

論 說 報 告

土木學會誌 第十四卷第四號 昭和三年八月

四邊に於て支持せらるゝ矩形平面板の研究

准員 工學博士 稻 田 隆

On a Rectangular Plate Supported on Four Sides.

By Takashi Inada, Dr. Eg., Assoc. Member.

内 容 梗 概

従來矩形平面板に關する研究必ずしも少なからず。然れども、多くは特殊の場合を取扱ひたるものにして、一般的なる場合に對する解法を興へたるものは稀なり。

本文第一章に於ては、任意の靜水壓の作用を受くる矩形平面板を取扱ひ、この場合に對する基本解式として、次の方程式を誘導せり。

$$\zeta = C \frac{1}{a^5} xy(y-b) \left\{ x \left(\frac{t_2 - t_1}{a} x + \frac{t_3 - t_1}{b} y + 2t_1 + t_3 \right) - a \left(\frac{t_3 - t_1}{b} y + t_1 + t_2 + t_3 \right) \right\}.$$

ここに ζ は板の撓み、 a, b はそれぞれ矩形板の長短二邊へ長さを表はし、 t_1 は板の 2 邊に平行に取りられたる直角座標軸の原点として選ばれたる板の一隅に於ける水深、 t_2, t_3 はそれぞれ x, y 軸上の他の二隅に於ける水深を表はす。

第二章は 任意の集中荷重を受くる場合を論じたるものにして、基本解式として

$$\zeta^I = C \frac{(x-\alpha a)^2 + (y-\beta b)^2}{a^2} \ln \frac{(x-\alpha a)^2 + (y-\beta b)^2}{a^2}$$

を用ひ (この式中 $\alpha a, \beta b$ は集中荷重の作用する位置の座標を表はす)、尙收斂 速かなる正弦級數への展開を可能ならしむるため、補助解式

$$\zeta^{II} = -C \left\{ c_1 + c_2 \frac{x}{a} + c_3 \frac{y}{a} + c_4 \frac{xy}{a^2} + \frac{x(x-a)}{a^2} \left(d_1 + d_2 \frac{y}{a} + d_3 \frac{x}{a} + d_4 \frac{xy}{a^2} \right) + \frac{y(y-b)}{a^2} \left(e_1 + e_2 \frac{x}{a} + e_3 \frac{y}{a} + e_4 \frac{xy}{a^2} \right) \right\}$$

を加へ、この中に含まるゝ 12 個の定數を適當に決定せり。

次に第三章に於ては、著者の行ひたる軟鋼方形板の偏心集中荷重の下に於ける彎曲試験に就て述べ、その實驗の結果と計算の結果とを比較して、板の周圍の支持法が、板の應力状態に大なる影響あることを論ぜり。

Synopsis

Investigations on the behaviour of rectangular plates under strain have not been scarce; but they were mostly confined to special cases, an entirely general

case having been rarely made.

In this paper, the first chapter treats of hydrostatic pressure acting on rectangular plate and for which the following equation has been derived:

$$\zeta = C \frac{1}{a^3} xy(y-b) \left\{ x \left(\frac{t_2 - t_1}{a} x + \frac{t_3 + t_1}{b} y + 2t_1 + t_2 \right) - a \left(\frac{t_3 - t_1}{b} y + t_1 + t_2 + t_3 \right) \right\}$$

in which

ζ ; deflection of the plate,

a, b ; long and short sides of the plate respec.,

t_1 ; depth of water at the corner taken as origin of rect. coord.,

t_2, t_3 ; depths of water at the corners in lines of x and y axes respec.

The second chapter deals with arbitrarily concentrated loads, for which the following equation is given:

$$\zeta'' = C \frac{(x - \alpha a)^2 + (y - \beta b)^2}{a^2} \ln \frac{(x - \alpha a)^2 + (y - \beta b)^2}{a^2}$$

in which $\alpha a, \beta b$ represent the coordinates of concentrated loads. Further, to facilitate the solution, the following auxiliary equation is made use of.

$$\zeta'''' = -C \left\{ e_1 + e_2 \frac{x}{a} + e_3 \frac{y}{a} + e_4 \frac{xy}{a^2} + \frac{x(x - \alpha)}{a^2} \left(d_1 + d_2 \frac{y}{a} + d_3 \frac{x}{a} + d_4 \frac{xy}{a^2} \right) + \frac{y(y - b)}{a^2} \left(e_1 + e_2 \frac{x}{a} + e_3 \frac{y}{a} + e_4 \frac{xy}{a^2} \right) \right\}$$

In the third chapter are given the results of tests made by the author on rectangular plate of mild steel. These results as compared with those obtained by calculation have shown marked effects exerted on the strain-stress condition of the plate by modes of support.

目 次

緒 論 計算方法の概要	3
第一章 任意の静水壓の作用を受くる矩形平板	4
第一節 板が四邊に於て自由に支持せらるゝ場合	4
第二節 板が四邊に於て完全に固定せらるゝ場合	11
第三節 例一	18
第四節 例二	19
第二章 任意の位置に於ける集中荷重の作用を受くる矩形平板	22
第五節 基本解式	22
第六節 集中荷重の意義	23
第七節 板が四邊に於て自由に支持せらるゝ場合	24
第八節 板が四邊に於て完全に固定せらるゝ場合	29
第九節 例三	30

第十節 例四	32
第三章 偏心集中荷重の作用を受くる方形板の彎曲試験	35
第十一節 實驗裝置	35
第十二節 實驗の結果及計算との比較	36
結 言	38
附 録 實測せられたる板の撓みの數値表	

緒 論 計算方法の大要

本文に於ては、實際の構造物に於て比較的多く存在する場合として、餘りに厚からず又餘りに薄からざる板を以て主題とする。即ち長さ及幅に比べて厚さの小なる板が餘り劇しからざる程度の撓みを生ずる場合で、力學上“Thin Plate”と稱せらるゝものである。かくの如き板に對して、その微小部分の平衡状態を考ふる時、次の如き偏微分方程式が誘導せらるゝこと一般に知らるゝ所である。

$$\frac{m^2 E}{m^2 - 1} \frac{h^3}{12} \left\{ \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \zeta}{\partial y^4} \right\} = f(x, y) \dots \dots \dots (1)$$

{

E ; 板の材料の彈性係數

m ; ポアソン比

h ; 板の厚さ

ζ ; 板の中央面の撓み

この方程式の右邊 $f(x, y)$ は、今考へて居る板の微小部分の上に作用する荷重を示す函数で、荷重の分布状態に應じてその形は決定せられる。

この偏微分方程式 (1) を満足する解式は、矩形板の平衡状態に適應するもので、これを基本解式と名ける。一般に、同じ荷重の作用を受け同じく平衡状態を保つ板といへども、その周圍の支持法如何によつては、種々の異りたる彎曲状態を呈するものである。故に板の彎曲状態を論ずるに當つては、豫め板の周圍の條件を與へておかなければならない。而して基本解式は必ずしもこの條件を満足するとは限らない、若しこれを満足せざるとき、吾々は次の如き方法をとる。即ち基本解式に更に補助解式と名けるものを加へ、その補助解式の形を與へられたる周圍の條件に適合するやう、適當に決定するのである。

この補助解式は、基本解式と加へて、方程式 (1) を満足しなければならない、故に必然的に、次の偏微分方程式を満足するものでなければならない。

$$\frac{m^2 E}{m^2 - 1} \frac{h^3}{12} \left\{ \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \zeta}{\partial y^4} \right\} = 0 \dots \dots \dots (2)$$

第一章 任意の静水壓の作用を受くる矩形平板

第一節 板が四邊に於て自由に支持せらるゝ場合

a, b を長短二邊とする矩形平板の一隅に（且板の中央面上に）座標原點を取り、 a, b 各邊の方向をそれぞれ x, y 軸の方向に取れば、一樣ならざる静水壓の作用を受くる矩形平板上の荷重の分布状態は、一般に次の式にて與へられる。

$$f(x, y) = \gamma \{t_1 + x(t_2 - t_1)a^{-1} + y(t_3 - t_1)b^{-1}\} \dots \dots \dots (3)$$

γ ; 水の單位容積の重さ

t_1 ; 板の一隅 ($x=0, y=0$) に於ける水の深さ

t_2 ; 板の一隅 ($x=a, y=0$) に於ける水の深さ

t_3 ; 板の一隅 ($x=0, y=b$) に於ける水の深さ

方程式 (1) の右邊が (3) によつて與へらるゝとき、之を満足する基本解式は次の形を最も便とする。

$$\zeta^I = C \{3t_1 + x(t_2 - t_1)a^{-1} + y(t_3 - t_1)b^{-1}\} x^2 y^2 a^{-5} \dots \dots \dots (4)$$

$$C = \gamma a^5 / 24N, \quad N = m^2 E h^3 / 12(m^2 - 1).$$

次に板の周圍の條件を考ふるに、一般に板の彎曲状態は 2 個の周圍の條件によつて決定せられる。四邊に於て自由に支持せらるゝ場合は、先づ四邊に於ける板の曲りが消滅すべきは明である。而して他の一つの條件として、吾々は板の周圍が荷重の作用によつて撓む形を與ふるか、或は板の周圍に於ける支持力分布の状態を與ふることが出来るが、普通には問題の解法を簡易ならしむるため、「板の周圍は荷重を受くるも常に撓みを生ぜず」といふ條件が採用せられる。故にこゝに於ても、この條件に従ふことゝすれば、板の四邊が自由に支持せらるゝ條件は

1. $x=0, x=a$ に對し $\zeta=0, \partial^2 \zeta / \partial x^2 = 0$
2. $y=0, y=b$ に對し $\zeta=0, \partial^2 \zeta / \partial y^2 = 0$

かくの如き條件が與へらるれば、これを満足するために、 ζ^I に附加さるべき補助解式としては、次の諸式が便利である。

$$\zeta^{III} = -C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^{III}}{\sin(n\pi a/b)} \sin \frac{n\pi}{b} x \sin \frac{n\pi}{b} y$$

$$\zeta^{IV} = -C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^{IV}}{\sin(n\pi b/a)} \sin \frac{n\pi}{a} y \sin \frac{n\pi}{a} x$$

$$\zeta^V = -C \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n^V \frac{x}{a} \sin \frac{n\pi}{b} (x-a) + B_n^V \frac{x-a}{a} \sin \frac{n\pi}{b} x \right\} \sin \frac{n\pi}{b} y$$

$$\zeta^{VI} = -C \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n \frac{y}{b} \sin \frac{n\pi}{a} (y-b) + B_n \frac{y-b}{b} \sin \frac{n\pi}{a} y \right\} \sin \frac{n\pi}{a} x$$

$$(n=1, 2, 3, \dots)$$

今上記の基本及補助解式に於て $x=0$ とおけば、これらの諸式は何れも消滅する。故に「 $x=0$ に對し $\zeta=0$ 」なる條件は自ら満足されて居る。同様に、「 $y=0$ に對し $\zeta=0$ 」なる條件も自ら満足されて居ることが分る。

次に $x=a$ とおけば、 ζ^{IV} , ζ^V , ζ^{VI} は消滅するけれども ζ^I , ζ^{III} は消滅しない。即ち

$$\zeta_{x=a}^I = C \left\{ 2t_1 + t_2 + y(t_3 - t_1)b^{-1} \right\} y^2 a^{-3}$$

$$\zeta_{x=a}^{III} = -C \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{b} y.$$

故に $x=a$ に對して $\zeta=0$ なる條件を満足するには

$$\zeta_{x=a}^I = -\zeta_{x=a}^{III}$$

なるを要する。

今 $\zeta_{x=a}^I$ を Fourier 級數に展開して

$$\zeta_{x=a}^I = \sum_{n=1}^{\infty} K_n \sin \frac{n\pi}{b} y$$

と表はせば、 $A_n^{III} = K_n$ なる時、所要の條件は満足せられる。而して K_n は次の式より求められる。

$$K_n = A_n = \frac{2}{b} \int_0^b \zeta_{x=a}^I \sin \frac{n\pi}{b} y dy.$$

運算の結果

$$A_n^{III} = -\frac{2}{n\pi} \left\{ \zeta_{y=b}^I \cos n\pi - \zeta_{y=0}^I \right\} + \frac{2b^2}{n^3 \pi^3} \left\{ \left(\frac{\partial^2 \zeta^I}{\partial y^2} \right)_{y=a, y=b} \cos n\pi \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\partial^2 \zeta^I}{\partial y^2} \right)_{y=0} \right\} + \frac{2b^3}{n^4 \pi^4} \int_0^b \left(\frac{\partial^4 \zeta^I}{\partial y^4} \right)_{x=a} \sin \frac{n\pi}{b} y dy$$

この式の右邊第一項に於て $\zeta_{x=a, y=0}^I$ は零となり、又第三項は $\partial^4 \zeta^I / \partial y^4 = 0$ なるゆへ自ら消滅し、第一及第二項は何れも $n=\infty$ のとき零に収斂する。但し第二項は第一項に比し著しく速かに収斂するゆへ、若し第一項に於て $\zeta_{x=a, y=b}^I = 0$ ならば A_n^{III} の収斂は一層迅速となるであらう。更に又、第二項に於て $(\partial^2 \zeta^I / \partial y^2)_{x=a, y=b} = 0$, $(\partial^2 \zeta^I / \partial y^2)_{x=a, y=0} = 0$ ならば、 $A_n^{III} = 0$ となり、 ζ^{III} は自然に消滅して、計算の手數は著しく省略せられるであらう。

同様に若し $\zeta^I|_{x=a, y=b}=0, (\partial^2 \zeta^I / \partial x^2)|_{x=a, y=b}=0, (\partial^2 \zeta^I / \partial y^2)|_{x=a, y=b}=0$ ならば, $A_{II}^I=0$ となり, ζ^{IV} が消滅することとなる。

かくの如く ζ^{III} 及 ζ^{IV} を消滅せしめて計算の手数を省くため, 吾々は今 ζ^I に ζ^{II} なる補助解式を加へやう。勿論, この補助解式 ζ^{II} は, 方程式 (2) を満足するを要し, 且 $x=0, y=0$ に對して自ら消滅すると同時に $\partial^4 \zeta^{II} / \partial x^4 = \partial^4 \zeta^{II} / \partial y^4 = 0$ となり, 更に所期の目的を達するために, 次の條件を満足しなければならない。

$$\left. \begin{aligned} (\zeta^I + \zeta^{II})|_{x=a, y=b} &= 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\zeta^I + \zeta^{II})|_{x=a, y=b} &= 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\zeta^I + \zeta^{II})|_{x=a, y=0} &= 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\zeta^I + \zeta^{II})|_{x=0, y=b} &= 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\zeta^I + \zeta^{II})|_{x=0, y=0} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

かくの如き補助解式は,

$$\zeta^{II} = -C \left\{ c_1 \frac{xy}{a^2} + \frac{x(x-a)}{a^2} \left(c_2 \frac{y}{a} + c_3 \frac{xy}{a^2} \right) + \frac{y(y-b)}{a^2} \left(c_4 \frac{x}{a} + c_5 \frac{xy}{a^2} \right) \right\}$$

とおきてこの中に含まるゝ c_1, c_2, \dots, c_5 なる 5 個の定數を上記 (5) 式の條件を満足するやうに定めることによつて得られる。かくて上式中の定數の値は次の如くなる。

$$\begin{aligned} c_1 &= c_2 = \varphi(t_1 + t_2 + t_3)/a, & c_3 &= \varphi(t_2 - t_1)/a, \\ c_4 &= (t_1 + t_2 + t_3)/a, & c_5 &= (t_3 - t_1)/a\varphi. \end{aligned}$$

$$(\varphi = b/a)$$

従て

$$\begin{aligned} \zeta^I + \zeta^{II} &= C \frac{1}{a^5} xy(y-b) \left\{ x \left(\frac{t_2 - t_1}{a} x + \frac{t_3 - t_1}{b} y + 2t_1 + t_3 \right) \right. \\ &\quad \left. - a \left(\frac{t_3 - t_1}{b} y + t_1 + t_2 + t_3 \right) \right\} \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

これ即ち, 任意の静水壓の作用を受け, 四邊に於て支持せらるゝ矩形平板に對する, 最も便利なる, 一般的基本解式である。

特別の場合として

1. $t_1 = t_2$ ならば [第一圖 (イ)]

$$\xi^I + \xi^{II} = C\alpha^{-5}x(x-a)y'y-b[y(t_3-t_1)b^{-1}+2t_1+t_2] \dots\dots\dots(7)$$

2. $t_1=t_2, t_3-t_1=b$ ならは [第一圖 (口)]

$$\xi^I + \xi^{II} = C\alpha^{-5}x(x-a)y(y-b)(y+2t_1+t_2), \dots\dots\dots(8)$$

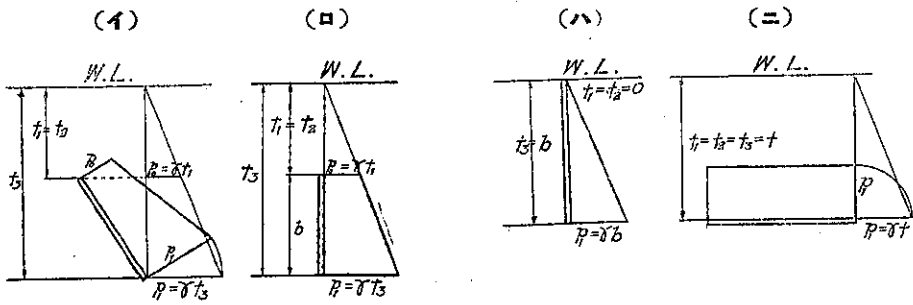
3. $t_1=t_2=0, t_3-t_1=t_3=b$ ならは [第一圖 (ハ)]

$$\xi^I + \xi^{II} = C\alpha^{-5}x(x-a)y(y^2-b^2), \dots\dots\dots(9)$$

4. $t_1=t_2=t_3=t$, 即ち一様なる静水壓の作用を受くる場合は [第一圖 (ニ)]

$$\xi^I + \xi^{II} = C3t\alpha^{-5}x(x-a)y(y-b). \dots\dots\dots(10)$$

第 一 圖



次に第二の條件、即ち周邊に於ける板の曲りの消滅することが ξ^V 及 ξ^{VI} 中の定數 $A_n^V, B_n^V, A_n^{VI}, B_n^{VI}$ を決定する。吾々は今、計算を簡易ならしむるため、 ξ^V 及 ξ^{VI} を次の如く書きかへておく。

$$\xi^V = -C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n\pi/\varphi)\text{Sin}^2(n\pi/\varphi)} \left[\frac{A_n^V}{2} \left\{ \frac{x}{a} \text{Coj} \frac{n\pi}{\varphi} \text{Sin} \frac{n\pi}{b} (x-a) - \frac{x-a}{a} \text{Sin} \frac{n\pi}{b} x \right\} + \frac{B_n^V}{2} \left\{ \frac{x-a}{a} \text{Coj} \frac{n\pi}{\varphi} \text{Sin} \frac{n\pi}{b} x - \frac{x}{a} \text{Sin} \frac{n\pi}{b} (x-a) \right\} \right] \text{sin} \frac{n\pi}{b} y \dots\dots\dots(11)$$

$$\xi^{VI} = -C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n\pi/\varphi)\text{Sin}^2 n\pi\varphi} \left[\frac{A_n^{VI}}{2} \left\{ \frac{y}{b} \text{Coj} n\pi\varphi \text{Sin} \frac{n\pi}{a} (y-b) - \frac{y-b}{b} \text{Sin} \frac{n\pi}{a} y \right\} + \frac{B_n^{VI}}{2} \left\{ \frac{y-b}{b} \text{Coj} n\pi\varphi \text{Sin} \frac{n\pi}{a} y - \frac{y}{b} \text{Sin} \frac{n\pi}{a} (y-b) \right\} \right] \text{sin} \frac{n\pi}{a} x \dots\dots\dots(12)$$

何れも前に示したる式の係數を書きかへたものである。又以下の計算に必要なゆへ、 ξ^V の x に関する微分係數を下に求めておく、 ξ^{VI} の y に関する微分係數は、單に次式中の文字の取換によつて、容易に與へられる。

$$\frac{\partial \xi^V}{\partial x} = -C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n\pi/\varphi)\text{Sin}^2(n\pi/\varphi)} \left[\frac{1}{2} A_n^V \left\{ \frac{1}{a} \text{Coj} \frac{n\pi}{\varphi} \text{Sin} \frac{n\pi}{b} (x-a) - \frac{1}{a} \text{Sin} \frac{n\pi}{b} x \right\} + \frac{1}{2} B_n^V \left\{ \frac{1}{a} \text{Coj} \frac{n\pi}{\varphi} \text{Sin} \frac{n\pi}{b} x - \frac{1}{a} \text{Sin} \frac{n\pi}{b} (x-a) \right\} \right] \text{sin} \frac{n\pi}{b} y$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{n\pi x}{ba} \operatorname{Cof} \frac{n\pi}{\varphi} \operatorname{Cof} \frac{n\pi}{b}(x-a) - \frac{1}{a} \operatorname{Sin} \frac{n\pi}{b} x \\
& - \frac{n\pi}{b} \frac{x-a}{a} \operatorname{Cof} \frac{n\pi}{b} x \left. \right\} + \frac{1}{2} B_n^v \left\{ \frac{1}{a} \operatorname{Cof} \frac{n\pi}{\varphi} \operatorname{Sin} \frac{n\pi}{b} x \right. \\
& + \frac{n\pi}{b} \frac{x-a}{a} \operatorname{Cof} \frac{n\pi}{\varphi} \operatorname{Cof} \frac{n\pi}{b} x - \frac{1}{a} \operatorname{Sin} \frac{n\pi}{b} (x-a) \\
& \left. - \frac{n\pi}{b} \frac{x}{a} \operatorname{Cof} \frac{n\pi}{b} (x-a) \right\} \left. \right] \operatorname{Sin} \frac{n\pi}{b} y \\
\frac{\partial^2 \zeta^v}{\partial x^2} = & -C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi/b}{(n\pi/\varphi) \operatorname{Sin}^2(n\pi/\varphi)} \left[\frac{1}{2} A_n^v \left\{ \frac{2}{a} \operatorname{Cof} \frac{n\pi}{\varphi} \operatorname{Cof} \frac{n\pi}{b}(x-a) \right. \right. \\
& + \frac{n\pi}{b} \frac{x}{a} \operatorname{Cof} \frac{n\pi}{\varphi} \operatorname{Sin} \frac{n\pi}{b}(x-a) - \frac{2}{a} \operatorname{Cof} \frac{n\pi}{b} x \\
& \left. - \frac{n\pi}{b} \frac{x-a}{a} \operatorname{Sin} \frac{n\pi}{b} x \right\} + \frac{1}{2} B_n^v \left\{ \frac{2}{a} \operatorname{Cof} \frac{n\pi}{\varphi} \operatorname{Cof} \frac{n\pi}{b} x \right. \\
& + \frac{n\pi}{b} \frac{x-a}{a} \operatorname{Cof} \frac{n\pi}{\varphi} \operatorname{Sin} \frac{n\pi}{b} x - \frac{2}{a} \operatorname{Cof} \frac{n\pi}{b} (x-a) \\
& \left. \left. - \frac{n\pi}{b} \frac{x}{a} \operatorname{Sin} \frac{n\pi}{b} (x-a) \right\} \right] \operatorname{Sin} \frac{n\pi}{b} y \\
\frac{\partial^3 \zeta^v}{\partial x^3} = & -C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n\pi/b)^2}{(n\pi/\varphi) \operatorname{Sin}^2(n\pi/\varphi)} \left[\frac{1}{2} A_n^v \left\{ \frac{3}{a} \operatorname{Cof} \frac{n\pi}{\varphi} \operatorname{Sin} \frac{n\pi}{b}(x-a) \right. \right. \\
& + \frac{n\pi}{b} \frac{x}{a} \operatorname{Cof} \frac{n\pi}{\varphi} \operatorname{Cof} \frac{n\pi}{b}(x-a) \\
& \left. - \frac{3}{a} \operatorname{Sin} \frac{n\pi}{b} x - \frac{n\pi}{b} \frac{x-a}{a} \operatorname{Cof} \frac{n\pi}{b} x \right\} \\
& + \frac{1}{2} B_n^v \left\{ \frac{3}{a} \operatorname{Cof} \frac{n\pi}{\varphi} \operatorname{Sin} \frac{n\pi}{b} x + \frac{n\pi}{b} \frac{x-a}{a} \operatorname{Cof} \frac{n\pi}{\varphi} \operatorname{Cof} \frac{n\pi}{b} x \right. \\
& \left. \left. - \frac{3}{a} \operatorname{Sin} \frac{n\pi}{b} (x-a) - \frac{n\pi}{b} \frac{x}{a} \operatorname{Cof} \frac{n\pi}{b} (x-a) \right\} \right] \operatorname{Sin} \frac{n\pi}{b} y
\end{aligned}$$

尙基本解式 (6) の微分係数を求むれば

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} (\zeta^r + \zeta^v) = & C \frac{1}{a^5} y(y-b) \left\{ x \left(3 \frac{t_2 - t_1}{a} x + 2 \frac{t_3 - t_1}{b} y + 4t_2 + 2t_3 \right) \right. \\
& \left. - a \left(\frac{t_3 - t_1}{b} y + t_1 + t_2 + t_3 \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}(\zeta^I + \zeta^{II}) &= C \frac{1}{a^3} x \left[(2y-b) \left\{ x \left(\frac{t_2-t_1}{a} x + \frac{t_3-t_1}{b} y + 2t_1 + t_3 \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - a \left(\frac{t_3-t_1}{b} y + t_1 + t_2 + t_3 \right) \right\} + y(y-b)(x-a) \frac{t_3-t_1}{b} \right] \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\zeta^I + \zeta^{II}) &= C \frac{2}{a^3} y(y-b) \left\{ 3 \frac{t_2-t_1}{a} x + \frac{t_3-t_1}{b} y + 2t_1 + t_3 \right\} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\zeta^I + \zeta^{II}) &= C \frac{2}{a^3} \left[x \left\{ x \left(\frac{t_2-t_1}{a} x + \frac{t_3-t_1}{b} y + 2t_1 + t_3 \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - a \left(\frac{t_3-t_1}{b} y + t_1 + t_2 + t_3 \right) \right\} + x(x-a)(2y-b) \frac{t_3-t_1}{b} \right] \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\zeta^I + \zeta^{II}) &= C \frac{1}{a^3} \left[(2y-b) \left\{ x \left(3 \frac{t_2-t_1}{a} x + 2 \frac{t_3-t_1}{b} y + 4t_1 + 2t_3 \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - a \left(\frac{t_3-t_1}{b} y + t_1 + t_2 + t_3 \right) \right\} + y(y-b)(2x-a) \frac{t_3-t_1}{b} \right] \\ \frac{\partial^3}{\partial x^3}(\zeta^I + \zeta^{II}) &= C \frac{6}{a^3} y(y-b) \frac{t_2-t_1}{a} \\ \frac{\partial^3}{\partial y^3}(\zeta^I + \zeta^{II}) &= C \frac{6}{a^3} x(x-a) \frac{t_3-t_1}{b} \\ \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y}(\zeta^I + \zeta^{II}) &= C \frac{2}{a^3} \left\{ (2y-b) \left(3 \frac{t_2-t_1}{a} x + \frac{t_3-t_1}{b} y + 2t_1 + t_3 \right) \right. \\ &\quad \left. + y(y-b) \frac{t_3-t_1}{b} \right\} \\ \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2}(\zeta^I + \zeta^{II}) &= C \frac{2}{a^3} \left\{ x \left(3 \frac{t_2-t_1}{a} x + 2 \frac{t_3-t_1}{b} y + 4t_1 + 2t_3 \right) \right. \\ &\quad \left. - a \left(\frac{t_3-t_1}{b} y + t_1 + t_2 + t_3 \right) + (2y-b)(2x-a) \frac{t_3-t_1}{b} \right\} \end{aligned}$$

今基本解式 (6) より板の周邊の曲りを求め、これを Fourier 級數に展開すれば、 $x=0$ に對しては

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\zeta^I + \zeta^{II})_{x=0} = C \frac{1}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{24}{n^3 \pi^3} \frac{\rho^2}{a} (t_3 \cos n\pi - t_1) \right\} \sin \frac{n\pi}{b} y$$

然るに補助解式 (11), (12) は次の如き曲りを與へる

$$\left\{ \frac{\partial^2 \zeta^V}{\partial x^2} \right\}_{x=0} = -C \frac{1}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^V \sin \frac{n\pi}{b} y$$

$$\left\{ \frac{\partial^2 \zeta^{VI}}{\partial x^2} \right\}_{x=0} = 0$$

故に $x=0$ に於て板の曲りが消滅するためには

$$A_n^V = 24(n\pi)^{-3} \varphi^2 a^{-1} (t_3 \cos n\pi - t_1) \dots \dots \dots (13a)$$

同様にして他の邊に於ける板の曲りの消滅する條件より

$$\left. \begin{aligned} B_n^V &= -24(n\pi)^{-3} \varphi^2 a^{-1} \{ (t_1 - t_2 - t_3) \cos n\pi + t_2 \} \\ A_n^{VI} &= 24(n\pi)^{-3} a^{-1} (t_2 \cos n\pi - t_1) \\ B_n^{VI} &= -24(n\pi)^{-3} a^{-1} \{ (t_1 - t_2 - t_3) \cos n\pi + t_3 \} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13b)$$

特別の場合として

1. $t_2 = t_1$ ならは [第一圖(イ)]

$$A_n^V = B_n^V = 24(n\pi)^{-3} \varphi^2 a^{-1} [t_3 \cos n\pi - t_1]$$

$$A_n^{VI} = 24(n\pi)^{-3} a^{-1} [t_1 (\cos n\pi - 1)]$$

$$B_n^{VI} = 24(n\pi)^{-3} a^{-1} [t_3 (\cos n\pi - 1)],$$

2. $t_1 = t_2, t_3 - t_1 = b$ ならは [第一圖(ロ)]

$$A_n^V = B_n^V = 24(n\pi)^{-3} \varphi^2 a^{-1} [t_1 (\cos n\pi - 1) + b \cos n\pi]$$

$$A_n^{VI} = 24(n\pi)^{-3} t_1 a^{-1} (\cos n\pi - 1)$$

$$B_n^{VI} = 24(n\pi)^{-3} (t_1 + b) a^{-1} (\cos n\pi - 1),$$

3. $t_1 = t_2 = 0, t_3 - t_1 = t_3 = b$ ならは [第一圖(ハ)]

$$A_n^V = B_n^V = 24(n\pi)^{-3} \varphi^2 \cos n\pi$$

$$A_n^{VI} = 0$$

$$B_n^{VI} = 24(n\pi)^{-3} \varphi (\cos n\pi - 1),$$

4. $t_1 = t_2 = t_3 = t$, 則ち一様なる静水壓の作用を受くる場合は [第一圖(ニ)]

$$A_n^V = B_n^V = 24(n\pi)^{-3} \varphi^2 t a^{-1} (\cos n\pi - 1)$$

$$A_n^{VI} = B_n^{VI} = 24(n\pi)^{-3} t a^{-1} (\cos n\pi - 1)$$

かくて總ての解式に於ける總ての定数は決定せられた。依て吾々は次の諸公式を用ひて板の應力を計算することが出来る。

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -\frac{m^2 E}{m^2 - 1} \frac{h^3}{12} \left\{ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{1}{m} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right\} \\ M_y &= -\frac{m^2 E}{m^2 - 1} \frac{h^3}{12} \left\{ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \frac{1}{m} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right\} \\ M_\alpha &= \frac{M_x + M_y}{2} + \frac{M_x - M_y}{2} \cos 2\alpha + D \sin 2\alpha \\ V_x &= -\frac{m^2 E}{m^2 - 1} \frac{h^3}{12} \left\{ \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x \partial y^2} \right\} \\ V_y &= -\frac{m^2 E}{m^2 - 1} \frac{h^3}{12} \left\{ \frac{\partial^3 \zeta}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^2 \partial y} \right\} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (14)$$

$$V_x = V_x \cos \alpha + V_y \sin \alpha$$

$$D = - \frac{mE}{m+1} \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y}$$

ここに、 M は彎曲力率、 V は鉛直剪力を示し、これらに附加されたる x, y は、それぞれこれらの内力の考へらるゝ断面が x, y 軸の方向に垂直なるを示し、 α はその断面の垂線が x 軸となす角を表はす。 D は水平應剪力より起る剪斷力率 (Scherungsmoment 或は Drillungsmoment) を表はす。

板の各の断面に於ては、水平應剪力 (これは板の中央面の上下に於て反對の方向に向ふ) のために、常に上記の D なる剪斷力率が生ずる。然るに板の周界側面に至れば、水平應剪力の生ずることが、そこにて申絶する。その結果、剪斷力率の作用によつて、板の四隅は上方に隆起を起すこととなり、最初に與へたる條件「板の周邊は荷重の作用を受くるも常に撓みを生ぜず」と矛盾するであらう。この矛盾を除き、與へられたる條件に適合せしむるため、吾々は、何等かの方法によつて、板の四隅を抑へつけその隆起を防止しなければならない。かくて四隅の隆起を防止した結果、板の周邊はその支持物に對し、(14) の V に相當する支力の外、更に壓力を加ふる事となる。

而して板の四隅を抑へつける力 \mathcal{E} は

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_{\substack{x=0 \\ y=0}} &= + \frac{mE}{m+1} \frac{h^3}{6} \left\{ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right\}_{\substack{x=0 \\ y=0}} \\ \mathcal{E}_{\substack{x=a \\ y=0}} &= - \frac{mE}{m+1} \frac{h^3}{6} \left\{ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right\}_{\substack{x=a \\ y=0}} \\ \mathcal{E}_{\substack{x=0 \\ y=b}} &= - \frac{mE}{m+1} \frac{h^3}{6} \left\{ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right\}_{\substack{x=0 \\ y=b}} \\ \mathcal{E}_{\substack{x=a \\ y=b}} &= + \frac{mE}{m+1} \frac{h^3}{6} \left\{ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right\}_{\substack{x=a \\ y=b}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (15)$$

によつて與へられ、この結果生ずる附加支壓力は次の式より求められる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial x} &= \pm \frac{mE}{m+1} \frac{h^3}{12} \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^2 \partial y} && + \text{は } y=0 \text{ の場合, } - \text{は } y=b \text{ の場合} \\ \frac{\partial D}{\partial y} &= \pm \frac{mE}{m+1} \frac{h^3}{12} \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x \partial y^2} && + \text{は } x=0 \text{ の場合, } - \text{は } x=a \text{ の場合} \end{aligned} \right\} \dots (16)$$

第二節 板が四邊に於て完全に固定せらるゝ場合

この場合板の周圍の條件は

1. $x=0, x=a$ に於て $\zeta=0, \partial\zeta/\partial x=0$
2. $y=0, y=b$ に於て $\zeta=0, \partial\zeta/\partial y=0$

にして、前節に求めたる基本解式(6)はそのまゝここにも役立つ。

第二の條件、即ち周邊に於て板の傾きが消滅することを満足せしめんがために、吾々は次の補助解式を用ひる。

$$\begin{aligned} \zeta^r = -C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\pi^2/\varphi^2 - \sin^2(n\pi/\varphi)} & \left[A_n^r \left\{ \frac{x}{a} \sin \frac{n\pi}{\varphi} \sin \frac{n\pi}{b} (x-a) \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{n\pi}{\varphi} \frac{x-a}{a} \sin \frac{n\pi}{b} x \right\} - B_n^r \left\{ \frac{x-a}{a} \sin \frac{n\pi}{\varphi} \sin \frac{n\pi}{b} x \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{n\pi}{\varphi} \frac{x}{a} \sin \frac{n\pi}{b} (x-a) \right\} \right] \sin \frac{n\pi}{b} y \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta^{rI} = -C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\pi^2\varphi^2 - \sin^2 n\pi\varphi} & \left[A_n^{rI} \left\{ \frac{y}{b} \sin n\pi\varphi \sin \frac{n\pi}{a} (y-b) \right. \right. \\ & \left. \left. - n\pi\varphi \frac{y-b}{b} \sin \frac{n\pi}{a} y \right\} - B_n^{rI} \left\{ \frac{y-b}{b} \sin n\pi\varphi \sin \frac{n\pi}{a} y \right. \right. \\ & \left. \left. - n\pi\varphi \frac{y}{b} \sin \frac{n\pi}{a} (y-b) \right\} \right] \sin \frac{n\pi}{a} x \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

これらの式は前節の補助解式に於て、ただ係數を變へたに過ぎない。(17) 式の x に関する微分係數は

$$\begin{aligned} \frac{\partial\zeta^r}{\partial x} = -C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\pi^2/\varphi^2 - \sin^2(n\pi/\varphi)} & \left[A_n^r \left\{ \frac{1}{a} \sin \frac{n\pi}{\varphi} \sin \frac{n\pi}{b} (x-a) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{n\pi}{b} \frac{x}{a} \sin \frac{n\pi}{\varphi} \cos \frac{n\pi}{b} (x-a) - \frac{n\pi}{\varphi} \frac{1}{a} \sin \frac{n\pi}{b} x \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{n\pi}{\varphi} \frac{n\pi}{b} \frac{x-a}{a} \cos \frac{n\pi}{b} x \right\} - B_n^r \left\{ \frac{1}{a} \sin \frac{n\pi}{\varphi} \sin \frac{n\pi}{b} x \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{n\pi}{b} \frac{x-a}{a} \sin \frac{n\pi}{\varphi} \cos \frac{n\pi}{b} x - \frac{n\pi}{\varphi} \frac{1}{a} \sin \frac{n\pi}{b} (x-a) \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{n\pi}{b} \frac{n\pi}{\varphi} \frac{x}{a} \cos \frac{n\pi}{b} (x-a) \right\} \right] \sin \frac{n\pi}{b} y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\zeta^r}{\partial x^2} = -C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi/b}{n^2\pi^2/\varphi^2 - \sin^2(n\pi/\varphi)} & \left[A_n^r \left\{ \frac{2}{a} \sin \frac{n\pi}{\varphi} \cos \frac{n\pi}{b} (x-a) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{n\pi}{b} \frac{x}{a} \sin \frac{n\pi}{\varphi} \sin \frac{n\pi}{b} (x-a) - \frac{2}{a} \frac{n\pi}{\varphi} \cos \frac{n\pi}{b} x \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{n\pi}{\varphi} \frac{n\pi}{b} \frac{x-a}{a} \sin \frac{n\pi}{b} x \right\} - B_n^r \left\{ \frac{2}{a} \sin \frac{n\pi}{\varphi} \cos \frac{n\pi}{b} x \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{n\pi}{b} \frac{x-a}{a} \sin \frac{n\pi}{\varphi} \sin \frac{n\pi}{b} (x-a) - \frac{2}{a} \frac{n\pi}{\varphi} \cos \frac{n\pi}{b} (x-a) \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{n\pi}{\varphi} \frac{n\pi}{b} \frac{x}{a} \sin \frac{n\pi}{b} (x-a) \right\} \right] \sin \frac{n\pi}{b} y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{n\pi}{\varphi} \frac{n\pi}{b} \frac{x-a}{a} \left\{ \operatorname{Si}\left(\frac{n\pi}{b}x\right) - B_n^V \left\{ \frac{2}{a} \operatorname{Si}\frac{n\pi}{\varphi} \operatorname{Co}\left[\frac{n\pi}{b}x\right] \right. \right. \\
 & + \frac{n\pi}{b} \frac{x-a}{a} \operatorname{Si}\frac{n\pi}{\varphi} \operatorname{Si}\frac{n\pi}{b}x - \frac{n\pi}{\varphi} \frac{2}{a} \operatorname{Co}\left[\frac{n\pi}{b}(x-a)\right] \\
 & \left. \left. - \frac{n\pi}{b} \frac{n\pi}{\varphi} \frac{x}{a} \operatorname{Si}\frac{n\pi}{b}(x-a) \right\} \right\} \sin\frac{n\pi}{b}y \\
 \frac{\partial^3 \zeta^V}{\partial x^3} = & -C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \pi^2 / b^2}{n^2 \pi^2 / \varphi^2 - \operatorname{Si}^2(n\pi/\varphi)} \left[A_n^V \left\{ \frac{3}{a} \operatorname{Si}\frac{n\pi}{\varphi} \operatorname{Si}\frac{n\pi}{b}(x-a) \right. \right. \\
 & + \frac{n\pi}{b} \frac{x}{a} \operatorname{Si}\frac{n\pi}{\varphi} \operatorname{Co}\left[\frac{n\pi}{b}(x-a)\right] - \frac{3}{a} \frac{n\pi}{\varphi} \operatorname{Si}\frac{n\pi}{b}x \\
 & - \frac{n\pi}{\varphi} \frac{n\pi}{b} \frac{x-a}{a} \operatorname{Co}\left[\frac{n\pi}{b}x\right] - B_n^V \left\{ \frac{3}{a} \operatorname{Si}\frac{n\pi}{\varphi} \operatorname{Si}\frac{n\pi}{b}x \right. \\
 & + \frac{n\pi}{b} \frac{x-a}{a} \operatorname{Si}\frac{n\pi}{\varphi} \operatorname{Co}\left[\frac{n\pi}{b}x - \frac{n\pi}{\varphi} \frac{3}{a} \operatorname{Si}\frac{n\pi}{b}(x-a) \right. \\
 & \left. \left. - \frac{n\pi}{b} \frac{n\pi}{\varphi} \frac{x}{a} \operatorname{Co}\left[\frac{n\pi}{b}(x-a)\right] \right\} \right] \sin\frac{n\pi}{b}y
 \end{aligned}$$

(18) 式の y に関する微分係数は、上式中單なる文字の取換により、無雜作に與へられる。

今 $x=a$ に對し基本解式 (6) が與ふる板の周邊の傾きを求め、これを Fourier 級數に展開すれば

$$\frac{\partial}{\partial x} (\zeta^I + \zeta^{II})_{x=a} = C \frac{1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} T_n^I \sin \frac{n\pi}{b} y$$

而してこの式の T_n^I は次の如く定められる。

$$\begin{aligned}
 T_n^I = & \frac{2}{b} \frac{a}{C} \int_0^b \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\zeta^I + \zeta^{II}) \right\}_{x=a} \sin \frac{n\pi}{b} y dy \\
 = & 4(n\pi)^{-3} \varphi^2 a^{-1} \{ (t_1 - t_2 - 3t_3) \cos n\pi + 2t_1 + t_2 \} \dots \dots (19a)
 \end{aligned}$$

又補助解式 ζ^V 及 ζ^{VI} は、周邊 $x=0$ に於て、次の如き板の傾きを與へる。

$$\begin{aligned}
 \left\{ \frac{\partial \zeta^V}{\partial x} \right\}_{x=0} = & -C \frac{1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^V \sin \frac{n\pi}{b} y \\
 \left\{ \frac{\partial \zeta^{VI}}{\partial x} \right\}_{x=0} = & -C \frac{1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\rho=1}^{\infty} \frac{4\rho^2 n \varphi}{\pi (\rho^2 \varphi^2 + n^2)^2 (\rho^2 \pi^2 \varphi^2 - \operatorname{Si}^2 \rho \pi \varphi)} \\
 & \times \left\{ (\cos n\pi - \operatorname{Co}\left[\rho \pi \varphi\right]) (A_\rho^{VI} \operatorname{Si}\rho \pi \varphi + B_\rho^{VI} \rho \pi \varphi) \right.
 \end{aligned}$$

$$+(1 - \cos n\pi \cos \rho\pi\varphi)(A_{\rho}^{VI} \rho\pi\varphi + B_{\rho}^{VI} \sin \rho\pi\varphi) \left\} \sin \frac{n\pi}{b} y$$

故に $x=0$ に於ける板の傾きが消滅するためには

$$A_n^V + \sum_{\rho=1}^{\infty} \frac{4\rho^2 n\varphi}{\pi(\rho^2\varphi^2 + n^2)^2(\rho^2\pi^2\varphi^2 - \sin^2\rho\pi\varphi)} \left\{ (\cos n\pi - \cos \rho\pi\varphi)(A_{\rho}^{VI} \sin \rho\pi\varphi + B_{\rho}^{VI} \rho\pi\varphi) + (1 - \cos n\pi \cos \rho\pi\varphi)(A_{\rho}^{VI} \rho\pi\varphi + B_{\rho}^{VI} \sin \rho\pi\varphi) \right\} = T_n^I \dots (20)$$

同様に、他の周邊に於ける条件より、次の諸式が導かれる。

$$B_n^V + \sum_{\rho=1}^{\infty} \frac{4\rho^2 n\varphi \cos \rho\pi}{\pi(\rho^2\varphi^2 + n^2)^2(\rho^2\pi^2\varphi^2 - \sin^2\rho\pi\varphi)} \left\{ (\cos n\pi - \cos \rho\pi\varphi)(A_{\rho}^{VI} \sin \rho\pi\varphi + B_{\rho}^{VI} \rho\pi\varphi) + (1 - \cos n\pi \cos \rho\pi\varphi)(A_{\rho}^{VI} \rho\pi\varphi + B_{\rho}^{VI} \sin \rho\pi\varphi) \right\} = T_n^{II} \dots (21)$$

$$A_n^{VI} + \sum_{\rho=1}^{\infty} \frac{4\rho^2 n\varphi^3}{\pi(\rho^2 + n^2\varphi^2)^2 \{ \rho^2\pi^2/\varphi^2 - \sin^2(\rho\pi/\varphi) \}} \left\{ (\cos n\pi - \cos \frac{\rho\pi}{\varphi}) \left(A_{\rho}^V \sin \frac{\rho\pi}{\varphi} + B_{\rho}^V \frac{\rho\pi}{\varphi} \right) + \left(1 - \cos n\pi \cos \frac{\rho\pi}{\varphi} \right) \left(A_{\rho}^V \frac{\rho\pi}{\varphi} + B_{\rho}^V \sin \frac{\rho\pi}{\varphi} \right) \right\} = \varphi T_n^{III} \dots (22)$$

$$B_n^{VI} + \sum_{\rho=1}^{\infty} \frac{4\rho^2 n\varphi^3 \cos \rho\pi}{\pi(\rho^2 + n^2\varphi^2)^2 \{ \rho^2\pi^2/\varphi^2 - \sin^2(\rho\pi/\varphi) \}} \left\{ (\cos n\pi - \cos \frac{\rho\pi}{\varphi}) \left(A_{\rho}^V \sin \frac{\rho\pi}{\varphi} + B_{\rho}^V \frac{\rho\pi}{\varphi} \right) + \left(1 - \cos n\pi \cos \frac{\rho\pi}{\varphi} \right) \left(A_{\rho}^V \frac{\rho\pi}{\varphi} + B_{\rho}^V \sin \frac{\rho\pi}{\varphi} \right) \right\} = \varphi T_n^{IV} \dots (23)$$

但し

$$\left. \begin{aligned} T_n^{III} &= 4(n\pi)^{-3} \varphi^2 a^{-1} \{ (-2t_1 + 2t_2 + 3t_3) \cos n\pi - t_1 - 2t_2 \} \\ T_n^{III} &= 4(n\pi)^{-3} \varphi a^{-1} \{ (t_1 + 3t_2 - t_3) \cos n\pi + 2t_1 + t_3 \} \\ T_n^{IV} &= 4(n\pi)^{-3} \varphi a^{-1} \{ (-2t_1 + 3t_2 + 2t_3) \cos n\pi - t_1 - 2t_2 \} \end{aligned} \right\} \dots (19b)$$

特別の場合として

1. $t_2 = t_1$ ならば [第一圖(4)]

$$T_n^I = -T_n^{II} = 12(n\pi)^{-3} \varphi^2 a^{-1} t_1 (1 - \cos n\pi)$$

- $$T_n^{III} = 4(n\pi)^{-3}\varphi\alpha^{-1}(2t_1 + t_3)(1 - \cos n\pi)$$
- $$T_n^{IV} = 4(n\pi)^{-3}\varphi\alpha^{-1}(t_1 + 2t_3)(\cos n\pi - 1),$$
2. $t_2 = t_1, t_3 - t_1 = b$ ならん [第一圖(□)]
- $$T_n^I = -T_n^{II} = 12(n\pi)^{-3}\varphi^2\alpha^{-1}t_1(1 - \cos n\pi)$$
- $$T_n^{III} = 4(n\pi)^{-3}\varphi\alpha^{-1}(b + 3t_1)(1 - \cos n\pi)$$
- $$T_n^{IV} = 4(n\pi)^{-3}\varphi\alpha^{-1}(2b + 3t_1)(\cos n\pi - 1),$$
3. $t_1 = t_2 = 0, t_3 - t_1 = t_3 = b$ ならん [第一圖(△)]
- $$T_n^I = -T_n^{II} = -12(n\pi)^{-3}\varphi^3 \cos n\pi$$
- $$T_n^{III} = -\frac{1}{2}T_n^{IV} = 4(n\pi)^{-3}\varphi^2(1 - \cos n\pi),$$
4. $t_1 = t_2 = t_3 = 1$, 即ち一様なる静水壓の作用を受くる場合は [第一圖(二)]
- $$T_n^I = -T_n^{II} = 12(n\pi)^{-3}\varphi^2\alpha^{-1}(1 - \cos n\pi)$$
- $$T_n^{III} = -T_n^{IV} = 12(n\pi)^{-3}\alpha^{-1}(1 - \cos n\pi)$$

(20)乃至(23)の諸式に於て、便宜上、 n が奇數なる場合と偶數なる場合とを區別すれば

1. n が奇數なる場合

$$A_n^V + \sum_{\rho=1}^{\infty} \frac{4\rho^2 n \varphi}{\pi(\rho^2 \varphi^2 + n^2)^2 (\rho \pi \varphi + \text{Sin } \rho \pi \varphi)} (1 + \text{Cos } \rho \pi \varphi) (A_\rho^{VI} - B_\rho^{VI}) = T_n^I$$

.....(20_a)

$$B_n^V + \sum_{\rho=1}^{\infty} \frac{4\rho^2 n \varphi \cos \rho \pi}{\pi(\rho^2 \varphi^2 + n^2)^2 (\rho \pi \varphi + \text{Sin } \rho \pi \varphi)} (1 + \text{Cos } \rho \pi \varphi) (A_\rho^{VI} - B_\rho^{VI}) = T_n^{II}$$

.....(21_a)

$$A_n^{VI} + \sum_{\rho=1}^{\infty} \frac{4\rho^2 n \varphi^3}{\pi(\rho^2 + n^2 \varphi^2)^2 \{ \rho \pi | \varphi + \text{Sin } (\rho \pi | \varphi) \}} (1 + \text{Cos } \frac{\rho \pi}{\varphi}) (A_\rho^V - B_\rho^V)$$

$$= \varphi T_n^{III}$$

.....(22_a)

$$B_n^{VI} + \sum_{\rho=1}^{\infty} \frac{4\rho^2 n \varphi^3 \cos \rho \pi}{\pi(\rho^2 + n^2 \varphi^2)^2 \{ \rho \pi | \varphi + \text{Sin } (\rho \pi | \varphi) \}} (1 + \text{Cos } \frac{\rho \pi}{\varphi}) (A_\rho^V - B_\rho^V)$$

$$= \varphi T_n^{IV}$$

.....(23_a)

2. n が偶數なる場合

$$A_n^V + \sum_{\rho=1}^{\infty} \frac{4\rho^2 n \varphi}{\pi(\rho^2 \varphi^2 + n^2)^2 (\rho \pi \varphi - \text{Sin } \rho \pi \varphi)} (1 - \text{Cos } \rho \pi \varphi) (A_\rho^{VI} + B_\rho^{VI}) = T_n^I$$

.....(20_b)

$$B_n^V + \sum_{\rho=1}^{\infty} \frac{4\rho^2 n \varphi \cos \rho \pi}{\pi(\rho^2 \varphi^2 + n^2)^2 (\rho \pi \varphi - \text{Sin } \rho \pi \varphi)} (1 - \text{Cos } \rho \pi \varphi) (A_\rho^{VI} + B_\rho^{VI}) = T_n^{II}$$

.....(21_b)

$$A_n^{VI} + \sum_{\rho=1}^{\infty} \frac{4\rho^2 n \varphi^3}{\pi(\rho^2 + n^2 \varphi^2)^2 \{ \rho \pi | \varphi - \text{Sin}(\rho \pi | \varphi) \}} (1 - \text{Cos} \frac{\rho \pi}{\varphi}) (A_\rho^V + B_\rho^V) \\ = \varphi T_n^{III} \dots \dots \dots (22_b)$$

$$B_n^{VI} + \sum_{\rho=1}^{\infty} \frac{4\rho^2 n \varphi^3 \text{Cos} \rho \pi}{\pi(\rho^2 + n^2 \varphi^2)^2 \{ \rho \pi | \varphi - \text{Sin}(\rho \pi | \varphi) \}} (1 - \text{Cos} \frac{\rho \pi}{\varphi}) (A_\rho^V + B_\rho^V) \\ = \varphi T_n^{IV} \dots \dots \dots (23_b)$$

これらの聯立方程式より定めらるゝ $A_n^V, B_n^V, A_n^{VI}, B_n^{VI}$ の値は、板の周邊に於ける傾きが消滅するといふ條件を満足するものである。而して板の應力はこれらの値を用ひ (14) 式より計算せられる。

四邊が完全に固定せらるゝ板の場合には、板の周邊に於ける水平應剪力は自ら消滅する、故に前節に於ける如く板の四隅の隆起は起らない。従て板の四隅を抑へつける力の必要もなく、又附加支壓力も起らない。

尙計算を容易ならしむるため、上記の諸式を更に變形せしめおくを便とする。即ち上式に於て、 n を ρ と、 ρ を k と取りかへ、且それらを組合せることにより次の諸式が導かれる。

$$A_\rho^V - B_\rho^V = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k^2 \rho \varphi (1 - \text{Cos} k \pi)}{\pi(k^2 \varphi^2 + \rho^2)^2 (k \pi \varphi \pm \text{Sin} k \pi \varphi)} (1 \pm \text{Cos} k \pi \varphi) (A_k^{VI} \mp B_k^{VI}) \\ + T_\rho^I - T_\rho^{II}$$

$$A_\rho^V + B_\rho^V = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k^2 \rho \varphi (1 + \text{Cos} k \pi)}{\pi(k^2 \varphi^2 + \rho^2)^2 (k \pi \varphi \pm \text{Sin} k \pi \varphi)} (1 \pm \text{Cos} k \pi \varphi) (A_k^{VI} \mp B_k^{VI}) \\ + T_\rho^I + T_\rho^{II}$$

$$A_\rho^{VI} - B_\rho^{VI} = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k^2 \rho \varphi^3 (1 - \text{Cos} k \pi)}{\pi(k^2 + \rho^2 \varphi^2)^2 \{ k \pi | \varphi \pm \text{Sin}(k \pi | \varphi) \}} (1 \pm \text{Cos} \frac{k \pi}{\varphi}) (A_k^V \mp B_k^V) \\ + \varphi T_\rho^{III} - \varphi T_\rho^{IV}$$

$$A_\rho^{VI} + B_\rho^{VI} = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k^2 \rho \varphi^3 (1 + \text{Cos} k \pi)}{\pi(k^2 + \rho^2 \varphi^2)^2 \{ k \pi | \varphi \pm \text{Sin}(k \pi | \varphi) \}} (1 \pm \text{Cos} \frac{k \pi}{\varphi}) (A_k^V \mp B_k^V) \\ + \varphi T_\rho^{III} + \varphi T_\rho^{IV}$$

但し奇數の ρ に對しては上の符號を、偶數の ρ に對しては下の符號を用ひるものとする（このことは以下の諸式に於ても同様に適用される）。

これらの式を代入することにより、(20_a) 乃至 (23_a) 及 (20_b) 乃至 (23_b) の諸式は次の形となる。

1. n が奇數の場合

$$\begin{aligned}
 A_n^V &= \sum_{\rho=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4\rho^2 n \varphi}{\pi(\rho^2 \varphi^2 + n^2)^2} \frac{4k^2 \rho \varphi^3 (1 - \cos k\pi)}{\pi(k^2 + \rho^2 \varphi^2)^2} \frac{1 + \text{Co}\int \rho \pi \varphi}{\rho \pi \varphi + \text{Si}\int \rho \pi \varphi} \\
 &\quad \times \frac{1 \pm \text{Co}\int(k\pi/\varphi)}{k\pi|\varphi \pm \text{Si}\int(k\pi/\varphi)} (A_k^V \mp B_k^V) \\
 &= T_n^I - \sum_{\rho=1}^{\infty} \frac{4\rho^2 n \varphi^2}{\pi(\rho^2 \varphi^2 + n^2)^2} \frac{1 + \text{Co}\int \rho \pi \varphi}{\rho \pi \varphi + \text{Si}\int \rho \pi \varphi} (T_{\rho}^{III} - T_{\rho}^{IV}) \dots \dots \dots (24)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_n^V &= \sum_{\rho=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4\rho^2 n \varphi \cos \rho \pi}{\pi(\rho^2 \varphi^2 + n^2)^2} \frac{4k^2 \rho \varphi^3 (1 - \cos k\pi)}{\pi(k^2 + \rho^2 \varphi^2)^2} \frac{1 + \text{Co}\int \rho \pi \varphi}{\rho \pi \varphi + \text{Si}\int \rho \pi \varphi} \\
 &\quad \times \frac{1 \pm \text{Co}\int(k\pi/\varphi)}{k\pi|\varphi \pm \text{Si}\int(k\pi/\varphi)} (A_k^V \mp B_k^V) \\
 &= T_n^{II} - \sum_{\rho=1}^{\infty} \frac{4\rho^2 n \varphi^2 \cos \rho \pi}{\pi(\rho^2 \varphi^2 + n^2)^2} \frac{1 + \text{Co}\int \rho \pi \varphi}{\rho \pi \varphi + \text{Si}\int \rho \pi \varphi} (T_{\rho}^{III} - T_{\rho}^{IV}) \dots \dots (25)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_n^{VI} &= \sum_{\rho=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4\rho^2 n \varphi^3}{\pi(\rho^2 + n^2 \varphi^2)^2} \frac{4k^2 \rho \varphi (1 - \cos k\pi)}{\pi(k^2 \varphi^2 + \rho^2)^2} \frac{1 + \text{Co}\int(\rho \pi/\varphi)}{\rho \pi/\varphi + \text{Si}\int(\rho \pi/\varphi)} \\
 &\quad \times \frac{1 \pm \text{Co}\int k \pi \varphi}{k \pi \varphi \pm \text{Si}\int k \pi \varphi} (A_k^{VI} \mp B_k^{VI}) \\
 &= \varphi T_n^{III} - \sum_{\rho=1}^{\infty} \frac{4\rho^2 n \varphi^3}{\rho(\rho^2 + n^2 \varphi^2)^2} \frac{1 + \text{Co}\int(\rho \pi/\varphi)}{\rho \pi/\varphi + \text{Si}\int(\rho \pi/\varphi)} (T_{\rho}^I - T_{\rho}^{II}) \dots (26)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_n^{VI} &= \sum_{\rho=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4\rho^2 n \varphi^3 \cos \rho \pi}{\pi(\rho^2 + n^2 \varphi^2)^2} \frac{4k^2 \rho \varphi (1 - \cos k\pi)}{\pi(k^2 \varphi^2 + \rho^2)^2} \frac{1 + \text{Co}\int(\rho \pi/\varphi)}{\rho \pi/\varphi + \text{Si}\int(\rho \pi/\varphi)} \\
 &\quad \times \frac{1 \pm \text{Co}\int k \pi \varphi}{k \pi \varphi \pm \text{Si}\int k \pi \varphi} (A_k^{VI} \mp B_k^{VI}) \\
 &= \varphi T_n^{IV} - \sum_{\rho=1}^{\infty} \frac{4\rho^2 n \varphi^3 \cos \rho \pi}{\pi(\rho^2 + n^2 \varphi^2)^2} \frac{1 + \text{Co}\int(\rho \pi/\varphi)}{\rho \pi/\varphi + \text{Si}\int(\rho \pi/\varphi)} (T_{\rho}^I - T_{\rho}^{II}) \dots (27)
 \end{aligned}$$

2. n が偶數の場合

$$\begin{aligned}
 A_n^V &= \sum_{\rho=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4\rho^2 n \varphi}{\pi(\rho^2 \varphi^2 + n^2)^2} \frac{4k^2 \rho \varphi^3 (1 + \cos k\pi)}{\pi(k^2 + \rho^2 \varphi^2)^2} \frac{1 - \text{Co}\int \rho \pi \varphi}{\rho \pi \varphi - \text{Si}\int \rho \pi \varphi} \\
 &\quad \times \frac{1 \pm \text{Co}\int(k\pi/\varphi)}{k\pi|\varphi \pm \text{Si}\int(k\pi/\varphi)} (A_k^V \mp B_k^V) \\
 &= T_n^I - \sum_{\rho=1}^{\infty} \frac{4\rho^2 n \varphi^2}{\pi(\rho^2 \varphi^2 + n^2)^2} \frac{1 - \text{Co}\int \rho \pi \varphi}{\rho \pi \varphi - \text{Si}\int \rho \pi \varphi} (T_{\rho}^{III} + T_{\rho}^{IV}) \dots \dots \dots (28)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_n^V &= \sum_{\rho=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4\rho^2 n \varphi \cos \rho \pi}{\pi(\rho^2 \varphi^2 + n^2)^2} \frac{4k^2 \rho \varphi^3 (1 + \cos k\pi)}{\pi(k^2 \varphi^2 + \rho^2)^2} \frac{1 - \text{Co}i \rho \pi \varphi}{\rho \pi \varphi - \text{Si}n \rho \pi \varphi} \\
 &\quad \times \frac{1 \pm \text{Co}i(k\pi/\varphi)}{k\pi/\varphi \pm \text{Si}n(k\pi/\varphi)} (A_k^V \mp B_k^V) \\
 &= T_n^{II} - \sum_{\rho=1}^{\infty} \frac{4\rho^2 n \varphi^2 \cos \rho \pi}{\pi(\rho^2 \varphi^2 + n^2)^2} \frac{1 - \text{Co}i \rho \pi \varphi}{\rho \pi \varphi - \text{Si}n \rho \pi \varphi} (T_\rho^{III} + T_\rho^{IV}) \dots (29)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_n^{VI} &= \sum_{\rho=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4\rho^2 n \varphi^3}{\pi(\rho^2 + n^2 \varphi^2)^2} \frac{4k^2 \rho \varphi (1 + \cos k\pi)}{\pi(k^2 \varphi^2 + \rho^2)^2} \frac{1 - \text{Co}i(\rho\pi/\varphi)}{\rho\pi/\varphi - \text{Si}n(\rho\pi/\varphi)} \\
 &\quad \times \frac{1 \pm \text{Co}i k \pi \varphi}{k \pi \varphi \pm \text{Si}n k \pi \varphi} (A_k^{VI} \mp B_k^{VI}) \\
 &= \varphi T_n^{III} - \sum_{\rho=1}^{\infty} \frac{4\rho^2 n \varphi^3}{\pi(\rho^2 + n^2 \varphi^2)^2} \frac{1 - \text{Co}i(\rho\pi/\varphi)}{\rho\pi/\varphi - \text{Si}n(\rho\pi/\varphi)} (T_\rho^I + T_\rho^{II}) \dots (30)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_n^{VI} &= \sum_{\rho=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4\rho^2 n \varphi^3 \cos \rho \pi}{\pi(\rho^2 + n^2 \varphi^2)^2} \frac{4k^2 \rho \varphi (1 + \cos k\pi)}{\pi(k^2 \varphi^2 + \rho^2)^2} \frac{1 - \text{Co}i(\rho\pi/\varphi)}{\rho\pi/\varphi - \text{Si}n(\rho\pi/\varphi)} \\
 &\quad \times \frac{1 \pm \text{Co}i k \pi \varphi}{k \pi \varphi \pm \text{Si}n k \pi \varphi} (A_k^{VI} \mp B_k^{VI}) \\
 &= \varphi T_n^{IV} - \sum_{\rho=1}^{\infty} \frac{4\rho^2 n \varphi^3 \cos \rho \pi}{\pi(\rho^2 + n^2 \varphi^2)^2} \frac{1 - \text{Co}i(\rho\pi/\varphi)}{\rho\pi/\varphi - \text{Si}n(\rho\pi/\varphi)} (T_\rho^I + T_\rho^{II}) \dots (31)
 \end{aligned}$$

即ち (24), (25) 及 (28), (29) は A^V, B^V のみを含みて A^{VI}, B^{VI} を含まず, 反対に (26), (27) 及 (30), (31) は A^{VI}, B^{VI} のみを含みて A^V, B^V を含まない。故に聯立方程式の解法は著しく容易となるべきことが分る。

第三節 例一. 方形平面板が四邊に於て自由に支持せられ, 第二圖に示す如き一様ならざる静水壓の作用を受くる場合.

この場合 $a=b, \varphi=1, t_1=0, t_2=t_3=2^{-\frac{1}{2}}a.$

故に

$$\begin{aligned}
 \zeta^I + \zeta^{II} &= C 2^{-\frac{1}{2}} a^{-2} x y (y-a) \{ x(x+y) a^{-2} + (x-y) a^{-1} - 2 \} \\
 C &= 2^{\frac{1}{2}} p_1 a^4 / 48 N
 \end{aligned}$$

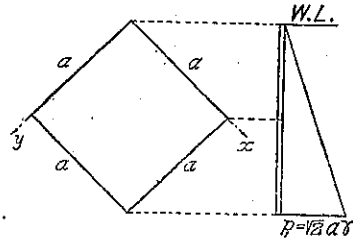
而して補助解式 (11) 及 (12) の定数は

$$\begin{aligned}
 A_n^V &= A_n^{VI} = 12 \cdot 2^{\frac{1}{2}} (n\pi)^{-3} \cos n\pi \\
 B_n^V &= B_n^{VI} = 12 \cdot 2^{\frac{1}{2}} (n\pi)^{-3} (2 \cos n\pi - 1)
 \end{aligned}$$

によつて與へらるゝゆへその値は、

n	$A_n^V = A_n^{VI}$	$B_n^V = B_n^{VI}$
1	-0.54733	-1.64198
2	0.06842	0.06842
3	-0.02027	-0.06061
4	0.00855	0.00855
5	-0.00438	-0.01313
6	0.00253	0.00253
7	-0.00160	-0.00479
8	0.00107	0.00107
9	-0.00075	-0.00225
10	0.00055	0.00055
11	-0.00041	-0.00123
12	0.00032	0.00032
..

第二圖



これらの数値を用ひ、且 $m=10/3$ として、(14), (15), (16) の諸式より計算したる結果は、附圖第一に示す通りである。

第四節 例二. 方形平板が四邊に於て完全に固定せられ、第三圖に示す如き静水壓の作用を受くる場合.

この場合基本解式は

$$\zeta^I + \zeta^{II} = Ca^{-5}x(x-a)y(y^2-a^2)$$

$$C = p_1 a^4 / 24N$$

而して補助解式 (17), (18) の定数を定むべき聯立方程式 (20) 乃至 (23) の右邊 T_n は

$$T_n^I = -T_n^{II} = -12(n\pi)^{-3} \cos n\pi$$

$$T_n^{III} = -\frac{1}{2}T_n^{IV} = -4(n\pi)^{-3}(\cos n\pi - 1)$$

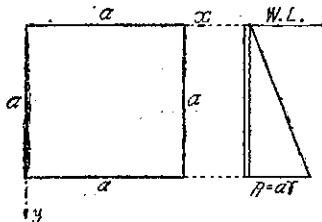
従て、これら T_n の間には

$$\text{總ての } n \text{ に對して, } T_n^I + T_n^{II} = 0$$

$$n \text{ が偶數なるとき, } T_n^{III} = T_n^{IV} = 0$$

なる關係あるがゆへに、 n が偶數なる場合の A_n^{VI} , B_n^{VI} を定むべき聯立方程式 (30), (31)

第三圖



の右邊は總て零となる。かくの如き同次一次方程式 (homogeneous linear equations) の解としては、一般的にいへば總ての根が零なるものと、然らざるものとがある。その内零ならざる根は、若しあつても、この場合採るべきではない。何となれば、荷重の分布及板の四邊の支持状態は、 $x=a/2$ なる線に對して對稱なるにもかゝりはず、若し零ならざる根

を採れば、 ξ^{VI} はその對稱線に對し對稱ならざる板の彎曲状態を與ふることとなるからである。これに反し總ての根が零なる解は、かくの如き矛盾を來さない、故に吾々はこの場合に適當なる解として

$$n \text{ が偶數なるとき, } A_n^{VI} = B_n^{VI} = 0$$

を採らなければならない。

又、この結果より方程式 (20_a), (20_b) 及 (21_a), (21_b) を見れば自ら

$$\text{總ての } n \text{ に對し, } A_n^V = -B_n^V$$

なることが分る。

故に方程式 (24) 及 (28) より

1. n が奇數なる場合 (ρ, k 共に奇數)

$$\begin{aligned} A_n^V &= \sum_{\rho=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8\rho^2 n(1 + \text{Co}f \rho\pi)}{\pi(\rho^2 + n^2)^2(\rho\pi + \text{S}in \rho\pi)} \frac{8k^2 \rho(1 + \text{Co}f k\pi)}{\pi(k^2 + \rho^2)^2(k\pi + \text{S}in k\pi)} A_k^V \\ &= T_n^I - \sum_{\rho=1}^{\infty} \frac{4\rho^2 n(1 + \text{Co}f \rho\pi)}{\pi(\rho^2 + n^2)^2(\rho\pi + \text{S}in \rho\pi)} (T\rho^{III} - T\rho^{IV}), \end{aligned}$$

2. n が偶數なる場合 (ρ は奇數, k は偶數)

$$\begin{aligned} A_n^V &= \sum_{\rho=1}^{\infty} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{8\rho^2 n(1 - \text{Co}f \rho\pi)}{\pi(\rho^2 + n^2)^2(\rho\pi - \text{S}in \rho\pi)} \frac{8k^2 \rho(1 + \text{Co}f k\pi)}{\pi(k^2 + \rho^2)^2(k\pi + \text{S}in k\pi)} A_k^V \\ &= T_n^I - \sum_{\rho=1}^{\infty} \frac{4\rho^2 n(1 - \text{Co}f \rho\pi)}{\pi(\rho^2 + n^2)^2(\rho\pi - \text{S}in \rho\pi)} (T\rho^{III} + T\rho^{IV}) \end{aligned}$$

これら無數に多くの方程式より成る二系の聯立方程式の各項の係数を計算すれば

1. n が奇數なる場合

n	A_1^V	A_3^V	A_5^V	A_7^V	A_9^V	A_{11}^V	右邊
1	+0.6853	-0.1365	-0.1083	-0.0716	-0.0518	-0.0396	+0.17217
3	-0.0533	+0.9150	-0.0788	-0.0661	-0.0554	-0.0469	-0.01375
5	-0.0186	-0.0474	+0.9465	-0.0511	-0.0468	-0.0423	-0.00518
7	-0.0088	-0.0287	-0.0367	+0.9616	-0.0375	-0.0356	-0.00236
9	-0.0050	-0.0187	-0.0261	-0.0292	-0.9701	-0.0295	-0.00127
11	-0.0031	-0.0129	-0.0192	-0.0226	-0.0241	+0.9755	-0.00076
..

2. n が偶數なる場合

n	A_2^V	A_4^V	A_6^V	A_8^V	A_{10}^V	A_{12}^V	右邊
2	+0.8368	-0.1178	-0.0576	-0.0673	-0.0533	-0.0433	-0.01377
4	-0.0578	+0.9319	-0.0636	-0.0562	-0.0489	-0.0427	+0.00061
6	-0.0287	-0.0424	+0.9548	-0.0437	-0.0407	-0.0373	+0.00052
8	-0.0165	-0.0231	-0.0327	+0.9662	-0.0331	-0.0318	+0.00030
10	-0.0105	-0.0196	-0.0244	-0.0265	+0.9730	-0.0267	+0.00019
12	-0.0071	-0.0142	-0.0187	-0.0211	-0.0222	+0.9775	+0.00015
..

而してこれらの聯立方程式を解くには、先づ左邊に於て記入せられたる階段線の右側にある項を省略して第一次の近似値を見出し、次にそれらの近似値を今省略したる項に用ひて第二次の近似値を求め、以下同様にして漸次高次の近似値を求め、遂に所要の精密度を與ふるために必要とする小數位に於て、最早數値の變化なきに至るまで、この方法を反覆するのである。

この方法によつて求めたる結果は

$$\begin{array}{ll}
 A_1^V = +0.25100 & A_2^V = -0.01650 \\
 A_3^V = -0.00046 & A_4^V = -0.00036 \\
 A_5^V = -0.00057 & A_6^V = +0.00003 \\
 A_7^V = -0.00019 & A_8^V = +0.00002 \\
 A_9^V = -0.00004 & A_{10}^V = +0.00001 \\
 A_{10}^V = -0.00000 & A_{12}^V = +0.00002 \\
 \dots\dots\dots & \dots\dots\dots
 \end{array}$$

而して、 n が奇數なる場合の A_n^{VI} , B_n^{VI} の値は、今求めたる A_n^V の値を方程式(22a)及(23a)に代入することにより次の如く算出せられる。

n	A_n^{VI}	B_n^{VI}
1	0.12785	-0.37258
3	-0.00367	0.00012
5	-0.00083	0.00088
7	-0.00026	0.00037
9	-0.00011	0.00019

$$\begin{array}{ccc} 11 & -0.00004 & 0.00010 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{array}$$

附圖第二はこれらの數値を用ひ、且 $m=10/3$ として計算したる結果を圖示したものである。

第二章 任意の位置に於ける集中荷重の作用を受くる矩形平面板

第五節 基本解式

集中荷重の場合には偏微分方程式 (1) の右邊は $f(x,y)=0$ となる。而して基本解式は、この方程式を満足すると同時に、尙次の性質を具備することを要する。即ち荷重を包圍して任意の半徑の圓筒斷面を考ふるとき、その周圍に働く垂直應剪力の總和が、常に荷重の大さと等しくなければならない。

Dr. H. Hencky は集中荷重が矩形板の中央に作用する場合を解くに當り、次の解式を採用した (H. Hencky, Der Spannungszustand in rechteckigen Platten, 1913 参照)。

$$\zeta = C \left\{ \frac{x^2 + y^2}{a^2 + b^2} \left(\ln \frac{x^2 + y^2}{a^2 + b^2} - 2 \right) + 2 \right\}$$

この解式が、今上に述べた性質を具備して居ることは、容易に證明せられる。今この解式を更に一般なる場合に擴張すれば、次の形に書くことが出来る。但し a, b は邊長、 $x = \alpha a, y = \beta b$ は荷重の位置を表はし、座標軸の取り方は第一章第一節に於けると同様とする。

$$\zeta^I = C \frac{(x - \alpha a)^2 + (y - \beta b)^2}{a^2} \ln \frac{(x - \alpha a)^2 + (y - \beta b)^2}{a^2} \dots\dots (32)$$

$$C = 3a^2(m^2 - 1)P / 4\pi h^3 m^2 E$$

尙この基本解式の板の周邊に於ける値を Fourier 級數に展開するに當り、その收斂を速かならしむるため、補助解式

$$\begin{aligned} \zeta^{II} = -C \left\{ c_1 + c_2 \frac{x}{a} + c_3 \frac{y}{a} + c_4 \frac{xy}{a^2} + \frac{x(x-a)}{a^2} \left(d_1 + d_2 \frac{y}{a} + d_3 \frac{x}{a} + d_4 \frac{xy}{a^2} \right) \right. \\ \left. + \frac{y(y-b)}{a^2} \left(e_1 + e_2 \frac{x}{a} + e_3 \frac{y}{a} + e_4 \frac{xy}{a^2} \right) \right\} \dots (33) \end{aligned}$$

を加へ、その中に含まるゝ 12 個の定數を、板の四隅に於て

$$\zeta^I + \zeta^{II}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\zeta^I + \zeta^{II}), \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\zeta^I + \zeta^{II})$$

が何れも消滅するやうに定める。即ち今

$$\varphi = \frac{b}{a},$$

$$\left. \begin{aligned} v_{oo} &= \alpha^2 + \beta^2 \varphi^2 \\ v_{oo} &= (1-\alpha)^2 + \beta^2 \varphi^2 \\ v_{oo} &= \alpha^2 + (1-\beta)^2 \varphi^2 \\ v_{ab} &= (1-\alpha)^2 + (1-\beta)^2 \varphi^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (34)$$

とおけば、それらの定数の値は次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= v_{oo} \ln v_{oo}, \quad c_2 = -v_{oo} \ln v_{oo} + v_{oo} \ln v_{oo} \\ c_3 &= -\frac{1}{\varphi} \left\{ v_{oo} \ln v_{oo} - v_{ob} \ln v_{ob} \right\} \\ c_4 &= \frac{1}{\varphi} \left\{ v_{oo} \ln v_{oo} - v_{oo} \ln v_{oo} - v_{ob} \ln v_{ob} + v_{ob} \ln v_{ob} \right\} \\ d_1 &= \frac{1}{3} \left\{ \ln(v_{oo}^2 v_{oo}) + \frac{4\alpha^2}{v_{oo}} + \frac{2(1-\alpha)^2}{v_{oo}} + 3 \right\} \\ d_2 &= \frac{1}{3\varphi} \left\{ \ln \frac{v_{ob}^2 v_{ob}}{v_{oo}^2 v_{oo}} - 4\alpha^2 \left(\frac{1}{v_{oo}} - \frac{1}{v_{ob}} \right) - 2(1-\alpha)^2 \left(\frac{1}{v_{oo}} - \frac{1}{v_{ob}} \right) \right\} \\ d_3 &= \frac{1}{3} \left\{ \ln \frac{v_{oo}}{v_{oo}} - \frac{2\alpha^2}{v_{oo}} + \frac{2(1-\alpha)^2}{v_{oo}} \right\} \\ d_4 &= \frac{1}{3\varphi} \left\{ \ln \frac{v_{ob} v_{ob}}{v_{oo} v_{ob}} + 2\alpha^2 \left(\frac{1}{v_{oo}} - \frac{1}{v_{ob}} \right) - 2(1-\alpha)^2 \left(\frac{1}{v_{oo}} - \frac{1}{v_{ob}} \right) \right\} \\ e_1 &= \frac{1}{3} \left\{ \ln(v_{oo}^2 v_{ob}) + 2\beta^2 \varphi^2 \left(\frac{1}{v_{oo}} + \frac{2}{v_{ob}} \right) + 3 \right\} \\ e_2 &= \frac{1}{3} \left\{ \ln \frac{v_{oo}^2 v_{ob}}{v_{oo}^2 v_{ob}} - 2\beta^2 \varphi^2 \left(\frac{1}{v_{oo}} + \frac{2}{v_{ob}} \right) + 2(1-\beta)^2 \varphi^2 \left(\frac{2}{v_{oo}} + \frac{1}{v_{ob}} \right) \right\} \\ e_3 &= \frac{1}{3\varphi} \left\{ \ln \frac{v_{ob}}{v_{oo}} - 2\beta^2 \varphi^2 \left(\frac{1}{v_{oo}} - \frac{1}{v_{ob}} \right) \right\} \\ e_4 &= \frac{1}{3\varphi} \left\{ \ln \frac{v_{ob} v_{ob}}{v_{oo} v_{ob}} + 2\beta^2 \varphi^2 \left(\frac{1}{v_{oo}} - \frac{1}{v_{ob}} \right) - 2(1-\beta)^2 \varphi^2 \left(\frac{1}{v_{oo}} - \frac{1}{v_{ob}} \right) \right\} \end{aligned} \right\} (\dots 35)$$

第六節 集中荷重の意義

基本解式 (32) は、荷重の位置に於て無限に大なる應力を與へる。このことはこの解式が一點に作用する荷重に相應することを意味して居るのである。然るに實際に於ては、集中荷重といへども、決して一點に作用するものにあらず、相當の廣さの面積の上に分布せらるゝものである。従つて、應力は無限大とならず、荷重は安全に支持せられ得るのである。吾々

は今、荷重が分布せらるゝ面積の形を圓と假定しやう。然ればこの圓の大小はその上に於ける荷重の分布の有様と共に、荷重の位置に於ける彎曲力率の値に大なる關係あること、いふまでもない。

Nádai 教授は、中心に働く集中荷重の作用を受くる圓板の研究に於て、一つの法則を誘導した。この法則によれば、集中荷重を小なる圓の面積中に一樣に分布せらるゝものと考ふるとき、その圓の中心と周とに於ける彎曲力率の差は $P/4\pi$ である。若し荷重が充分強く集中せられて居ることを假定すれば、この法則は更に、板の任意の形及任意の周圍の條件の場合にも擴張し得らるゝこと、同教授も亦主張する處である (A. Nádai, *Elastische Platten*, § 19, 1925 参照)。故に本文に於ても、荷重の位置に於ける彎曲力率の算出に當り、この法則を用ふることにした。

次に問題となるのは、荷重の分布する圓の大きさである、Föppl によれば (A. und L. Föppl, *Drang und Zwang*, Bd. I. § 30, 1924 参照)、この圓の半徑を板の厚さの $\frac{1}{3}$ 迄小ならしむるも、荷重より直接受くる壓力のために板の破壊を來す虞はない。けれども本文の計算に於ては尙安全のために、荷重は板の厚さに等しい半徑の圓の面積中に一樣に分布するものと假定した。

第七節 板が四邊に於て自由に支持せらるゝ場合

板の周圍の條件は、第一章第一節に於けると同様である。板の撓みが板の四邊に於て消滅すべき條件を満足せしむるため、次の補助解式を用ひる。

$$\zeta^{III} = -C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sin(n\pi a/b)} \left\{ A_n^{III} \sin \frac{n\pi}{b}(x-a) + B_n^{III} \sin \frac{n\pi}{b}x \right\} \sin \frac{n\pi}{b}y$$

.....(36)

$$\zeta^{IV} = -C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sin(n\pi b/a)} \left\{ A_n^{IV} \sin \frac{n\pi}{a}(y-b) + B_n^{IV} \sin \frac{n\pi}{a}y \right\} \sin \frac{n\pi}{a}x$$

.....(37)

今 ζ^I , ζ^{II} , ζ^{III} の微分係数を求むれば次の通りである。 ζ^{IV} の微分係数は、 ζ^{III} のそれより文字の取換によつて容易に得られる。

(i) ζ^I :

$$\frac{\partial \zeta^I}{\partial x^2} = C \frac{x(x-\alpha a)}{a^2} \left\{ \ln \frac{(x-\alpha a)^2 + (y-\beta b)^2}{a^2} + 1 \right\}$$

$$\frac{\partial^2 \zeta^I}{\partial x^2} = C \frac{2}{a^2} \left\{ \ln \frac{(x-\alpha a)^2 + (y-\beta b)^2}{a^2} + 1 + \frac{2(x-\alpha a)^2}{(x-\alpha a)^2 + (y-\beta b)^2} \right\}$$

$$\frac{\partial^2 \zeta^I}{\partial x \partial y} = C \frac{4}{a^2} \frac{(x - \alpha a)(y - \beta b)}{(x - \alpha a)^2 + (y - \beta b)^2}$$

$$\frac{\partial^3 \zeta^I}{\partial x^3} = C \frac{4}{a^2} \frac{(x - \alpha a)^3 + 3(x - \alpha a)(y - \beta b)^2}{\{(x - \alpha a)^2 + (y - \beta b)^2\}^2}$$

$$\frac{\partial^3 \zeta^I}{\partial x \partial y^2} = C \frac{4}{a^2} \frac{(x - \alpha a)^3 - (x - \alpha a)(y - \beta b)^2}{\{(x - \alpha a)^2 + (y - \beta b)^2\}^2}$$

(ii) ζ^{II} :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta^{II}}{\partial x} = & -C \frac{1}{a} \left\{ e_2 + e_4 \frac{y}{a} + \frac{2x - a}{a} \left(d_1 + d_2 \frac{y}{a} + d_3 \frac{x}{a} + d_4 \frac{xy}{a^2} \right) \right. \\ & \left. + \frac{x(x - a)}{a^2} \left(d_3 + d_4 \frac{y}{a} \right) + \frac{y(y - b)}{a^2} \left(e_2 + e_4 \frac{y}{a} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \zeta^{II}}{\partial x^2} = -C \frac{2}{a^2} \left\{ \left(d_1 + d_2 \frac{y}{a} + d_3 \frac{x}{a} + d_4 \frac{xy}{a^2} \right) + \frac{2x - a}{a} \left(d_3 + d_4 \frac{y}{a} \right) \right\}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \zeta^{II}}{\partial x \partial y} = & -C \frac{1}{a^2} \left\{ e_4 + \frac{2x - a}{a} \left(d_2 + d_4 \frac{x}{a} \right) \right. \\ & \left. + d_4 \frac{x(x - a)}{a^2} + \frac{2y - b}{a} \left(e_2 + e_4 \frac{y}{a} \right) + e_4 \frac{y(y - b)}{a^2} \right\} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^3 \zeta^{II}}{\partial x^3} = -C \frac{6}{a^3} \left(d_3 + d_4 \frac{y}{a} \right)$$

$$\frac{\partial^3 \zeta^{II}}{\partial x \partial y^2} = -C \frac{2}{a^3} \left(e_2 + e_4 \frac{3y - b}{a} \right)$$

(iii) ζ^{III} :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta^{III}}{\partial x} = & -C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sin(n\pi a/b)} \frac{n\pi}{b} \left\{ A_n^{III} \operatorname{Co}f \frac{n\pi}{b} (x - a) \right. \\ & \left. + B_n^{III} \operatorname{Co}f \frac{n\pi}{b} x \right\} \sin \frac{n\pi}{b} y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \zeta^{III}}{\partial x^2} = & -C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sin(n\pi a/b)} \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \left\{ A_n^{III} \operatorname{Si}n \frac{n\pi}{b} (x - a) \right. \\ & \left. + B_n^{III} \operatorname{Si}n \frac{n\pi}{b} x \right\} \sin \frac{n\pi}{b} y \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \zeta^{III}}{\partial x \partial y} = -C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sin(n\pi a/b)} \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \left\{ A_n^{III} \operatorname{Co}f \frac{n\pi}{b} (x - a) \right.$$

$$\begin{aligned}
 &+ B_n^{III} \cos\left\{\frac{n\pi}{b}x\right\} \cos\frac{n\pi}{b}y \\
 \frac{\partial^3 \zeta^{III}}{\partial x^3} &= -C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sin(n\pi a/b)} \frac{n^3 \pi^3}{b^3} \left\{ A_n^{III} \cos\left\{\frac{n\pi}{b}(x-a)\right\} \right. \\
 &\quad \left. + B_n^{III} \cos\left\{\frac{n\pi}{b}x\right\} \sin\frac{n\pi}{b}y \right\} \\
 \frac{\partial^3 \zeta^{III}}{\partial x \partial y^2} &= +C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sin(n\pi a/b)} \frac{n^3 \pi^3}{b^3} \left\{ A_n^{III} \cos\left\{\frac{n\pi}{b}(x-a)\right\} \right. \\
 &\quad \left. + B_n^{III} \cos\left\{\frac{n\pi}{b}x\right\} \sin\frac{n\pi}{b}y \right\}
 \end{aligned}$$

板の間邊に於て ζ^I, ζ^{II} が與ふる撓みを求め、これを Fourier 級數に展開すれば、先づ $x=0$ なる邊に對しては

$$\begin{aligned}
 \{\zeta^I + \zeta^{II}\}_{x=0} &= C \left\{ \frac{\alpha^2 a^2 + (y - \beta b)^2}{a^2} \ln \frac{\alpha^2 a^2 + (y - \beta b)^2}{a^2} \right. \\
 &\quad \left. - c_1 - c_3 \frac{y}{a} - \frac{y(y-b)}{a^2} \left(c_1 + c_3 \frac{y}{a} \right) \right\} \\
 &= C \sum_{n=1}^{\infty} K_n \sin \frac{n\pi}{b}y
 \end{aligned}$$

にして 定數 K_n の値は

$$\begin{aligned}
 K_n &= \frac{2}{b} \int_0^b \{\zeta^I + \zeta^{II}\}_{x=0} \sin \frac{n\pi}{b}y dy \\
 &= -\frac{8\varphi^2}{n^3 \pi^3} \left\{ \int_0^b \frac{y - \beta b}{\alpha^2 a^2 + (y - \beta b)^2} \cos \frac{n\pi}{b}y dy \right. \\
 &\quad \left. + 2\alpha^2 a^2 \int_0^b \frac{y - \beta b}{\{\alpha^2 a^2 + (y - \beta b)^2\}^2} \cos \frac{n\pi}{b}y dy \right\}
 \end{aligned}$$

今 $y/b = \eta$ とし、且つ

$$\left. \begin{aligned}
 J_n^I &= \int_0^1 \frac{(\eta - \beta)\varphi/\alpha}{1 + (\eta - \beta)^2 \varphi^2/\alpha^2} \cos n\pi\eta d\eta \\
 J_n^{II} &= \int_0^1 \frac{(\eta - \beta)\varphi/\alpha}{\{1 + (\eta - \beta)^2 \varphi^2/\alpha^2\}^2} \cos n\pi\eta d\eta
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (38a)$$

とおけば

$$K_n = -\frac{8\varphi^3}{n^3 \pi^3} \frac{1}{\alpha} (J_n^I + 2J_n^{II})$$

同様にして、若し

$$\left. \begin{aligned} J_n^{III} &= \int_0^1 \frac{(\eta-\beta)\varphi(1-\alpha)}{1+(\eta-\beta)^2\varphi^2(1-\alpha)^2} \cos n\pi\eta d\eta \\ J_n^{IV} &= \int_0^1 \frac{(\eta-\beta)\varphi(1-\alpha)}{\{1+(\eta-\beta)^2\varphi^2(1-\alpha)^2\}^2} \cos n\pi\eta d\eta \\ J_n^V &= \int_0^1 \frac{(\xi-\alpha)(\beta\varphi)}{1+(\xi-\alpha)^2(\beta\varphi)^2} \cos n\pi\xi d\xi \\ J_n^{VI} &= \int_0^1 \frac{(\xi-\alpha)(\beta\varphi)}{\{1+(\xi-\alpha)^2(\beta\varphi)^2\}^2} \cos n\pi\xi d\xi \\ J_n^{VII} &= \int_0^1 \frac{(\xi-\alpha)\{(1-\beta)\varphi\}}{1+(\xi-\alpha)^2\{(1-\beta)\varphi\}^2} \cos n\pi\xi d\xi \\ J_n^{VIII} &= \int_0^1 \frac{(\xi-\alpha)\{(1-\beta)\varphi\}}{[1+(\xi-\alpha)^2\{(1-\beta)\varphi\}^2]^2} \cos n\pi\xi d\xi \end{aligned} \right\} \dots (38b)$$

とおけば (J_n^S の $n=\infty$ に對する極限值は、奇數の S のときは $n^2 J_n^S$ まで、又偶數の S のときは $n J_n^S$ まで零に收斂すること、容易に證明することが出来る)、他の三邊に對しては

$$\begin{aligned} \{\xi^I + \xi^{II}\}_{x=a} &= -C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8\varphi^3}{n^3\pi^3} \frac{1}{1-\alpha} (J_n^{III} + 2J_n^{IV}) \sin \frac{n\pi}{b} y \\ \{\xi^I + \xi^{II}\}_{y=0} &= -C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{n^3\pi^3} \frac{1}{\beta\varphi} (J_n^V + 2J_n^{VI}) \sin \frac{n\pi}{a} x \\ \{\xi^I + \xi^{II}\}_{y=b} &= -C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{n^3\pi^3} \frac{1}{(1-\beta)\varphi} (J_n^{VII} + 2J_n^{VIII}) \sin \frac{n\pi}{a} x \end{aligned}$$

然るに、補助解式 (36), (37) は板の四邊に於て次の如き撓みを與へる。

$$\begin{aligned} \{\xi^{III} + \xi^{IV}\}_{x=0} &= +C \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{III} \sin \frac{n\pi}{b} y \\ \{\xi^{III} + \xi^{IV}\}_{x=a} &= -C \sum_{n=1}^{\infty} B_n^{III} \sin \frac{n\pi}{b} y \\ \{\xi^{III} + \xi^{IV}\}_{y=0} &= +C \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{IV} \sin \frac{n\pi}{a} x \\ \{\xi^{III} + \xi^{IV}\}_{y=b} &= -C \sum_{n=1}^{\infty} B_n^{IV} \sin \frac{n\pi}{a} x \end{aligned}$$

而して、この場合にも尙第一章第一節に於けると同様に、補助解式 (11), (12) が用ひられるのであるが、これらは何れも板の周邊に於て消滅し、何等の撓みも與へない。故に板の撓み

がその周邊に於て消滅すべき條件は、次の式によつて満足せられる。

$$\left. \begin{aligned} A_n^{III} &= + \frac{8\varphi^3}{n^3\pi^3} \frac{1}{\alpha} (J_n^I + 2J_n^{II}) \\ B_n^{III} &= - \frac{8\varphi^3}{n^3\pi^3} \frac{1}{1-\alpha} (J_n^{III} + 2J_n^{IV}) \\ A_n^{IV} &= + \frac{8}{n^3\pi^3} \frac{1}{\beta\varphi} (J_n^V + 2J_n^{VI}) \\ B_n^{IV} &= - \frac{8}{n^3\pi^3} \frac{1}{(1-\beta)\varphi} (J_n^{VII} + 2J_n^{VIII}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (39)$$

次に、周邊に於ける板の曲りの消滅する條件を満足せしむるために、前章の補助解式 (11), (12) を用ひ、それより板の曲りを求むれば、 $x=0$ なる邊に於ては

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\zeta^V + \zeta^{VI}) \right\}_{x=0} = - C \frac{1}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^V \sin \frac{n\pi}{b} y$$

然るに、補助解式 (36), (37) よりは

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\zeta^{III} + \zeta^{IV}) \right\}_{x=0} = + C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8\varphi}{n\pi a^2} \frac{1}{\alpha} (J_n^I + 2J_n^{II}) \sin \frac{n\pi}{b} y$$

なる板の曲りを與へ、又 (32), (33) 式の與ふる板の曲りを Fourier 級數に展開すれば

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\zeta^I + \zeta^{II}) \right\}_{x=0} = + C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8\varphi}{n\pi a^2} \frac{1}{\alpha} (J_n^I - 2J_n^{II}) \sin \frac{n\pi}{b} y$$

故に、條件等式は

$$+ C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16\varphi}{n\pi a^2} \frac{1}{\alpha} J_n^I \sin \frac{n\pi}{b} y - C \frac{1}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^V \sin \frac{n\pi}{b} y = 0$$

となり、これより

$$A_n^V = + \frac{16\varphi}{n\pi} \frac{1}{\alpha} J_n^I$$

となる。同様に他の邊に於ける條件より

$$\left. \begin{aligned} B_n^V &= + \frac{16\varphi}{n\pi} \frac{1}{1-\alpha} J_n^{III} \\ A_n^{VI} &= + \frac{16}{n\pi} \frac{1}{\beta\varphi} J_n^V \\ B_n^{VI} &= + \frac{16}{n\pi} \frac{1}{(1-\beta)\varphi} J_n^{VII} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (40)$$

第八節 板が四邊に於て完全に固定せらるゝ場合

この場合の周囲の條件は、板の曲りの代りに板の傾きが周邊に於て消滅することが、前節の場合と異なるのみである。故に (40) 式を除く外の (36), (37), (38), (39) 式は何れもそのままこの場合にも役立つ。而して板の傾きが周邊に於て消滅する條件を満足するために用ふる補助解式 ζ^V, ζ^{VI} 及その中に含まるゝ定數を決定する手續は、第一章第二節に於けると全く同様である。ただ $\zeta^I, \zeta^{II}, \zeta^{III}, \zeta^{IV}$ が異なるゆへ、(19a), (19b) 式によつて與へられたる T_n の値が次の如く變るのみである。

$$\begin{aligned}
 T_n^I &= \frac{2\varphi}{n\pi} \left[-4J_n^I - \frac{2\varphi}{n^2\pi^2} \{ (e_2 + 2e_4\varphi) \cos n\pi - e_2 + e_4\varphi \} \right. \\
 &\quad - \frac{n^2\pi^2}{2\varphi^2} \frac{1}{\text{Sin}(n\pi/\varphi)} \left\{ A_n^{III} \text{Cos} \left[\frac{n\pi}{\varphi} + B_n^{III} \right] \right. \\
 &\quad \left. \left. - \sum_{\rho=1}^{\infty} \frac{\rho^3\pi\varphi}{\rho^2\varphi^2 + n^2} (A_\rho^{IV} + B_\rho^{IV} \cos n\pi) \right] \right. \\
 T_n^{II} &= \frac{2\varphi}{n\pi} \left[4J_n^{III} - \frac{2\varphi}{n^2\pi^2} \{ (e_2 + 2e_4\varphi) \cos n\pi - e_2 + e_4\varphi \} \right. \\
 &\quad - \frac{n^2\pi^2}{2\varphi^2} \frac{1}{\text{Sin}(n\pi/\varphi)} \left(A_n^{III} + B_n^{III} \text{Cos} \left[\frac{n\pi}{\varphi} \right] \right) \\
 &\quad \left. - \sum_{\rho=1}^{\infty} \frac{\rho^3\pi\varphi \cos \rho\pi}{\rho^2\varphi^2 + n^2} (A_\rho^{IV} + B_\rho^{IV} \cos n\pi) \right] \\
 T_n^{III} &= \frac{2}{n\pi} \left[-4J_n^V - \frac{2}{n^2\pi^2} \{ (d_2 + 2d_4) \cos n\pi - d_2 + d_4 \} \right. \\
 &\quad - \sum_{\rho=1}^{\infty} \frac{\rho^3\pi}{\varphi(\rho^2 + n^2\varphi^2)} (A_\rho^{III} + B_\rho^{III} \cos n\pi) \\
 &\quad \left. - \frac{n^2\pi^2}{2} \frac{1}{\text{Sin} n\pi\varphi} (A_n^{IV} \text{Cos} [n\pi\varphi + B_n^{IV}]) \right] \\
 T_n^{IV} &= \frac{2}{n\pi} \left[4J_n^{VII} - \frac{2}{n^2\pi^2} \{ (d_2 + 2d_4) \cos n\pi - d_2 + d_4 \} \right. \\
 &\quad - \sum_{\rho=1}^{\infty} \frac{\rho^3\pi \cos \rho\pi}{\varphi(\rho^2 + n^2\varphi^2)} (A_\rho^{III} + B_\rho^{III} \cos n\pi) \\
 &\quad \left. - \frac{n^2\pi^2}{2} \frac{1}{\text{Sin} n\pi\varphi} (A_n^{IV} + B_n^{IV} \text{Cos} [n\pi\varphi]) \right]
 \end{aligned} \quad \dots (41)$$

$$(\rho=1, 2, 3, \dots)$$

第九節 例三. 四邊に於て自由に支持せらるゝ方形平板が、 $(\alpha=3/4, \beta=1/2)$ の位置に於て集中荷重 P の作用を受くる場合

(34) 式より

$$\varphi=1, \quad v_{00}=v_{0b}=0.8125, \quad v_{a0}=v_{ab}=0.3125$$

従つて (35) 式より

$$\begin{aligned} c_1 &= -0.1687 & d_1 &= +1.5303 & e_1 &= +1.4077 \\ c_2 &= -0.1948 & d_2 &= 0 & e_2 &= +0.0291 \\ c_3 &= 0 & d_3 &= -0.6467 & e_3 &= 0 \\ c_4 &= 0 & d_4 &= 0 & e_4 &= 0 \end{aligned}$$

又 (38) 式は次の形となる。

$$\begin{aligned} J_n^I &= \int_0^1 \frac{4(\eta-\frac{1}{2})}{1 + \{\frac{4}{3}(\eta-\frac{1}{2})\}^2} \cos n\pi\eta d\eta, & J_n^{II} &= \int_0^1 \frac{4(\eta-\frac{1}{2})}{[1 + \{\frac{4}{3}(\eta-\frac{1}{2})\}^2]^2} \cos n\pi\eta d\eta \\ J_n^{III} &= \int_0^1 \frac{4(\eta-\frac{1}{2})}{1 + \{4(\eta-\frac{1}{2})\}^2} \cos n\pi\eta d\eta, & J_n^{IV} &= \int_0^1 \frac{4(\eta-\frac{1}{2})}{[1 + \{4(\eta-\frac{1}{2})\}^2]^2} \cos n\pi\eta d\eta \end{aligned}$$

$$J_n^V = J_n^{VI} = \int_0^1 \frac{2(\xi-\frac{3}{4})}{1 + \{2(\xi-\frac{3}{4})\}^2} \cos n\pi\xi d\xi$$

$$J_n^{VI} = J_n^{VII} = \int_0^1 \frac{2(\xi-\frac{3}{4})}{[1 + \{2(\xi-\frac{3}{4})\}^2]^2} \cos n\pi\xi d\xi$$

これらの積分値を求むるために、吾々は Gauss の求積法を用ひやう (L. Kiepert, Integralrechnung, Bd. I, § 72, 1922 参照、こゝに再び前に用ひられたる文字が、他の異なりたる意味に於て用ひられるけれども、少しく注意を拂へば、これがために錯誤を生ずる虞なきものと認め、上記の原著に用ひられたる記號を、そのまゝ用ふこととした)。この求積法によれば、積分の上下兩端間の變域を長さ h なる多くの區分に等分したるものと考ふる時、かくの如き區分の連続せる 4 個より成る變域に於ける積分 $\int_{c-2h}^{c+2h} f(x) dx$ の近似値は、次の式によつて與へられる。

$$F = hc_1 \{f(c-\alpha h) + f(c+\alpha h)\} + hc_2 \{f(c-\beta h) + f(c+\beta h)\}$$

但し

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \frac{2}{\sqrt{7}} \sqrt{3 - 0.4\sqrt{30}} = 0.67996\dots \\
 \beta &= \frac{2}{\sqrt{7}} \sqrt{3 + 0.4\sqrt{30}} = 1.72227\dots \\
 c_1 &= 1 + \frac{1}{18} \sqrt{30} = 1.30429\dots \\
 c_2 &= 1 - \frac{1}{18} \sqrt{30} = 0.69570\dots
 \end{aligned}
 \tag{42}$$

積分 J_n の上下兩端は 0 と 1 なるゆへ、 $1/h$ はその上下兩端間の變域を等分したる區分
 の數を表はす。而して (42) 式によつて與へらるゝ近似値の誤差は

$$\int_{c-2h}^{c+2h} f(x) dx - F = \frac{20.48h^9}{138915} f^{(6)}(c) + \dots$$

であつて、 h の減少 (即ち區分數の増加) は誤差の減少を意味する。故に積分値 J_n の誤差
 を一定の程度以下たらしむるためには、 J_n によつて表はさるゝ餘弦曲線の波の數の増加と
 共に、區分數 $1/h$ を増加しなければならない。

この計算に於ては、便宜上區分數を

$$n=1 \text{ 乃至 } 4 \text{ に對しては } 1/h=20$$

$$n=5 \text{ 乃至 } 8 \text{ に對しては } 1/h=40$$

$$n=9 \text{ 乃至 } 12 \text{ に對しては } 1/h=80$$

として、誤差が小數第五位以上に現はれないやうにした。その計算の結果は次の表に示す通
 りである。

n	J_n^I	J_n^{II}	J_n^{III}	J_n^{IV}	$J_n^V = J_n^{VI}$	$J_n^{VII} = J_n^{VIII}$
1	-0.21770	-0.17707	-0.28452	-0.11855	-0.19231	-0.10275
2	0	0	0	0	+0.08545	+0.09082
3	-0.00449	+0.01319	+0.08530	+0.09369	-0.01494	+0.01670
4	0	0	0	0	+0.00721	+0.00152
5	-0.00272	+0.09147	-0.01152	-0.02784	-0.00217	+0.00286
6	0	0	0	0	+0.00315	+0.00065
7	-0.00143	+0.00671	+0.00524	+0.01025	-0.00141	+0.00047
8	0	0	0	0	+0.00187	+0.00082
9	-0.00087	+0.00040	+0.00054	-0.00151	-0.00088	+0.00016
10	0	0	0	0	+0.00110	+0.00057
11	-0.00049	+0.00034	+0.00106	-0.00122	-0.00051	+0.00014
12	0	0	0	0	-0.00034	+0.00040

従つて (39) 及 (40) 式より

n	A_n^{III}	B_n^{III}	$A_n^{IV} = -B_n^{IV}$	A_n^{V}	B_n^{V}	$A_n^{VI} = B_n^{VI}$
1	-0.19672	+0.58835	-0.20528	-1.47828	-5.79619	-1.95835
2	0	0	+0.01839	0	0	+0.43519
3	+0.00028	-0.01042	-0.00092	-0.01015	+0.57924	-0.05073
4	0	0	+0.00008	0	0	+0.01836
5	+0.00000	+0.00055	+0.00001	-0.00369	-0.04694	-0.00442
6	0	0	+0.00001	0	0	+0.00535
7	-0.00000	-0.00008	-0.00000	-0.00138	+0.01525	-0.00205
8	0	0	+0.00000	0	0	+0.00238
9	-0.00000	+0.00000	-0.00000	-0.00066	+0.00122	-0.00100
10	0	0	+0.00000	0	0	+0.00122
11	+0.00000	-0.00300	-0.00000	-0.00031	+0.00196	-0.00047
12	0	0	+0.00000	0	0	+0.00071

かくて與へられたる條件が満足せらるゝやう總ての解式が決定せられた。故に公式 (14), (15), (16) によつて總ての應力を算出することが出来る。

附圖第三は, $m=10/3$, $h/a=10$ として, 板の周邊に於ける支壓力の分布, 四隅に於て板を抑へつける力, 及荷重の位置を通ずる二直線に沿ふ彎曲力率の變化を計算した結果である。附圖第四及第五は, 板の各點に於ける V_x, V_y を算出し, これらの鉛直剪力の相等しい點を結んで得た曲線を圖示したものである。又, 板の各點に於て最大鉛直剪力の起る斷面の方向は $\tan \alpha = V_y/V_x$ によつて與へられ, その値は $V_n = V_x \cos \alpha + V_y \sin \alpha$ である。この式を用ひて算出したる最大剪力の相等しい點を結べば, また一群の曲線を得べく, 附圖第六は即ちこれを圖示したものである。これらの曲線より, 集中荷重がその作用點より板の周邊に向つて如何に傳達せられ行くかを, 窺ひ知ることが出来るであらう。

第十節 例四. 四邊に於て固定せられたる方形平面板が ($\alpha=3/4$, $\beta=1/2$)

なる位置に於て集中荷重 P の作用を受くる場合

この場合 $\zeta^I, \zeta^{II}, \zeta^{III}, \zeta^{IV}$ は前節に於けると全く同様である。而して (41) 式より T_n の値を求めれば

$$\left. \begin{aligned}
 T_n^I &= \frac{2}{n\pi} \left\{ -4J_n^I + \frac{4c_2}{n^2\pi^2} - \frac{n^2\pi^2}{2} \frac{1}{\sin n\pi} (A_n^{III} \cos n\pi + B_n^{III}) \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2\rho^3\pi}{\rho^2+n^2} A_p^{IV} \right\} \\
 T_n^{III} &= \frac{2}{n\pi} \left\{ 4J_n^{III} + \frac{4c_2}{n^2\pi^2} - \frac{n^2\pi^2}{2} \frac{1}{\sin n\pi} (A_n^{III} + B_n^{III} \cos n\pi) \right\}
 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{奇数の } n \\ \text{に對して} \end{array}$$

$$- \sum_{\rho=1}^{\infty} \frac{2\rho^3 \pi \cos \rho \pi}{\rho^2 + n^2} A_{\rho}^{IV} \Bigg)$$

$$T_n^{III} = -T_n^{IV} = \frac{2}{n\pi} \left\{ -4J_n^I - \sum_{\rho=1}^{\infty} \frac{\rho^3 \pi}{\rho^2 + n^2} (A_{\rho}^{III} + B_{\rho}^{III} \cos n\pi) \right. \\ \left. - \frac{n^2 \pi^2}{2} \frac{A_n^{IV}}{\sin n\pi} (\cos n\pi - 1) \right\}$$

にして、偶數の n に対しては $T_n^I = T_n^{II} = 0$ である。

故に (28), (29) 式より A_n^I, B_n^I に関する同次一次方程式が成立し、その解として

$$n \text{ が偶數なる場合 } A_n^I = B_n^I = 0$$

を採るべきこと、第一章第四節に於て述べたると同様の推論から明かである。

従て (22 a, b), (23 a, b) 式より

$$\text{總ての } n \text{ に対して } A_n^{VI} = -B_n^{VI}$$

なることが分る。故に (26), (30) 式より

1. n が奇數なる場合 (ρ, k 共に奇數)

$$A_n^{VI} - \sum_{\rho=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8\rho^2 n (1 + \cos \rho \pi)}{\pi(\rho^2 + n^2)^2 (\rho \pi + \sin \rho \pi)} \frac{8k^2 \rho (1 + \cos k \pi)}{\pi(k^2 + \rho^2)^2 (k \pi + \sin k \pi)} A_k^{VI} \\ = T_n^{III} - \sum_{\rho=1}^{\infty} \frac{4\rho^2 n (1 + \cos \rho \pi)}{n(\rho^2 + n^2)^2 (\rho \pi + \sin \rho \pi)} (T_{\rho}^I - T_{\rho}^{II})$$

2. n が偶數なる場合 (ρ は奇數, k は偶數)

$$A_n^{VI} - \sum_{\rho=1}^{\infty} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{8\rho^2 n (1 - \cos \rho \pi)}{\pi(\rho^2 + n^2)^2 (\rho \pi - \sin \rho \pi)} \frac{8k^2 \rho (1 + \cos k \pi)}{\pi(k^2 + \rho^2)^2 (k \pi + \sin k \pi)} A_k^{VI} \\ = T_n^{III} - \sum_{\rho=1}^{\infty} \frac{4\rho^2 n (1 - \cos \rho \pi)}{\pi(\rho^2 + n^2)^2 (\rho \pi - \sin \rho \pi)} (T_{\rho}^I + T_{\rho}^{II})$$

これらの方程式は A_n^{VI} に関する一次方程式にして、その左邊各項の係数は第一章第四節に於て表示したるものと同様である、而してその右邊の値は次の如くなる。

n	右邊	n	右邊
1	+0.6177	2	-0.0903
3	-0.0647	4	+0.0152
5	-0.0227	6	+0.0045
7	-0.0083	8	+0.0013
9	-0.0041	10	+0.0010
11	-0.0024	12	+0.0006
..

而して前と同様の解法によつて、次の結果が得られる。

$$\begin{array}{ll}
 A_1^{II} = +0.8948 & A_2^{II} = -0.1063 \\
 A_3^{II} = -0.0194 & A_4^{II} = +0.0098 \\
 A_5^{II} = -0.0075 & A_6^{II} = +0.0019 \\
 A_7^{II} = -0.0013 & A_8^{II} = -0.0001 \\
 A_9^{II} = -0.0003 & A_{10}^{II} = +0.0001 \\
 A_{11}^{II} = -0.0001 & A_{12}^{II} = +0.0000 \\
 \dots\dots\dots & \dots\dots\dots
 \end{array}$$

これらの數値を (20a), (21a) 式に代入して

$$\begin{array}{ll}
 A_1^I = +0.8947 & B_1^I = -2.3766 \\
 A_3^I = -0.0212 & B_3^I = +0.1960 \\
 A_5^I = -0.0024 & B_5^I = -0.0093 \\
 A_7^I = -0.0005 & B_7^I = +0.0050 \\
 A_9^I = -0.0001 & B_9^I = +0.0005 \\
 A_{11}^I = -0.0000 & B_{11}^I = +0.0005 \\
 \dots\dots\dots & \dots\dots\dots
 \end{array}$$

第三章の實驗と比較するため、荷重の位置を通る2直線 $y=a/2$, $x=3a/4$ に沿ふて板の撓み及曲りを求めれば第一表の通りである。但し實驗の場合と同じ値 $h/a=1/80$ を用ひて計算したものである。

第 一 表

x/a entlang $y=a/2$	Durchbiegung in C	Krümmung in C/a^2	y/a entlang $x=3a/4$	Durchbiegung in C	Krümmung in C/a^2
0	0	+1.8102	0	0	+2.8692
0.125	+0.0116	+1.0358	0.125	+0.0176	+1.6896
0.25	+0.0403	+0.7073	0.25	+0.0609	+1.1896
0.375	+0.0801	+0.3802	0.375	+0.1197	-0.3428
0.5	+0.1242	-0.2702	0.5	+0.1652	-11.9869
0.625	+0.1637	-1.9892			
0.6875	+0.1776	-			
0.75	+0.1652	-12.8411			
0.875	+0.0661	+2.2184			
1	0	+12.4436			

第三章 偏心集中荷重の作用を受くる方形板の彎曲試験

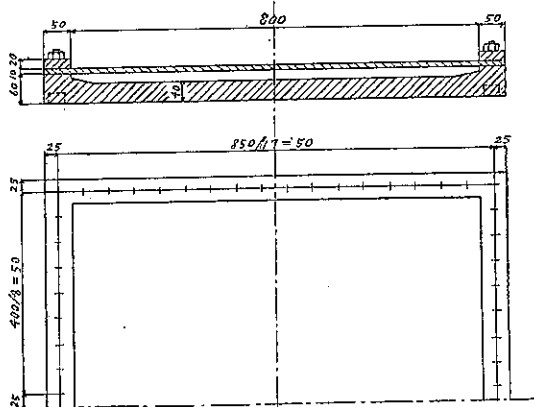
第十一節 實驗裝置

集中荷重の作用を受くる板に就て彎曲試験を行つたものは、從來極めて稀である。故にこの種の實驗を行つて、如何なる程度まで理論が實驗と一致するかを試験することは、極めて必要な且つ興味あることである。これ著者が特にこの實驗を行つた所以である。

實驗裝置（寫眞第一）は、試験に供せらるゝ板、これを支持する承臺及載荷裝置、撓み測定裝置よりなる。試験せらるべき板は、 $900 \times 900 \times 10$ mm の軟鋼方形板にして、鑄鐵製の承臺の上に鑄鐵棒及ボルトを以て水平に締めつけられる。而して、承臺及棒の内法 800 mm を板の邊長として計算に用ふることとした（第四圖）。

載荷裝置の主要部分は二つの木箱、一つの I ビーム及二つのジャックである。I ビームは、通常、ジャックの上に支へられ、その両端に一つ宛の木箱が吊される。今ジャックの螺旋を靜かに廻轉して I ビームを徐々に降下せしめ、遂に I ビームが、板の上の載荷點に置かれたる小鐵片のみによつて支持せらるゝに至れば、I ビームと木箱との總重量は、荷重として板

第四圖



に作用する。荷重を板の上より除去するには、反對の操作を行つて、I ビームを元の位置まで上昇せしめる。又木箱の重さは、その中に入れらるゝ混凝土塊の増減によつて、自由に調節することが出来る。

荷重を板の上に傳へる小鐵片は直徑約 20 mm の圓斷面を有し、荷重はこの圓の面積中に分布せられる。而してこの小鐵片と I ビームとの間には、通常、直徑 38 mm、長さ 150 mm の棒

鐵が置かれる（寫眞第一）けれども、荷重の位置に於ける板の撓みを測定する場合には、この棒鐵は、同じ大きさの 2 本の棒鐵と $45 \times 20 \times 200$ mm の平鐵とによつて置きかへられる（寫眞第二）。而して小鐵片の中心直上に於て、平鐵上面の沈下を測定し、これを荷重點に於ける板の撓みと見做す。

板の撓みはダイヤル・ゲージを用ひて $1/100$ mm まで正確に（目分量にては $1/1000$ mm まで）測定せられる。ダイヤル・ゲージは 200 mm の間隔に 1 本の木桁に取付けられ、この木桁を移動せしめて板の任意の點に於ける撓みを測ることが出来る。測點の位置は、附録に於

ける圖に示さるゝ通りで、尙念のために、板を締めつける鑄鐵枠の内側上面に於ける垂直變位も、このダイヤル・ゲージを用ひて測定せられた。

荷重を載せる位置は、前節の例四に於ける場合と全く同様である。而して荷重は 250 kg に始まり、以下順次に 250 kg づゝを増加して、1000 kg に至るものとする。

第十二節 實驗の結果及計算との比較

實驗の結果は、附録の表に示す通りである。大體に於て、板の撓みは荷重の増加に比例して増加して居る。

鑄鐵枠の上、特に荷重に近き邊に於て、多少不規則なる僅少の撓みが認められるが、この撓みは、板の支持物の變位に基くものと推測せられる。若し板の支持物が、荷重の作用を受くるも、完全に不變であるならば、この撓みは起らないであらう。従つて計算との比較に於ては、豫めこの撓み及その影響を除去し置くを至當と認むるけれども、これを理論的に嚴密に除去すること困難なるゆへ、こゝには、これを板の周邊に於ける撓みとして残すことにした。かくの如き撓みは、周邊に於て板の傾きを導入する。従つて板全體の彎曲状態に大なる影響を及ぼすこと、いふまでもない。

試験に供したる板の材料の彈性係数を定むるため、實驗に先立ち、斷面 40×8 mm、測長 200 mm の試験片を作り、Mohr und Federhaff の試験機を用ひて、牽引試験を行つた。その結果 $E=2\,093\,000$ kg/cm² を得た。故に $m=10/3$, $a=80$ cm として計算すれば $P=1\,000$ kg に對し $C=0.66427$ cm となる。

この C の値を第一表に用ふることにより、第二表が得られる。尙比較に便するため、實驗値をも併記した。

第 二 表

x längs $y=40$ cm cm	Durchbiegungen 10^{-2} mm		y längs $x=60$ cm cm	Durchbiegungen 10^{-2} mm	
	Beobachtet	Berechnet		Beobachtet	Berechnet
0	0.3	0	0	0.8	0
5	3.5	—	5	7.3	—
10	10.6	7.7	10	16.3	11.7
15	19.5	—	15	31.9	—
20	31.0	26.8	20	48.8	40.5
25	45.2	—	25	63.8	—
30	61.0	53.2	30	90.3	79.5
35	77.3	—	35	110.7	—
40	91.7	82.5	40	119.8	109.7
45	105.6	—	45	109.9	—

50	117.1	108.7	50	90.1	79.5
55	128.9	118.0	55	73.0	—
60	119.8	109.7	60	50.6	40.5
65	94.1	—	65	33.2	—
70	58.8	43.9	70	18.8	11.7
75	26.2	—	75	8.5	—
80	4.1	0	80	1.5	0

附圖第七, 八は第二表を更に圖示したものである。圖中實線にて示さるゝ曲線は計算によりて得られたる撓みを示し, 點線に沿ひて記入せられたる小圓の縦距は實驗値を示す。

若しこゝに板の周邊の撓みと見做したる鑄鐵枠の沈下の影響を除去することが出来るならば, 附圖第七, 八に於ける實驗曲線と計算曲線との一致は更に満足に近きものなるべきことが想像せられる。

板の撓みが與へらるれば, これより圖式的方法によつて板の彎曲面の傾き及曲りを求めることが出来る。即ち板の撓みの曲線より, 小なる距離 Δx 又は Δy を隔つる各點間の撓みの差 $\Delta \zeta$ を見出せば, $\Delta \zeta / \Delta x$ 又は $\Delta \zeta / \Delta y$ が板の彎曲面の傾きを與へる。かくて得たる板の傾きの曲線につきて同様のことを行へば, 板の曲りが得られる。附圖第九, 十は附圖第七, 八の曲線より求めたる結果である。

圖中 $\partial^2 \zeta / \partial x^2$ 又は $\partial^2 \zeta / \partial y^2$ 曲線に沿ひて記入せられたる小圓の縦距は, 計算より求められたる板の彎曲面の傾きを示す。若し板の周圍に於ける不完全なる固定状態を考慮するときには實驗より求められたる曲りと計算より求められたる曲りととの間に當然差違あるべきこと, 即ち圖に於ては計算値を示す小圓が常に實驗曲線の下側にあるべきこと, 自らは認せられ得るであらう。

第三表は, 附圖第九, 十より求めたる値を用ひて, 荷重の位置及板の周邊に於ける彎曲力率を求め, これを計算より得たる結果と比較したものである。この兩者の間の差違は, 計

第三表

Stelle	Aus Versuch ermittelt				Berechnet			
	$\frac{\Delta^2 \zeta}{\Delta x^2}$	$\frac{\Delta^2 \zeta}{\Delta y^2}$	M_x	M_y	$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$	$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}$	M_x	M_y
	cm ⁻¹	cm ⁻¹	kg	kg	cm ⁻¹	cm ⁻¹	kg	kg
Laststelle	-0.00144	-0.00128	+350	+328	-0.00133	-0.00124	+327	+315
$x=0, y=a/2$	+0.00018	0	-34	—	+0.00019	0	-36	—
$x=a, y=a/2$	+0.00123	0	-233	—	+0.00129	0	-248	—
$x=3a/4, y=0$	0	+0.00027	—	-52	0	+0.00030	—	-57

算によりて求めたる値の約 4% 乃至 9% に相當して居る。これによつて, 實驗より圖式的

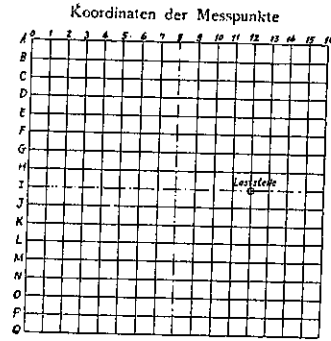
に彎曲力率を定むる方法が、相當に良好なる結果を與ふること、ほど察知し得られるであらう。

結 言

本文に述べたる方法によりて、任意の靜水壓及集中荷重の作用を受くる矩形平板を解くことが出來た。而してこの解法によりて得られたる結果が、集中荷重の作用の下に行ひたる實驗の結果と、ほど相近きものであることをも確むることが出來た。従つて靜水壓の作用を受くる板の場合にも、これと同様の結果を豫期することが出来るであらう。

これと同時にまた他の一方に於ては、一般に極めて簡単に假定し去らるゝ板の周圍の條件即ち板の支持物が荷重の作用を受くるも常に不撓不變なることは、本文の實驗に於てもこれを求むることの極めて困難なること、従つて固定せられたる板の周邊に於ても亦相當の板の傾きを生ずるものなることを知つた。況んやこの支持状態の相違は、實際の構造物に於ては更に一層甚しかるべく、これが板全體の彎曲状態に及ぼす影響も亦一層大なることが明かである。故に平板の問題は、かくの如く實際の場合により近き周圍の條件に對して、尙研究を進むべき餘地あるものと認められる。(完)

附録 實測せられたる板の撓みの數値表



Durchbiegungen der Platte 10⁻² mm (Fortsetzung)

Messpunkte	250 kg	500 kg	750 kg	1000 kg	Messpunkte	250 kg	500 kg	750 kg	1000 kg
G-0	0.0	0.3	0.2	0.2	H-0	—	—	—	—
1	0.7	1.6	2.6	3.2	1	0.9	1.7	2.7	3.5
2	2.4	4.9	7.1	9.6	2	2.6	4.9	7.3	10.4
3	4.6	9.1	13.4	18.1	3	4.4	9.3	14.2	20.0
4	6.5	14.0	21.2	27.7	4	7.3	15.0	23.3	29.5
5	9.3	19.6	29.9	39.7	5	10.4	21.2	31.1	43.4
6	13.6	28.1	38.2	53.3	6	15.0	30.8	43.3	59.0
7	16.9	34.3	49.1	67.0	7	18.9	38.5	55.0	74.2
8	19.9	39.6	59.2	79.3	8	22.3	42.0	66.3	88.1
9	21.7	48.2	67.1	90.3	9	25.6	52.9	75.9	102.7
10	26.2	50.0	75.1	96.2	10	27.1	57.9	84.2	110.7
11	24.7	51.5	70.5	101.0	11	28.9	56.6	88.2	120.0
12	24.1	46.0	70.0	90.1	12	25.3	56.0	84.8	109.9
13	16.7	37.0	54.0	72.0	13	22.2	47.4	65.2	87.3
14	12.0	23.3	31.0	40.0	14	14.6	29.0	40.4	54.5
15	5.8	11.1	16.2	21.0	15	7.0	13.1	18.4	24.9
16	1.9	3.3	4.1	4.0	16	—	—	—	—

Durchbiegungen der Platte 10⁻² mm (Fortsetzung)

Messpunkte	250 kg	500 kg	750 kg	1000 kg	Messpunkte	250 kg	500 kg	750 kg	1000 kg
O-0	0.0	0.1	0.4	0.4	P-0	—	—	—	—
1	0.1	0.3	0.7	0.9	1	0.0	0.1	0.2	0.4
2	0.6	1.1	1.9	2.4	2	0.1	0.2	0.3	0.5
3	1.1	2.1	3.0	5.0	3	0.4	1.3	1.4	2.0
4	1.9	3.5	5.7	7.2	4	0.8	1.9	2.1	3.0
5	2.4	5.2	7.9	10.5	5	1.0	2.1	3.4	4.3
6	3.4	6.9	9.8	12.7	6	1.1	2.9	4.1	6.3
7	4.1	8.6	11.7	15.9	7	1.9	3.4	5.5	7.2
8	4.3	9.2	13.3	19.0	8	2.2	4.0	5.9	7.5
9	4.8	9.6	14.8	21.2	9	2.4	4.6	6.0	8.5
10	5.1	10.4	16.7	21.2	10	2.2	4.0	6.2	9.2
11	5.8	11.7	15.8	20.5	11	2.0	4.5	5.9	8.3
12	4.7	9.0	13.5	16.3	12	1.7	3.2	5.1	7.3
13	3.4	7.3	10.2	13.3	13	1.4	2.6	4.3	6.5
14	2.4	4.3	6.3	8.5	14	1.0	1.6	2.2	3.0
15	1.5	2.1	2.9	4.4	15	0.3	1.0	1.3	1.6
16	0.7	0.8	0.9	0.9	16	—	—	—	—

Durchbiegungen der Platte 10⁻² mm.

Messpunkte	250 kg	500 kg	750 kg	1000 kg	Messpunkte	250 kg	500 kg	750 kg	1000 kg
A-0	0.0	0.0	0.0	0.0	B-0	—	—	—	—
1	—	—	—	—	1	0.0	0.2	0.2	0.5
2	0.0	0.0	0.1	0.1	2	0.1	0.7	0.7	1.0
3	—	—	—	—	3	0.6	1.0	1.4	1.9
4	0.0	0.3	0.2	0.3	4	0.6	1.4	2.2	3.1
5	—	—	—	—	5	1.5	2.2	3.3	5.0
6	0.1	0.3	—	—	6	1.7	3.3	4.9	6.0
7	—	—	0.7	0.3	7	2.2	4.1	6.3	8.0
8	0.2	0.8	—	—	8	2.4	5.2	7.2	9.0
9	—	—	1.0	1.2	9	2.4	5.3	7.6	10.2
10	0.3	1.0	1.4	1.6	10	2.6	5.8	7.9	10.1
11	—	—	—	—	11	2.6	5.1	7.6	10.2
12	0.3	1.0	1.3	1.5	12	2.7	4.9	7.1	9.5
13	—	—	—	—	13	2.0	3.8	5.3	6.9
14	0.6	1.0	1.2	1.7	14	1.6	2.8	3.9	5.3
15	—	—	—	—	15	1.0	1.9	2.5	3.3
16	0.7	0.5	1.5	1.2	16	—	—	—	—

Durchbiegungen der Platte 10⁻² mm (Fortsetzung)

Messpunkte	250 kg	500 kg	750 kg	1000 kg	Messpunkte	250 kg	500 kg	750 kg	1000 kg
C-0	0.0	0.0	0.0	0.0	D-0	—	—	—	—
1	0.1	0.5	0.5	0.8	1	0.2	0.8	0.9	1.3
2	0.7	1.0	1.7	2.4	2	1.1	1.9	3.1	4.0
3	1.1	2.6	3.5	4.3	3	1.7	3.9	5.5	7.7
4	1.8	4.1	5.2	6.0	4	3.1	6.3	9.9	13.0
5	2.4	5.4	7.6	9.9	5	4.5	8.8	12.8	16.9
6	3.3	6.8	11.3	14.0	6	6.0	12.4	17.9	22.7
7	4.6	9.7	15.5	17.2	7	6.5	14.5	21.3	28.2
8	4.9	10.5	14.9	20.7	8	6.3	17.3	24.2	34.2
9	5.0	11.0	15.8	22.3	9	9.3	20.7	27.9	38.5
10	5.8	11.9	17.2	23.3	10	9.6	19.9	29.3	39.1
11	5.4	11.2	15.0	22.3	11	9.1	18.7	27.0	36.2
12	4.7	10.3	15.5	19.5	12	8.4	17.8	26.3	33.2
13	4.3	9.0	12.5	14.9	13	7.2	13.0	19.4	26.6
14	2.2	5.1	6.8	10.4	14	4.1	8.2	12.0	17.6
15	1.5	3.0	3.9	5.2	15	2.1	4.6	5.9	8.8
16	1.2	1.7	1.8	1.7	16	—	—	—	—

Durchbiegungen der Platte 10⁻² mm (Fortsetzung)

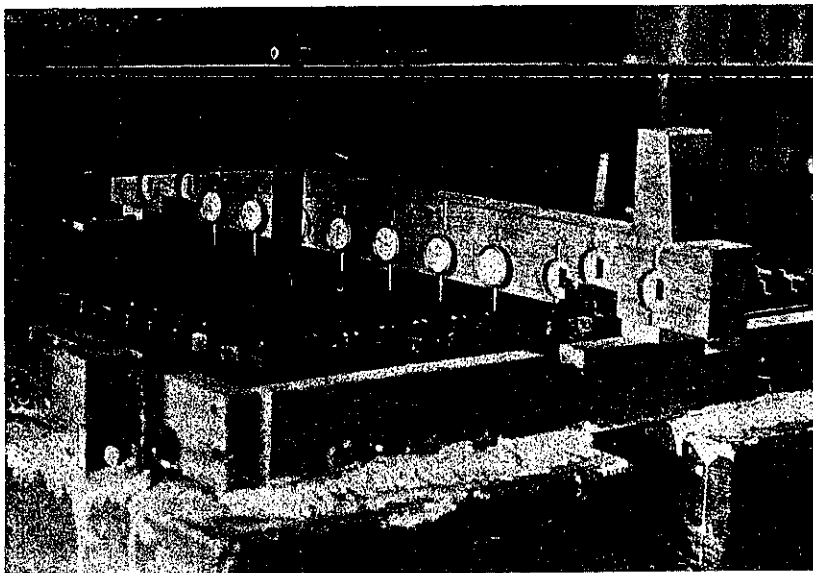
Messpunkte	250 kg	500 kg	750 kg	1000 kg	Messpunkte	250 kg	500 kg	750 kg	1000 kg
E-0	0.0	0.1	0.0	0.1	F-0	—	—	—	—
1	0.4	1.3	1.3	2.2	1	0.7	1.5	2.2	3.0
2	1.7	2.8	4.8	6.0	2	2.0	4.1	6.2	7.4
3	2.6	5.7	8.2	10.0	3	3.4	7.1	11.0	16.1
4	4.6	9.2	14.4	17.0	4	5.9	12.0	18.4	24.3
5	5.4	13.5	20.2	26.1	5	8.1	17.0	24.1	31.5
6	6.5	18.1	24.0	33.0	6	10.3	23.0	33.3	45.2
7	11.4	22.0	32.4	43.1	7	14.3	29.0	41.5	56.0
8	13.2	25.6	38.2	50.8	8	15.8	33.0	49.7	65.3
9	14.3	29.8	43.1	57.0	9	17.9	38.8	55.5	75.4
10	15.3	31.2	46.0	58.4	10	19.1	41.7	59.7	79.0
11	15.2	30.9	44.6	59.1	11	19.3	41.6	59.5	79.5
12	13.5	29.0	39.6	50.6	12	19.3	37.3	56.7	75.0
13	10.1	20.0	30.0	40.0	13	14.3	28.4	42.0	56.1
14	6.5	13.0	18.1	26.0	14	9.7	18.4	27.1	36.0
15	3.4	6.3	8.9	12.5	15	4.5	8.6	12.5	17.3
16	1.3	1.9	3.3	3.3	16	—	—	—	—

(續) 附録第十四卷第四圖

寫真第一

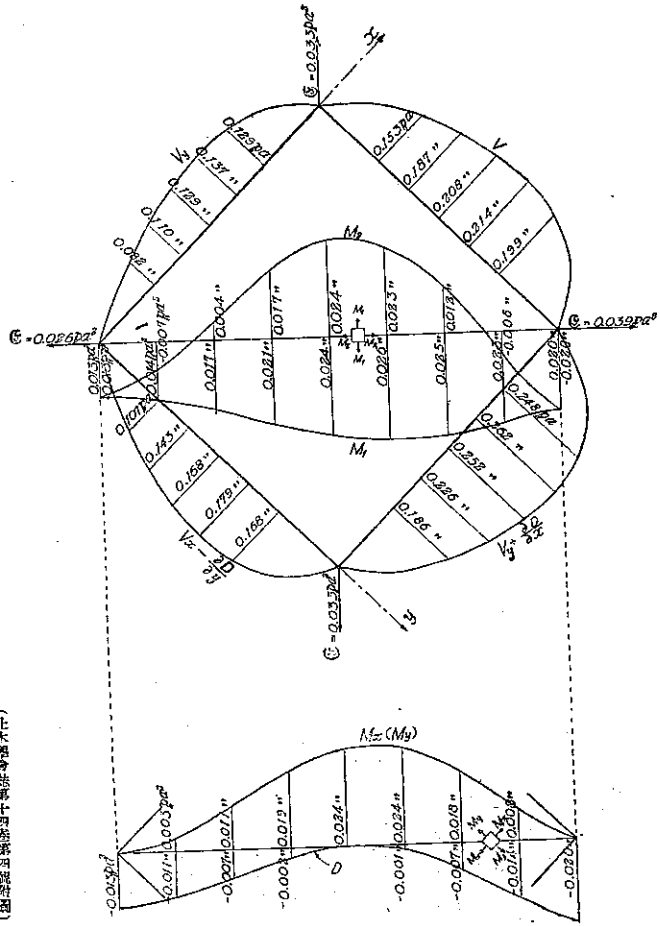


寫真第二



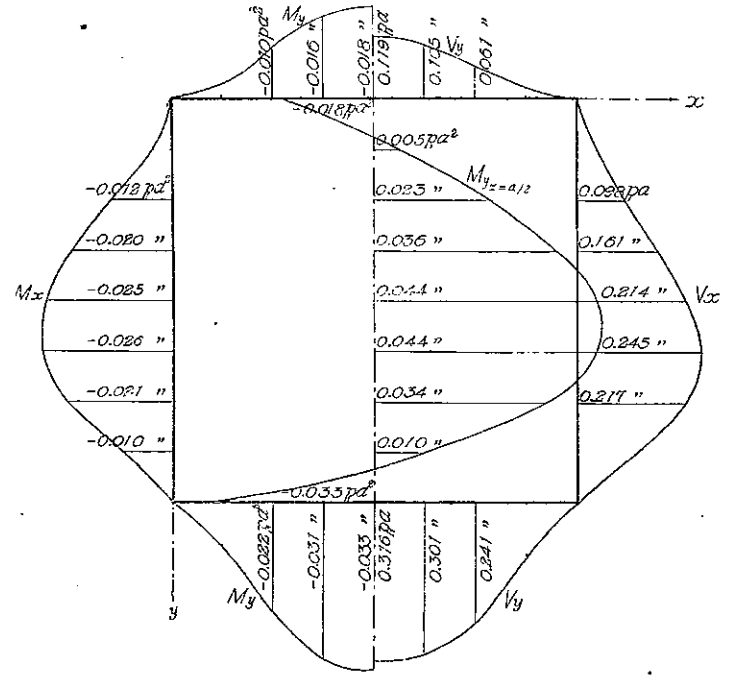
(土木學會誌第十四卷四號寫真)

附圖第一

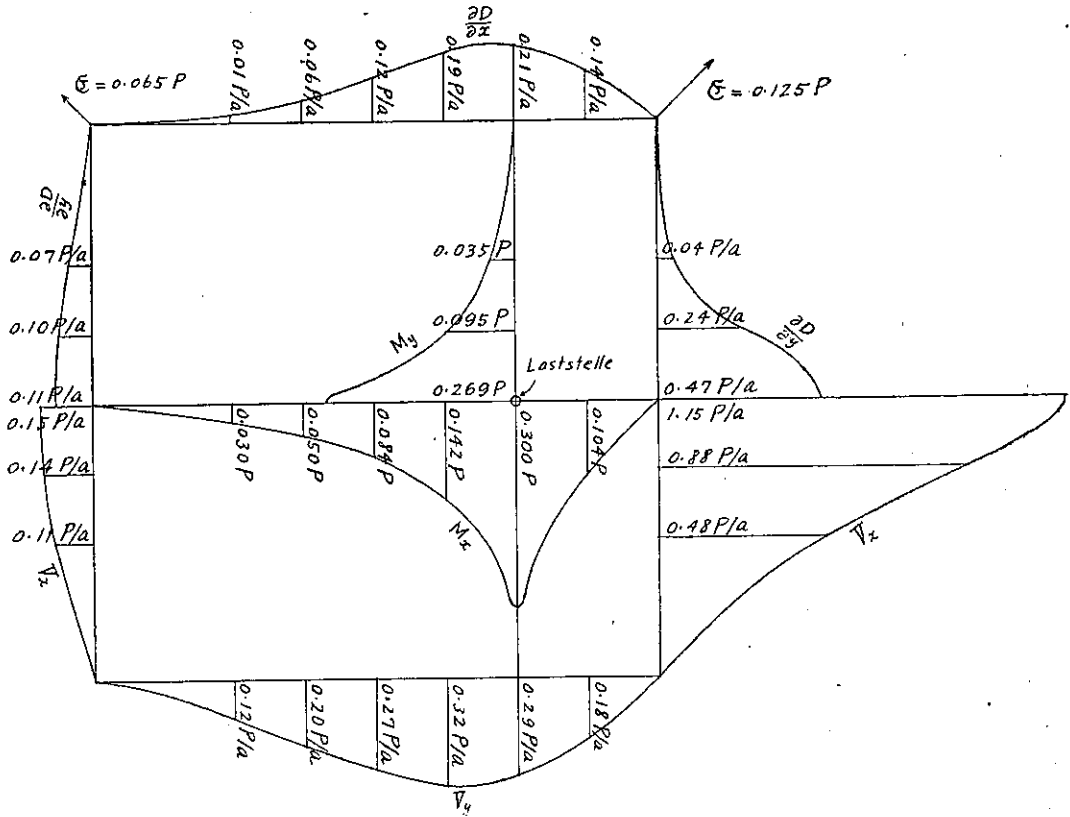


(圖) 土木學會雜誌第十四卷第四圖解附圖

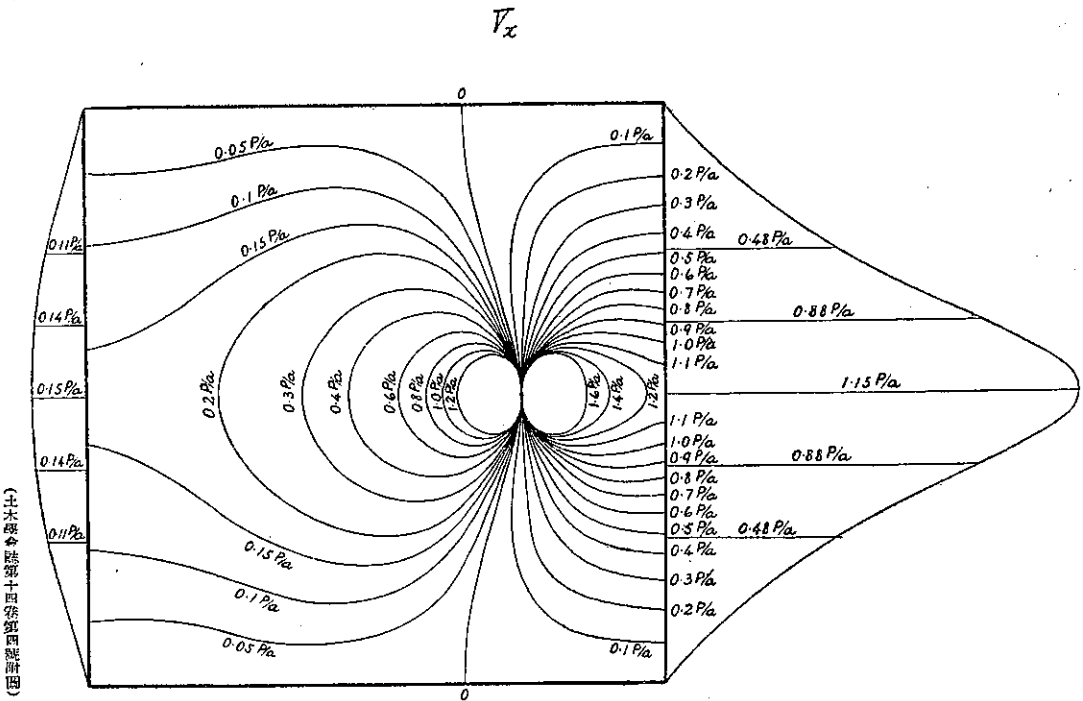
附圖第二



附圖第三



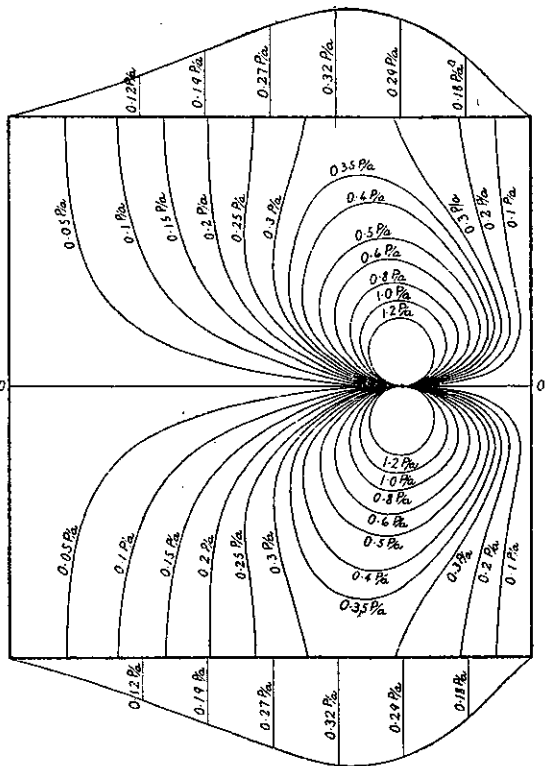
附圖第四



(士六海令陸第十四第圖附圖)

附圖第五

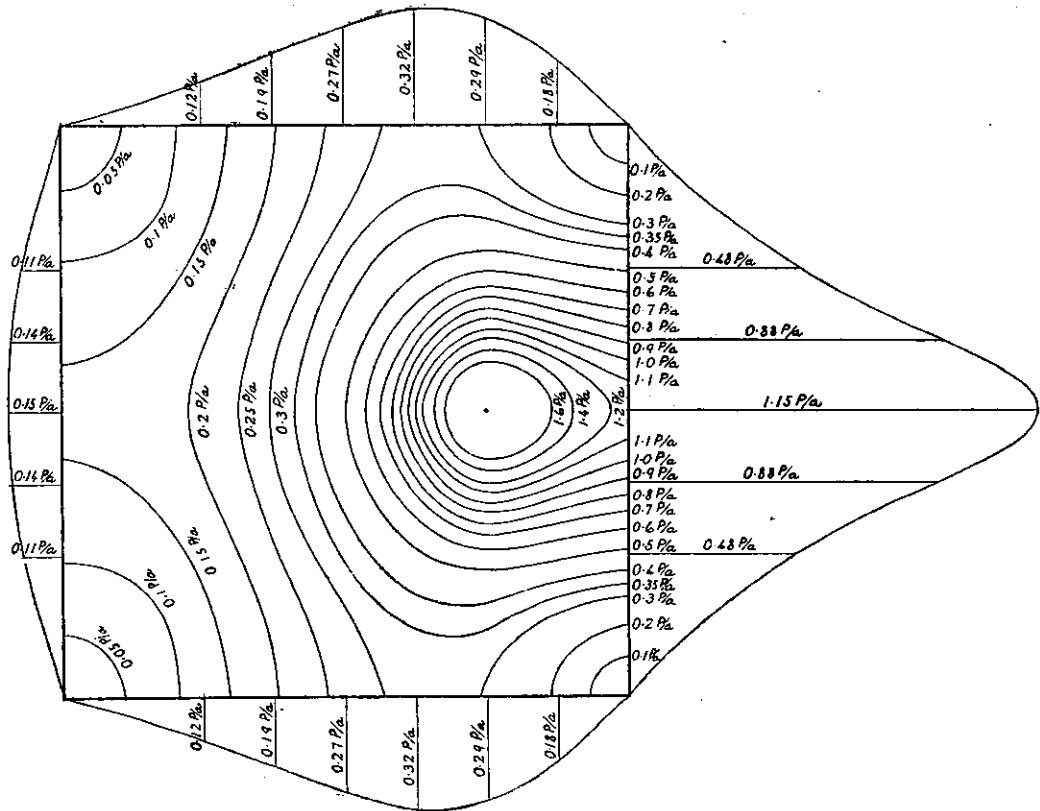
V_y



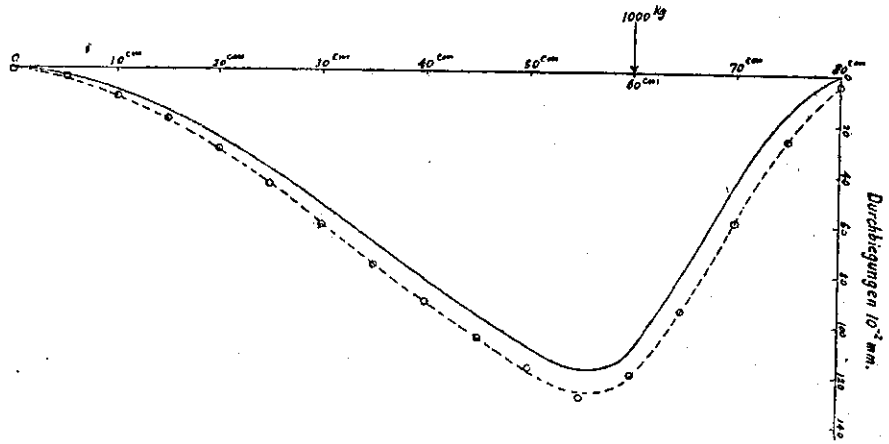
(圖) 五 各等壓線十五瓦特電壓器

附圖第六

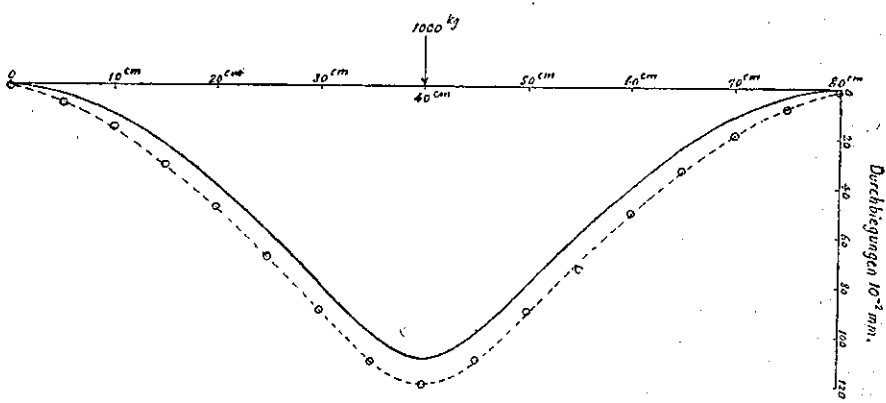
V_d



附圖 第七



附圖 第八



附圖 第九

