討　　議

土木學會誌　第十二卷第六號　大正十五年十二月

混凝土のポアソン比に關する實驗的研究

（第十二卷第二及第三號所載）

准員 工學士 久 野 重 一 郎

序　言

如上の表題を冠する田邊工學士の論說に接し，私は，眞に驚異の眼を以て，幾度か繰返してこれを拜見いたしました。そこにはしかしながら，私の思索が淺くして低いのに基因するであらうと思はれますが，稍奇異に感ぜらるゝ 2 點が殘りました。要約すれば

(*a*) 梁を用ひずにポアソン比を決定する方法は，實驗的困難を伴ひ易くはあるが，理論的には嚴正なものであります。しかるに梁による方法は，本質的に近似的なるものであります。それは，著者御自身明言しては居らないのでありますが，梁による理論は實に，「彎曲荷重をうくる梁がすこしも彎曲せざる範圍內に於て變形を測定すべし」といふ甚だ困難なる立場に基據して居ります。從て理論的には旣に自滅して居るこの方法が同じ實驗精度の世界に於て，はたしてよく他を克服し得るであらうか。これ腑に落ちないことの一つ。

(*b*) 混凝土といふ一材料の彈性的基本特性を究明せんとする場合，これに全く異質の材料（鐵筋はそれである）を任意に挿入しても，結果が前者の特性たるに變りはない！これが呑込めないわたくしは，從て今の場合，鐵筋挿入により應張側に異方性を生じ，その結果，該側のポアソン比は著く過大に算出せられてゐるであらうと考へるのであります。

以下その所以を記述して大方の御批判を仰ぐ次第であります。但し一々原著を參照する煩をさくるためその理論を第一節に抄錄し，第二節に於て (*a*) の問題を取扱ひ，第三節にて (*b*) に到る徑路をうかがひたいと思ひます。

1 梁による實驗原理

田邊平學氏は曰ふ：—

梁に彎曲荷重働くとき，X 軸の方向のみに彎曲應力 f 作用すとせば

$$e_y = e_z = -\frac{f}{\sigma E} = -\frac{1}{\sigma} e_x \qquad \cdots\cdots(1)$$

この梁に於て，平行 2 斷面間の距離を dx にとれば，(本誌第十二卷第八圖 p.205に明かなる如く) 長軸に平行にして斷面中軸より $-z$ なる層 C_0C が，變形によつてうくる伸び CC' は

$$CC' = d\Delta x = -zd\varphi$$

故に

$$e_x=\frac{CC'}{C_0C}=\frac{d\Delta x}{dx}=-z\frac{d\varphi}{dx}$$

然るに $d\varphi/dx$ は梁中軸の曲率（山邊氏は之を彎曲と記した）を表はすが故に

$$e_x=\frac{d\Delta x}{dx}=-\frac{z}{\rho}\qquad\cdots\cdots(2)$$

依て (1) より

$$e_y=e_z=\frac{z}{\sigma\rho}\qquad\cdots\cdots(3)$$

今斷面重心に坐標原點を選び，任意點 (y, z) の坐標の伸びを夫々 Δy, Δz とせば

$$e_y=\frac{d\Delta y}{dy},\qquad e_z=\frac{d\Delta z}{dz}\qquad\cdots\cdots(4)$$

故に (3) 及 (4) より

$$\Delta z=\int_0^z\frac{z}{\sigma\rho}dz=\frac{z^2}{2\sigma\rho}$$

同樣にして

$$\frac{d\Delta y}{dy}=\frac{z}{\sigma\rho}\qquad\cdots\cdots(5)$$

從て

$$\Delta_y=\int_0^y\frac{z}{\sigma\rho}dy=\frac{z}{\sigma\rho}y\qquad\cdots\cdots(6)$$

又 (2) より

$$\Delta x=-\int_0^x\frac{z}{\rho}dx=-\frac{z}{\rho}x\qquad\cdots\cdots(7)$$

依て (6) と (7) より，$\frac{\Delta x}{x}$ と $\frac{\Delta y}{y}$ との比を求むれば

$$\frac{\dfrac{\Delta x}{x}}{\dfrac{\Delta y}{y}}=\frac{-\dfrac{z}{\rho}}{\dfrac{z}{\sigma\rho}}=-\sigma\qquad\cdots\cdots(8)$$

となり式 (1) の關係と結果の一致するを見る，故に今 x と y とを夫々，梁の長軸の方向と之に直角なる斷面內中軸の方向とに於ける變形測定の標點距離とし，Δx 及 Δy を以て夫々此兩標點距離の長さの變化を表はすものとすれば，直接に此 Δx 及 Δy を測定する事によつて，ポアソン比の値を簡單且つ正確に算出し得る事となる。

如上の理論に基き，混凝土梁に純彎曲荷重を作用せしめて起る變形を測定して，混凝土のポアソン比を見出さんとし，そのためにまづ次の如くして，供試體の形狀及個數を決定した。

第一次準備實驗に擇びたる供試體は，斷面 8×12 cm，長さ 90 cm の矩形梁にして，早期破壞を防ぎ且つ强度を增大せしめて，多數荷重階に於ける變形を測定せんがため，その應張側に直徑 10 mm. の丸鋼 2 本を配した。その結果にもとづき第二次準備實驗に於ては，梁の寸法及標點距離を增大し更に應剪鐵筋を配した，そは第一次實驗に於ける梁が，曲能率によらずして剪力にもとづく斜張力のために破壞されしが故に，對剪力補强を加へて更に高き荷重階まで實驗を續行し得るやうに計つたのである，即ち應張側に於ける徑 10 mm 鐵筋 2 本を 3 本に增し，其中の 2 本を傾斜鐵筋として曲上げると共に，更に直徑 5 mm 丸鋼より成る繋筋 20 本を配した，尙曲上げ筋の位置は之を可及的梁の兩端に近く撰び，標點距離內に於ける混凝土の變形に及ぼす影響を小ならしめた，この供試體は曲能率にもとづく鐵筋の應張力によつて破壞し，補强鐵筋位置の適當なるを證し得た。この第二次準備實驗結果の滿足なりしにもとづき，之と全く同形の梁を本實驗用供試體として使用することゝ定めた，即ち梁の寸法は，斷面 14×16 cm，長さ 120 cm とし，標點距離は縱 20 cm，橫 10 cm とした。而て實驗に際し張間を 108 cm に，2 荷量の作用點間隔を 36 cm に取つた，(本誌第十二卷第十一圖 p.210 及第十五圖 p.222 がそれである) 本實驗に於ては更に材齡の影響を攻究せんがため，材齡を 3 期に分ちて各 3 個宛の供試體を試驗することゝし，合計 9 個の梁を製作したのである。

[次節以下の評論は，本誌第十二卷第二號 pp. 159—228 の論說を對象とするものであるが，參照の煩雜を避くるため，以下すべて本節の記述に準據して筆を進める]。

2 理論の間隙

先に叙說せるが如き理論が成立するためには，その背面に於て，たとへ近似的にもせよ，次の如き彈性力學の根本假定が認容されて居らねばならぬ。

1 曲能率によつて梁の彎曲すること

2 材料の均質性 (Homogeneity)

3 材料の等方性 (Isotropy)

4 應力の一軸性

「混凝土のポアソン比に關する實驗的研究」中に於て，これら重要なる前提が，如何樣な姿に於て實現せられ居るかを，次に靜觀して見たいと思ふ。

先づこの所謂實驗原理が，考察者自らに依て權威付けられし所以のものは，前節 (8) なる關係が (1) と全然一致せるところにこそ存するやうである。すなはちこれによつて，標點距

離の長さに關する制限が全く撤廢せられ，測定に都合よき任意なる標點距離を自由に使用し得る便益と，それより縱橫變形率の比として求めらるゝポアソン比の値が標點距離に無關係に常に確實嚴正なるべきことゝが，數學的に立證せられ得たのである。かくてこゝに「著者の實驗は如上の理論に基き，梁に純彎曲荷重を作用せしめて起る變形を測定して，混凝土のポアソン比を見出さんとするもの」であり，この點が「在來の實驗とその方法を全く異にする」といふ自信に滿てる言句が湧き出でし次第である。

この理論が，かほどまでに眞に眞實なものであるならば，それは，ポアソン比の決定方法に劃世的な大革命を與へたものである。よつて私はこの驚くべき理論の立場とその誘導過程を今一應回顧してみやうと思ふ。

* * *

既に (2；3) 式を知れる以上，(6；7) は

$$\Delta x=e_x x\,,\quad \Delta y=e_y y\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(9)$$

となし得る筈である。故に (8) に於ける如く，$\Delta x/x$ と $\Delta y/y$ との比を求むることは，畢竟 e_x と e_y との比を求むることに外ならない。然るに (6；7) 從て (9) は，いづれも (1) を前提として誘導されしものである。故に e_x と e_y との比が $(-\sigma)$ たるべきことは (1) そのものゝ內容である。それ故，$\Delta x/x$ と $\Delta y/y$ との比が $(-\sigma)$ たるの故を以て，x, Δx 等の測定に依りポアソン比の値を決定し得となすは，正に假定をもちひて假定を證明せるものであり，論理學上いはゆる循環論法に陷つて居る。故に證明ではなく，繰返しであるのみ。

次に (2；5) の右邊が x, y に無關係なる理由により，「定積分」をもちひてこの微分方程式を解き (6；7) を得て居る。從てその結果に於ては，(9) に於ける如く

$$e_x=\frac{\Delta x}{x}\,,\qquad e_y=\frac{\Delta y}{y}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(10)$$

たることを暗示し，こゝに (6, 7) は，(2, 4) に於ける $d\Delta x$ を Δx に，dx を x に，$d\Delta y$ を Δy に dy を y に置換せるにすぎないことを示して居る。定積分によつて微分方程式を解くことが一般に許容さるべきや否やは姑くおき，如上の積分手續は，はじめ極限概念として成立せる變形度が，有限任意の標點距離に於てそのまゝ眞實性を持續すべきことを容認せるものである。

故に標點距離の任意性も，$\Delta x/x$ と $\Delta y/y$ との比としてポアソン比の決定さるべきことも，ともに式 (8) として價値づけらるものではない。式 (1；6；7) に於て充分である。しかるに (6；7) はいづれも (1；2) を根基とす。故に知る，$\Delta x/x$ と $\Delta y/y$ との比としてポアソン比を決定し得となすことは，あだかも (1) に於て e_x と e_y との比を $(-\sigma)$ と名づけしが如く，根本的な規約であり假定である。これが數學的推論の結論であり得るのは，循環論法の眞實性

が信ぜらるゝ世界に於てである。

今彎曲梁に於て長軸及これに直角なる方向の變形を Martens 式反射鏡裝置により測定し，且つ標點距離の變形は少くとも 0.01 mm までは正確に測るべきものとす。然るときは，常識的ではあるが直感的に次のやうな疑懼を生ずる。假りに今梁の長軸即中軸上に Martens 鏡を裝置し得て，荷重を漸次增大すとする。このとき中軸の彎曲に伴ふて，Martens 鏡も亦多少廻轉運動を起しさうに思はれる點である。蓋し兩端固定梁にあらざるかぎり，中軸は伸縮こそしないけれども彎曲により任意 2 點間の直線距離に 0.01 mm 內外といふ程度の變動はあり得べく，且 Martens 鏡軸の一方は，固定長にして無彎曲の棒にとりつけられ，この棒は中軸とともに彎曲せざるものなるを以てである。このことは梁表面に於ても亦同樣である如く思はれる，すなはち換言すれば，直線尺度を以て單梁面の變形を測定せんとする場合に於て，その Deflection の影響が測定值中に混入する恐れはないであらうか。

然らばこの問題を如上の「實驗原理」の如何に取扱つて居るか。今簡約をはかるために

$$\Delta x=\xi\,,\qquad \Delta y=\eta\,,\qquad \Delta z=\zeta$$

と置き，坐標はそれ自ら正負の符號を內有し，z 軸の正方向を上向にとれば，前節の (2; 3; 4) は

$$e_x=\frac{d\xi}{dx}=\frac{z}{\rho}\,,\quad e_y=\frac{d\eta}{dy}\,,\quad e_z=\frac{d\zeta}{dz}=-\frac{z}{\sigma\rho}\,\ldots\ldots\ldots(11)$$

となり，從て (6; 7) 等は

$$\xi=\frac{zx}{\rho}\,,\quad \eta=-\frac{zy}{\sigma\rho}\,,\quad \delta=-\frac{z^2}{2\sigma\rho}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(12)$$

と變る。而してこの式の意味する所は，變形前 $(x,\ y,\ z)$ なる一點が，ρ なる彎曲をうけて後 $(x+\xi,\ y+\eta,\ z+\zeta)$ に移動すべきことを示す。然らば變形前中軸上の一點

$$x=a,\quad y=0,\quad z=0,$$

は變形後何處に落付くべきか。(12) はこれに答へその變位を與へて曰ふ

$$\xi=0,\quad \eta=0,\quad \zeta=0.\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(13)$$

依て彎曲後も依然として $(a, 0, 0)$ に殘留す。換言すれば，梁が彎曲するもその中軸は空間的に少しも移動を生じない。梁の彈性線が曲線を形成すべきことはこゝに否定せられて居る。すなはち如上の「實驗原理」は，彎曲荷重によつて彎曲せる梁の變形測定に際し，中軸の絕對直線性を條件とする。砕いて言へば，梁が彎曲せざる程度に於て變形を測定すべしといふ困難なる假定を潛在せしめて居る。故に先に述べしが如く，梁 Deflection の影響が Martens 鏡に感入するであらうとの疑懼は，全く一片の杞憂にすぎざりしこと明瞭となつたのである。

上述せる所を要約すれば，梁の實驗によつてポアソン比を決定せんとするには，

(a)　梁を彎曲せしめざること，

(b)　上下梁面に於て，軸及これに直角なる方向に任意標點距離 x, y をとり，その變形 $\Delta x, \Delta y$ を直線尺度にて測定す。然るときは $\Delta x/x$ と $\Delta y/y$ との比を以て梁を構成する材料のポアソン比の値とす。

所謂實驗原理は畢竟この 2 個の規約に外ならぬやうである。然るにこの (a) を如實に遵奉すれば變形は顯現せざるが故に，(b) なる目的を達することが出來ない。これに反して (a) に對する執着を緩にすればする程，Deflection の影響が Martens 鏡に感入すべきことゝなりて結果の厳正は次第に失はれて行く。故に梁によるポアソン比決定方法は本質的に近似性なるものである。

これに反して，純張力または純壓力をうくる直線棒によるポアソン比決定方法は本質的に純正なるものである，ただ實驗上の事實として，後者に於ては，斷面の一樣性を失ひ易き傾向存するのであるが，その點は前者にありても，彎曲による結果の不純性を伴ひ易い。故に梁が，「長き應張材又は應壓材」に比し，はるかに優秀であると一般的に斷言し得るや否やは甚だ疑はしい。混凝土梁の場合にありては，たまたま，彎曲が大となる前に，應張側に龜裂を見出すべきが故に，梁の使用が近似的可能であるのである。

尙，微分方程式の解法に定積分を用ひ得ざること，(2；4) 等の式は偏微分商の形に於て表はすべきこと，從て積分結果は (12) とは稍相違すべきこと，如何に微小なりとも曲能率をうくる梁の撓みを理論的に否定し去るは穩當でないこと，等の問題を殘すのであるが，「梁の使用は本質的に近似的である」といふ主論には著しき影響なきが故に，今これを說く必要はないであらう。

3　等方性の攪亂

既に述べたる如く，混凝土ポアソン比の實驗的硏究に際して製作された供試梁には，鐵筋が挿入されて居る。これは全く，早期の破壞を防ぎかつ强度を增大せしめて，多數の荷重階に於ける變形を測定せんがためであると說明されて居るのであるが，抑一材料に屬する根本特性を究明せんとする場合，單なる實驗的都合により，異質の材料を自由に挿入し得るや否や，これ直感的に起る一の疑問である。以下この解明に際し，鐵筋の挿入されある梁應張側のみにつきて考察すべし，從て應力と言へば張力を指すべきものとす。

今供試梁の構造を見るに，（本誌第十二卷第十一圖 p. 120 の如く）直徑 10 mm の丸鋼 3 本が縱の方向に挿入せられ，荷重點外に於ては更に 10 本宛の緊筋が添加されて居る。而して曲能率は荷重點外部に於て漸減し，支點に到りて零消す。故に軸に平行なる方向に生ずる應張力（以下これを單に軸張力といふ）及それに伴ふ伸び（これを以下單に軸伸といふ）も亦同樣に變化す。同時に軸に直角なる方向に誘發せらるべき變形（以下これを橫縮とよぶ）

も支點に於て零にして，荷重點に接近する程增大すべき本能を有す。然るに3本の主鐵筋の並列せる水平層（これを縱筋層と名づく）近傍に於ては，これをめぐりて徑 5 mm の繫筋數本が，極めて密に挿入されて居る。こゝに於ては從て，混凝土の横縮性は先づ底部繫筋に對する Bond stress として消耗され，如實なる橫縮の實現は甚だしく制限せらる。純張間 108 cm を3等分せる荷重點外各 36 cm なる縱筋層に於ては，鐵筋3本を互に近迫せんとするその他の力存在せざる故，主鐵筋3本の位置はこゝに確固として保持せらるゝこととなる。換言すれば主鐵筋3本はそれぞれ，兩端埋込 36 cm 宛にして徑間 36 cm なる兩端固定桁の形式をとる。

次に荷重點間 36 cm に於て生ずべき軸張力の大部分は，主鐵筋分擔し，言はば全荷重が3本の平行梁に分配せらるゝの觀を呈す。即各鐵筋は夫々の荷重を分擔しつゝ然も各獨立的に自己の職分を遂行す。この事由及上述3分點外に於ける兩端固定性とによりて，中央3等分間に於ても亦，縱筋層に於ける鐵筋位置は空間的に固定せらる。この狀態に於て，鐵筋自身は，その應力程度に相當する軸伸及橫縮を顯現す。このとき混凝土中にも固より軸張力及軸伸生じ，よつて又橫縮を隨伴す。然るにこの橫縮性は，鐵筋位置の固定性及それ自身の位置に於ける鐵筋の橫縮性に比すればはるかに微弱である。從て混凝土は，鐵筋3本を近迫せしめて自らの短縮量を實現し了る程の力をもたない。こゝに於て混凝土は，橫の方面にも亦應張力を生じ，所謂2軸性應力の出現を見るのである。

斯くの如く縱筋層に於ては，軸張力によりて橫張力誘發せらるゝのであるが，若しこれを逆にし，先づ始めに（前の軸張力に相等しき）橫張力を與ふるとき果して（前の橫張力に相等しき）軸張力を生ずるや否や。供試梁の構造より見て，それは不可能である。すなはちこゝには彈性力學の出發點に於て想定せらるゝ基本前提の一つ,「材料の彈性的特性はすべての方向に相等し」といふ等方性が，全く蹂躙され終つて居る。これ縱筋層に於ける如實の光景である。

さて次に變形測定の裝置を見るに，標點は鐵釘を石膏にて混凝土中に埋沒密着せるものであつて，その鐵釘の脚の深さは（本誌第十二卷第十一圖 p. 212 によれば）約 10 mm である。故に測定されし變形はこの 10 mm 層に於ける變形の平均値に近きものである。厚さ 10 mm なるこの混凝土板は，それ自身を切離せば均質的であり等方的である。けれども實際にはこの測定層が獨立し孤立し居るものではなく，それは同じく梁の一部として上の縱筋層に接續して居る。

然るに供試梁の材料たる砂交り砂利は，（本誌第十二卷 p. 216 によれば）5 mm 目を有する篩上の殘渣合計 26.42 % なる組成を有し，粒の大さ 7—25 mm の砂利1容積が 0—7 mm の砂4容積に配合せられ，容積にてセメント1に對し砂及砂利4を以て混凝土は

製作されて居る。故に空隙の充塡を考慮すれば，混凝土の 1/4 に近き（若しくは 1/5 以上の）容積は粒の大さ 5 mm 以上の砂利より構成せられて居る。更に主鐵筋と梁下表面との間隔は 15 mm 鐵筋と測定層との間隔は僅に 5 mm である。それ故に縱筋層と測定層との間には，材料的區劃を立てがたく，この兩部にまたがれる砂利幾多在存す。

弾性力學上の基本的前提として，均質的なる弾性體內部にありては，應力及變形は全く連續的である。この應力變形に不連續性の存せざることは數學的弾性論の根基をなすものであつて，それより導ける式例へば第一節の（6；7）に如何なる坐標を挿入するも，その變域が梁內に存する限り變形の不連續性を生ずることはない。われらの弾性力學はかゝる變域を豫定して居る。

さて縱筋層に於ては，混凝土の等方性は全く攪亂せられて二軸性應力出現す。而して測定層は縱筋層を距ること僅かに 5 mm にして，この兩部は材料的には充分密接連續して均質的である。從てこゝには應力變形の連續性を承認せねばならぬ。既にこの 2 層間に弾性的不連續性存在せざる以上，縱筋層に於ける二軸應力性は，その影響を測定層にまで波及すべきことゝなる。こゝに於て應張側に於ける混凝土の横縮性は著しく阻害せられ，横變形度 e_t は實際以下の値を呈示す。然るに縱變形度 e_l はこれに無關係なるを以て，e_l/e_t として求めらるゝポアソン比 σ_t は，鐵筋の挿入により著く過大に算出せらるゝ結果となるのである。かの「混凝土のポアソン比に關する實驗的研究」の著者が多大の犧牲をはらつて完成し得たところの應張側ポアソン比

$$\sigma_t = 7-8 \qquad 或は \qquad 9—10$$

といふ値は，如上の考察よりすれば，その確實性が甚だ疑はしい事になる。しかしてこの問題を解くべき鍵は，決して問に對する答を以てたやすく代用し得るところには存在しない。即ち縱鐵筋の量及其配列を種々に變化せる樣々の梁について，再び實驗を行ひその得た結果が，鐵筋の量及配列に全く無關なりや否やによつて決せらるべき問題である。その實驗に際し，若し應壓側にも更に鐵筋を挿入せる供試梁を加へるならば一層興味あるものである。

既に σ_t がかくの如く不確定なるものとすれば，それを用ひて導ける應張側の縱弾率 E，横弾率 G，弾率比 ε 等の値がどの程度まで信用し得るものであるかは自ら明瞭であらうと思ふ。

4 結　　言

如上の叙説は稍理論倒れのしたきらいがないではありません，それを私は充分に承知して居ります。然し評論の對象は，實用的構造物を設計する場合とは異なり，弾性力學の根基をなすべき一常數の問題である故に，この推論の缺陷を知りつゝ尙批判の嚴密性を棄て得ないのであります。

一現象に對し或る立場を前提として一系の實驗及理を組立つることは自由であります，同時に異系の立場が可能であることが少くありません。姑く思索の範圍を實驗の場合に限るならば，甲前提による結果は實驗精度を加ふるとともに精細さを加へます。然しそれだけでは單に甲系に於て「精密に算出し得らるゝ事を確め得た」にすぎず，その前提の普遍性や乙前提の劣等性を立證し得た事にはなりません。二つの實驗的立場を同一水準に於て批判するためには，先づ同一精度に於て2系の實驗を完成すべきであります。

供試體の條件及實驗方法を全く同一にして得た實驗結果は，その範圍内に於て正當なるは言ふまでもありません。けれどもそれを直に同一水準に於て他系の實驗に對比することは如何かと思ひます。同一精度に於て，供試體條件を變へるとか，或は非梁的實驗を加へるとかしなければ，梁による立場の普遍性を自證し得ないでありませう。これらの事は同じ著者によつて他日完成せられ，私の杞憂が全く霧散する折あるべきを私は期待して居ります。さあれ一系の實驗としてこゝにはポアソン比の「梁による決定方法」の結果が完成せられた事は，學界のため甚だ幸慶と存じます。この著者に對しては深甚の敬意を表するものであり，貴重なるその實驗錄に對し蕪言を呈した非禮は幾重にも著者の御宥恕を冀ふ次第であります。

（完）