ一種の弾性式であるから或時間に於ける其の弾性變形の條件數は靜力學で取扱ふと同内容で存する、即ち茲に振動變形と應力に關する弾性基本式を作れば其の後に於ける計算法は靜力學の問題と同一に取扱はれ得る。第二章の振動基本式は即ちこれで、連続性を有する各構材の弾性振動に關する應力變形式を誘出し、力系の平衡状態の時を捉へてこれを條件式として適用すれば構造の自由及強制的各振動性を理論的に定め得るのである。然し理論解法は一般に面倒な計算となるから近似解法が欲求される。第三章はこれに要する各式を誘導したもので、其の一つは各構材の自重に因る振動を無視したもの、他の一つは最低振動の近似値計算即ち從來より普く知られてある振動曲線の靜力的撓曲線假定法を取扱ふたものである。斯くして以上の各振動解法を一つの構造物を例として適用したのは第四章の架構の振動解析

である。尚上記振動曲線の静力的假定法に就ては本文に於て従來の研究範圍を廣めて特に各種の必要なる撓曲線を具體的に誘出することに力めたが、これに依つて振動研究と同時に不靜定構造に對する彈性解法をして普通事たらしむる一助とせんとするものである。蓋し最近の構築材料従つて其の構築法は構造線の簡易なるものに於ても其の多數のものは静力的不定に作らるゝから、今後に於ける構造學は彈性解法を其の本論とし、靜力解法を其の入門とするか或はこれを材料學に分屬せしむるに至るべきを豫想するからである。

本文研究の教材として本誌を初め建築雜誌、各大學紀要及其他の斯學に關する論説を参照し、同學の先輩諸士の高見を習得したるは著者の欣幸とする所である。

第一章 桁の振動

第一節 自由振動

桁の自由振動に就ては後に誘導する振動諸式のために参照を要する事項に關して略述するものとす。

一平面内で振動する桁の單位長の重量を w 、其の一支端即ち不動原點から中軸線の方に x なる點の任意時間 t に於ける撓度を y とすれば、其の點に於ける桁の單位長の彈性回復力は $-(w/g)(\partial^2 y / \partial t^2)$ である（但し斷面の廻轉など總て振動に對して影響の僅少なるものは略する）。故に桁の撓曲率と彈性曲線との關係から、

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) = -\frac{w}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

桁を等質、等斷面とすれば其の彈性率 E 及斷面の二次率 I は定數であるから、桁の運動式は

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \lambda^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \text{ 但 } \lambda^2 = w/gEI \dots\dots\dots (1)$$

一般に假定せらるゝ如く、 y の値を x の函數 η と振動數 n を含む t の函數 $\cos 2\pi n t$ とよりなる單運動とする。即ち、

$$y = \eta \cos 2\pi n t$$

これを式 (1) に代入すると、

$$\frac{d^4 \eta}{dx^4} - m^4 \eta = 0, \text{ 但 } m^2 = 2\pi n \lambda \dots\dots\dots (2)$$

この微分方程式の解は

$$\eta = A_1 \sin mx + A_2 \sinh mx + A_3 \cos mx + A_4 \cosh mx \dots\dots\dots (3)$$

茲に A_1 乃至 A_4 は積分常數である。この η を上の單運動の式に代入すれば式 (1) の全解を得る、

$$y = (A_1 \sin mx + A_2 \sinh mx + A_3 \cos mx + A_4 \cosh mx) \cos \frac{m^2}{\lambda} t \dots \dots \dots (4)$$

この式は桁の自由振動に関する一般式で、 A_1 等を各桁の運動條件に應じて定むればよい。

1. 兩 絞 桁

長さ l なる自由支點桁の振動では、 t の任意の値に對し、 $x=0$ に於ても、 $x=l$ に於ても同様に $y=0$ 及 $\partial^2 y / \partial x^2 = 0$ なる條件から

$$A_2 = A_3 = A_4 = 0 \quad \text{及} \quad \sin ml = 0 \dots \dots \dots (5)$$

故に

$$n = \left. \begin{array}{l} ml = \pi \qquad 2\pi \qquad 3\pi \dots \dots \\ \frac{m^2}{2\pi\lambda} = \frac{\pi}{2\lambda l^2} \quad 2^2 \left(\frac{\pi}{2\lambda l^2} \right) \quad 3^2 \left(\frac{\pi}{2\lambda l^2} \right) \dots \dots \dots (6) \\ = n_0 \qquad 2^2 n_0 \qquad 3^2 n_0 \dots \dots \dots \end{array} \right\}$$

斯の如く式 (5) の條件を満足すべき m の値従つて振動様式は無限に存し、夫々の各次振動數は第一次振動數即ち最低振動數 n_0 に對し $2^2, 3^2, 4^2 \dots \dots$ 倍の比にある。而してこれら振動を表す彈性式は

$$y = \sum (A \sin mx) \cos \frac{m^2}{\lambda} t$$

$$= \left\{ A_1 \sin \frac{\pi}{l} x \cos 2\pi n_0 t + B_1 \sin \frac{2\pi}{l} x \cos 8\pi n_0 t + \dots \right\} \dots \dots \dots (7)$$

A_1 等の値は桁の彈性回復動の開始狀態即ち $t=0$ なるときの y の値に依つて定まる。振動週期 T は式 (6) から

$$T = \frac{1}{n} = \left. \begin{array}{l} 0.6366 l^2 \sqrt{\frac{w}{gEI}} \quad 0.1591 l^2 \sqrt{\frac{w}{gEI}} \quad 0.0707 l^2 \sqrt{\frac{w}{gEI}} \dots \dots \\ = \frac{1}{n_0} \qquad \frac{1}{2^2 n_0} \qquad \frac{1}{3^2 n_0} \dots \dots \dots \end{array} \right\} \dots \dots (8)$$

一般に上の式 (5) を此の桁の週期函数、式 (7) を彈性振動函数或は振動式と言ひ、週期函数に因つて知らるる無限數の各振動様式を自由振動の正規様式、この正規様式を表す函数即ち振動式に於て $t=0$ とせる式 (3) の形式を正規函数 (normal function) と言ふ。

2. 突 桁

$x=0$ に於て $y=0$ 及 $\partial y/\partial x=0$, 又 $x=l$ に於て $\partial^2 y/\partial x^2=0$ 及 $\partial^3 y/\partial x^3=0$ なる条件から,

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= 0, & A_3 + A_4 &= 0 \\ -A_1 \sin ml + A_2 \sinh ml - A_3 \cos ml + A_4 \cosh ml &= 0 \\ -A_1 \cos ml + A_2 \cosh ml + A_3 \sin ml + A_4 \sinh ml &= 0 \\ \frac{A_1}{A_3} = \frac{A_2}{A_4} &= -\frac{\cos ml + \cosh ml}{\sin ml + \sinh ml} = \frac{\sin ml - \sinh ml}{\cos ml + \cosh ml} \end{aligned}$$

即ちこの週期函数は

$$1 + \cos ml \cosh ml = 0 \dots \dots \dots (9)$$

故に

$$\left. \begin{aligned} ml &= 1.875 \left(\div \frac{3}{5} \pi \right) \quad 4.694 \left(\div \frac{3}{2} \pi \right) \quad 7.855 \left(\div \frac{5}{2} \pi \right) \dots \\ n &= \frac{m^2}{2\pi\lambda} = \frac{(1.875)^2}{2\pi\lambda^2} \quad \frac{(4.694)^2}{2\pi\lambda^2} \quad \frac{(7.855)^2}{2\pi\lambda^2} \dots \\ &= n_0 \quad 6.27 n_0 \quad 17.55 n_0 \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots (10)$$

振動式は

$$\begin{aligned} y &= \sum A \left\{ \sin mx - \sinh mx + \frac{\cos ml + \cosh ml}{\sin ml - \sinh ml} (\cos mx - \cosh mx) \right\} \cos \frac{m^2}{\lambda} t \\ &= \left[A_1 \left\{ \sin \frac{1.875}{l} x - \sinh \frac{1.875}{l} x - 1.3623 \left(\cos \frac{1.875}{l} x - \cosh \frac{1.875}{l} x \right) \right\} \cos 2\pi n_0 t \right. \\ &\quad + B_1 \left\{ \sin \frac{4.694}{l} x - \sinh \frac{4.694}{l} x - 0.9833 \left(\cos \frac{4.694}{l} x - \cosh \frac{4.694}{l} x \right) \right\} \\ &\quad \left. \times \cos 12.54\pi n_0 t + \dots \right] \dots \dots (11) \end{aligned}$$

各次振動の週期は

$$T = \frac{1}{n} = 1.7872 l^2 \sqrt{\frac{w}{gEI}} \quad 0.2852 l^2 \sqrt{\frac{w}{gEI}} \quad 0.1019 l^2 \sqrt{\frac{w}{gEI}} \dots \dots (12)$$

3. 兩緊桁

$x=0$ に於ても, $x=l$ に於ても同様に $y=0$ 及 $\partial y/\partial x=0$ なる条件から

$$\begin{aligned} \frac{A_1}{A_3} = \frac{A_2}{A_4} &= -\frac{\cos ml - \cosh ml}{\sin ml - \sinh ml} = \frac{\sin ml + \sinh ml}{\cos ml - \cosh ml} \\ \cos ml \cosh ml - 1 &= 0 \dots \dots \dots (13) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}
 ml &= 4.73 \left(\dfrac{\cdot}{\cdot} \dfrac{3}{2} \pi \right) & \frac{5}{2} \pi & \frac{7}{2} \pi \dots\dots \\
 n = \frac{m^2}{2\pi\lambda} = \frac{3^2\pi}{8\lambda l^2} & & \frac{5^2\pi}{8\lambda l^2} & \frac{7^2\pi}{8\lambda l^2} \dots\dots \\
 & = n_0 & 2.77n_0 & 5.44n_0 \dots\dots
 \end{aligned} \right\} \dots\dots (14)$$

$$\begin{aligned}
 y &= \sum A \left\{ \sin mx - \sinh mx + \frac{\cos ml - \cosh ml}{\sin ml + \sinh ml} (\cos mx - \cosh mx) \right\} \cos \frac{m^2}{\lambda} t \\
 &= \left[A_1 \left\{ \sin \frac{3\pi}{2l} x - \sinh \frac{3\pi}{2l} x - 1.0178 \left(\cos \frac{3\pi}{2l} x - \cosh \frac{3\pi}{2l} x \right) \right\} \cos 2\pi n_0 t \right. \\
 &\quad \left. + B_1 \left\{ \sin \frac{5\pi}{2l} x - \sinh \frac{5\pi}{2l} x - 0.999 \left(\cos \frac{5\pi}{2l} x - \cosh \frac{5\pi}{2l} x \right) \right\} \cos 5.55\pi n_0 t + \dots \right] \dots\dots (15)
 \end{aligned}$$

$$T = \frac{1}{n} = 0.2808 l^2 \sqrt{\frac{w}{gEI}} \quad 0.1049 l^2 \sqrt{\frac{w}{gEI}} \quad 0.052 l^2 \sqrt{\frac{w}{gEI}} \dots\dots (16)$$

4. 緊 絞 桁

桁の緊定端を座標原点とすれば其の週期函数及振動式等は

$$\sin ml \cosh ml - \cos ml \sinh ml = 0 \dots\dots (17)$$

$$ml = 3.92 \left(\dfrac{\cdot}{\cdot} \dfrac{5}{4} \pi \right) \quad 7.07 \left(= \frac{9}{4} \pi \right) \quad 10.2 \left(= \frac{13}{4} \pi \right) \dots\dots (18)$$

$$y = \sum A \left\{ \sin mx - \sinh mx - \frac{\sin ml - \sinh ml}{\cos ml - \cosh ml} (\cos mx - \cosh mx) \right\} \cos \frac{m^2}{\lambda} t \dots\dots (19)$$

$$T = \frac{1}{n} = 0.4091 l^2 \sqrt{\frac{w}{gEI}} \quad 0.1258 l^2 \sqrt{\frac{w}{gEI}} \quad 0.0603 l^2 \sqrt{\frac{w}{gEI}} \dots\dots (20)$$

絞端を原点とすれば振動式は次の如く簡単となる。

$$y = \sum A' \left(\sin mx - \frac{\sin ml}{\sinh ml} \sinh mx \right) \cos \frac{m^2}{\lambda} t \dots\dots (21)$$

兩緊桁の式 (15) に於て原点を桁の中點に移し、其の偶數次の振動様式を採れば式 (21) の形を得るは明である。

5. 桁の自由減衰振動

振動する桁が漸次に其の運動を減衰して静止するに至るは其の運動に對する制動力の存在に基因することは明で、この制動力には例へば直接に桁面に及ぼす大氣の抵抗或は支點に於ける摩擦等があり、この摩擦に因る振動勢力の消失は可なり大である。桁の横振動には多少

縦方向の移動が伴ふから振動を實驗せんとする桁に於ける支點装置を不完備ならしむるときには、其の自由振動が固有性を失ふのみならず振動の減衰が急速なる場合が多く、その時には觀測が満足に行はれない。斯る外部摩擦の關係を正確に表す事は困難であるが、若しこれが一定の力として振動曲線の進退と共に交互に張力と壓力とを軸方向に及ぼすものと見做し得る場合には、これを桁の運動式中に含ましむる事が出来る（第五節参照）。亦摩擦力にしてこれを仕事の量を以て表すことが適してあれば、これと振動體の有する勢力とを比較して振動減衰の概況を知り得る。これに類する事柄は物理學で屢取扱はれてある。空氣の抵抗は微弱であるが其の影響は運動速度の餘り大ならざる範圍では凡そ其の衝突速度に比例すると見做され得るからこれを振動式の中に加へる事は容易である。斯くして茲で制動力として桁の運動速度に比例するものを考ふるときは、其の運動式は

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \lambda^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{f}{EI} \frac{\partial y}{\partial t} = 0 \quad \dots\dots\dots (a)$$

但 f は桁の單位長に對する上記制動力である。式 (a) を解くために y に就て次の代置法をなし、 μ の値を定める。

$$y = \eta e^{\mu t}, \quad \eta = F(x) \quad \dots\dots\dots (b)$$

$$e^{\mu t} \left(-\frac{d^4 \eta}{dx^4} + \lambda^2 \mu^2 \eta + \frac{f \mu}{EI} \eta \right) = 0 \quad \dots\dots\dots (c)$$

然るに、
$$\frac{d^4 \eta}{dx^4} - 4\pi^2 n^2 \lambda^2 \eta = 0 \quad \dots\dots\dots (2) \text{ 前出}$$

(c) と (2) とから
$$\lambda^2 \mu^2 + \frac{f}{EI} \mu + 4\pi^2 n^2 \lambda^2 = 0$$

$$\mu = -\frac{gf}{2w} \pm i \sqrt{(2\pi n)^2 - \left(\frac{gf}{2w}\right)^2}$$

この正號及負號を採つた μ の値を夫々 μ_1 及 μ_2 で表し、其の値を式 (b) に入れば、微分方程式 (a) の二つの特解が得られ、其の全解は A_1 及 A_2 を常數とするときは次の如く與へられる。

$$y = F(x) \{A_1 e^{\mu_1 t} + A_2 e^{\mu_2 t}\}$$

而して $(gf/2w)^2 \geq (2\pi n)^2$ なるときには μ の値は負の實數であるから桁は時の経過と共に徐々に平衡位置に近づき非週期運動をなして靜止するが、桁をして週期運動をなさしめんには、 $(gf/2w)^2 < (2\pi n)^2$ であるべく、即ち抵抗力が比較的小なる場合であつて多くの減衰現象はこれである。このとき μ の値は複素數となる。 a' と b' 及 a と b を夫々一組の常數とすれば減衰振動式は、

$$y = \sum F(x) e^{-\frac{\sigma t}{2w}} \left\{ a' \cos \sqrt{(2\pi n)^2 - \left(\frac{gf}{2w}\right)^2} \times t + b' \sin \sqrt{(2\pi n)^2 - \left(\frac{gf}{2w}\right)^2} \times t \right\}$$

或は $y = \sum F(x) a e^{-\frac{\sigma t}{2w}} \cos \left\{ \sqrt{(2\pi n)^2 - \left(\frac{gf}{2w}\right)^2} \times t - b \right\} \dots \dots \dots (22)$

任意の振動様式に應ずる其の週期は、

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{(2\pi n)^2 - \left(\frac{gf}{2w}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{n^2 - \left(\frac{gf}{4\pi w}\right)^2}} \dots \dots \dots (23)$$

斯の如く桁に假定された如き抵抗力が働いて桁を制動するときには時間 t の経過と共に其の運動が追々と減衰し其の平衡状態に達する遅速の度は f/w の大小に關する。このとき振動曲線の形式は抵抗力の有無に依つて變化しないのみならず、週期も f/w の大小に應じ無抵抗の自由振動に於けるものよりは多少緩慢になるが一定の値を保つのである。

第二節 強制振動

1. 桁の一般運動式

桁の自由振動では其の自重の外に桁に働く力として單に其の慣性に基く彈性回復力だけを考へてあるが自然界に起る振動は時の経過に連れて抵抗力の制動の爲に減衰し、或は加力の作用に依つて促進される。而してこれら外力の原因は如何なるものにせよ其の性質はこれを位置 x 及時間 t の函數 $\phi(x, t)$ として表し得るものと考へられるから、運動桁の一般式は、桁の任意點の断面二次率を $I(x)$ 、其の點に於ける桁の單位長の重量を $w(x)$ とすれば、

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ EI(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right\} + \frac{w(x)}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \phi(x, t)$$

或は

$$I(x) \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial I(x)}{\partial x} \cdot \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 I(x)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{w(x)}{gE} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{1}{E} \phi(x, t)$$

但しこの式を適用し得るは、桁の断面及載荷状態が連続性を有する範圍内であるから、例へば集中荷重等に對してはこの式だけでは満足されない。然し連続性の範圍内でも桁の断面二次率或は荷重が x の函數であつては解法が困難であるから、茲では等断面及等賦荷重即ち常數 I 及 w を有する場合に就き簡易なる次の微分方程式の形に於て其の運動を攻究する。

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \lambda^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{1}{EI} \phi(x, t) \dots \dots \dots (24)$$

但 $\lambda^2 = \frac{w}{gEI}$

前節減衰振動では $\phi(x, t)$ に $-f(\partial y/\partial t)$ を與へたに外ならない。

2. 週期的外力に因る強制振動式

制動力の外に、桁に對し一様に最大加速度 α 、振動數 r を以て、餘弦法に従つて變化する週期力 $\alpha \frac{w}{g} \cos 2\pi r t$ が作用するときは、桁の運動式は、

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \lambda^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{f}{EI} \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{kw}{EI} \cos 2\pi r t \dots \dots \dots (25)$$

$$\text{但 } k = \frac{\alpha}{g} : \text{震度}$$

例へば單運動の法則に従ふ地震動が桁の支端に等價の振動を與ふるとき、地震力に等しき逆加速度を桁系に假定して其の支端を靜止的に考ふるときは、上式は其の地震動に對する桁の運動式であり得る。而してこの微分方程式を解く爲に、 y を次の如く假定して式中に代入する。

$$y = \eta \cos(2\pi r t - \gamma); \quad \eta = F(x) \text{ 及 } \gamma = \text{arbitrary constant} \dots \dots \dots (a)$$

$$\cos(2\pi r t - \gamma) \frac{d^4 \eta}{dx^4} - 4\pi^2 r^2 \lambda^2 \cos(2\pi r t - \gamma) \eta - \frac{2\pi r f}{EI} \sin(2\pi r t - \gamma) \eta = \frac{kw}{EI} \cos 2\pi r t$$

$$\begin{aligned} \cos 2\pi r t \left\{ \cos \gamma \left(\frac{d^4 \eta}{dx^4} - 4\pi^2 r^2 \lambda^2 \eta \right) + \sin \gamma \frac{2\pi r f}{EI} \eta - \frac{kw}{EI} \right\} \\ + \sin 2\pi r t \left\{ \sin \gamma \left(\frac{d^4 \eta}{dx^4} - 4\pi^2 r^2 \lambda^2 \eta \right) - \cos \gamma \frac{2\pi r f}{EI} \eta \right\} = 0 \end{aligned}$$

これが t の任意の値に對し成立する爲には、

$$\cos \gamma \left(\frac{d^4 \eta}{dx^4} - 4\pi^2 r^2 \lambda^2 \eta \right) + \sin \gamma \frac{2\pi r f}{EI} \eta - \frac{kw}{EI} = 0 \dots \dots \dots (b)$$

$$\text{及 } \sin \gamma \left(\frac{d^4 \eta}{dx^4} - 4\pi^2 r^2 \lambda^2 \eta \right) - \cos \gamma \frac{2\pi r f}{EI} \eta = 0 \dots \dots \dots (c)$$

然るに桁の自由振動に於て、

$$\frac{d^4 \eta}{dx^4} - 4\pi^2 n^2 \lambda^2 \eta = 0 \dots \dots \dots (2) \text{ 前出}$$

(c) と (2) との間に η の項を消去すれば、

$$\gamma = \tan^{-1} \frac{gfr}{2\pi w(n^2 - r^2)} \dots \dots \dots (26)$$

γ は與へられた加速度の週期變化に對する強制振動の位相差である。次に (b) に $\cos \gamma$,

(c) に $\sin y$ を乗じて加合せば,

$$\frac{d^4 \eta}{dx^4} - 4\pi^2 r^2 \lambda^2 \eta = \frac{kw}{EI} \cos y \dots\dots\dots (27)$$

この微分方程式の特解は,

$$\eta = -\frac{kw}{m_r^4 EI}$$

従つて其の全解は,

$$\eta = \frac{kw}{m_r^4 EI} \cos y \left(-1 + A_1 \sin m_r x + A_2 \sinh m_r x + A_3 \cos m_r x + A_4 \cosh m_r x \right) \dots (28)$$

$$\text{但 } m_r^2 = 2\pi r \sqrt{\frac{w}{gEI}} = r \frac{m^2}{n}, \quad \gamma = \tan^{-1} \frac{gfr}{2\pi w(n^2 - r^2)}$$

この式は強制週期即ち r が與へられた振動桁の正規函数を表し、式中の m_r は或桁に對し與へられた一定の値であるが、 γ に含まる n の値は理論上には無限に存する。若し r が或 n に極めて近き値であるならば r の値に對し其の n を採つても先づ差支はないが、一般には任意の r に對し n を明確に定めねばならない。後に述べる強制振動式の吟味及單運動の性質から推定し、 r の一定値を限界（第三節参照）として與へられた r が其の限界値より大なるか小なるかに應じ、 r より大或は小なる n の一つの値を式 (26) に與へるものとする。而して任意の桁に於て n の數が無限に存するから、斯かる r の限界も（若し r の値を無限大までも考ふるならば）無限に存するが、一つの與へられた r に関しては勿論唯一つの n が存するのみである。上の r の限界値を γ の變階に應ずる r の變階値と命名する。次に自由振動で取扱ふた二、三の桁に就き式 (28) を解きて必要なる振動諸式を誘出する。

3. 兩 絞 桁

桁の一般正規函数 (28) に就て、 $x=0$ に於ても $x=l$ に於ても同様に $\eta=0$ 及 $\frac{d^2 \eta}{dx^2}=0$ なる條件から、

$$A_1 = \frac{1}{2} \tan \frac{1}{2} m_r l, \quad A_2 = -\frac{1}{2} \tanh \frac{1}{2} m_r l, \quad A_3 = A_4 = \frac{1}{2}$$

これらの値を原式に代入し、式 (9) に依つて m_r に特定の値即ち $m_r^2/r = \pi^2/l^2 n_0$ を與へて、

$$\eta = \frac{kw l^4 n_0^2}{\pi^4 EI r^2} \cos y \left\{ -1 + \frac{1}{2} \left(\tan \frac{1}{2} m_r l \sin m_r x - \tanh \frac{1}{2} m_r l \sinh m_r x + \cos m_r x + \cosh m_r x \right) \right\}$$

$$= \frac{kwl^4 n_0^2}{\pi^4 EI r^2} \cos \gamma \left\{ -1 + \frac{\cos\left(\frac{1}{2}l-x\right)m_r}{2\cos\frac{1}{2}m_r l} + \frac{\cosh\left(\frac{1}{2}l-x\right)m_r}{2\cosh\frac{1}{2}m_r l} \right\}$$

上式と式(22)とから及式(7)を参照して振動式の全解は次の形に於て得られる。

$$y = \frac{kwl^4 n_0^2}{\pi^4 EI r^2} \cos \gamma \left\{ -1 + \frac{\cos\left(\frac{1}{2}l-x\right)m_r}{2\cos\frac{1}{2}m_r l} + \frac{\cosh\left(\frac{1}{2}l-x\right)m_r}{2\cosh\frac{1}{2}m_r l} \right\} \cos(2\pi r t - \gamma) \\ + \left[A e^{-\frac{\omega t}{2w}} \sin \frac{\pi}{l} x \cos \left\{ \sqrt{(2\pi n_0)^2 - \left(\frac{gf}{2w}\right)^2} t - b \right\} + \dots \right] \dots \dots \dots (29)$$

$$\text{但 } m_r = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{r}{n_0}}, \quad \gamma = \tan^{-1} \frac{gfr}{2\pi w(n_0^2 - r^2)} \quad \text{及 } A, b = \text{Constants}$$

言ふまでもなく上式の右邊第一列は強制振動、第二列は自由減衰振動を表す式である。これらを便宜上夫々 r 振動及 n_0 振動と略稱する。さて r 振動に於て $m_r l$ が π の奇数倍になる如き値を r に與ふるとき若し $f=0$ ならば其の値は數學上の無限大となるが f を考ふるときは $\cos \gamma$ 及 $\cos \frac{1}{2}m_r l$ が共に零となり式は不定となるから、これを r に關して定値を評價すべきであるが、單に曲線の形式のみを知るを要するならばこの場合の曲線は其の自由正規振動のものに相似するから、これに依つて曲線形を求めて差支ない。又 n_0 振動は運動開始後徐々に減衰すべきものであるが、實動に就て觀察するに r 振動が整齊なる運動であれば、これがために制肘せられて急減するのみならず、最初静止状態にある桁に r 振動のみを與ふるときは n_0 振動が殆んど現れないと言つてよい。この r 振動のみが單獨に進行し得ると言ふ事は振動の考察上に好都合の事である。

次に任意時間 t に於ける撓曲率 M 及剪力 Q の値は式(29)を x に關し偏微分して求められる。

$$M = -EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad Q = \frac{\partial M}{\partial x}$$

4. 突 桁

式(28)の m_r に特定の値 $m_r^2/r = (1.875)^2/l^2 n_0$ を代入する。而して $x=0$ に於て $\eta=0$ 及 $d\eta/dx=0$ 又 $x=l$ に於て $d^2\eta/dx^2=0$ 及 $d^3\eta/dx^3=0$ なる條件から

$$A_1 = -A_2 = \frac{\sin m_r l \cosh m_r l + \cos m_r l \sinh m_r l}{2(1 + \cos m_r l \cosh m_r l)}$$

$$A_3 = 1 - A_4 = \frac{1 - \sin m_r l \sinh m_r l + \cos m_r l \cosh m_r l}{2(1 + \cos m_r l \cosh m_r l)}$$

A_1 等の値を式 (28) に與へて其の常數を確定した η 式を y 式に代入して強制振動式を得、これを式 (11) 及 (22) と組合せて振動式の全解を得ること次の如し。

$$y = \frac{kwl^4 n_0^2}{(1.875)^4 EI r^2} \cos \gamma \left[-1 + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin m_r l \cosh m_r l + \cos m_r l \sinh m_r l}{1 + \cos m_r l \cosh m_r l} (\sin m_r x - \sinh m_r x) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\sin m_r l \sinh m_r l}{1 + \cos m_r l \cosh m_r l} (\cos m_r x - \cosh m_r x) + \cos m_r x + \cosh m_r x \right\} \right] \cos(2\pi r t - \gamma) \\ + \left[A e^{-\frac{g t}{2w}} \left\{ \sin \frac{1.875}{l} x - \sinh \frac{1.875}{l} x - 1.3623 \left(\cos \frac{1.875}{l} x - \cosh \frac{1.875}{l} x \right) \right\} \right. \\ \left. \times \cos \left\{ \sqrt{(2\pi n_0)^2 - \left(\frac{g f}{2w} \right)^2} \times t - b \right\} + \dots \right] \dots \dots \dots (30)$$

但 $m_r = \frac{1.875}{l} \sqrt{\frac{r}{n_0}} = \frac{3\pi}{5l} \sqrt{\frac{r}{n_0}}$, $\gamma = \tan^{-1} \frac{g f r}{2\pi w(n_0^2 - r^2)}$ 及 $A, b = \text{Constants}$

尚 $M = -EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, $Q = \frac{\partial M}{\partial x}$

上の各式の値は何れも $1 + \cos m_r l \cosh m_r l = 0$ なるとき即ち $m_r l$ の値が 1.875, 4.694 ... になる如き r/n_0 の値に於て最大となる。

5. 兩 緊 桁

兩支端の緊定條件から

$$A_1 = -A_2 = \frac{(1 - \cos m_r l) \sinh m_r l + (1 - \cosh m_r l) \sin m_r l}{2(1 - \cos m_r l \cosh m_r l)}$$

$$A_3 = 1 - A_4 = \frac{1 - \cos m_r l \cosh m_r l + \sin m_r l \sinh m_r l + \cos m_r l - \cosh m_r l}{2(1 - \cos m_r l \cosh m_r l)}$$

$m_r l/r = (4.73)^2/l^2 n_0$ を與へ、前項と同様に

$$y = \frac{kwl^4 n_0^2}{(4.73)^4 EI r^2} \cos \gamma \left[-1 + \frac{1}{\sin \frac{1}{2} m_r l \cosh \frac{1}{2} m_r l + \sinh \frac{1}{2} m_r l \cos \frac{1}{2} m_r l} \right. \\ \left. \times \left\{ \sinh \frac{1}{2} m_r l \cos \left(\frac{1}{2} l - x \right) m_r + \sin \frac{1}{2} m_r l \cosh \left(\frac{1}{2} l - x \right) m_r \right\} \right] \cos(2\pi r t - \gamma) \\ + \left[A e^{-\frac{g t}{2w}} \left\{ \sin \frac{3\pi}{2l} x - \sinh \frac{3\pi}{2l} x - 1.0178 \left(\cos \frac{3\pi}{2l} x - \cosh \frac{3\pi}{2l} x \right) \right\} \right]$$

$$\times \cos \left\{ \sqrt{(2\pi n_0)^2 - \left(\frac{gf}{2w}\right)^2} \times t - b \right\} + \dots] \dots \dots \dots (31)$$

但 $m_r = \frac{4.73}{l} \sqrt{\frac{r}{n_0}} = \frac{3\pi}{2l} \sqrt{\frac{r}{n_0}}$, $\gamma = \tan^{-1} \frac{gfr}{2\pi w(n^2 - r^2)}$ 及 $A, b = \text{Constants}$

$$M = -EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad Q = \frac{\partial M}{\partial x}$$

上の各曲線の値は兩鉸桁の場合と同様に r が桁の奇數次の自由振動數と一致するとき最大となり、其の時の曲線の形式は其の自由振動のものに相似である。

以上各桁に就て求めた y 式の右邊括弧中の -1 は式の誘導に際し桁の支端を不動と假定して運動する桁の中軸線を方程式の座標軸に撰定したために生じた數字であるから若し振動中立線を座標の x 軸に採るならば -1 の項は消失する (第二圖参照)。

今任意の桁に與へられた振動數 r に對し其の時の支端の最大變位即ち半振幅を ξ で表せば一般に、

$$\xi = \frac{kw}{n^2 r EI} \cos \gamma = \frac{kg}{4\pi^2 r^2} \cos \gamma \dots \dots \dots (32)$$

この式の m_r に各桁の振動の特定値を與ふれば、 y 式の括弧の先にある係數値が得らるゝ。

第三節 強制振動數の變階値 (r_c) を求むること

既に述べた如く強制振動の位相の遅れ γ に含む n の値として、與へられた r に對し何れの n を採るべきかは、 r が桁の自由振動の任意の隣接振動數 n_a と n_b との中間數 ($n_a < r < n_b$ とす) なる場合には、 $\tan \gamma$ の絶對値が n_a 及 n_b に對して同一の最小値にあるときの r の値 (これを r_c にて表す) を求め、 r がそれより大なるか或は小なるかに應じ、 n_b 或は n_a を γ 式中に代入すればよい。

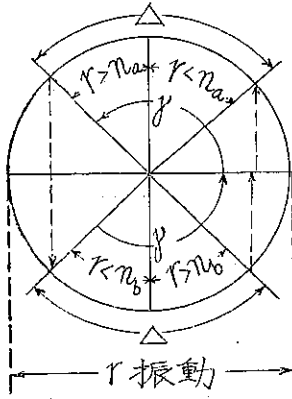
即ち $-(n_a^2 - r_c^2) = n_b^2 - r_c^2$ なるべき條件から、

$$\left. \begin{aligned} r_c &= \frac{1}{2} \sqrt{2n_a^2 + 2n_b^2} \\ \gamma &= \tan^{-1} \frac{gfr}{2\pi w(n_a^2 - r^2)} \quad \text{when } r < r_c \\ \gamma &= \tan^{-1} \frac{gfr}{2\pi w(n_b^2 - r^2)} \quad \text{when } r > r_c \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (33)$$

但し n_a 及 n_b は振動に關し對稱なる二つの支端を有する桁では特に奇數次の隣接自由振動數を表すものである。抑も γ は例へば桁の支端に r 振動が與へらるゝものとする場

合には、其の最大變形の時即ち $\cos(2\pi rt - \gamma) = 1$ なる時に於ける支端の移動位置の關係を示すもので、今 γ が r 及 n_0 の値に應ずる n_0 階の或象限にあるとき r 振動を漸進的に増大しつゝ考ふれば、 r が上式で與へらるゝ n_0 の値に達すれば、これを限界として r 振動が次の n_0 階に移り同時に $\tan \gamma$ の値が其の正負を變へて逆行するが（このとき $\cos \gamma$ は正負を變へない） r が更に次の n_0 の値に達すると $\tan \gamma$ の値は又正負を變へて r の進むと同時に逆行する、即ち $\tan \gamma$ の値は其の無限大の前後に振動するものである。この關係を桁の支端に r 振動が加へられた場合として二つの階 n_0 及 n_0 に就て第一圖に示す。△は r に應ずる振動桁の最大變形時に於ける支端位置の範圍である。

第一圖



尙 n_0 の値に關して例へば兩鉸桁を採れば其の第三次の振動數は $9n_0$ であるから最低の n_0 の値は上式で計算して $6.4n_0$ を得る。故に r が n_0 の 6.4 倍に達するまでは γ に n_0 を與ふれば良く、桁に起るべき高次の自由振動の諸材件を考へなくてもよい事になる。突桁に於ける n_0 の値は同様に計算して $4.5n_0, 14n_0, \dots$ 、又兩緊桁では $3.9n_0, 10.2n_0, \dots$ になる。而して突桁の自由振動は概して緩漫であるが、兩鉸桁殊に兩緊桁では早急であるから、實際に於ける週期的外力がこの早急な振動の數倍の急振動で與へらるゝ如きは稀であるから高次振動の材件を要せない場合が多い。然し單純な桁なればさう考へてもよいが桁の軸壓力を受くるもの或は柱の横振動をなすものでは其の自由振動は比較的緩漫になり従つて γ の値を定むるに當り高次振動の材件をも取扱ふを要することになるとすれば、 r の變階値 n_0 の値は重要な意義を有するに至る。

第四節 強制振動の性狀

桁の特徴の強制振動を述べ、又さきに誘出した強制振動の各式を數量的に吟味して其の最大應力點の位置の關係など夫々の桁に就ての共通の特性を少々述べる。

1. 彈性荷重

振動の一般式 (24) に於て外力の項 $\phi(x,t)$ を $-f(\partial y/\partial t) + c\eta \cos 2\pi rt$ とする、即ち其の第一項は桁に對する制動力であるが、第二項は與へられた r 振動の正規函數 η の値に常數 c を以て比例するが如き配賦荷重が $\cos 2\pi rt$ なる週期的變化を以て桁に働くことを表す。然るとき其の運動式は、

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \lambda^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{f}{EI} \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{c}{EI} \eta \cos 2\pi r t$$

これに $y = \eta \cos(2\pi r t - \gamma)$ を代入し式 (28) を得たと同様にして計算の結果を整理すれば、

$$\frac{d^4 \eta}{dx^4} - \left(\frac{r^2}{n^2} m^4 + \frac{c}{EI} \cos \gamma \right) \eta = 0 \dots\dots\dots (a)$$

然るに桁の自由振動の関係は

$$\frac{d^4 \eta}{dx^4} - m^4 \eta = 0 \dots\dots\dots (b)$$

任意の桁に就て上式 (a) 及 (b) を解けば第一節に依つて週期は (a) と (b) とに於て全く異なるが其の正規函数は相似形なることは明である。故に一般に任意の桁に於て其の振動の彈性線に比例するが如き形の荷重を與ふれば、其の新しき彈性線の形として與へられた荷重形に相似するものを得る。尙 r は任意の數であるから $r=0$ になるとき即ち靜力的荷重に就ても桁の自重を無視してこの事實を成立せしめ得るのである。例へば兩鉸桁に正弦荷重を與へたときの彈性線は亦一つの正弦曲線である事がわかる。この事實からして桁に與へられた或荷重を Fourier 函数に展開して其の彈性線の値を無限級數の形に於て求め、桁の振動に関する特種の性狀を知るに便ならしむるを得るのである。然し斯る應用は特種の荷重に限らるゝから、これを後日の研究とし次に第二節で誘出した各振動式を吟味する。

2. 最大應力點

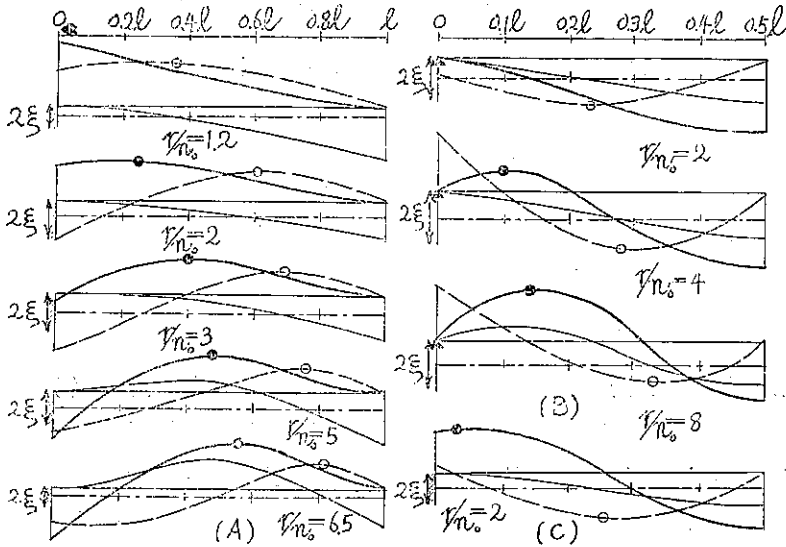
強制振動の諸式中例へば兩鉸桁の彎曲率 M の値は、

$$M = \frac{kwl^2 n_0}{2\pi^2 r} \cos \gamma \left\{ \frac{\cos\left(\frac{1}{2}l-x\right)m_r}{\cos\frac{1}{2}m_r l} - \frac{\cosh\left(\frac{1}{2}l-x\right)m_r}{\cosh\frac{1}{2}m_r l} \right\} \cos(2\pi r t - \gamma) + \text{etc.}$$

$$\text{但 } m_r = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{r}{n_0}}, \quad \gamma = \tan^{-1} \frac{gf r}{2\pi w(n^2 - r^2)}$$

與へられた強制振動數 r に對し式の値は最低振動數 n_0 を初め k, w, l 及 γ の大小に依つて増減するは勿論であるが、この中 n_0 は w, l 及 I の函数であるから M の曲線形はこれら w, l 及 I の中何れかゞ變れば全く異なる形式となる。これ自由振動の形式及靜力的彎曲率の性質と大に異なる點である。次に一定の n_0 に對し r が變れば曲線形も變り従つて最大應力點の位置も移動する。これに就て詳言する代り振比 r/n_0 の二、三の値に對し變形及應力の

第二圖



正規函数の値を第二圖に示す。(A)は突桁の五つ、(B)及(C)は兩鉸桁の三つ及兩緊桁の一つの各半徑間に就て描けるもので、細き實線は彈性曲線、太き實線は撓曲率、破線は剪力を表し、又上下の二つの細き平行線の中、上は運動する中軸線即ち x 軸、下は振動の中立軸であつて桁の位置は上下振動に於ける上方變位の場合を示してある。若し式中の l , γ 等の値を假定して計算すれば圖の縮尺が決定されるが茲では單に各應力の最大點を示すことにし、強制振動の半振幅 ξ と振動曲線の變位との比較に依つて各圖縮小の割合を大略判斷し得るものとする。共振振動の近くでは曲線の縦距の値は ξ の値に比し甚大である。斯くの如くして桁の強制振動と各次自由振動との關係を各式の計算及圖式によつて考査すれば、夫々の振動桁に於て r/n_0 が 1 より大或は小なるにより其の振動性に關して大要次の如き觀察が出来る。

$r/n_0 < 1$ なるときには、與へられた r の値如何に關せず桁の強制振動に關する諸性狀即ち其の彈性線及應力線の形式は殆んど最低自由振動の夫れに相似する。尙好都合なことにはこの時の形式は桁の靜力的諸性狀のものと近似するから、單に振動の形式を見るには簡便に靜力的材件を以て取扱ふとも大なる誤差は生ぜない。兩鉸桁に於ては特にさうである。

$r/n_0 > 1$ なるときには、 r の増大すると共に桁の強制振動の諸性狀は複雑となるが、其の變化の有様は連続的に整正であり、突桁の如き振動支點に關する對稱中心を有せざるものにおいて、其の強制振動は各次の自由振動の様式を總て經過して行くが、振動の對稱支點を有する桁において、其の強制振動は奇數次の自由振動様式のみを經過し偶數次のものには

全く觸れない。而してこれらの場合に於ける振動時相の關係は第三節で述べた如くである。次に r/n_0 の値が 1 より大となるに應じ桁の支端に於ける撓曲率及剪力（兩支端では振動に依つて新に支端に接して撓曲率の一最大値が現れる）は數學上の一つの最大値として支端より離れて追々移動す、上に述べた如き経過を以て高次の自由振動の様式に到達する。而してこの移動の傾向は剪力が撓曲率に先立つことは明である。尙、任意の振動數 r なる強制振動を興へられた桁、例へば突桁に於ては放端からそれに近き撓曲率の一最大値の點に至る桁の一部分が其の點を彈性基點として r に應ずる局部振動をなすかの觀がある。即ち突桁が外力の強制を受くるときには、其の變位の比較的自由な部分が先づ其の時の強制條件に應じて一つの彈性基點上に於ける局部自由振動をなす性状があるものと考へられる。兩支端桁では其の中央部が自由にして變位が大であり、この局部自由振動が中央部に起ると言ふことが出来る。勿論これらの場合に起る局部自由振動の部分長は、自由振動に關する計算上の桁の長さとは多少の相異はあるが、これ局部振動の假定基點が彈性を有するのみならず、更に隣接部分の拘制振動の影響を受くる所以であると推定し得る。

この局部自由振動に關する性向の見解は嘗て佐野博士が高層建築物の振動破砕點の位置に關して考察された推論、即ち柱狀體の強制振動を受くるものは其の時週期に應じ或點を基點として其の上部分が自由振動をなし従つて其の基點に最大應力が惹起され、そこが破砕點となると言ふ事に大體合致するわけである。又故大森博士が剛性に近き長柱體の振動に關し提唱された撃心説に對する Prof. J. N. Le Conte の力學的解析 (Transactions, Am. Soc. C.E., Vol. 91, Dec. 1927 參照) を見るに其の應力配賦狀況は第二圖 (A) の $r/n_0=3$ の場合に殆んど一致する。即ち剛性に近き長柱體例へば煉瓦煙突の如きは剪力の最大點附近で破砕するものと考ふべく、假令それが彈性體であつても r/n_0 の 2~3 附近では剛性體と最大應力の配賦狀況を同じうすることは是れを輕々に見逃すことが出来ない。

第五節 軸壓力の振動桁に及ぼす影響

前節までは桁に直角に働く諸力のみで就て其の撓曲振動を求めて來たが、尙柱の横振動の如く其の支端に於て縦方向に或力 P が働き、桁の各點が Py なる撓曲率を受くるが如き場合を考へると其の運動式は

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{P}{EI} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{m}{gEI} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{f}{EI} \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{kw}{EI} \cos 2\pi r t \dots\dots (a)$$

先づ軸壓力 P だけが働く自由振動の場合を考へ振動數を n にて表し、 $y = \eta \cos 2\pi n t$ を興へると、

$$\frac{\partial^4 \eta}{dx^4} + 2V \frac{d^2 \eta}{dx^2} - m_p^4 \eta = 0 \dots\dots\dots (b)$$

$$\text{但 } V = \frac{P}{2EI}, \quad m_p^2 = 2\pi n \sqrt{\frac{w}{gEI}}$$

式 (b) の解は

$$\eta = A_1 \sin m_1 x + A_2 \sinh m_2 x + A_3 \cos m_1 x + A_4 \cosh m_2 x \dots\dots\dots (c)$$

$$\text{但 } m_1 = (V + \sqrt{V^2 + m_p^4})^{\frac{1}{2}}, \quad m_2 = (-V + \sqrt{V^2 + m_p^4})^{\frac{1}{2}}$$

これを例へば兩鉸桁に就て解けば、其の運動の環境條件より $\sin m_1 l = 0$ を得るから

$$\begin{aligned} m_1 l &= && \pi && 2\pi \dots\dots\dots \\ (V + \sqrt{V^2 + m_p^4})^{\frac{1}{2}} &= && \pi/l && 2\pi/l \dots\dots\dots \\ n^2 &= && \frac{gEI}{4l^2 w} \left(\frac{\pi^2}{l^2} - 2V \right) && \frac{gEI}{l^2 w} \left(\frac{4\pi^2}{l^2} - 2V \right) \dots\dots\dots \\ \therefore T = \frac{1}{n} &= && \frac{2l}{\left(\frac{\pi^2}{l^2} - \frac{P}{EI} \right)^{\frac{1}{2}}} \sqrt{\frac{w}{gEI}} && \frac{l}{\left(\frac{4\pi^2}{l^2} - \frac{P}{EI} \right)^{\frac{1}{2}}} \sqrt{\frac{w}{gEI}} \dots\dots\dots (34) \end{aligned}$$

斯の如く柱性桁は P があるために其の振動が緩慢になり、 $P = \pi^2 EI/l^2$ 等に達すれば $T = \infty$ に至る。これ長柱論に關する Euler 氏の極限荷重の F に於ては桁が恒久變形の状態に置かれ最早自由弾性振動をなすべき勢力のない事を示す。

次に桁に一樣に働く振動數 r なる強制振動式は第二節と同様の方法 (計算を略す) により上式 (34) で表さるゝ最低振動數を n_0 として、次の一般式で與へられる。

$$y = \frac{kwl^4 n_0^2}{\pi^4 EI r^2} \cos \gamma (-1 + A_1 \sin \theta_1 x + A_2 \sinh \theta_2 x + A_3 \cos \theta_1 x + A_4 \cosh \theta_2 x) \cos(2\pi r t - \gamma) \dots\dots\dots (35)$$

$$\text{但 } \theta_1 = (V + \sqrt{V^2 + m_r^4})^{\frac{1}{2}}, \quad \theta_2 = (-V + \sqrt{V^2 + m_r^4})^{\frac{1}{2}} \quad \text{及} \quad m_r = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{r}{n_0}}$$

兩鉸桁に就て A_1 等の常數を定むれば

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\theta_2^2}{\theta_1^2 + \theta_2^2} \tan \frac{1}{2} \theta_1 l, & A_2 &= -\frac{\theta_1^2}{\theta_1^2 + \theta_2^2} \tanh \frac{1}{2} \theta_2 l, \\ A_3 &= \frac{\theta_2^2}{\theta_1^2 + \theta_2^2}, & A_4 &= \frac{\theta_1^2}{\theta_1^2 + \theta_2^2} \end{aligned}$$

これを原式 (35) に代入して、

$$y = \frac{kw l^2 n_0^2}{\pi^4 E I r^2} \cos \gamma \left\{ -1 + \frac{\theta_2^2}{\theta_1^2 + \theta_2^2} \frac{\cos\left(\frac{1}{2}l-x\right)\theta_1}{\cos \frac{1}{2}\theta_1 l} + \frac{6\tau^2}{\theta_1^2 + \theta_2^2} \right. \\ \left. \times \frac{\cosh\left(\frac{1}{2}l-x\right)\theta_2}{\cosh \frac{1}{2}\theta_2 l} \right\} \cos(2\pi r t - \gamma) \dots \dots \dots (36)$$

$(\theta_1 \theta_2)^2 / (\theta_1^2 + \theta_2^2) = m_r^4 / 2(V^2 + m_r^4)^{1/2}$ であるから彎曲率の値は次の如くなる。

$$M = \frac{kw}{2\sqrt{V^2 + m_r^4}} \cos \gamma \left\{ \frac{\cos\left(\frac{1}{2}l-x\right)\theta_1}{\cos \frac{1}{2}\theta_1 l} \quad \frac{\cosh\left(\frac{1}{2}l-x\right)\theta_2}{\cosh \frac{1}{2}\theta_2 l} \right\} \cos(2\pi r t - \gamma) \dots (37)$$

上の各式に於て $V=0$ なるときは第二節の強制振動式を得る。然し V は一般に小なる値であるから兩者の振動様式には著しき差異は無いが、唯最低振動数 n_0 の値の小なる事は實際に起る強制振動に於て r/n_0 をして 1 より大ならしむる機会を多くするので、これ振動上大に顧慮すべきことである。

次に軸壓力 P の代りに軸張力 $-P$ を與ふれば、桁の振動は上の場合と反對に鋭敏となることは音響器に於けると同様である。桁の支點に働く摩擦力などを常數と見做せば其の運動状態に關して總て上式を適用し得べく、唯振動線の往復毎に P が交互に正負に現れて、複成週期運動をなし、結局其の振動は $P=0$ なるときよりは多少鈍くなる。故に摩擦力の存在は振動上から言つても面白からぬことである。

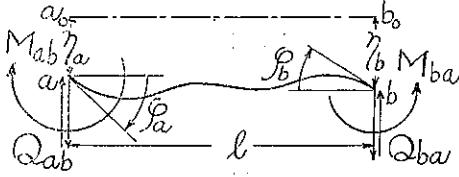
緊定桁等の振動に關しても大略上と同様の現象を説明し得べく、唯振動式を誘導するには P の値を數量的に與へて、 m_p を求むべき條件式を圖式解法を利用して計算する必要があるから多少面倒である。然し何れにせよ軸壓力のために自由振動が鈍くなることはこれを別に證するまでもなく推定し得らるゝのである。

第二章 構造の振動

第六節 構造振動に關する基本式の誘導

多數構材を以て結節された構造物或は集中重量を有する桁材に關する振動曲線式は、それらの可動節點或は節點と見做し得べき重量働點に於て不連続となるから、各部材の連続性を有する區間に就て或假定の彈性拘制を受くる振動の正規函數を誘導し、これを基本式として部材系に適用すれば、其の振動性に關し必要なる諸式を見出すことが出来る。

第三圖



第三圖の如く $y = \eta \cos(m_r l / \lambda) t = \eta \cos 2\pi r t$ なる振動をなす構造物の一部材の任意長 l の両端 a 及 b が、其の振動面に於て振動中立軸 a_0, b_0 に對し夫々撓度 η_a 及 η_b 、撓角 φ_a 及 φ_b を以て表さるゝ弾性拘制を受くるときは、

それら拘制の變化は部材任意點の振動變位に正比例して起るから其の振動の正規函數は一般に次の形を以て表され得る。記號の規約として一般の慣例に従つて彎曲率は撓垂 (sagging) に於て正號とし、撓角は右廻轉を正號とする。

$$\left. \begin{aligned} \eta &= A_1 \sin m_r x + A_2 \sinh m_r x + A_3 \cos m_r x + A_4 \cosh m_r x \\ M &= -EI \frac{d^2 \eta}{dx^2} = m_r^2 EI (A_1 \sin m_r x - A_2 \sinh m_r x + A_3 \cos m_r x - A_4 \cosh m_r x) \\ Q &= \frac{dM}{dx} = m_r^3 EI (A_1 \cos m_r x - A_2 \cosh m_r x - A_3 \sin m_r x - A_4 \sinh m_r x) \end{aligned} \right\} \dots (38)$$

但し常數 $A_1, A_2, A_3,$ 及 A_4 の値は部材兩端に於ける環境條件から η 及 φ の項を以て次の如く定まり、従つて部材端に於ける應力と變形との關係が可なり簡易な形式で確定する。

1. 部材端に弾性拘制が完全に起る場合

$$\begin{aligned} \eta_{x=0} &= \eta_a & \left(\frac{d\eta}{dx} \right)_{x=0} &= \varphi_a \\ \text{及 } \eta_{x=l} &= \eta_b & \left(\frac{d\eta}{dx} \right)_{x=l} &= \varphi_b \end{aligned} \text{ を解きて}$$

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2m_r(cC-1)} \{ (sS+cC-1)\varphi_a - (c-C)\varphi_b + m_r(cS+sC)\eta_a - m_r(s+S)\eta_b \} \\ A_2 &= -A_1 + \frac{1}{m_r} \varphi_a \\ A_3 &= \frac{1}{2m_r(cC-1)} \{ cS-sC\varphi_a + (s-S)\varphi_b + m_r(-sS+cC-1)\eta_a - m_r(c-C)\eta_b \} \\ A_4 &= -A_3 + \eta_a \end{aligned} \right\} \dots (39)$$

但 $s = \sin m_r l, \quad S = \sinh m_r l, \quad c = \cos m_r l, \quad C = \cosh m_r l$

部材兩端に於ける彎曲率及剪力は式 (38) に $x=0$ 及 $x=l$ を代入し次の各式で與へられる。

$$\begin{aligned}
 M_{ab} &= M_{x=0} = m_r EI (A_3 - A_4) \\
 &= \frac{m_r EI}{cC-1} \{ (cS-sC)\varphi_a + (s-S)\varphi_b - m_r s S \eta_a - m_r (c-C)\eta_b \} \\
 -M_{ba} &= \frac{m_r EI}{cC-1} \{ (s-S)\varphi_a + (cS-sC)\varphi_b + m_r (c-C)\eta_a + m_r s S \eta_b \} \\
 Q_{ab} &= \frac{m_r^2 EI}{cC-1} \{ sS\varphi_a - (c-C)\varphi_b + m_r (cS+sC)\eta_a - m_r (s+S)\eta_b \} \\
 -Q_{ba} &= \frac{m_r^2 EI}{cC-1} \{ (c-C)\varphi_a - sS\varphi_b - m_r (s+S)\eta_a + m_r (cS+sC)\eta_b \}
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} M_{ab} \\ -M_{ba} \\ Q_{ab} \\ -Q_{ba} \end{aligned}} \right\} \dots (40)$$

茲に M 及 Q の接尾字が逆順となるものに負號を附して應力式 (38) と符號を一致せしめる。今振動する任意の直材 abc の b 點に一定重量 P_b が載荷されてあるときには、任意時 t に於て b 點に關し、 $\sum Q=0$ 及 $\sum M=0$ なる次の平衡條件が成立する。

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{1}{\cos \frac{m_r^2 t}{\lambda}} \frac{P_b}{g} \frac{d^2 y_b}{dt^2} &= Q_{bc} + (-Q_{ba}) \\
 0 &= M_{bc} + (-M_{ba})
 \end{aligned} \right\} \dots (41)$$

但 $y_b = \eta_b \cos \frac{m_r^2 t}{\lambda}$, $\eta_b = \eta_{r \rightarrow b}$

b 點が多數構材の節點である場合にも、其の振動面に於て各材に就き同様の關係の成立することは勿論である。

2. 部材の一端に彎曲拘制が起らざる場合

一端 b が彎曲拘制を受けない場合に (例へば鉸端或は集中重量を有する自由端) 他端 a を座標原點として前項と同様に計算し、或は式 (40) に於て $-M_{ba}=0$ とし不定件 φ_b を消去して次の各式を得る。

$$\left. \begin{aligned}
 A_1 &= \frac{1}{m_r (cS-sC)} \left\{ cS\varphi_a + m_r cC\eta_a - \frac{1}{2} m_r (c+C)\eta_b \right\} \\
 A_2 &= -A_1 + \frac{1}{m_r} \varphi_a \\
 A_3 &= \frac{1}{m_r (cS-sC)} \left\{ -sS\varphi_a - m_r sC\eta_a + \frac{1}{2} m_r (s+S)\eta_b \right\} \\
 A_4 &= -A_3 + \eta_a
 \end{aligned} \right\} \dots (42)$$

$$\left. \begin{aligned} M_{ab} &= \frac{m_r EI}{cS - sC} \{2sS\varphi_a + m_r(cS + sC)\eta_a - m_r(s + S)\eta_b\} \\ Q_{ab} &= \frac{m_r^2 EI}{cS - sC} \{-(cS + sC)\varphi_a - 2m_r cC\eta_a + m_r(c + C)\eta_b\} \\ -Q_{ba} &= \frac{m_r^2 EI}{cS - sC} \{(s + S)\varphi_a + m_r(c + C)\eta_a - m_r(cC + 1)\eta_b\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (43)$$

上と反対に a 端に彎曲拘制なき場合に、同端を原点とすれば

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{m_r(cS - sC)} \left\{ S\varphi_b + \frac{1}{2}m_r(sS + cC + 1)\eta_a - m_r cC\eta_b \right\} \\ A_2 &= \frac{1}{m_r(cS - sC)} \left\{ -s\varphi_b - \frac{1}{2}m_r(-sS + cC + 1)\eta_a + m_r cC\eta_b \right\} \\ A_3 = A_4 &= \frac{1}{2}\eta_a \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (44)$$

$$\left. \begin{aligned} -M_{ba} &= \frac{m_r EI}{(sC - cS)} \{2sS\varphi_b + m_r(s + S)\eta_a - m_r(cS + sC)\eta_b\} \\ -Q_{ba} &= \frac{m_r^2 EI}{(sC - cS)} \{(cS + sC)\varphi_b + m_r(c + C)\eta_a - 2m_r cC\eta_b\} \\ Q_{ab} &= \frac{m_r^2 EI}{(sC - cS)} \{-(s + S)\varphi_b - m_r(cC + 1)\eta_a + m_r(c + C)\eta_b\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (45)$$

3. 部材の一端に弾性拘制が全く起らざる場合

自由端に集中重量を有せざる突桁の如く、部材の一端 b に弾性拘制が生ぜざる場合には式 (44) 及 (45) に於て $-Q_{ba} = 0$ とし不定件 η_b を消去して

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{m_r(cC + 1)} \{(sS + cC + 1)\varphi_a + m_r(cS + sC)\eta_a\}, & A_2 &= -A_1 + \frac{2}{m_r}\varphi_a \\ A_3 &= \frac{1}{m_r(cC + 1)} \{(cS - sC)\varphi_a + m_r(-sS + cC + 1)\eta_a\}, & A_4 &= -A_3 + 2\eta_a \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (46)$$

$$\left. \begin{aligned} M_{ab} &= \frac{m_r EI}{cC + 1} \{(cS - sC)\varphi_a - m_r sS\eta_a\} \\ Q_{ab} &= \frac{m_r^2 EI}{cC + 1} \{sS\varphi_a + m_r(cS + sC)\eta_a\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (47)$$

以上數項に亘つて記載した M 及 Q の値を以て、所要條件に應じ、部材系の不連続點即ち節點等に於ける力の平衡關係を満足せしむれば、與へられた強制振動に對しては φ, η, A 等

の値を計算して、式 (38) で示されてある正規函数及其の應力式を定め、又自由振動に對しては φ 及 η を消去して其の自由週期函数を求め得る。第二節で述べた桁の強制振動の各式は本節に於ける各式の特別の場合に外ならない。

第七節 基本式の應用例と局部振動

本節では前節で誘導した基本式を先づ簡単な不穩定構造に適用して構材の振動性に關する解説を補ふものとす。

1 基本式の簡單なる應用

例解 (1) 簡單な例として第四圖 (A) に示す如く重量 W を其の端 b に有する單位長の重量 w なる突桁 ab の振動を解いて見る。桁の緊定基點 a が振幅 2ξ を以て $y_a = \xi \cos 2\pi r t$ で表さるゝ強制振動を受けるとき、 b 點の平衡式は式 (43) 及 (41) から

$$\frac{W}{g} \frac{d^2 \eta_b}{dt^2} = \frac{m_r^2 EI}{sC - cS} \{m_r(c+C)\xi - m_r(cC+1)\eta_b\} \cos \frac{m_r^2}{\lambda} t$$

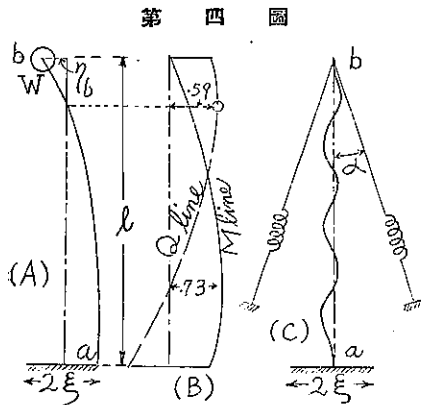
$$\text{但 } m_r^2 = 2\pi r \lambda = 2\pi r \sqrt{\frac{w}{gEI}}$$

$t=0$ なるときを考へると

$$m_r \frac{W}{w} \eta_b + \frac{1}{sC - cS} \{(c+C)\xi - (cC+1)\eta_b\} = 0 \dots\dots\dots (a)$$

自由振動; — $\xi=0$, $m_r=m$ であるから其の週期函数は

$$\frac{cC+1}{sC - cS} = \frac{W}{wl} (ml) = \mu(ml) \dots\dots\dots (b)$$



第四圖

載荷重 W と桁の自重 wl との比 μ の値如何によつて、 ml の値即ち自由振動性は様々となる。例へば $\mu=0$ なるときには $cC+1=0$ で、このときには一般突桁の振動となる。又 $\mu=\infty$ は W が可なり大で移動せないとき即ち緊鉸桁の振動となる。そこで μ の二、三の値に對して式 (b) の左右各邊を函数 Z として圖式法で解いたものは第五圖の上半部である。例へば $\mu=1$ のときは、

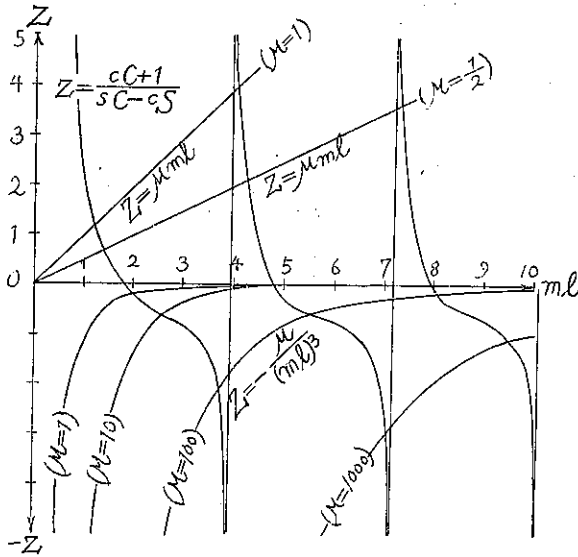
$$ml = 1.2 \quad 4.1 \quad 7.1 \quad \dots\dots\dots$$

$$T = \frac{2\pi}{m^2} \sqrt{\frac{w}{gEI}} = 4.36l^2 \sqrt{\frac{w}{gEI}} \quad 0.38l^2 \sqrt{\frac{w}{gEI}} \quad 0.12l^2 \sqrt{\frac{w}{gEI}} \dots\dots$$

強制振動；—(a) から η_b の値が求まる。

$$\eta_b = \frac{(c+C)\xi}{(cC+1) - (m_r l)(sC - cS)\mu} \dots\dots\dots (c)$$

第五圖



η_b の値は自由週期函数 (b) が満足される、上の ml の値に對し其の分母が零となるから數學上の無限大となる。この極限の場合を避けて、例へば $r/n_0=3$ 即ち最低振動數の 3 倍の振動を與ふるときは、

$$m_r l = 1.2\sqrt{3} = 2.078 \text{ となり、}$$

$\mu=1$ に對し η_b を計算すれば、

$$\eta_b = -0.29\xi \text{ を得る。式 (42) から}$$

$$A_1 = 0.27\xi \quad A_2 = -0.27\xi$$

$$A_3 = 0.78\xi \quad A_4 = 0.22\xi$$

半振幅 ξ の値を強制振動數 r に應ずる震度 k の項で表せば式 (32) から、

$$\xi = \frac{kwl^4}{(2.078)^4 EI}$$

故に式 (38) で與へられる振動の正規函数及其の應力函数は、

$$\eta = \frac{kwl^4}{(2.078)^4 EI} \left[0.27 \left\{ \sin(2.078) \frac{x}{l} - \sinh(2.078) \frac{x}{l} \right\} + 0.78 \cos(2.078) \frac{x}{l} + 0.22 \cosh(2.078) \frac{x}{l} \right]$$

$$M = \frac{kwl^2}{(2.078)^2} \left[0.27 \left\{ \sin(2.078) \frac{x}{l} + \sinh(2.078) \frac{x}{l} \right\} + 0.78 \cos(2.078) \frac{x}{l} - 0.22 \cosh(2.078) \frac{x}{l} \right]$$

$$Q = \frac{kwl}{2.078} \left[0.27 \left\{ \cos(2.078) \frac{x}{l} + \cosh(2.078) \frac{x}{l} \right\} - 0.78 \sin(2.078) \frac{x}{l} - 0.22 \sinh(2.078) \frac{x}{l} \right]$$

第四圖(B)は kwl^2 及 kwl の項を單位として作つた M 及 Q の縮小値である。普通の放端突桁に比すれば基點からの彎曲率の移動は緩いが、剪力の移動は急速である。向上の應力式は自由週期函数 (b) が満足され従つて (C) の η_b の値が最大となるとき最大となるべき筈であるが、更に緊絞桁の自由週期函数 $sC - cS = 0$ が満足されるゝとき又最大値をとる。故に結局部材 ab が最大變形を受くる條件に對する變數 ml の値は増加して次の如くなる。

$$ml = 1.2 \quad 3.92 \quad 4.1 \quad 7.1 \dots\dots\dots$$

而して四次振動以上にては 2 種の ml の値は殆んど一致するに至る。この事は圖表を見れば明である。

例 解(2) 第四圖(C)に於ける如き振動面に於て b 端が張力の彈性係數 ϵ なる緊索を以て支へられてある突桁が前例と同様の強制振動を受くるならば、 b 端に於ける平衡式は

$$-Q_{ba} - \frac{\eta_b}{\epsilon \sin \alpha} = 0 \quad \text{即} \quad \frac{m_r^2 EI}{sC - cS} \{m_r(c + C)\xi - m_r(cC + 1)\eta_b\} - \frac{\eta_b}{\epsilon \sin \alpha} = 0$$

強制振動は前例と同様の計算で求まるから之を略し、自由振動週期を見出さん、上式に $\xi = 0$ として、

$$\frac{cC + 1}{sC - cS} = - \frac{l^3}{(ml)^2 EI \epsilon \sin \alpha} = - \frac{\mu}{(ml)^2}$$

$\mu = 1, 10, 100, 1000$ に對し式を計算して圖表にしたものは第五圖下半部である。例へば $\mu = 100$ に對しては、

$$ml = 3.64 \qquad 5.63 \qquad 8.1 \dots\dots\dots$$

$$T = 0.62 l^2 \sqrt{\frac{w}{gEI}} \qquad 0.19 l^2 \sqrt{\frac{w}{gEI}} \qquad 0.096 l^2 \sqrt{\frac{w}{gEI}}$$

2. 局部強制振動

この強制振動は構材の慣性に基因して現るゝものを言ふので、總て構造系の自由振動と其の強制振動の關係は普通の桁の場合と同様に、其の構造系の自由振動週期と外部からの強制振動の週期とが一致した場合には、上例にも示した如く、應力變形が最大であつて、このとき振動抵抗が無いものとすれば應力變形は無限大となり最早彈性論の範圍内で振動式を取扱ふことが出来なくなる。然し實際の計算に當つてこのときの應力變形を知らんとするなら、兩週期の共鳴點より僅少の差のある所で計算すればよい。斯くして構造系の最大應力は或一定の週期に對して或特定の點に起り、其の値は式(38)で計算し得るが、茲に振動を一層煩雜ならしむるは構造各部材が各自の慣性に基く振動性を有することで、これは式(40)或は(43)等で明なる如く、各構材は其の受くる彈性拘制の状態に應じ、 $cC - 1 = 0$ 或は $cS - sC = 0$

等を満足する如き構造系の振動に際合しては、其の應力變形は又最大となる。この各構材の慣性に関する強制振動を其の構造の局部強制振動と言ふ。而して $cC-1=0$ 或は $cS-sC=0$ は、實は構材の自由週期函数即ち式 (13) 或は (17) の値に外ならないのである。唯だ兩緊桁ではこれが支點に關し對稱の強制振動を受くるときには特別の場合として $cC-1=0$ の因數なる $s'C'+c'S'=0$ (但 s' 等は s 等の半角の函数) が代置され得ることは既に述べた通りである。然し支點に關し對稱振動をなす橋桁式架構の或部材ではこの特別の場合が起り得るが高層架構などでは次數の可なり高い振動でないとする特別の場合が起る機會が少いと考へてよい。尙高層架構等に於ては、其の中層以上の柱は相當大なる軸壓力の下にあり且つ地震時に於て上下動も伴ふものとすれば、其の自由週期函数の變數 ml が軸壓力の項を含むものに變化して振動性は緩漫となり、架構系の最低振動よりも比較的緩い振動に對しても、其の局部強制振動のために中下層の何れかの柱に大なる應力變形が惹起される恐があることを信じ得べく、若しこの局部振動と全系振動との共鳴條件が比較的low振動に於て偶然合致する如き場合が生ずるとすれば、これ構造物に對して最危險なる振動の起る時であらねばならぬ。

第三章 桁及構造の振動の近似解式及これに關する彈性式

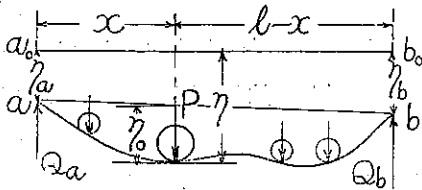
第八節 最低振動週期の近似式

複雑なる桁構造の強制振動の性狀は其の與へられた材件を以て直ちに第二章の理論式から算定し得るが、其の自由振動に關するものは試算法に依らねばならない。而してそれら自由振動の中で最低振動が重要なは勿論、實用上には最低振動のみを知つて其の目的を達する場合が往々あり、又理論式の取扱に際しても最初に自由振動に關して何等の見當が付けて無いよりも、何か他の方法により少くも最低振動の概狀が知られてあるときには振動計算が容易くなる。この概算法として比較的簡易に取扱はれ得るものは桁構造の振動曲線を假定する方法である。即ちそれは従來物理學に於て重量質點の振動に對して其の變位の常數から週期を算定せる方法を桁構造の最低振動週期算定の近似法として應用するもので其の振動曲線には各種の曲線が假定されあるも、靜力的撓曲線を假定するものは構造の研究として最適切なるものと言ふべく、唯だ複雑なる荷重及構造に對して其の撓曲線を求むることが困難視されてあるのである。そこで次節に於てこの撓曲線式を一般的に誘出するに先ち、本節ではこれに關する週期式を準備するものである。かくしてこの曲線の假定及週期式に因つて生ずる振動誤差の度に就ては、その近似算式から得るものを可なり精密な振動實驗の結果に徴し且つ理論式より得るものと對比するに、此の方法に因るものと雖も誤差が餘り大ならず可なりの精度を有するものと言ひ得るのである。

1. 週期式(其一)

第六圖は任意荷重の働點が $y = A\eta\cos 2\pi nt$ にて表され得る齊一自由振動をなす載荷桁 ab

第六圖



に於て桁の各點に對し共通なる任意の常數 A が 1 なる場合を考へ、桁が或時刻に於て其の最大變位から將に回復運動に移らんとする位置を示すもので、彈性支點が荷重系 $\sum P$ により原位置 a_0, b_0 から η_a 及 η_b だけ移動し、それに対する任意荷重の働點の相對移動が η_0 なりとし、變形桁に關する energy の法則を適用して運動の週期 T を求めんに、

Resilience of the beam (including supports) in its extreme position.
 = Total kinetic energy generated.

即ち、
$$\frac{1}{2} \sum P\eta = \frac{1}{2g} \sum P \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)_{t=\frac{1}{4n}}^2 \dots\dots\dots (a)$$

然るに、 $\eta = \eta_0 + \frac{l-x}{l} \eta_a + \frac{x}{l} \eta_b$ 従つて、 $\sum P\eta = \sum P\eta_0 + Q_a\eta_a + Q_b\eta_b$

及 $\left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)_{t=\frac{1}{4n}} = -2\pi n\eta$

これらの値を式 (a) に代入し、 x/l 及 $(l-x)/l$ を夫々 x_a 及 x_b で表せば、

$$\sum P\eta_0 + Q_a\eta_a + Q_b\eta_b = \frac{4\pi^2 n^2}{g} \sum P(\eta_0 + x_b\eta_b + x_a\eta_a)^2$$

$$\therefore T = \frac{1}{n} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{\sum P(\eta_0 + x_b\eta_b + x_a\eta_a)^2}{\sum P\eta_0 + Q_a\eta_a + Q_b\eta_b}} \dots\dots\dots (48)$$

但 $x_a = \frac{x}{l}$, $x_b = \frac{l-x}{l}$

この式は兩端に彈性支點を有する任意の桁に適用し得べく η_0 を靜力的撓度と假定して其の値を計算すれば週期は求まる。尙任意の桁構造が色々の彈性變形をなすとき η を直接計算すれば其の週期式は次の一般形で與へられる。

$$T = \frac{1}{n} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{\sum P\eta^2}{\sum P\eta}}, \quad \eta = \phi(x, \eta_0, \varphi_0) \dots\dots\dots (49)$$

但 η_0 及 φ_0 は桁材の支點或は支點と見做し得べき荷重働點等に於ける移動及廻轉の値で、それらの函數 η の値は第九節に於て撓曲式として與へる。

次に桁が剛性體に極めて近いものであれば式 (48) に $\eta_0 = 0$ と置きて、

$$T = \frac{1}{n} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{\sum P(x_n \eta_a + x_n \eta_b)}{Q_a \eta_a + Q_b \eta_b}} \dots \dots \dots (50)$$

これ二つの弾性支點を有する一剛體の振動週期式であつて、實驗によれば、假令兩支點の弾性係数が異るとも少くも定置荷重に對しては上式で表される週期を以て支點は齊一運動をなす。これ二つ以上の發條を有する車輛等の齊一上下動をなす場合に相應するものと考へられる。即ち係数の異なる二つの發條が合同荷重によつて其の振動數を調節せらるゝ所以である。

若し二つの支點の弾性係數(ε)が等しく、且つ荷重が對稱であれば、上式に $\eta_a = \eta_b$ 及 $Q_a = Q_b = \frac{1}{2} \sum P$ を代入して、

$$T = \frac{1}{n} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{1}{2} \epsilon \sum P} \dots \dots \dots (50')$$

これ線運動をなす弾性體、例へば伸縮する發條による固體の單運動の週期式と同一のものである。又兩支點が共に剛支點であれば、弾性桁の週期式は式(48)に $\eta_a = 0$ 及 $\eta_b = 0$ として次の如く簡單に表し得る。

$$T = \frac{1}{n} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{\sum P \eta_0^2}{\sum P \eta_0}} \dots \dots \dots (48')$$

2. 週期式(其二)

式(48)は桁の振動曲線を假定する事に於て近似式となるが、單に式を誘導した経路から言へば理論式である。然し今式を誘導する経過に於て更に或近似關係を與ふるとも、是を許すことに依つて式の形が簡易となり而かも其の結果に於て所謂理論式と著しい差額のないものを導き得るならば、場合によつては便利にそれを使用してもよい。今振動桁の任意荷重の働點が單位變位をなすために要する力を假りに $f(P)$ で表すと、桁の運動式は、

$$\sum f(P)y + \sum \frac{P}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

茲で $f(P)$ を正確に表してこの式を解決するのが目的でない。そこで $f(P)$ を P/η で置換へる。このことは各荷重に對しては無理ではあるが荷重系に對しては大なる誤が無いものと假定する。即ち、

$$\sum \frac{P}{\eta} y + \sum \frac{P}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

これ撓曲を惹起す荷重の總和は其の撓曲に應ずる弾性回復力に等しいと言ふ假定に歸する。式に $y = A\eta \cos 2\pi n t$ を代入して簡約すれば、

$$\sum P - \frac{4\pi^2 n^2}{g} \sum P\eta = 0, \quad \sum P\eta = \sum P\eta_0 + Q_a\eta_a + Q_b\eta_b$$

$$T = \frac{1}{n} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{\sum P\eta_0 + Q_a\eta_a + Q_b\eta_b}{\sum P}} \dots\dots\dots (51)$$

前項の各式と同様の場合に就て夫々式を變形すれば、

$$T = \frac{1}{n} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{\sum P\eta}{\sum P}}, \quad \eta = \phi(x, \eta_0, \varphi_0) \dots\dots\dots (52)$$

$$T = \frac{1}{n} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{Q_a\eta_a + Q_b\eta_b}{\sum P}} \dots\dots\dots (53)$$

$$T = \frac{1}{n} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{1}{2}\varepsilon \sum P} \dots\dots\dots \{(50)' \text{ と同一式} \} \dots\dots\dots (53')$$

$$T = \frac{1}{n} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{\sum P\eta_0}{\sum P}} \dots\dots\dots (51)'$$

3. 二つの週期式の比較

式 (51) 等を式 (48) 等に對比するに其の取扱が簡易なことは明であり且つ兩者に如何なる差異が存するかは其處に明な比較が出来る。即ち各式の根號内の分數は、(51) 等では撓曲に際し荷重 $\sum P$ の振動面内に於ける重心の振動中立軸よりの移動の値を表すが、(48) 等では變數 η なる積重 (weight) を有する荷重 $\sum P\eta$ の重心移動を表す (依つて茲で便宜上式 (51) 等を一次式、(48) 等を二次式と稱へる)。尙物理の例に採つて、撓曲線上の荷重系の配置を振動中立軸を廻轉軸とする複振子と假定すれば、各根號内の値は、二次式では相當單振子の長さに相當し、一次式では軸からの振子の重心距離に當る。載荷桁から成るこの假想複振子では其の縁端に重量が集つてあるから一般の複振子と異なり相當單振子の長さとの重心距離との差は僅少であるべきだが、常に一次式より得る値は二次式より得るものに比し多少小なる事は勿論である。次に等賦荷重を有する 4 種の桁に就て第一節の理論式、二次式及一次式より計算して得る各週期の値を比較するに、二次式のものゝ極めて理論式のものに近く殆んど一致するが、一次式は其の式の誘導上に於ける假定の粗大なるだけ、少くも等賦荷重に關しては他の式に比べて相當の差額が出て來る。故に一次式は、二次式を以てすれば計算が餘程面倒となる場合に、多少割引された週期を得る事を豫定し、簡易法として適用すればよい。

	理論式	二次式	一次式	二次式/一次式
兩 絞 桁	$T=0.6366 l^2 \sqrt{\frac{w}{gEI}}$	$0.6361 l^2 \sqrt{\frac{w}{gEI}}$	$0.5737 l^2 \sqrt{\frac{w}{gEI}}$	1.11
兩 緊 桁	0.2808 "	0.2798 "	0.2342 "	1.19
緊 絞 桁	0.4091 "	0.4095 "	0.3512 "	1.15
突 桁	1.7872 "	1.7797 "	1.405 "	1.26

尙次に複雑な載荷桁の最低振動週期に關する Dr. Dunkerley の實驗式に就て吟味をして見る。

4. Dr. Dunkerley の實驗式の適用に就て

實驗式は普く知られてある如く、荷重の配置法に關せず彈性桁の載荷状態 1, 2, ……i……n に應ずる最低振動の週期が夫々 $T_1, T_2, \dots, T_i, \dots, T_n$ であり、總荷重に應ずる最低週期が T であれば、この各振動週期間に次の關係があるとするものである。

$$T^2 = T_1^2 + T_2^2 + \dots + T_i^2 + \dots + T_n^2 \dots\dots\dots (a)$$

この式は元來、振動状態に或假定を與へてエネルギーの法則から誘導され得るものであるが、茲で其の假定の如何等に溯つて論ずるのが目的でなく、一般の週期式の内容と比較して其の性質及精度等を大略知ればよいのである。今任意の桁に於て 1 から n に至る各回の振動で荷重配置點を變ぜず各回の荷重量に相似關係を保たしむる如き場合には、上式は單に n 回の分割振動を羅列したことに止まり何等論すべきものでない。例へば等賦荷重 w を各等賦荷重 $w_1, \dots, w_i, \dots, w_n$ に分割して振動せしむるに何れの週期式に依つても上式を成立せしめる。即ち、

$$T^2 = \alpha w = \alpha(w_1 + \dots + w_i + \dots + w_n) \\ = T_1^2 + \dots + T_i^2 + \dots + T_n^2$$

但 α は振動桁に關する常數である

故に必要なは一般に任意の集中荷重系 $P_1, \dots, P_i, \dots, P_n$ が存する場合、實驗式 (a) が其の各個振動と全振動との關係を、他の週期式の内容をも参照するとき、如何なる内容を以て表して居るかを知るにある。そこで實驗式を二次式の内容を籍りて振動變位の項に書換へたものが依然等式で満足するものと假定すると、

$$\frac{\sum P\eta^2}{\sum P\eta} = P_1 \frac{\partial \eta}{\partial P_1} + \dots + P_i \frac{\partial \eta}{\partial P_i} + \dots + P_n \frac{\partial \eta}{\partial P_n} \dots\dots\dots (b)$$

$$\sum P\eta^2 = \left(P_1 \frac{\partial \eta}{\partial P_1} + \dots + P_i \frac{\partial \eta}{\partial P_i} + \dots + P_n \frac{\partial \eta}{\partial P_n} \right) \sum P\eta$$

$$\sum_{i=1}^n P_i (P_1 \delta_{1i} + \dots + P_i \delta_{ii} + \dots + P_n \delta_{ni})^2$$

$$= (P_1 \delta_{11} + \dots + P_i \delta_{ii} + \dots + P_n \delta_{nn}) \left\{ \sum_{i=1}^n P_i (P_1 \delta_{i1} + \dots + P_i \delta_{ii} + \dots + P_n \delta_{ni}) \right\} \dots (c)$$

茲に δ_{ni} は單位荷重 $P_n=1$ に因つて P_i の方向に生ずる其の働點 i の撓度を表す。然るに桁の靜定及不靜定を問はず其の任意點の撓度に関して次の性質が存する。

$$(\delta_{12})^2 < \delta_{11} \delta_{22}, \text{ etc 及 } 2\delta_{12} < \delta_{11} + \delta_{22}, \text{ etc} \dots (d)$$

斯くして (c) を整理して (d) の條件を與ふるときは (b) は等式に非ずして次の不等式に於て成立すべきものとなる。

$$\frac{\sum P_i \eta^2}{\sum P_i \eta} < P_1 \frac{\partial \eta}{\partial P_1} + \dots + P_i \frac{\partial \eta}{\partial P_i} + \dots + P_n \frac{\partial \eta}{\partial P_n}$$

即ち
$$T^2 < T_1^2 + \dots + T_i^2 + \dots + T_n^2$$

是を以て實驗式の右邊を計算して得る週期 T は二次式で計算して得るものより常に大であり、式の性質から一般に理論式で得るものより大であることも斷定される。然し實際に於て如何程の差異が生ずるかは、不等式 (d) の累積に結果するのであつて、これを分明に表すことが困難であるからそれを數量的に知らんには諸種の實例に依るに如かない。次に單桁に就て週期式より直接得らるゝ結果と實驗式の夫れとを比較して見る。

例 1. 徑間 l なる兩鉸桁の支端より x の點に荷重 w を有するときの振動週期は

$T_w = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{wx^2(l-x)^2}{3lEI}}$ で表されるから、 w が桁の全長に等賦された場合の週期は、實驗式に依れば、

$$T^2 = \sum T_w^2 = \frac{4\pi^2 w}{3glEI} \int_0^l x^2(l-x)^2 dx = \frac{2\pi^2 w l^2}{45gEI}$$

即ち實驗式では、 $T = 0.662l^2 \sqrt{\frac{w}{gEI}}$

然るに二次式では、 $T = 0.636l^2 \sqrt{\frac{w}{gEI}}$

例 2. 前例を突桁に應用すると、

實驗式 $T = 1.814l^2 \sqrt{\frac{w}{gEI}}$; 二次式 $T = 1.787l^2 \sqrt{\frac{w}{gEI}}$

これらの結果でわかる如く、規則正しい載荷状態に於ては實驗式の誤差は餘り大なるもので無い。

例 3. 多數集中荷重による實驗として、鋼帶の重さ 200 gm./m, EI が 4×10^5 cm.-gm. なる

ものを径間 60cm の兩絞桁として全長を6等分し、各分點に左から一つ宛重量 $P_1=200$, $P_2=100$, $P_3=100$, $P_4=50$, $P_5=100\text{g}$ を載せて各の週期を測定せしに、 $T_1=0.24$, $T_2=0.25$, $T_3=0.27$, $T_4=0.22$, $T_5=0.21\text{sec}$ を得、總重量に對し $T=0.44\text{sec}$ を得た。この實測の結果を週期式による計算の結果と比較するに、二次式を用ひて、

$$T_1=0.23 \quad T_2=0.25 \quad T_3=0.27 \quad T_4=0.21 \quad T_5=0.20\text{sec}$$

尙總荷重に對して各分點の撓度を求むると(第九節参照)、

$$\eta_1=2.642 \quad \eta_2=4.456 \quad \eta_3=5.031 \quad \eta_4=4.233 \quad \eta_5=2.482\text{cm}$$

二次式、 $T=0.42\text{sec}$ (實測 0.44 に對し)

同じ η_1 等の値を用ひて、

一次式、 $T=0.41\text{sec}$ (實測 0.44 に對し)

これを更に實驗式により求むるに、上の各 T_i 等の値を以てして、

實驗式、 $T=0.54\text{sec}$ (實測 0.44 に對し)

斯く不規則な荷重に對しては、實驗式の結果は實測並に週期式のものとは可なりの隔たりが出る。週期式による値が實測のものより小なることは桁の抵抗及疲労等を考へない計算としては正當な誤であらうが、實驗式が實測のものより過大の値を與へることは其の式の内容が元來粗なる所以である。然し實驗式は其の適用が甚簡便であり殊に桁が等賦及集中の混合荷重を有する場合、其の總ての點の撓度を計算せんとする事は實際に於て甚手数を要するから(既に上の計算に於ても鋼帯の自重即ち等賦荷重に關する計算が面倒となるのでこれを各分點に集中せしめて取扱ふたのである)この時實驗式により等賦荷重を分離して考へれば甚都合が好く、かくするも等賦重量の比較的大ならざる場合にはその誤差は極めて小である。

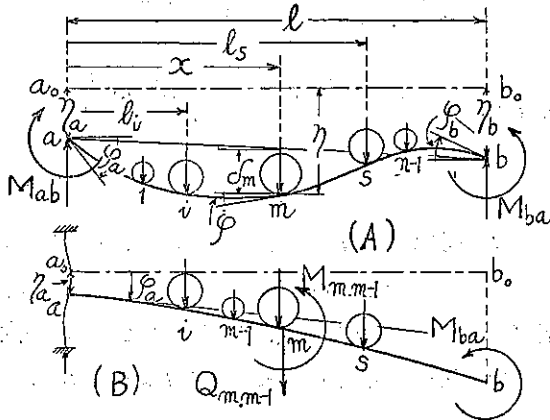
第九節 彈性拘制を受くる桁材の撓曲式

本節では桁構造の最低振動週期の近似算定に必要な撓曲式を普く支點の彈性拘制を受くる桁材に就て誘導する。これらの撓曲式は振動曲線としては近似値に過ぎないが、靜力的彈性線としては素より正確なる値であるから、單に最低振動週期を求むるための變位として直接週期式中使用せらるゝのみならず又同時に彈性條件式として各種の不靜定構造の解法に適用せられ得るを以て、この兩目的のために其の間に連繫を採つて記載することにする。算式に於ける符號の規約は第六節振動基本式に關するものと同一である。

1. 兩端の彎曲率と彈性移動とて表さるゝ桁材の撓曲

第七圖(A)は長さ l 、其の單位長の重量 w なる桁材 ab の兩端に彎曲率 M_{ab} 及 M_{ba} 、左

第七圖



端 a から l_i, l_s 等の各點に夫々集中荷重 P_i, P_s 等が働き、兩端 a 及 b が其の反動力に等しき力によりて原位置 a_0, b_0 から η_a 及 η_b なる彈性移動をなして平衡状態にあるものとし、桁の撓曲剛度 EI が不變なるとき、任意點 m に於ける撓度 η 及從つて生ずる撓角 φ 等を求むるに、 m 點の撓曲率を M とすれば、

$$M = M_0 + M_{ab} - \frac{x}{l}(M_{ab} - M_{ba})$$

茲に M_0 は兩鉸桁に於て其の荷重のみに因る m 點の撓曲率を表す。而して m 點の撓度 η は $-M/EI$ を x に関して二重積分すれば得られるが、この方法では條件を與へて積分常數を決定することに手數を要するから、次の方法に依るを便利とする、即ち應力變形に關する積加法則 (Principle of superposition) により、

$$\eta = \delta_m + \eta_a + \frac{x}{l}(\eta_b - \eta_a)$$

$$\delta_m = \frac{1}{EI} \{ P \int M_i M_m dx + \dots + P_s \int M_s M_m dx + \dots + \int M_w M_m dx + \int (M_{ab} + M_{ba}) M_m dx \}$$

茲に M_w は等賦荷重 w に因り、又 M_i 或は M_m は i 點或は m 點に於ける單位荷重に因つて夫々桁の任意點に生ずる撓曲率の値を表す。而して例へば i 點に於ける M_i 、或は m 點に於ける M_m 及 M_w の値は、

$$M_i = \frac{\partial M}{\partial P_i} = \frac{l_i(l-l_i)}{l} \quad M_m = \frac{x(l-x)}{l} \quad M_w = \frac{1}{2}wx(l-x)$$

斯くして $\int M_i M_m dx$ 等を計算した結果 (例へば H. Müller-Breslau; Die Graph. Statik d. Baukonst., Band II. 2 Abteil. を参照) を整理すると、

$$\eta = \sum P_i \frac{(l-x)l_i}{6lEI} \{ (2l-x)x - l_i^2 \} + \sum P_s \frac{x(l-l_s)}{6lEI} \{ l^2 - x^2(l-l_s)^2 \} + \frac{wx(l-x)}{24EI} \{ l^2 + x(l-x) \} + \frac{x(l-x)}{6lEI} \{ (2l-x)M_{ab} + (l+x)M_{ba} \} + \eta_a + \frac{x}{l}(\eta_b - \eta_a) \dots (54)$$

m 點に於ける撓角は上式を x に関して偏微分して、

$$\begin{aligned} \varphi = & \sum_i P_i \frac{l_i}{6lEI} \{3(l-x)^2 - (l^2 - l_i^2)\} + \sum_s P_s \frac{l-l_s}{6lEI} \{(2l-l_s)l_s - 3x^2\} \\ & + \frac{w(l-2x)}{24EI} \{l^2 - 2x(l-x)\} + \frac{1}{6lEI} \left[\{3(l-x)^2 - l^2\} M_{ab} + (l^2 - 3x^2) M_{ba} \right] \\ & + \frac{1}{l} (\eta_b - \eta_a) \dots \dots \dots (55) \end{aligned}$$

φ の値は η を偏微分せないで、 η を求めたと同様の方法で直接計算してもよい。而してこれらの式は桁材の撓曲變形に關する式として與へられた荷重系に對し直ちに式の値を計算し得るのみならず、或はこれを桁材の彈性式として其の左邊に或條件を與へるならば、任意の P, M を未知値として式を解き得るから必要に應じ不靜定桁の解法に適用し得らるゝ。

2. 不靜定構造解法の基本式 其一

式 (55) に $x=0$ 或は $x=l$ を與ふれば、 a に於ける撓角 φ_a 或は b に於ける撓角 φ_b を得る。

$$\left. \begin{aligned} \varphi_a = & \sum_s P_s \frac{l_s}{6lEI} (l-l_s)(2l-l_s) + \frac{wl^2}{24EI} + \frac{l}{6EI} (2M_{a'i} - M_{ba}) + \frac{\eta_b - \eta_a}{l} \\ \varphi_b = & - \sum_i P_i \frac{l_i}{6lEI} (l^2 - l_i^2) - \frac{wl^2}{24EI} - \frac{l}{6EI} (M_{ab} + 2M_{ba}) + \frac{\eta_b - \eta_a}{l} \end{aligned} \right\} (56)$$

この式に於ては i と s とは各別に徑間中に於ける荷重働點の任意の位置であるから、それを一般的に x で表してよく、二式から M_{ab} 及 M_{ba} の値を求むれば、

$$\left. \begin{aligned} M_{ab} = & \frac{2EI}{l} \left\{ 2\varphi_a + \varphi_b - \frac{3}{l} (\eta_b - \eta_a) \right\} - \left\{ \sum P \frac{x(l-x)^2}{l^2} + \frac{wl^2}{12} \right\} \\ - M_{ba} = & \frac{2EI}{l} \left\{ \varphi_a + 2\varphi_b - \frac{3}{l} (\eta_b - \eta_a) \right\} + \left\{ \sum P \frac{x^2(l-x)}{l^2} + \frac{wl^2}{12} \right\} \end{aligned} \right\} \dots (57)_I$$

上式は任意部材の支端彎曲率の値として、剛節の不靜定構造を解くために適用し得べき基本式であつて、Gehler 或は Wilson 氏等の所謂撓角撓度式に外ならない。而してこの M 式は後に誘導する Q 式 (57)_{II} と合せて一般剛節構造の解法が完備される。荷重としては集中荷重 P の外に等賦荷重 w を考へたのみであるが、 P の項は任意荷重に關する影響線を表すから、他の任意形の荷重に對してはそれを條件に應じ積分すればよい。

次に桁材の一端例へば b 端が鉸なるときには、式 (57)_I に於て $M_{ba}=0$ とし不定項 φ_b を消去して M_{ab} の値を得る。

$$M_{ab} = \frac{3EI}{l} \left\{ \varphi_a - \frac{1}{l} (\eta_b - \eta_a) \right\} - \left\{ \sum P \frac{x(l-x)(2l-x)}{2l^2} + \frac{wl^2}{8} \right\} \dots \dots (58)_I$$

同様に a 端が鉸なるときには, $M_{ab}=0$ とし φ_a を消去して,

$$-M_{ba} = \frac{3EI}{l} \left\{ \varphi_b - \frac{1}{l}(\eta_b - \eta_a) \right\} + \left\{ \sum P_i \frac{x(l^2 - x^2)}{2l^2} + \frac{wl^2}{8} \right\} \dots\dots (59)_r$$

上の二式は不静定構造に於ける部材の一端が鉸なるときに適用し得べく, 夫々後の (58)_r 及 (59)_r と合せて其の解式が完成する。

尙式 (56) は一般に桁材の弾性支端に於ける M , φ 及 η 等の關係式であるから上に求めた各基本式に轉形されるのみならず不静定構造の他の解法例へば定點法の基本式に轉形される。然し本文の主なる目的は振動計算にあるからこれに資すべき法式のみに就て記載するは已むを得ない。

3. 支端に於ける弾性變形の項で表した各式

桁材の兩端 a 及 b に於ける彎曲率 M_{ab} 及 M_{ba} が其處の撓度 η_a 及 η_b 撓角 φ_a 及 φ_b を以て與へられる弾性變形によつて惹起さるゝものなるときは, 式 (54) 等に (57)_r の M_{ab} 及 M_{ba} を代入して撓曲式を次の形で表す。

$$\begin{aligned} \eta = & \sum_i P_i \frac{l_i^2(l-x)^2}{6l^3EI} \{3lx - (l+2x)l_i\} + \sum_s P_s \frac{x^2(l-l_s)^2}{6l^3EI} \{(3l-2x)l_s - lx\} \\ & + \frac{wx^2(l-x)^2}{24EI} + \frac{x(l-x)^2}{l^2} \varphi_a - \frac{x^2(l-x)}{l^2} \varphi_b + \eta_a + \frac{x^2(3l-2x)}{l^3} (\eta_b - \eta_a) \dots\dots (60) \end{aligned}$$

彎曲率及剪力の値は,

$$\begin{aligned} M = & -EI \frac{d^2\eta}{dx^2} = \sum_i P_i \frac{l_i^2}{l^3} \{(2l^2 - 3lx) - (l-2x)l_i\} + \sum_s P_s \frac{(l-l_s)^2}{l^3} \{lx - (l-2x)l_s\} \\ & - \frac{w}{12}(l^2 - 6lx + 6x^2) + \frac{2EI}{l^2} \{(2l-3x)\varphi_a + (l-3x)\varphi_b\} \\ & - \frac{6EI}{l^3}(l-2x)(\eta_b - \eta_a) \dots\dots\dots (61) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q = \frac{dM}{dx} = & - \sum_i P_i \frac{l_i^2}{l^3} (3l - l_i) + \sum_s P_s \frac{(l-l_s)^2}{l^3} (l+2l_s) + \frac{w}{2}(l-2x) \\ & - \frac{6EI}{l^2} (\varphi_a + \varphi_b) + \frac{12EI}{l^3} (\eta_b - \eta_a) \dots\dots\dots (62) \end{aligned}$$

次に桁材の一端例へば b 端が鉸なるときの撓曲式は上と同様に式 (54) に (58)_r の M_{ab} 及 $M_{ba}=0$ を代入する。

$$\eta = \sum_i P_i \frac{l_i^2(l-x)}{12l^3EI} \{3l(2l-x)x - (2l^2 + 2lx - x^2)l_i\}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum P_s \frac{x^2(l-x)}{12l^3EI} \{ (3l-x)(2l-l_s)l_s - 2l^2x \} + \frac{wx^2}{48EI} (l-x)(3l-2x) \\
 & + \frac{x(l-x)(2l-x)}{2l^2} \varphi_a + \eta_a + \frac{x^2(3l-x)}{2l^3} (\eta_b - \eta_a) \dots \dots \dots (63)
 \end{aligned}$$

同様に a 端が鉸なるときは、

$$\begin{aligned}
 \eta = & \sum P_t \frac{(l-x)^2 l_t}{12l^3EI} \{ 3l^2x - (2l+x)l_t^2 \} + \sum P_s \frac{x(l-l_s)^2}{12l^3EI} \{ (3l^2-x^2)l_s - 2lx^2 \} \\
 & + \frac{wx}{48EI} (l-x)^2 (l+2x) - \frac{x(l^2-x^2)}{2l^2} \varphi_a + \eta_a + \frac{x(3l^2-x^2)}{2l^3} (\eta_b - \eta_a) \dots (64)
 \end{aligned}$$

さきに求めた式 (57)_r 等は式 (61) 等に $x=0$ 及 $x=l$ を與へて得らるゝ事は勿論である。

4. 不静定構造解法の基本式 其二

式 (62) に於て $x=0$ 及 $x=l$ を置くときは、

$$\left. \begin{aligned}
 Q_{ab} = & -\frac{6EI}{l^2} \left\{ \varphi_a + \varphi_b - \frac{2}{l} (\eta_b - \eta_a) \right\} + \sum P \frac{(l-x)^2}{l^3} (l+2x) + \frac{wl}{2} \\
 -Q_{ba} = & \frac{6EI}{l^2} \left\{ \varphi_a + \varphi_b - \frac{2}{l} (\eta_b - \eta_a) \right\} + \sum P \frac{x^2}{l^3} (3l-2x) + \frac{wl}{2}
 \end{aligned} \right\} \dots (57)_{II}$$

この式は支端撓曲率の値 (57)_r に應ずる支端剪力の値を表す。

次に b 端が鉸なるときの両端の剪力の値は上と同様に式 (63) を微分して得る Q 式に $x=0$ 及 $x=l$ を與へて、

$$\left. \begin{aligned}
 Q_{ab} = & -\frac{3EI}{l^2} \left\{ \varphi_a - \frac{1}{l} (\eta_b - \eta_a) \right\} + \sum P \frac{(l-x)(2l^2+2lx-x^2)}{2l^3} + \frac{5}{8} wl \\
 -Q_{ba} = & \frac{3EI}{l^2} \left\{ \varphi_a - \frac{1}{l} (\eta_b - \eta_a) \right\} + \sum P \frac{x^2(3l-x)}{2l^3} + \frac{3}{8} wl
 \end{aligned} \right\} \dots (58)_{II}$$

この式は又 (57)_r に於て $M_{ba}=0$ とし (57)_{II} との間不定項 φ_b を消去して求め得。

同様に a 端が鉸なる場合には式 (64) から、

$$\left. \begin{aligned}
 -Q_{ba} = & \frac{3EI}{l^2} \left\{ \varphi_b - \frac{1}{l} (\eta_b - \eta_a) \right\} + \sum P \frac{x(3l^2-x^2)}{2l^3} + \frac{5}{8} wl \\
 Q_{ab} = & -\frac{3EI}{l^2} \left\{ \varphi_b - \frac{1}{l} (\eta_b - \eta_a) \right\} + \sum P \frac{(l-x)^2(2l+x)}{2l^3} + \frac{3}{8} wl
 \end{aligned} \right\} \dots (59)_{II}$$

以上誘導した各種の Q_{ab} 及 Q_{ba} の式はさきの M_{ab} 及 M_{ba} の式と共に一般架構の静應力解析に關する基本式として有用なるのみならず第十節の例に示す如く架構の撓曲振動の近似解法に關する基本式として適用され得るものである。

5. 荷重が等間隔に集中せる場合

縦小桁を支へる横桁或は枕梁を載せる主桁の如く、間接荷重を受くる桁の長さ nd に亘り $n-1$ 個の集中荷重が等間隔 d に働く場合に於ける荷重働点の撓曲式は式 (54) 或はそれに準ずる各式に $l_i = id$, $x = md$, $l_s = sd$ 及 $l = nd$ を代置して式の形及計算を多少簡易にし得る。式 (54) に代入したものは次の形となる。

$$\begin{aligned} \eta = & \sum_i^i P_i \frac{(n-m)i}{6nEI} \{(2n-m)m - i^2\} d^3 + \sum_s^s P_s \frac{(n-s)m}{6nEI} \{n^2 - m^2 - (n-s)^2\} d^3 \\ & + \frac{wm(n-m)}{24EI} \{n^2 + (n-m)m\} d^4 + \frac{(n-m)m}{6nEI} \{(2n-m)M_{ab} + (n+m)M_{ba}\} d^2 \\ & + \eta_a + \frac{m}{n}(\eta_b - \eta_a) \dots \dots \dots (65) \end{aligned}$$

尚集中荷重が總て等量であれば、これに等賦荷重も加へて P で表はし計算すると、

$$\begin{aligned} \eta = & P \frac{d^3}{6EI} \frac{(n-m)}{n} \left[\frac{1}{2} m^2 (2n-m)(m+1) - \{m^3 + (m-1)^3 + \dots + 2^3 + 1^3\} \right] \\ & + P \frac{d^3}{6EI} \frac{m}{n} \left[\frac{1}{2} (n-m)^2 (n+m)(n-m-1) - \{(n-m-1)^3 + (n-m-2)^3 \right. \\ & \left. + \dots + 2^3 + 1^3\} \right] + \frac{d^2}{6EI} \frac{m(n-m)}{n} \{(2n-m)M_{ab} + (n+m)M_{ba}\} \\ & + \eta_a + \frac{m}{n}(\eta_b - \eta_a) \dots \dots \dots (65)' \end{aligned}$$

6. 弾性基點を有する突桁

突桁の基點 a より x なる任意點 m の撓曲式は本節の 1 と同一原則により計算の結果次の値を得る (第七圖 (B) 参照)。

$$\begin{aligned} \eta = & \sum_i^i P_i \frac{l_i^2}{6EI} (3x - l_i) + \sum_s^s P_s \frac{x^2}{6EI} (3l_s - x) + \frac{wx^2}{24EI} \{6l^2 - x(4l - x)\} \\ & - \frac{x^2}{2EI} M_{oa} + x\varphi_a + \eta_a \dots \dots \dots (66) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi = \frac{d\eta}{dx} = & \sum_i^i P_i \frac{l_i^2}{2EI} + \sum_s^s P_s \frac{x}{2EI} (2l_s - x) + \frac{wx}{6EI} \{3l(l-x) + x^2\} \\ & - \frac{x}{EI} M_{ba} + \varphi_a \dots \dots \dots (67) \end{aligned}$$

一般に突桁式に於ては上の各式の右邊の第二項から第四項までを次の形で置換へることは便利な方法である。即ち m 點に於ける撓曲率及剪力を $M_{m,m-1}$ 及 $Q_{m,m-1}$ で表して、

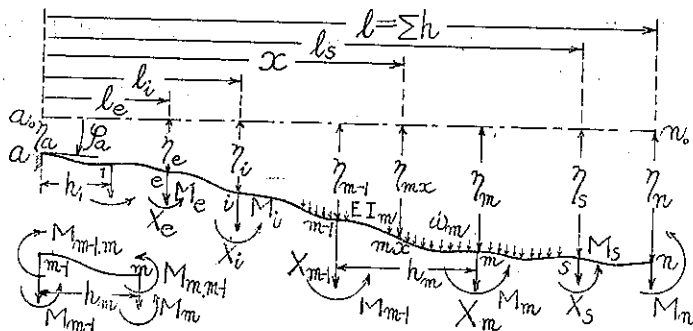
$$\eta = \sum^i P_i \frac{l_i^2}{6EI} (3x - l_i) + \frac{x^3}{3EI} Q_{m,m-1} + \frac{wx^4}{8EI} - \frac{x^2}{2EI} M_{m,m-1} + x\varphi_a + \eta_a \dots (66)'$$

$$\varphi = \sum^i P_i \frac{l_i^2}{2EI} + \frac{x^2}{2EI} Q_{m,m-1} + \frac{wx^3}{6EI} - \frac{x}{EI} M_{m,m-1} + \varphi_a \dots (67)'$$

7. 高層架構の連続柱

n 層架構に於ける任意の連続柱 an が其の各層柱に等賦荷重, 例へば第 m 層に w_m を, 又各節點に, 例へば m 點に彎曲率 M_m と水平推力 X_m を分擔して η_m 及 φ_m なる弾性撓曲をなし, 特に緊定基脚も η_a 及 φ_a なる弾性變形を起す場合 (第八圖参照) を考ふる

第 八 圖



に, 架構解法の性質上, 各節點に於ける撓度 η 及撓角 φ が既知なる場合 (例へば撓角撓度法を以て解いた場合) には, 各層柱の任意點に於ける撓曲及應力は式 (60) に依つて直ちに求まる。若し各節點に於ける η 及 φ の値が未知 (例へば本節末に示す例題の如き解法による場合) であるならば, 一方法として柱の節點に於ける彎曲率及剪力の値 M 及 Q を以て, 前記突桁の公式を第一層より逐次上層に適用して任意點の撓曲の値を知る事が出来る, 即ち式 (66)' 及 (67)' を第 i 層に適用した形を書けば,

$$\left. \begin{aligned} \eta_i &= Q_{i,i-1} \frac{h_i^3}{3EI_i} + \frac{w_i h_i^4}{8EI_i} - M_{i,i-1} \frac{h_i^2}{2EI_i} + h_i \varphi_{i-1} + \eta_{i-1} \\ \varphi_i &= Q_{i,i-1} \frac{h_i^2}{2EI_i} + \frac{w_i h_i^3}{6EI_i} - M_{i,i-1} \frac{h_i}{EI_i} + \varphi_{i-1} \end{aligned} \right\} \dots (68)$$

上式は又變斷面の突桁などを數區に分割して其の撓曲の近似値を求むるに適用してよい。

次に第 m 層の任意點 mx に於ける撓曲を各節點に働く彎曲率 M , 水平推力 X 及各柱の重量 w の項のみを含むもので表すと,

$$\begin{aligned}
 \eta_{mx} = & \sum_{i=1}^{m-1} \left\{ X_i \sum_{e=1}^i \frac{h_e}{3EI_e} \left(3K_x K_i + \frac{1}{4} h_e^2 \right) \right\} \\
 & + \sum_{s=m}^n \left\{ X_s \sum_{e=1}^m \frac{h_e}{3EI_e} \left(3K_x K_s + \frac{1}{4} h_e^2 \right) \right\} \\
 & + \sum_{i=1}^{mx} \left[w_i h_i \sum_{e=1}^{i-1} \frac{h_e}{3EI_e} \left\{ 3K_x \left(K_i - \frac{1}{2} h_i \right) + \frac{1}{4} h_e^2 \right\} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{w_i h_i^3}{24EI_i} \left(4x - 4l_i + 3h_i \right) \right] \\
 & + \sum_{s=mx}^n \left[w_s h_s \sum_{e=1}^{mx} \frac{h_e}{3EI_e} \left\{ 3K_x \left(K_s - \frac{1}{2} h_s \right) + \frac{1}{4} h_e^2 \right\} \right] \\
 & - \sum_{i=1}^{m-1} \left\{ M_i \sum_{e=1}^i \frac{h_e}{EI_e} K_x \right\} - \sum_{s=m}^n \left\{ M_s \sum_{e=1}^m \frac{h_e}{EI_e} K_x \right\} + x \varphi_a + \eta_a
 \end{aligned}
 \tag{69}$$

$$\varphi_{mx} = \frac{d \eta_{mx}}{dx}$$

但 $K_x = x - l_e + \frac{1}{2} h_e, K_i = l_i - l_e + \frac{1}{2} h_e, K_s = l_s - l_e + \frac{1}{2} h_e$

茲に式中の e は圖に於て明なる如く、 X_i 等に関しては i まで、 X 等に関しては mx までの節點をとるものである。尙各層に一樣に均等荷重 q が働くときには、上式に次の値を單に附加すればよい。

$$\begin{aligned}
 q \sum_{i=1}^{mx} \frac{h_i}{24EI_i} \left[4(x-l_i) \left\{ 3(l-l_i)^2 + 3(x-l_i) l_i + h_i^2 \right\} \right. \\
 \left. + h_i \left\{ 6(l-l_i)^2 + 8(l-l_i) h_i + 3h_i^2 \right\} \right]
 \end{aligned}$$

この場合にも節點 m に於ける撓曲率及剪力を $M_{m,m-1}$ 及 $Q_{m,m-1}$ で表して式 (69) を簡易にすると、

$$\begin{aligned}
 \eta_{mx} = & (\text{第一項}) + Q_{m,m-1} \sum_{e=1}^m \frac{h_e}{3EI_e} \left(3K_x K_m + \frac{1}{4} h_e^2 \right) + (\text{第三項}) - (\text{第五項}) \\
 & - M_{m,m-1} \sum_{e=1}^m \frac{h_e}{EI_e} K_x + x \varphi_a + \eta_a \dots \dots \dots (69)'
 \end{aligned}$$

但 $K_m = l_m - l_e + \frac{1}{2} h_e$

次に各柱を通じて其の重量及断面二次率が一定の w 及 I であるならば、上の二式は次の如く簡単になる。

$$\left. \begin{aligned} \eta_{mx} &= \sum_{i=1}^{m-1} X_i \frac{l_i^2}{6EI} (3x-l_i) + \sum_{s=m}^n X_s \frac{x^2(3l_s-x)}{6EI} \\ &\quad + \frac{wx^2}{24EI} + (6l^2 - 4lx + x^2) - \sum_{i=1}^{m-1} M_i \frac{l_i(2x-l_i)}{2EI} \\ &\quad - \sum_{s=m}^n M_s \frac{x^2}{2EI} + x\varphi_a + \eta_a \\ \varphi_{mx} &= \frac{d\eta_{mx}}{dx} = \sum_{i=1}^{m-1} X_i \frac{l_i^2}{2EI} + \sum_{s=m}^n X_s \frac{x(2l_s-x)}{2EI} \\ &\quad + \frac{wx}{6EI} (3l^2 - 3lx + x^2) - \sum_{i=1}^{m-1} M_i \frac{l_i}{EI} \\ &\quad - \sum_{s=m}^n M_s \frac{x}{EI} + \varphi_a \end{aligned} \right\} \dots (70)$$

$$\eta_{mx} = (\text{第一項}) + Q_{m,m-1} \frac{x^2(3l_m-x)}{6EI} + \frac{wx^2}{24EI} (6l_m^2 - 4l_mx + x^2)$$

$$- (\text{第四項}) - M_{m,m-1} \frac{x^2}{2EI} + x\varphi_a + \eta_a \dots \dots \dots (70)'$$

突桁の式 (66) 乃至 (67)' は上の (70) 及 (70)' の特別の場合に過ぎないから其の對應項の係数は勿論等しい。

架構の基脚 a が鉸なるときには、この點に働く水平反力の加つて平衡せる柱に就て緊鉸桁の要領を以て其の撓曲式を作ればよい。

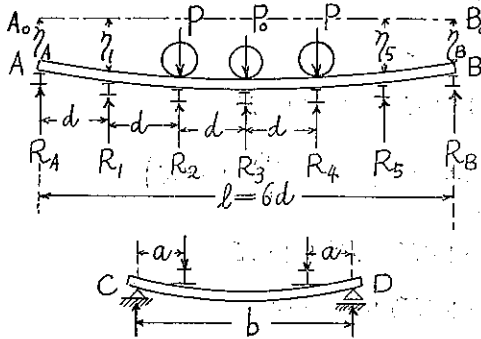
如斯桁材に働く力と支點の條件が與へられるならば、以上本節に於ける各撓曲式に依つて桁材の任意點に於ける撓度等を代數的に計算し得るから近似的ではあるが其の最低振動の性狀に關する必要事項の算定が出来るのみならず、必要に應じ不定力の算定にも適用し得るのである。次に其の例解をする。

8. 彈性支點連桁の一解法 (例一)

載荷せる桁の重量を中間に介在せる他の桁列に依つて承臺或は基礎に送る構造の實例は能く見らるゝが、多くの場合この中間桁の列は其の上方の主桁に對し一連の彈性支點として働き夫々荷重の異なる分擔を受ける。例へば橋梁床構或は運轉機械の据付床などに於て小桁を承ける横桁或は軌條の据わる枕木の如き即ち夫れである。この種の連桁の解法には色々の方

法が用ゐられ得る。例へば普通の三連曲率 (Three moments) の式に支點の彈性條件、即ち支點反働力を R 、其の點の撓度係數を ε とするとき撓度 η は εR で表される條件を與へて解けばよいが、この支點が移動をなす場合には計算に相當手數が掛るから、或は式 (57)

第九圖



を以てする撓度撓角法により頭腦を比較的
使用せず解くもよい。然し支點反働力 R
の値を見出す事により撓度 $\eta = \varepsilon R$ が容易
に算定され従つて振動計算にも便利な方法
として、撓曲式 (65) 等を適用するも良策
である。今この最後の解法を探り、其の例
として七つの彈性支點を有する連桁 (第九
圖参照) の彎曲剛度 EI 、各徑間 d 、等試
荷重 w 、集中荷重 P_0 及 P を有する場合

を考へ 又支點構造が圖の如き剛度 $E_1 I_1$ 、徑間 b なる枕梁 CD であつて其の兩端が剛支
點上に托され、兩端より各 a なる距離に主桁を支ふるものとすれば、其の撓度係數 ε は

$$\varepsilon_A = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \dots = \varepsilon = \frac{a^2(3b-4a)}{6E_1 I_1}$$

支點反力 R の關係式は

$$R_1 = R_5, R_2 = R_4, R_A = R_B = \frac{1}{2}(2P + P_0 + 6wd - 2R_1 - 2R_2 - R_3)$$

式 (65) により、

$$\begin{aligned} \eta_1 = \varepsilon R_1 = & \frac{d^4}{36dEI} \left\{ (-R_1) 5(11-1) + (P-R_2) 4(35-16) \right. \\ & + (P_0-R_3) 3(35-9) + (-R_1) 1(35-1) + (P-R_2) 2(35-4) \\ & \left. + \frac{3}{2} wd(5)(36+5) \right\} + \varepsilon R_A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_2 = \varepsilon R_2 = & \frac{d^4}{36dEI} \left\{ (-R_1) 4(20-1) + (P-R_2) 8(20-4) \right. \\ & - (P_0-R_3) 6(32-9) + (-R_1) 2(32-1) + (P-R_2) 4(32-4) \\ & \left. + \frac{3}{2} wd(8)(36+8) \right\} + \varepsilon R_A \end{aligned}$$

$$\eta_3 = \varepsilon R_3 = \frac{d^3}{36dEI} \left\{ (-R_1) 3(27-1) + (P-R_2) 6(27-4) \right. \\ \left. + (P_0+R_3) 9(27-9) + (-R_1) 3(27-1) + (P-R_2) 6(27-4) \right. \\ \left. + \frac{3}{2} wd(9)(36+9) \right\} + \varepsilon R_4$$

即ち

$$R_1(14+12K) + R_2(23+6K) + R_3(13+3K) = P(23+6K) \\ + P_0(13+3K) + wd \left(\frac{205}{4} + 18K \right)$$

$$R_1(23+6K) + R_2(40+12K) + R_3(23+3K) = P(40+6K) \\ + P_0(23+3K) + wd(88+18K)$$

$$R_1(26+6K) + R_2(46+6K) + R_3(27+9K) = P(46+6K) \\ + P_0(27+3K) + wd \left(\frac{405}{4} + 18K \right)$$

$$\text{但} \quad K = \frac{\varepsilon EI}{d^3} = \frac{a^3(3b-4a)EI}{6d^2 E_1 I_1}$$

假に $d=3$, $a=3$, $b=10^2$ とし桁 AB 及 CD を夫々 Carnegie Co. 製の 55^{lb} 軌條 ($I=12.03^{in^4}$) 及工型 ($I_1=13.0$) を採用すると $K \doteq 1$ を得る。然るとき上式より R の値を解きて (括弧内は剛支點即ち $\varepsilon=0$ なるときの R の値を参考までに計算したものである)。

$$R_4 = -0.05P_0 + 0.58 wd \quad (R_4 = 0.39 wd) \\ R_1 = 0.26P + 0.10P_0 + 0.87 wd \quad (R_1 = 1.13 wd) \\ R_2 = 0.48P + 0.26P_0 + 1.02 wd \quad (R_2 = 0.96 wd + P) \\ R_3 = 0.52P + 0.37P_0 + 1.07 wd \quad (R_3 = 1.02 wd + P_0)$$

この結果に依れば等賦荷重に因つて桁の兩端 A 及 B に起る反力は、これを剛支點の場合に比較するに可なり大で有つて他の支點反力との權衡が良くなるが、 P に因つては兩端反力は零となり更に P_0 に因つては負の反力が起る。この支點に張力の起る事は連桁としては已むを得ない事であるが、これを減ずるには K の値を或程度まで大にする。このためには斷面二次率 I の大なるものを使用すればよいが、徒に斷面を大にする事が不都合なれば別に展成鋼等の副桁を併用すれば良からう。

この桁の強制振動として考ふべきは其の構造の性質上、對稱支點 C 及 D の上下動に因るものよりは寧ろ荷重 P_0 及 P の與ふる共同週期の上下動にある。而してこれに關する理論的算定は勿論第六節の基本式を適用して結局四つの條件方程式を聯立に計算すべく、又其の自由振動は其の方程式より必要條件を試索せねばならぬが、この算法は第十節の架構振動に於けるものと同要領であるから、茲ではこれを略し、最低振動週期の近似値を本節の應用として求め簡易に實用上の目的を達せんとするものである。

即ち

$$P_0\eta_3 = \varepsilon(0.52P + 0.37P_0 + 1.07wd)P_0 \quad (\text{吋, 封度, 秒單位})$$

$$P(\eta_2 + \eta_4) = \varepsilon(0.96P + 0.52P_0 + 2.04wd)P$$

この場合等賦荷重 w を各節點に配分して考ふるも近似振動としては其の精度に影響すること少いから、

$$\sum w\eta = \varepsilon(2.0P + 1.14P_0 + 5.43wd)wd$$

$$\therefore \sum (P, w)\eta = \varepsilon\{0.37P_0^2 + 0.96P^2 + 1.04P_0P$$

$$+ 5.43w^2d^2 + (2.21P_0 + 4.04P)wd\}$$

$$E = 30 \times 10^6 \text{ として } \varepsilon = 12 \times 10^{-5} \text{ を與へ、且つ } P_0 = P \text{ 及 } wd = \alpha P$$

と假定すれば

$$\sum (P, w)\eta = 12 \times 10^{-5} (2.37 + 6.25\alpha + 5.43\alpha^2) P^2$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{12(2.37 + 6.25\alpha + 5.43\alpha^2)P}{10^6(3 + 6\alpha)}} \quad (\text{一次式採用})$$

例へば $P = 5^{\text{ton}}$ 従つて $\alpha = 0.005$ とすれば $T = 0.33^{\text{sec}}$ を得、 $\alpha = 0$ とするも T の値には殆んど影響が無い。

9. 單徑間重層架構の一解法 (例二)

架構連柱の撓曲式應用の一例として第十圖に示す如き單徑間 n 層の剛節架構を解かんに、これには式 (57) を以てする撓度撓角法を適用してよいが、別法として部材の假想切點に於ける應力解析の法によつて見る。各部材に働く荷重及その他の材料は圖に記號を以て示す如くで、今切點を水平材の中點に撰ぶと對稱架構の性質から其の點に働く應力は垂直方向の剪力 Y (未知力) と水平推力 $\frac{1}{2}P$ とである事がわかり、且つ其の點の上下移動は零である條件から任意切點 i_0 に於て次の式が成立する。

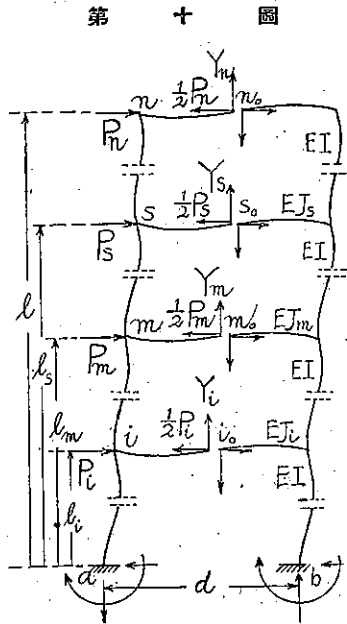
$$-\varphi_i \frac{d}{2} + \frac{1}{3} \frac{Y_i}{EJ_i} \left(\frac{d}{2} \right)^3 = 0$$

即ち $\varphi_i - Y_i \frac{d^2}{12EJ_i} = 0$

式 (70) の $\varphi_{m,n}$ の右邊に $X = \frac{1}{2}P$ 及 $M = \frac{1}{2}dY$

を置いて上式を次の形に整理する。

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{m-1} Y_i \frac{l_i d}{EI} + \sum_{s=m}^n Y_s \frac{l_s d}{EI} + Y_m \frac{d^2}{6EJ_m} \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} P_i \frac{l_i^2}{2EI} + \sum_{s=m}^n P_s \frac{(2l_s - l_m)l_m}{2EI} \\ &+ \frac{wl_m}{3EI} (3l^2 - 3ll_m + l_m^2) + 2\varphi_a \end{aligned} \tag{71}_I$$



但し式中の φ_a は、普通の如く基脚 a に起る撓曲率の値に應じて現るゝ撓角であるとして其の弾性係数を μ (radian) で表せば、次の値となるから必要なればそれを代入する。

$$2\varphi_a = \mu \left(- \sum_{i=1}^n Y_i d + \sum_{i=1}^n P_i l_i + wl^2 \right) \dots \dots \dots (71)_{II}$$

又各柱の断面二次率異なるならば $\varphi_{m,n}$ の値として式 (69) のものを與へればよく、斯の如くして與へられた架橋の解法には上式を單に未知力 Y に就て解けばよい。

これを簡単に節點荷重 P_1, P_2 及 P_3 が働く三層架橋に應用すると、

$$m=1, \frac{d}{EI} (Y_1 h + Y_2 h + Y_3 h) + Y_1 \frac{d^2}{6EJ_1} = \frac{1}{2EI} (P_1 h^2 + P_2 3h^2 + P_3 5h^2)$$

$$m=2, \frac{d}{EI} (Y_1 h + Y_2 2h + Y_3 2h) + Y_2 \frac{d^2}{6EJ_2} = \frac{1}{2EI} (P_1 h^2 + P_2 4h^2 + P_3 8h^2)$$

$$m=3, \frac{d}{EI} (Y_1 h + Y_2 2h + Y_3 3h) + Y_3 \frac{d^2}{6EJ_3} = \frac{1}{2EI} (P_1 h^2 + P_2 4h^2 + P_3 9h^2)$$

$J_1 = J_2 = J_3 = J, \frac{J}{I} \frac{h}{d} = 1$ なるときは、

$$7Y_1 + 6Y_2 + 6Y_3 = \frac{3h}{d} (P_1 + 3P_2 + 5P_3)$$

$$6Y_1 + 13Y_2 + 12Y_3 = \frac{3h}{d}(P_1 + 4P_2 + 8P_3)$$

$$6Y_1 + 12Y_2 + 19Y_3 = \frac{3h}{d}(P_1 + 4P_2 + 9P_3)$$

$$\therefore Y_1 = \frac{3}{433} \frac{h}{d} (55P_1 + 117P_2 + 125P_3), \quad M_{14} = \frac{3h}{866} (55P_1 + 117P_2 + 125P_3)$$

$$Y_2 = \frac{3}{433} \frac{h}{d} (7P_1 + 70P_2 + 134P_3), \quad M_{25} = \frac{3h}{866} (7P_1 + 70P_2 + 134P_3)$$

$$Y_3 = \frac{3}{433} \frac{h}{d} (P_1 + 10P_2 + 81P_3), \quad M_{36} = \frac{3h}{866} (P_1 + 10P_2 + 81P_3) \text{ etc.}$$

應力解法はこれで出来たのであるが更に式 (70) により水平撓度 η の値を計算すると

$$EI\eta_1 = \frac{P_1}{2} \frac{2h^3}{6} + \frac{P_2}{2} \frac{5h^3}{6} + \frac{P_3}{2} \frac{8h^3}{6} \\ - \frac{3h}{4 \times 433} (63P_1 + 197P_2 + 340P_3) h^4$$

即ち $EI\eta_1 = \frac{h^3}{24 \times 433} (598P_1 + 784P_2 + 808P_3)$

同様に、 $EI\eta_2 = \frac{h^3}{24 \times 433} (784P_1 + 1778P_2 + 2018P_3)$

$$EI\eta_3 = \frac{h^3}{24 \times 433} (808P_1 + 2018P_2 + 3096P_3)$$

この値により架橋に就て Maxwell の相対移動の法則が例證されてある。

斯の如く力の解析法によるときは剪力、撓曲率、撓度の順に求まり撓度撓角法によると全く逆の順となる。故に振動材件を知るのが目的であれば後法によるを得策とす。尙最低振動週期の近似値は上の値を其の儘週期式中へ置けばよい。簡便に各材の断面及長さが等しい場合を考ふれば、

$$P_1 = P_2 = 3wh, \quad P_3 = 2wh$$

$$\eta_1 = 0.555 \frac{wh^4}{EI}, \quad \eta_2 = 1.128 \frac{wh^4}{EI}, \quad \eta_3 = 1.412 \frac{wh^4}{EI}$$

二次式、 $T = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{\sum P\eta^2}{\sum P\eta}} = 2\pi h^2 \sqrt{\frac{8.728}{7.873}} \sqrt{\frac{w}{gEI}} = 6.63h^2 \sqrt{\frac{w}{gEI}}$

一次式、 $T = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{\sum P\eta}{\sum P}} = 2\pi h^2 \sqrt{\frac{7.873}{8}} \sqrt{\frac{w}{gEI}} = 6.26h^2 \sqrt{\frac{w}{gEI}}$

第四章 構造物の振動に関する問題

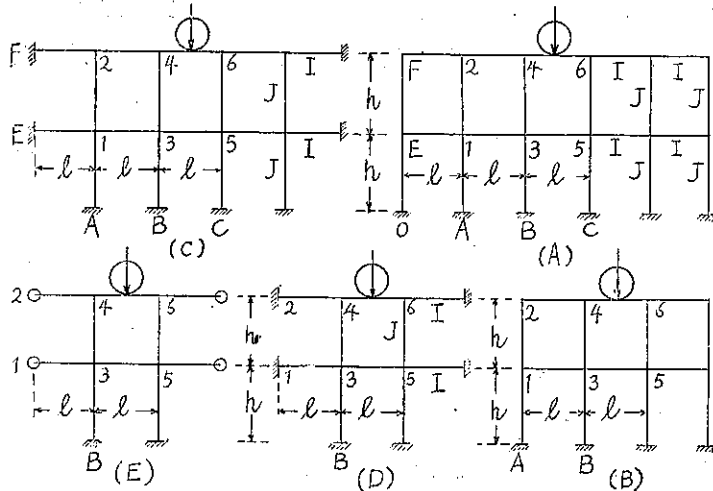
第十節 架構の振動解析

架構の振動を上下と水平とに分けて考へるに其の形により一律には言はれないが、普通の如く基脚により樹立するものに於ては其の上下動は架構其の者から言へば縦振動であるが主なる桁材には横振動が起る。然るに水平動では一般に突桁と同様優勢なる横振動の起るものと言ふべく従つて上下動は多徑間架構に起り、水平動は高層架構に起るとすれば振動に關して自ら分明なる取扱が出来る。

1. 多徑間架構の上下振動

多徑間架構即ち數多の支點或は柱脚を有する連桁式架構に於ては、これに一貫した強制上下振動が與へられる場合を除き、架構が特に齊一振動をなすが如き荷重配置關係にあるか、或は連桁の撓曲剛度が柱脚の夫れに比し極めて大なる場合などで無いと、其の總徑間を通じて齊正なる自由上下振動のみが起る事は殆んど無く各徑間には夫々の載荷に應ずる特有の自由振動が起り且つ多くの場合他徑間よりの干渉振動を感受して複雑なる振動現象をなす。斯る振動に對しては或徑間荷重のみに因つて起るべき一つの振動を他の干渉振動から分離して考へざれば振動計算をなす事が困難に陥る。斯く連桁が各徑間毎に振動區を作ることは其の節點が上下動を制肘されるからで、この同じ連桁でもそれが例へば節點が部材と共に自由に振動する橋桁式架構の連続弦(例として Dr. Karl Kriso: Statik d. Vierendeel Träger 参照)となるときには齊正振動が現れる事は勿論である。斯く何れにしても架構に對し振動式を作

第十一圖



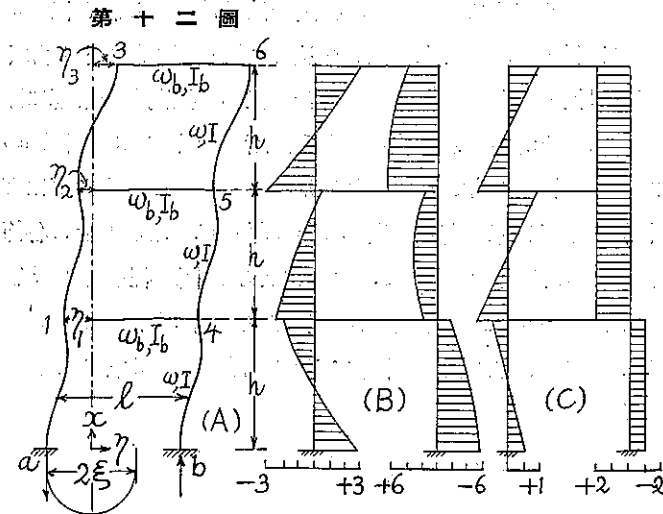
り得るは、そこに起るべき或一つの齊正振動に關するもので無くてはならない。而してこれに關する計算は後の水平振動に譲ることとするが、茲に連桁の單なる一徑間の振動に關しても、これを全構造に就て計算をなすべきかと言ふに、この事は既に靜力學で實證されある如く、一般に連桁式架構の垂直荷重を有するもの、任意徑間に於ては、少くも其の隣接徑間以外の區間と相互に及ぼす應力變形の影響は極めて小であるから、振動の波及狀態もこれと同様に考へ得べく、従つて一徑間に對しては從來實地設計上の應力解法等に屢利用されてある如く架構の一基本體を採つて計算を行へば簡便である。即ちこの場合一徑間の振動を全架構に關して解くことの勞多くして効の少いものと考へられるからである。斯の如くすれば一徑間の振動を例へば各端の緊定せる井形の基本體に就て算定すれば足りるのである。次の表は第十一圖に示せる如く、(A)乃至(E)の架構に單位荷重を與へ $K = Ih/Jl = 1$ なるときの各節點に於ける彎曲率の正確なる値を求めて比較したもので、これによると隣接徑間外の M_{3B} 、 M_{31} 、 M_{21} 、 M_{2F} などは場合によつては無視することが出來ない値である、尙 K が大になると遠隔區間の彎曲率の値が大となるから必要に應じ更に隣接二徑間を採つて基本體とすればよい、然れば計算が相當精確となる。

	M_{46}	M_{43}	M_{42}	M_{35}	M_{34}	M_{31}	M_{2B}	M_{23}
(A)	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{21}$	$-\frac{1}{251}$	$\frac{1}{53}$	$-\frac{1}{147}$	$-\frac{1}{125}$	$-\frac{1}{252}$
(B)	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{21}$	$-\frac{1}{240}$	$\frac{1}{53}$	$-\frac{1}{156}$	$-\frac{1}{120}$	$-\frac{1}{240}$
(C)	$-\frac{1}{11}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{21}$	$-\frac{1}{252}$	$\frac{1}{53}$	$-\frac{1}{146}$	$-\frac{1}{126}$	$-\frac{1}{252}$
(D)	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{20}$	$-\frac{1}{272}$	$\frac{1}{54}$	$-\frac{1}{136}$	$-\frac{1}{136}$	$-\frac{1}{272}$
(E)	$-\frac{1}{9.7}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{376}$	$\frac{1}{63}$	$-\frac{1}{125}$	$-\frac{1}{188}$	0
	M_{21}	M_{21}	M_{2F}	M_{13}	M_{12}	M_{11}	M_{1E}	M_{11}
(A)	$\frac{1}{59}$	$-\frac{1}{116}$	$-\frac{1}{119}$	$-\frac{1}{599}$	$-\frac{1}{525}$	$\frac{1}{431}$	$\frac{1}{525}$	$\frac{1}{862}$
(B)	$\frac{1}{79}$	$-\frac{1}{79}$	0	$-\frac{1}{2876}$	$-\frac{1}{288}$	$\frac{1}{261}$	0	$\frac{1}{523}$
(C)	$\frac{1}{58}$	$\frac{1}{122}$	$-\frac{1}{108}$	$-\frac{1}{549}$	$-\frac{1}{403}$	$\frac{1}{465}$	$\frac{1}{465}$	$\frac{1}{931}$
(D)	$\frac{1}{39}$	—	—	$-\frac{1}{272}$	—	—	—	—
(E)	0	—	—	0	—	—	—	—

2. 高層架構の水平振動

高層架構の水平振動は多くの他の振動形式に比して可なり顯著に且つ構造學上重要な關係にあるから振動研究として従來よく材題にとられ、各學會誌上に（例へば建築雜誌第四九三號より數號に亘る、水原旭氏：構造物の振動曲線に就て。を参照）其の近似算法等が論ぜら

れてあるが、其の一般性を有する理論解析に關しては未だ記載されて無い様であるから、本文第七節の基本式を以てする計算例を簡単な架構に適用して其の振動性に關する各式を求め各部材の應力變形の状態を明にすると同時に第九節による近似算法も比較のために行つて見る。第十二圖 (A) はこの例にとつた三層架構で、基底が變位 ξ を以て與



へられた r 振動をするものとし、其の他構成に關する材件は前數例に倣ひ總て記號を以て示してある。而して先づ水平桁が柱に比し極めて剛に作られた場合を考へる。

1. 理論解法

平衡式 (41) を各節點 1, 2, 3 に適用して、

$$1. \quad \frac{1}{2} \frac{w_b l}{g} \frac{m_r^4}{\lambda^2} \eta_1 + \frac{m_r^3 EI}{cC-1} \{ (cS+sC)\eta_1 - (s+S)\eta_2 \} + \frac{m_r^3 EI}{cC-1} \{ -(s+S)(-\xi) + (cS+sC)\eta_1 \} = 0$$

$$2. \quad \frac{1}{2} \frac{w_b l}{g} \frac{m_r^4}{\lambda^2} \eta_2 + \frac{m_r^2 EI}{cC-1} \{ (cS+sC)\eta_2 - (s+S)\eta_3 \} + \frac{m_r^3 EI}{cC-1} \{ -(s+S)\eta_1 + (cS+sC)\eta_2 \} = 0$$

$$3. \quad \frac{1}{2} \frac{w_b l}{g} \frac{m_r^4}{\lambda^2} \eta_3 + \frac{m_r^3 EI}{cC-1} \{ -(s+S)\eta_2 + (cS+sC)\eta_3 \} = 0$$

但 $m_r^2 = 2\pi r \lambda = 2\pi r \sqrt{\frac{w}{gEI}}$

計算の便宜上 $w_b l / wh = 1$ なる場合をとり式を整理して行列式の形にすると、

$$\begin{array}{ccc}
 \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\
 \frac{1}{2}(m_r h)(cC-1)+2(cS+sC) & -(s+S) & 0=-(s+S)\xi \\
 -(s+S) & \frac{1}{2}(m_r h)(cC-1)+2(cS+sC) & -(s+S)=0 \\
 0 & -(s+S) & \frac{1}{2}(m_r h)(cC-1)+(cS+sC)=0
 \end{array}$$

これを解いて得る分母を Δ_r で表し、特に $\xi=0$ なるときの条件式即ち自由振動週期函数を $\Delta_n=0$ で表せば、

$$\Delta_n = \left\{ \frac{1}{2}(mh)(cC-1)+(cS+sC) \right\} \left\{ \frac{1}{2}(mh)(cC-1)+2(cS+sC) \right\} - (s+S)^2 \left\{ (mh)(cC-1)+3(cS+sC) \right\} = 0 \dots\dots\dots (a)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \eta_1 &= (s+S) \left[\left\{ \frac{1}{2}(m_r h)(cC-1)+2(cS+sC) \right\} \left\{ \frac{1}{2}(m_r h)(cC-1)+(cS+sC) \right\} - (s+S)^2 \right] \frac{(-\xi)}{\Delta_r} \\
 \eta_2 &= (s+S)^2 \left\{ \frac{1}{2}(m_r h)(cC-1)+(cS+sC) \right\} \frac{(-\xi)}{\Delta_r} \\
 \eta_3 &= (s+S)^3 \frac{(-\xi)}{\Delta_r}
 \end{aligned} \right\} (b)$$

自由振動：— 式 (a) を満足する mh の値は圖式解法によりて、

$$mh = 1.185, \quad 2.03, \quad 2.499 \dots\dots\dots$$

$$T = \frac{2\pi}{m^2} \sqrt{\frac{w}{gEI}} = 4.43h^2 \sqrt{\frac{w}{gEI}}, \quad 1.54h^2 \sqrt{\frac{w}{gEI}}, \quad 1.01h^2 \sqrt{\frac{w}{gEI}} \dots\dots\dots$$

強制振動：— 例として $r/n_0=2.5$ 即ち $m_r h = 1.185\sqrt{2.5} = 2.0$ なるときに於て式 (b) を計算すれば、

$$\eta_1 = -7.22\xi, \quad \eta_2 = -\xi, \quad \eta_3 = 6.94\xi$$

$$\text{茲に } \xi = \frac{kw h^4}{2^4 EI}$$

式 (39) から

$$\begin{array}{l}
 \text{第一層} \begin{cases} A_1 = -6 \xi \\ A_2 = 6 \xi \\ A_3 = 4.7 \xi \\ A_4 = -5.7 \xi \end{cases}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \text{第二層} \begin{cases} A_1 = 1.8 \xi \\ A_2 = -1.8 \xi \\ A_3 = -7.6 \xi \\ A_4 = 2.8 \xi \end{cases}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \text{第三層} \begin{cases} A_1 = 6.5 \xi \\ A_2 = -6.5 \xi \\ A_3 = -6.8 \xi \\ A_4 = 5.8 \xi \end{cases}
 \end{array}$$

各層柱の應力式は上の係数 A_i 等を式 (38) に代入して、

$$\begin{array}{l}
 \text{第一層} \begin{cases} M = \frac{1}{4} kwh^2 \left\{ -6 \left(\sin \frac{2x}{h} + \sinh \frac{2x}{h} \right) + 4.7 \cos \frac{2x}{h} + 5.7 \cosh \frac{2x}{h} \right\} \\ Q = \frac{1}{2} kwh \left\{ -6 \left(\cos \frac{2x}{h} + \cosh \frac{2x}{h} \right) - 4.7 \sin \frac{2x}{h} + 5.7 \sinh \frac{2x}{h} \right\} \end{cases} \\
 \text{第二層} \begin{cases} M = \frac{1}{4} kwh^2 \left\{ 1.8 \left(\sin \frac{2x}{h} + \sinh \frac{2x}{h} \right) - 7.6 \cos \frac{2x}{h} - 2.8 \cosh \frac{2x}{h} \right\} \\ Q = \frac{1}{2} kwh \left\{ 1.8 \left(\cos \frac{2x}{h} + \cosh \frac{2x}{h} \right) + 7.6 \sin \frac{2x}{h} - 2.8 \sinh \frac{2x}{h} \right\} \end{cases} \\
 \text{第三層} \begin{cases} M = \frac{1}{4} kwh^2 \left\{ 6.5 \left(\sin \frac{2x}{h} + \sinh \frac{2x}{h} \right) - 6.8 \cos \frac{2x}{h} - 5.8 \cosh \frac{2x}{h} \right\} \\ Q = \frac{1}{2} kwh \left\{ 6.5 \left(\cos \frac{2x}{h} + \cosh \frac{2x}{h} \right) + 6.8 \sin \frac{2x}{h} - 5.8 \sinh \frac{2x}{h} \right\} \end{cases}
 \end{array}$$

第十二圖の應力圖 (B) は括弧外の kwh の項を單位として各層柱の M 及 Q の値を夫々左側及右側柱に就て描いたもので、其の最大彎曲率及剪力は共に第三層下端に起ることがわかる。

局部強制振動：一上の架構全系の振動計算には其の自重の影響を無視してあるが、少くも下層柱では柱としての定荷重を有するから軸壓力の働く弾性桁として其の慣性振動を考ふれば、基本式で明なる如く、上に計算した自由振動の mh の値以外に $cC-1=0$ に基く次の値に於て各柱に又共鳴振動が惹起される。

$$m'h = \frac{3}{2}\pi, \quad \frac{5}{2}\pi, \quad \frac{7}{2}\pi \dots\dots\dots$$

茲に m' は與へられた軸壓力を含む m の函數と考いてよい。

(2) 近似解法

この方法は總ての部材の重量を節點に分擔せしむるものであつて構造の靜力的解法ではその重量の節點集中は理論上大なる誤差を招致せないが、振動構體では各部材の質量従つて其の慣性を無視することになるから構造の様式にもよるが一般に理論解法のものとは可なり隔つた結果を得、且つ振動軸に沿ふた節點數の少いだけそれだけ結果は不正確となる。唯だ理論基本式を使用するものに比し計算が餘程簡易になるから節點數の多い場合には便利であつ

て振動様式の概状を推知するには大體其の目的を達し得るのである。斯くこの方法では節點に於ける撓曲及應力の値を知れば足るのであるから第九節に於ける靜力的撓曲に関する式 (57)_I 及 (57)_{II} を使用すればよい。さきの理論計算と同一材件の下に第十二圖で各層頂點に第一層より順次に $P_1=3wh$, $P_2=3wh$, $P_3=2wh$ が働くものとし、式 (57)_I 或は (57)_{II} の中例へば後者により各節點 1, 2, 3 に於ける力の平衡条件を書けば、

$$\begin{aligned}
 1. \quad & \frac{1}{2} \frac{P_1}{g} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} \right)_{t=0} = -Q_{1a} + Q_{12}, \quad y = \eta_1 \cos 2\pi r t \\
 & \frac{1}{2} \frac{P_1}{g} (2\pi r)^2 \eta_1 + \frac{6EI}{h^2} \left\{ -\frac{2}{h} (\eta_1 + \xi) \right\} - \frac{6EI}{h^2} \left\{ -\frac{2}{h} (\eta_2 - \eta_1) \right\} = 0 \\
 2. \quad & \frac{1}{2} \frac{P_2}{g} (2\pi r)^2 \eta_2 + \frac{6EI}{h^2} \left\{ -\frac{2}{h} (\eta_2 - \eta_1) \right\} - \frac{6EI}{h^2} \left\{ -\frac{2}{h} (\eta_3 - \eta_2) \right\} = 0 \\
 3. \quad & \frac{1}{2} \frac{P_3}{g} (2\pi r)^2 \eta_3 + \frac{6EI}{h^2} \left\{ -\frac{2}{h} (\eta_3 - \eta_2) \right\} = 0
 \end{aligned}$$

これを行列式の形にして

$$\begin{vmatrix}
 \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\
 \theta - 2 & 1 & 0 \\
 1 & \theta - 2 & 0 \\
 0 & 1 & \frac{2}{3}\theta - 1
 \end{vmatrix}
 \begin{matrix}
 = \xi \\
 = 0 \\
 = 0
 \end{matrix}
 \quad \text{但 } \theta = \frac{wh^4 r^2 \pi^2}{2gEI}$$

$$\eta_1 = \frac{(2\theta^2 - 7\theta + 3)\xi}{2\theta^3 - 11\theta^2 + 15\theta - 3}, \quad \eta_2 = \frac{-(2\theta - 3)\xi}{2\theta^3 - 11\theta^2 + 15\theta - 3}, \quad \eta_3 = \frac{3\xi}{2\theta^3 - 11\theta^2 + 15\theta - 3}$$

自由振動:— $\xi=0$ なるときの条件 $2\theta^3 - 11\theta^2 + 15\theta - 3=0$ を解いて、

$$\theta = 0.24, \quad 1.8, \quad 3.45$$

$$T = \frac{\pi h^2}{\sqrt{2\theta}} \sqrt{\frac{w}{gEI}} = 4.53 h^2 \sqrt{\frac{w}{gEI}}, \quad 1.65 h^2 \sqrt{\frac{w}{gEI}}, \quad 1.19 h^2 \sqrt{\frac{w}{gEI}}$$

理論解法の場合と異なり單に集中重量の数だけの自由振動様式を得、其の三つの週期を理論週期に比較すれば最低振動に於て約 2.5%、第二及第三次振動に於て夫々 7% 及 18% 大である。

強制振動:— 前と同様に $r/n_0=2.5$ 即ち $\theta=0.24(2.5)^2=1.5$ なる場合に對して各節點の撓度の値は、

$$\eta_1 = -2\xi, \quad \eta_2 = 0, \quad \eta_3 = 2\xi$$

$$\text{茲に } \xi = \frac{kg}{4\pi^2 r^2} = \frac{kwh^4}{8EI\theta} = \frac{kwh^4}{12EI}$$

これらの値は理論値とは餘程の差異がある。應力の値は單に節點に於けるものを求むれば足りるのであるから式 (57)_I 及 (57)_{II} から、

$$M_{a1} = -M_{1a} = \frac{2EI}{h} \left\{ -\frac{3}{h}(-2\xi + \xi) \right\} = \frac{6EI}{h^2} \xi = \frac{1}{2} kwh^2$$

$$M_{12} = -M_{21} = \frac{-12EI}{h^2} \xi = -kwh^2$$

$$M_{23} = -M_{32} = \frac{-12EI}{h^2} \xi = -kwh^2$$

$$Q_{a1} = Q_{1a} = \frac{-12EI}{h^3} \xi = -kwh$$

$$Q_{12} = Q_{21} = \frac{24EI}{h^3} \xi = 2kwh$$

$$Q_{23} = Q_{32} = \frac{24EI}{h^3} \xi = 2kwh$$

第十二圖 (C) には kwh^2 及 kwh を單位として左側柱に M の値を、右側柱に Q の値を表してある。これによると第二及第三層の上下節點には同一の最大應力が起り第一層には其の二分の一のものが起る、理論計算のものに比し應力配賦の状態には可なりの相違が現れて居るが、この應力の變化する経路を知る事に依つて大略其の實際の變化を推定する事が出来る。

(3) 最低振動の近似値

最低振動の週期は屢必要な場合があり又理論式を解くに當つてもこの週期の近似値を豫め知つて居ると數を取扱ふ上に於て大に手數が省ける。次に靜力的に架構の撓度を計算して其の週期を求め、上に計算した各の値に對して比較して見る。この場合にも式 (57)_I 或は (57)_{II} の何れを適用してもよいが、唯問題は構材の重量をそれに等賦せしめて考ふるか或は節點に集中分擔せしめて考ふるかにある。構材の正確なる彎曲率等を求むるには等賦法によるべきであるが、單に節點の撓度の値から週期を求むるためには計算の簡單なる集中法によるのが便利である。式 (57)_{II} を適用して、

$$1. \quad \frac{1}{2} P_1 + \frac{6EI}{h^2} \left(-\frac{2}{h} \eta_1 \right) - \frac{6EI}{h^2} \left\{ -\frac{2}{h} (\eta_2 - \eta_1) \right\} = 0$$

$$2. \quad \frac{1}{2} P_2 + \frac{6EI}{h^2} \left\{ -\frac{2}{h} (\eta_2 - \eta_1) \right\} - \frac{6EI}{h^2} \left\{ -\frac{2}{h} (\eta_3 - \eta_2) \right\} = 0$$

$$3. \quad \frac{1}{2} P_3 + \frac{6EI}{h^2} \left\{ -\frac{2}{h} (\eta_3 - \eta_2) \right\} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \theta$$

$$\begin{vmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \theta$$

$$\begin{vmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{2}{3}\theta \quad \text{但} \quad \theta = \frac{1}{8} \frac{wh^4}{EI}$$

$$\eta_1 = \frac{8}{3}\theta = \frac{1}{3} \frac{wh^4}{EI} \quad \eta_2 = \frac{13}{3}\theta = \frac{13}{24} \frac{wh^4}{EI} \quad \eta_3 = 5\theta = \frac{5}{8} \frac{wh^4}{EI}$$

$$\text{(二次式)} \quad T = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{\sum P\eta^2}{\sum P\eta}} = 4.52 h^2 \sqrt{\frac{w}{gEI}}$$

$$\text{(一次式)} \quad T = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{\sum P\eta}{\sum P}} = 4.4h^2 \sqrt{\frac{w}{gEI}}$$

これら二つの週期の値は理論値に對し夫々 2%大及 0.7%小であり、又近似法の値よりは何れも 0.2% 及 2.8% 小である従つてこれ又近似値として相當の價値が存するわけである。

(4) 桁も柱も同一剛度なるときの強制振動

以上の例の如く柱に比して桁の極めて剛なる如き場合では層數即ち節點の撓度の數丈けの方程式を解けばよいが、一般に桁の變形を考ふれば倍加する方程式即ち節點の撓度と撓角の數丈けの方程式を解かねばならぬ。然し實際の解法に當つてはこれら方程式を一同に聯立に解かずとも、數に於て半減した方程式を解けばよい事となる。若し又これを數學で言ふ不定係數を介して解けば頭を勞せず機械的に解き得るのである。次に架構の桁が變形する場合に就て其の強制振動の應力變形を計算して、桁の剛なる場合と比較する。計算式を簡易ならしむるために (1) に於て假定した外更に $w = w_0$ とする。

節點 1 に於ける三つの M の値は式 (40) から、

$$\sim M_{1a} = \frac{m_r EI}{cC-1} \{ (cS-sC)\varphi_1 + m_r(c-C)(-\xi) + m_r s S \eta_1 \}$$

$$M_{12} = \frac{m_r EI}{cC-1} \{ (cS-sC)\varphi_1 + (s-S)\varphi_2 - m_r s S \eta_1 - m_r(c-C)\eta_2 \}$$

$$M_{13} = \frac{m_r EI}{cC-1} \{ (cS-sC)\varphi_1 + (s-S)\varphi_1 \}$$

條件 $\sum M = 0$ から、

$$\{ 3(cS-sC) + (s-S) \} \varphi_1 + (s-S)\varphi_2 = m_r(c-C)\eta_2 + m_r(c-C)\xi \quad \dots (a)$$

節點 2 及 3 に對して同様に、

$$(s-S)\varphi_1 + \{ 3(cS-sC) + (s-S) \} \varphi_2 + (s-S)\varphi_3 = -m_r(c-C)\eta_1 + m_r(c-C)\eta_3 \quad \dots (b)$$

$$(s-S)\varphi_2 + \{2(cS-sC) + (s-S)\} \varphi_3 = -m_r(c-C)\eta_2 - m_r s S \eta_3 \dots\dots\dots (c)$$

次に節點 1, 2, 3 に於ける Q の平衡條件は式 (41) から,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{wl}{g} \frac{m_r^4}{\lambda^2} \eta_1 + \frac{m_r^2 EI}{cC-1} \{sS\varphi_1 - (c-C)\varphi_2 + m_r(cS+sC)\eta_1 - m_r(s+S)\eta_2\} \\ + \frac{m_r^2 EI}{cC-1} \{-sS\varphi_1 - m_r(s+S)(-\xi) + m_r(cS+sC)\eta_1\} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{wl}{g} \frac{m_r^4}{\lambda^2} \eta_2 + \frac{m_r^4 EI}{cC-1} \{sS\varphi_2 - (c-C)\varphi_3 + m_r(cS+sC)\eta_2 - m_r(s+S)\eta_3\} \\ + \frac{m_r^4 EI}{cC-1} \{(c-C)\varphi_1 - sS\varphi_2 - m_r(s+S)\eta_1 + m_r(cS+sC)\eta_2\} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{wl}{g} \frac{m_r^4}{\lambda^2} \eta_3 + \frac{m_r^4 EI}{cC-1} \{(c-C)\varphi_2 - sS\varphi_3 - m_r(s+S)\eta_2 + m_r(cS+sC)\eta_3\} \\ + \frac{m_r^4 EI}{cC-1} \{sS\varphi_2 - (c-C)\varphi_3 + m_r(cS+sC)\eta_2 - m_r(s+S)\eta_3\} = 0 \end{aligned}$$

この三つの式から φ_1, φ_2 及 φ_3 の項を抽出せば,

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{m_r} sS(c-C)\varphi_1 &= \{\alpha(c-C) + sS(s+S)\} \eta_1 - \{\alpha sS + 2(c-C)(s+S)\} \eta_2 \\ &\quad + \{\beta(c-C) + sS(s+S)\} \eta_3 + (c-C)(s+S)\xi \\ \frac{1}{m_r} (c-C)\varphi_2 &= \alpha\eta_1 - (s+S)\eta_2 + (s+S)\xi \\ \frac{1}{m_r} sS\varphi_3 &= \alpha\eta_1 - 2(s+S)\eta_2 + \beta\eta_3 + (s+S)\xi \end{aligned} \right\} \dots (d)$$

$$\text{但 } \alpha = \frac{1}{2} m_r h (cC-1) + 2(cS+sC)$$

$$\beta = \frac{1}{2} m_r h (cC-1) + (cS+sC)$$

この架構の最低振動週期の近似値は第八節例解に依つて $6.63h^2 \sqrt{w/gEI}$ なることが知られてあるから, $r/n_0 = 2.5$ 即ち $m_r h = \sqrt{(2.5 \times 2\pi)/6.63} \doteq 1.5$ なる強制振動を考ふると, 式 (a) 乃至 (d) は次の値となる。

$$6.821\varphi_1 + \varphi_2 = \frac{1.5}{h} (2.06\eta_2 + 2.06\xi) \dots\dots\dots (a)'$$

$$\varphi_1 + 6.821\varphi_2 + \varphi_3 = \frac{1.5}{h} (-2.06\eta_1 + 2.06\eta_3) \dots\dots\dots (b)'$$

$$\varphi_2 + 4.88\varphi_3 = \frac{1.5}{h}(-2.06\eta_2 + 1.876\eta_3) \dots\dots\dots (c)'$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1.5}{h}(0.687\eta_1 - 1.03\eta_2 - 0.489\eta_3 + 1.472\xi) \\ \varphi_2 &= \frac{1.5}{h}(-1.914\eta_1 + 1.37\eta_2 - 1.37\xi) \\ \varphi_3 &= \frac{1.5}{h}(2.057\eta_1 - 2.944\eta_2 + 0.881\eta_3 + 1.472\xi) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (d)'$$

式 (d)' と (a)', (b)' 及 (c)' との間に先づ φ を消去し, η の値を求め, 次に (d)' から φ の値を求むる。

$$2.772\eta_1 - 7.715\eta_2 - 3.335\eta_3 = 6.61(-\xi)$$

$$8.251\eta_1 - 5.37\eta_2 + 1.668\eta_3 = 6.4(-\xi)$$

$$8.124\eta_1 - 10.94\eta_2 + 2.423\eta_3 = 5.81(-\xi)$$

$$\eta_1 = \frac{207.8}{219.8}(-\xi) = -0.946\xi, \quad \eta_2 = \frac{-12.926}{219.8}(-\xi) = 0.059\xi,$$

$$\eta_3 = \frac{-232.056}{219.8}(-\xi) = 1.056\xi$$

$$\varphi_1 = \frac{1.5}{h}(-0.246)(-\xi) = 0.369 \frac{\xi}{h}, \quad \varphi_2 = \frac{1.5}{h}(-0.521)(-\xi) = 0.782 \frac{\xi}{h},$$

$$\varphi_3 = \frac{1.5}{h}(-0.283)(-\xi) = 0.425 \frac{\xi}{h}$$

式 (39) から應力式の係数を求むれば,

第一層柱	{	$\begin{aligned} A_1 &= -0.62 \xi \\ A_2 &= 0.62 \xi \\ A_3 &= -0.31 \xi \\ A_4 &= -0.69 \xi \end{aligned}$	}	第二層柱	{	$\begin{aligned} A_1 &= 0.63 \xi \\ A_2 &= -0.38 \xi \\ A_3 &= -1.08 \xi \\ A_4 &= 0.14 \xi \end{aligned}$	}	第三層柱	{	$\begin{aligned} A_1 &= 1.10 \xi \\ A_2 &= -0.58 \xi \\ A_3 &= -0.47 \xi \\ A_4 &= 0.53 \xi \end{aligned}$	}
第一層桁	{	$\begin{aligned} A_1 &= -0.53 \xi \\ A_2 &= 0.77 \xi \\ A_3 &= 0.49 \xi \\ A_4 &= -0.49 \xi \end{aligned}$	}	第二層桁	{	$\begin{aligned} A_1 &= -1.12 \xi \\ A_2 &= 1.64 \xi \\ A_3 &= 1.04 \xi \\ A_4 &= -1.04 \xi \end{aligned}$	}	第三層桁	{	$\begin{aligned} A_1 &= -0.61 \xi \\ A_2 &= 0.89 \xi \\ A_3 &= 0.56 \xi \\ A_4 &= -0.56 \xi \end{aligned}$	}

斯くして應力式は,

$$\text{第一層柱} \begin{cases} M = \frac{kwh^2}{(1.5)^2} \{-0.62(\sin Z + \sinh Z) - 0.31\cos Z + 0.69\cosh Z\} \\ Q = \frac{kwh}{1.5} \{-0.62(\cos Z + \cosh Z) + 0.31\sin Z + 0.69\sinh Z\} \end{cases}$$

$$\text{第二層柱} \begin{cases} M = \frac{kwh^2}{(1.5)^2} \{0.63\sin Z + 0.38\sinh Z - 1.08\cos Z - 0.14\cosh Z\} \\ Q = \frac{kwh}{1.5} \{0.63\cos Z + 0.38\cosh Z + 1.08\sin Z - 0.14\sinh Z\} \end{cases}$$

$$\text{第三層柱} \begin{cases} M = \frac{kwh^2}{(1.5)^2} \{1.1\sin Z + 0.58\sinh Z - 0.47\cos Z - 0.53\cosh Z\} \\ Q = \frac{kwh}{1.5} \{1.1\cos Z + 0.58\cosh Z + 0.47\sin Z - 0.53\sinh Z\} \end{cases}$$

$$\text{第一層桁} \begin{cases} M = \frac{kwh^2}{(1.5)^2} \{-0.53\sin Z - 0.77\sinh Z + 0.49(\cos Z + \cosh Z)\} \\ Q = \frac{kwh}{1.5} \{-0.53\cos Z - 0.77\cosh Z - 0.49(\sin Z - \sinh Z)\} \end{cases}$$

$$\text{第二層桁} \begin{cases} M = \frac{kwh^2}{(1.5)^2} \{-1.12\sin Z - 1.64\sinh Z + 1.04(\cos Z + \cosh Z)\} \\ Q = \frac{kwh}{1.5} \{-1.12\cos Z - 1.64\cosh Z - 1.04(\sin Z - \sinh Z)\} \end{cases}$$

$$\text{第三層桁} \begin{cases} M = \frac{kwh^2}{(1.5)^2} \{-0.61\sin Z - 0.89\sinh Z + 0.56(\cos Z + \cosh Z)\} \\ Q = \frac{kwh}{1.5} \{-0.61\cos Z - 0.89\cosh Z - 0.56(\sin Z - \sinh Z)\} \end{cases}$$

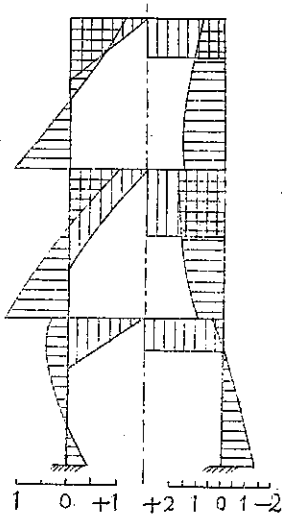
$$\text{但 } Z = \frac{1.5}{h}x$$

震度 k を含む係数項を變位 ξ の項で表すならば、

$$\frac{kwh^2}{(1.5)^2} = \frac{(1.5)^2}{h^2} EI\xi$$

第十三圖の左半部は $kwh^2/(1.5)^2$ を單位として描いた彎曲率 M の縮小圖であつて、其の右半部には $kwh/1.5$ を單位として剪力 Q の縮小圖を表してある。これを桁の剛なるさきの場合に對比するに正及負の應力の現れ方は大體に於て一致して居るが其の配賦の度は多少異なり、第二層に於て柱及桁に最大應力が起り桁に於て最大である。

第 十 三 圖



以上本文に於て記載した振動に於ては各構材の撓曲變形のみを考へ其の直力の作用即ち伸縮に因る影響を無視してあるが、これは世上既に不靜定構造解法のための彈性式に於て直力及剪力に關する内働の項を省略することの誤差の少きを實證されてある如く、振動に於ても同様に取扱ふて差支ない。試みに著者はこの影響の著しき例として高層架構の水平力を受くるものに於て、其の兩側連筋柱の正負の直力は其の水平材の兩端の相對移動を比較的大ならしむるから、この變形を彈性式の中に加へて前記三層架構に就き算定せしに、其の最大影響を蒙むる構材に於て誤差 3% を出でず而かも其の計算の勞多きを思へば斯る誤差は無視して毫も無理ではない。然し矩形體から成る架構に於てはこれによいが、斜材を有する構造例へば橋桁式結構特に鉸結構 (Pin connected truss)

は其の應力變形は全く構材の伸縮に因つて起り従つて其の構體の振動に於て撓曲は單に各構材單獨の局部自由振動によるものが現るゝに過ぎない。而して斯る場合の振動式と雖も各構材の伸縮材件さへ知られてあれば、其の自由及強制に對する理論及近似解法に關するものを桁材の撓曲振動に關するものと同一原則及形式に依つて誘出する事が出来る。これに就ては號を改めて記述したい。 (完)