

## 論 說 報 告

土木學會誌 第十二卷第五號 大正十五年十月

# 地震に強張さるゝ架構體の 高次振動に就て

會員 工學博士 眞 島 健 三 郎

On Multiple Node Vibrations of Structures caused  
by Earthquakes.

By Kensaburo Majima, Dr. Eng., Member.

### 内 容 梗 概

本誌第十卷第一號掲載小著「地震動に依る構造體の振動時相」(以下時相論と稱す)及び其續稿たる第十二卷第二號所載の「重層架構建築耐震構造論」(以下構造論と稱す)は専ら構造體の一次振動のみを採り高次振動は全く除外せるものであつて、理論の上から不備であるのみならず、其影響にも稍無視し得ざるものありと認めらるゝに依り、茲に之が研究を補足し高次振動の現はるゝ理由、其状態及び數量算定の方法を説き架構部材強度計算の用に供し併せて前論の不備と誤認を補正せんとするものである。

### Synopsis.

In the writer's two papers, entitled "On the Phases of Oscillation of Structures caused by Earthquakemotion" on the Journal of the Society Vol. X, No. 1, and "Construction of Multiple Story Buildings subjects to Earthquakes," on Vol. XII, No. 2, he treated the subjects by applying the theory of vibration, having only a single nodal point, and those with two or more nodes being taken entirely out of considerations. So they are not yet perfect in their reasoning, and further by his recent researches on the subject, make him to recognize the fact, that the effects of the vibration with multiple nodes, upon the strength of structures, are not so little a measure as we generally supposed.

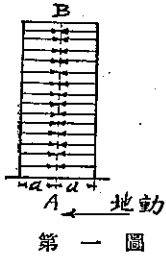
In consequence, the object of present paper, as supplement to his past works, is briefly to describe the reason, why the multiple node vibration may occur under earthquakemotion, to know their forms of deflection and amounts of stress and strain come thereon, to show their applications on the actual works, and at the same time to correct the errors in his papers, cited above.

目 次

	頁
第一節 高次振動の現はるゝ理由と其状態	2
第二節 各次歪形の加速度分擔割合	3
第三節 架構體の二次振期と其歪形	5
第四節 地震に依つて強張さるゝ各次歪形の時相	6
第五節 計算例	9

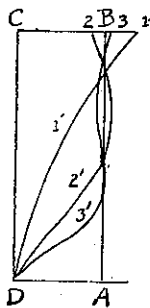
第一節 高次振動の現はるゝ理由と其状態

弾性體に加へらるゝ凡ての弾性歪曲は自己振動を生じ、其歪形は單一次數の自己振動形であるか、或は數次合成の自己振動形であるかは物理學の證明する所である、従つて各次の振動に要する加速度分布割合は各當該次の振動歪曲と相似關係である、然るに地動に依つて刻々構造體の下底に加へらるゝ運動は構造體の各點を地動と同方向に前進せんとすると同時に又慣性に依つて同一の力を以て現狀を維持せんとするのである。其力は下底に支へられて偶力をなし茲に弾性歪曲を生ずる。



第一圖

其加速度分布は第一圖の如く構造體の高さ  $AB$  と地動加速度を邊とする矩形で表はし得るは時相論に於て詳述の通りである、故に之に應ずる構造體の弾性運動が刻々地動より受くる加速度分布は各次のものを合せて之と相似形でなくてはならぬ、然るに單一次數の振動歪形で之と相似のものは絶無である。茲に多數の自己振動歪形が同時に發生し互に援助控制し結局構造體各點に於ける加速度分布は當初の矩形となり理論と一致することになる、今一次以上の高次歪曲の加速度を凡て同一尺度で表し、且つ各次の發生割合を増減すれば大要第二圖の如く矩形に近い分布が容易に得られる、例へば地動より加へらるゝ分布を  $ABCD$  とすれば一次歪曲  $11'D$  は僅かに矩形の上半を要し、下半は空



第二圖

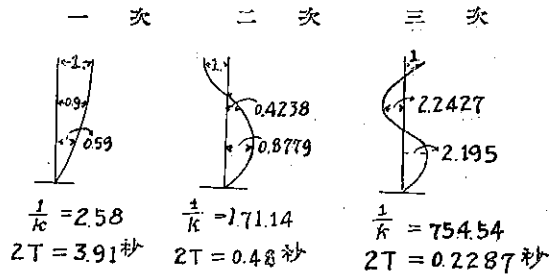
虚で一次振動には全く不要である、之に二次形  $22'D$  が加はり、一次との交點以上は一次と相殺し、同點下は新に矩形内の一部が利用される、但し二次以上の高次歪曲は必ず一低次の歪曲を静止中軸として振動する歪形である。更に三次、四次と順次多數の高次歪形の増援を受ければ當初の矩形面積は全く充足され地動に依つて各點に加へられた加速度と依つて生ずる運動に初めて平衡が得られる理である、斯の如く理論の上から下底が運動すれば他の各點は無數の高次歪形を發生し、與へられたる加速度の分布と之に對應する歪形の加速度分布は全く同形である、勿論實際に現はるゝ歪形は各次加速度の尺度が異つて居るから假令之を合成するも直に矩形とは

ならぬ、若し之を各次に分割すれば各次負擔の加速度分布は各其歪形と相似形である、茲に余が一次形のみを取り矩形の全量を之に換算する方法を採りしは尙靜力的考察を脱せず全く誤謬である、尤も後述の如く一次負擔量の相違は何れに依るも僅少の差にて實用上一次負擔量を余の前法に依つて算定するも差支ないが、理論の根本に於て相違あるから茲に之を訂正し讀者各位の諒恕を希つて置く。

## 第二節 各次歪形の加速度分擔割合

地動の一瞬各點に受くる加速度は皆同一である、之を多數の自己振動歪形で對應せんとするには先づ何れの歪形が何程を分擔すべきやを知るの要あるが多くの場合難問である、然れ共架構體の如き近似的に質量の所在を各層に限定し、且其各次歪形を相當精度に算定し得らるゝ場合は左まで六ヶ數ないと思ふ。

例へば構造論所載の十一例に付て見るに各次の歪形は凡そ次の如くなる



第 三 圖

今各次の負擔割合を  $\alpha\beta\gamma$  とすれば、各質點に於て次の聯立方程式が成立する

$$\alpha - \beta + \gamma = 1$$

$$0.9\alpha + 0.4238\beta - 2.2427\gamma = 1$$

$$0.59\alpha + 0.8779\beta + 2.195\gamma = 1$$

$$\therefore \alpha = 1.1563 \quad \beta = 0.21506 \quad \gamma = 0.05876$$

となり各次の分擔量が判る、斯の如く各次の歪形が先決問題である、然るに之を稍正確に算定するには構造論所載の (24), (25) 式を解かねばならぬ、之も 7, 8 層が最高程度であるから消去法や近接法を利用して稍簡易に扱ふ方法もあらうと思はれるが、何れにしても可なり面倒で又夫程面倒を見る價値に乏しきものである、余は數次の試算と下記の理由から近似的に一次及び二次の分擔割合を定め、三次以上を棄てゝ差支ないと思ふ、例へば  $\alpha\beta\gamma\delta$  を各次の割合とすれば、架構の上端に於て常に下式を満足しなければならぬ。

$$\alpha - \beta + \gamma - \delta + \varepsilon - \zeta + \dots = 1$$

然るに各數値間には試算に依り何時も次の關係が現はれる

$$\alpha > \beta > \gamma > \delta > \dots$$

$$(\alpha - \beta) > (\gamma - \delta) > (\varepsilon - \zeta) > \dots$$

且又  $\gamma$  以下の數値も其差  $(\gamma - \delta)$ ,  $(\varepsilon - \zeta)$ ... も  $\alpha\beta$  或は  $(\alpha - \beta)$  と比較して微小である, 故に數層の場合  $\alpha\beta$  値を定むるに  $\gamma$  以下を棄て

$$\alpha - \beta = 1$$

と置いて大差ないものと思はれる, 但し 3 層架構の場合は  $\gamma$  を棄てる影響が稍大きくなる故に 3 層の場合は下式

$$\alpha - \beta + \gamma = 1$$

に依るが至當と思はれる。大體層數が偶數であれば  $\gamma$  を棄てたもので澤山だが, 5 層, 7 層の奇數の場合も最後の値が微量であるから  $\gamma$  を棄てた關係から求めて差支なからうと考へられる。且又三次以上の歪形は振期が極めて短く大地震に感應する歪量は頗る微弱となり強度計算には全く用なきものと見て差支ない, 従つて上記分擔割合を求むる爲に大きな影響もなき三次以上の歪形を求むるは無益と思ふ, 更に又地動に依つて刻々加はる全力を一次歪形に換算せる余の従前の方法, 則ち振動中心點の加速度と地動加速度を同一に採りたる場合の上端の加速度の割合を  $\alpha$  とし, 余の構造論所載 2 層以上の計算例より順次摘出すれば  $\alpha'$  は次の如くなる,

2 層	1.084	1.122	1.207	1.121	1.127	1.173	1.143
3 層	1.144	1.111	1.122				
6 層	1.116						

斯の如く  $\alpha'$  の値は各層凡そ一樣で近似的に  $\alpha' = 1.12$  位と見て差支へない, 然るに  $\alpha'$  は上記の通り單獨にて全力に匹敵する一次歪形の換算量である, 従つて二次以上の助勢ある  $\alpha$  が  $\alpha'$  より大なるべき場合は絶無である, 又  $\alpha$  は常に 1 より大である, 故に其關係は次の如く見られる

$$1 < \alpha < 1.12$$

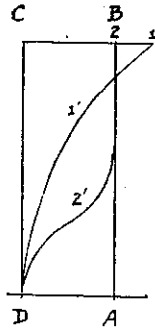
従つて  $\alpha$  の値を

$$\alpha = 1.1 \text{ or } 1.2 \quad \beta = \frac{1}{10} - \frac{1}{5}$$

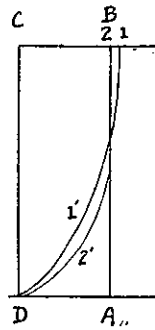
に取れば實用上差支ないと思はれる, 其小値は普通の場合, 大値は 3 層架構の場合に適すと思ふ。

以上は主として柔架構體について立論せる所であつて極體とは可なり大きな相違がある。今若し柱體の一, 二次振動歪形を組合せば大要第四圖の如く其一次歪  $11'D$  は上るに従ひ

歪量の割合が増加し  $ABCD$  矩形内に納まるものが少く傾る不利な形である、従つて二次以



第四圖



第五圖

上の助勢を要するものが多くなり高次の現はるゝ量が大  
きい筈である、殊に一見二次振動が多く加はり得る形状  
である。故に下底固着の完全なる煙突等に於ては二次に  
對する用意が又最も必要と思はれる、然るに架構體殊に  
余の推唱する構造に於ては第五圖の如くなり一次形  
 $11'D$  は矩形内の大部分を占め剩す所少く二次以上の助  
勢を要する部面の極めて狭小なるは又一見明瞭である、  
斯の如く兩者間には顯著なる相違がある、従つて兩者の  
震害状態にも大きな相違が生ずべき理と思はれる。

### 第三節 架構體の二次振期と其歪形

架構體の高次振期を稍正確に知らんとすれば小著構造論第 (24) 式を解かねばならぬ、然  
るに柔架構の二次振期は眞に狭い範圍の様である、試に余の構造論所載の數例について一  
二次振期を對照すると次の結果となる

架構圖	一次振期 秒	二次振期 秒	比	架構圖	一次振期 秒	二次振期 秒	比
	1.7648	0.3676	4.8		1.6047	0.3103	5.2
	2.4175	0.4321	5.6		2.1874	0.357	6.14
	2.8195	0.4349	6.5		2.554	0.3689	6.94
	4.537	0.386	11.8		3.91	0.48	8.14

(圖中○印は滑節 ×印は弛緩剛節を示す)

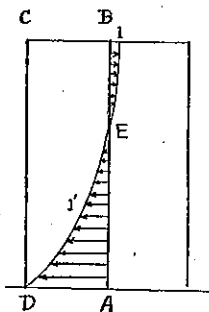
第六圖

上記の如く一次と二次振期の比は一定でなく架構の剛度に依つて大差がある、則ち剛なる程  
其比は少なく柔なる程大である、又一次振期が 3 秒 4 秒と云ふ長いものであつても其二次  
振期は 0.4 秒内外に止まり、一次が 1 秒 2 秒と短縮しても二次は矢張り上記の範圍を出でず  
一般に柔架構に於て二次振期を近似的に 0.4 秒内外と取るも不當でない、眞に其變化の範圍  
は狭いものである、故に長期の一次振期を有する 架構體に於ては其二次振期が延びて大震

の振期1秒内外と近づくものと思ふは全く膠見と思はれる、故に高層建築に於て二次振期を凡そ0.45秒に取り、之を構造論所載(22)に入れ $n$ 式の内上端に相當する1式を除き消去法に依つて $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}$ を算出すれば大體近似歪形が得らるゝ、之等の $\delta$ 値を先に除きたる1式に挿入し夫より振期を算出したるものと假定の振期を對照すれば其精度が判る、若し其差が稍大なれば更に假定振期をかへて2, 3回繰返へせば一層正確なものを得らるゝ、等である、之等の操作は一見甚だ面倒の如く思はれるが少しく慣れると見當も早くつき大した難事とは思はれぬ、且又二次歪形は局部的に壁や床材の補強影響が多く架構のみを取る場合と可なり相違があり到底適確なものは得がたく、左程面倒をかくる必要はあるまいと思ふ、何となれば歪形の少々の相違よりは地動の共鳴作用が大きな影響を以つてゐる、従つて振期に大きな差がなければ其影響は少ないものと見てよい譯である、故に前節に依りて強制加速度の分擔量が定まり、又本節によりて大差なき振期を得れば二次歪形の如きは凡そ1, 2回の操作で得たる近似値で實用上充分と考へられる。

#### 第四節 地動に依つて強張さるゝ各次歪形の時相

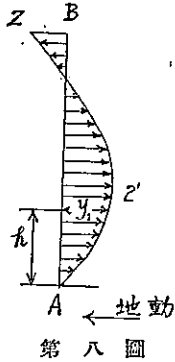
前述の如く架構體の下底が地震に依りて振動さるれば一次歪形が起り一次を廻りて二次が起り、二次を廻りて三次が起り順次高次振動が發生強張さるゝ等であるが、三次以上は負擔量が僅かで共鳴力が微弱であるから顧みるの要はない、然れ共若し之が地動振期と一致する場合ありとすれば勿論大振動を起し得るのであるが、地動の振期も振幅も刻々變化し且高次の負擔量も微弱であるから假令短期間同期の場合ありとするも危険なる歪量に達するにはより多くの時間を要すべく、其内には地動振期も變遷し危害を受くるが如きは先づ稀であらうと思ふ。要するに高次と地動振期の接近に依る危険は一次の場合の如く著大でないことは明である。



第七圖

一次歪形の共鳴量は時相論に説明の通りである、唯其相違は地動の不感點を振動中心點に取りしは訂正を要すべき點で、之は第七圖の如く第二節に依り畫きたる一次歪形と矩形の一邊 $AB$ との交點に取るべきである、則ち同點では前進せんとする加速度と後方に曲げんとする加速度が相殺して零となる點である、故に一次歪形の最大感應歪量として時相論及構造論に掲げしものは其儘同點の歪量として使用し差支ない理である。假令振動中心點を不感點とし大なるものを用ふるも第二節説明の如く1.12と1.1位の相違で實用上大きな影響はないのである、結局一次歪形が刻々地動より強制さるゝ各點の加速度分布は第七圖 $AB$ 線と $11'D$ 曲線間距に相當し之に依つて各點の一次運動が強張さるゝのである。

然るに二次以上の運動は各一低次の歪形を静止中軸として振動するもので、假りに一次中軸を直線に直して之と相對的に二次歪形を畫けば第八圖の如く全く左右平衡を得たる運動である、之を強張せんとする運動の方程式は下記の通りとなる



$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} = \beta f(h) \frac{d^2 y}{dt^2} - R^2 y_1$$

上式中  $y_1$ ; 任意點の歪量,  $f(h)$ ; 高さ  $h$  の函数で便宜上端を 1 としたる二次歪形を表す,  $\beta$ ; 第二節に依る二次歪形の分擔量,  $d^2 y/dt^2$ ;  $t$  時點の地震加速度又  $y$ ; 静止點より地震距離,  $T_2$ ; 二次振期の半  $R = \frac{\pi}{T_2}$  又  $T$ ; 地動振期の半  $P = \frac{\pi}{T}$ ,  $Q = \frac{2\pi}{T}$ ,  $a = \frac{\text{振幅}}{2}$  上式は構體體の上

端に於て 
$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} + R^2 y_1 = \beta \frac{d^2 y}{dt^2} \dots \dots \dots (1)$$

時相論に於ける如く地震初動の場合 (1) 式は次の如くなる

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} + R^2 y_1 = \frac{a\beta}{2} Q^2 \cos Qt \dots \dots \dots (2)$$

上式を解けば

$R \neq Q$  の場合

$$y_1 = \frac{\frac{a\beta}{2} Q^2 \cos Qt}{R^2 - Q^2} + A \cos Rt + B \sin Rt \dots \dots \dots (3)$$

$R = Q$  の場合

$$y_1 = \frac{a\beta Q t}{4} \sin Qt + A \cos Rt + B \sin Rt \dots \dots \dots (4)$$

主動の場合

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} = -a\beta P^2 \sin Pt$$

依つて  $R \neq P$  の場合

$$y_1 = -\frac{a\beta P^2 \sin Pt}{R^2 - P^2} + A' \cos Rt + B' \sin Rt \dots \dots \dots (5)$$

$R = P$  の場合

$$y_1 = -\frac{a\beta P t \cos Pt}{2} + A' \cos Rt + B' \sin Rt \dots \dots \dots (6)$$

(3) 式から 若し  $t=0$  ならば

$$y_1 = 0 \quad \frac{dy_1}{dt} = 0$$

$$A = -\frac{a\beta}{2} \frac{Q^2}{R^2 - Q^2} \quad B = 0$$

$$\therefore y_1 = \frac{a\beta}{2} \frac{Q^2}{R^2 - Q^2} (\cos Qt - \cos Rt) \dots\dots\dots(7)$$

(4) 式から  $t=0$  の場合

$$y_1 = 0 \quad \frac{dy_1}{dt} = 0$$

$$A = 0 \quad B = 0$$

$$\therefore y_1 = \frac{a\beta Qt}{4} \sin Qt \dots\dots\dots(8)$$

$Q < R, P < R$  の場合 (5) と (7) 式を組合はせて (5) 式の  $A'B'$  を決定すれば (5) 式は次の如くなる

$$y_1 = \frac{a\beta P^2}{R^2 - P^2} \left( \cos R \frac{T}{2} \cos Rt + \sin R \frac{T}{2} \sin Rt - \sin Pt \right) - \frac{2a\beta P^2}{R^2 - P^2} \left( \cos Rt + \cos R \frac{T}{2} \cos Rt + \sin R \frac{T}{2} \sin Rt \right) \dots\dots(9)$$

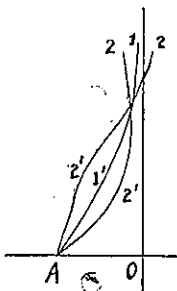
$Q = R, P < R$  の場合 (5) 式と (8) 式より算出し (5) 式は次の如くなる

$$y_1 = \frac{a\beta\pi}{4} \sin 2Pt - \frac{a\beta}{3} (\cos 2Pt + \sin Pt) \dots\dots\dots(10)$$

$Q > R, P = R$  の場合 同様 (6) 式と (7) 式より算出し (6) 式は次の如くなる

$$y_1 = -\frac{a\beta Pt \cos Pt}{2} + a\beta \left( \frac{2}{3} + \frac{\pi}{4} \right) \cos Pt + \frac{2a\beta}{3} \sin Pt \dots\dots(11)$$

上記の諸式から 構造体上端に於ける 任意時点の歪量が算出される、其最大なるものが二次歪形の最も不利なる場合である、之に相當する他の點の歪量は二次歪形が判つてゐるから直に又算出される筈である、然るに一次歪形の最も不利なる時点と二次歪形の不利なる時点は多く一致するものでない、故に正確に考ふれば一次時相曲線を中軸として二次時相曲線を畫



第九圖

き之等と地動時相曲線の相互關係を對照して其最も不利な時相を取るべきである。假令ば第九圖 11'A を或時点の一次歪形とすれば、地動時相曲線より同時點に於ける下底の移動距離 OA が判り O は原點とす。同時點に於ける地動及び一次時相曲線の差より他の一點の位置が定まり従つて一次歪形に相似關係として全中軸曲線が畫かれる。一次の時相曲線は不感點を探つてあるが之を二次と合成するには寧ろ上端に修正しておくが便利である、之が爲には地動及び一次時相曲線の差に第二節掲ぐる所の一次分撓量  $d$  を乗じたものを差としたる修正一次時相曲線を使用すればよい、又二次時相曲線は修正されたる一次時相曲線を中點として次數に應じて畫がき置けば其差は直



に任意時點に於ける上端の二次歪量に相當する其差は正負に依り或は一次の左側或は右側となる。之を取つて第九圖 2 點を定め二次歪形に依りて  $11'D$  を中軸として  $22'D$  を畫く事が出来るのである、故に任意時點の振期が判り之に加はる各次の力が算定され、其合成力が或點に最も不利な内應力を生ずる場合を取つて同點の強度を定むべきである。斯の如きは正當の順序で稍面倒である、多少の不利はあるが安全の方であるから手数を省かんとすれば一次の最も不利な場合と二次の最も不利な場合を取り且二次を一次の何れの側にも置いて之に對する内應力の大なるものを取れば計算の勞は少く急ぐ場合よからうと思ふ。

### 第五節 計算例

試に構造論所載第十一例を取つて計算すれば下記の如くなる。

二次振期は 0.48 秒となる、地震振期を 1 秒振幅 12 cm. とすれば  $a=6$  cm.  $P=\frac{\pi}{T}$

$$Q=\frac{2\pi}{T} \quad R=2.083\pi$$

∴  $Q=R$  の場合に近きを以つて近似的に初動の地震期と二次振期を同期と見做せば (8) 式より

$$y_1 = \frac{a\beta Qt}{4} \sin Qt$$

又 (10) 式より

$$y_1 = \frac{a\beta\pi}{4} \sin 2Pt - \frac{a\beta}{3} (\cos 2Pt + \sin Pt)$$

上式の最大  $y_1$  値は  $T$  の奇數倍の前後  $\pm\left(\frac{1}{4} + \frac{7}{90}\right) T$  の附近にあつて

$$y_1 = 1.05 a\beta \quad \text{となる} \quad \beta = 0.215$$

$$\therefore 2\delta_3 = \mp 1.3545 \text{ cm.} \quad \text{at top floor}$$

$$2\delta_2 = \pm 1.3545 \times 0.4238 \quad \text{at 2nd floor}$$

$$2\delta_1 = \mp 1.3545 \times 0.8779 \quad \text{at 1st floor}$$

$$2P_3 = \pm 4,172.6 \text{ kg} \quad 2V_3 = \mp 2,628.45 \text{ kg}$$

$$2P_2 = \pm 1,964.82 \text{ kg} \quad 2V_2 = \mp 2,969.8 \text{ kg}$$

$$2P_1 = \pm 4,069.2 \text{ kg}$$

$2P$   $2V$  は次の歪曲、水平力、垂直力を表はす。

一次のものは構造論所載のものと大差なきを以て之を取り上記二次のものと組合はせ各局部に於ける最大彎曲力率を取れば下記の如くなる

下層柱の上端	1,631,102	kgcm
二層柱の上端	1,302,781	„
三層柱の下端	985,568	„
三層柱の上端	1,111,160	„
三層梁端	1,111,160	„
二層梁端	2,152,622	„
二層梁端の縁維應力度	1,833	kg/cm <sup>2</sup>
下層柱	1,255	„
三層柱	1,188	„

二次を考慮すると上記の如くなり第二梁の負擔は稍過大である、故に柱の接續附近に於て今少しく断面を増加するもよいと思ふ、尤も前記の値は一次の最大と二次の最大を取つてあるから實値は之より少かるべく且地震は一時的であるから縁維應力が弾性限度に近づくとも先づ危険はないと思ふ。

若し二次振期と地動振期が一致すれば (11) 式となり  $y_1$  は  $t$  の増加と共に正比増加して止まざるは明かである。又第四節各式の各項には分擔量  $\beta$  がかゝつて居る、 $\beta$  は既述の如く凡そ  $\frac{1}{10} - \frac{1}{5}$  であるから之を無視したる場合とは大きな差が出る、従つて一次振期が地動振期の半位の剛建築に於て其内應力が頗る大なるものあるにかゝはらず、一次が 2 秒 3 秒と云ふ柔建築に於ては假令其二次振期が地動振期の半なる場合と雖其共鳴歪量は系数  $\beta$  に依つて大に減ぜられ一次二次を合計するも其内應力は剛建築の場合より遙かに少量である、故に一次も二次も其振期と地動振期の比が同一であれば同じ働をなすと思ふは大なる謬見である。且又二次として加はる力は大きくとも左右相殺する量が多く結局柱の彎曲率を増加するものは左まで多からず、前記計算を見るも柱の最大量には大差なく、唯梁に於て著しき相違を認めらるゝも約一次の倍大と見れば安全である。然るに之を一次振期 0.5 秒のものについて見るに其最大感應歪量は前記計算の一次振期 3.91 秒のものと略同様である、故に兩者の比は

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \alpha; \quad \left(\frac{\pi}{4T}\right)^2 \alpha = 4 \times 16 = 64 \text{ 倍}$$

となる、若し後者に二次を加へ倍大とするも尙 32 倍大の相違がある、剛柔建築の負擔に大きな相違があるには驚かざるを得ないのである、二次に對する余の見解は上記の通りであるが議論の根柢には尙多くの缺陷が潜んで居るだらうと思はれる、切に讀者各位の教示を煩はしたいのである。(完)