

論 說 報 告

土木學會誌 第十一卷第四號 大正十四年八月

扭 力 論

扭力の理論及び實驗を論じて
鐵筋混凝土の扭力抵抗に及ぶ

前 編

會員 工學士 宮 本 武 之 輔

内 容 梗 概

本論文の目的とする所は、軸の扭力に關する古來の理論的研究及び實驗的結論を検討して、之を鐵筋混凝土に及ぼし、鐵筋混凝土抗扭材に對する理論公式を制定して、此の結論を著者自らの實驗に依りて立證確定せんとするにあり。本編に於ては專ら扭力に關して古來發表せられたる理論及實驗を蒐録して、或は之を論評し、或は之を演釋して、此等を數字的に比較對照せしめたるものにして、今後に於ける著者の推論の根據は、殆んど剩す所なく、之を網羅したり。

目 次

	頁
序 言	3
第一編 扭力の理論	5
第一章 總 論	5
第二章 扭力の舊理論	16
第三章 扭力の新理論	24
第一節 サン・ヴナンの解法	24
第二節 グラスホフの解法	41
第三節 ヘルマンの解法	45
第四節 フェップルの解法	53
第五節 プラントルの解法	57
第六節 ヘンネベルグの解法	61
第七節 ウェエバアの解法	65

第八節 扭力の解法の評論	77
第四章 軸の應裁力	83
第一節 圓形斷面の軸	83
第二節 楕圓形斷面の軸	85
第三節 矩形斷面の軸	88
第四節 正多角形斷面の軸	106
第五節 その他の斷面の軸	110
第五章 軸の扭力率	123
第六章 軸の仕事	127
第七章 軸の扭力角	130
第一節 グラスホフの解法	130
第二節 仕事の公式に依る解法	134
第三節 サン・ヅナンの解法	136
第四節 バウシンガアの實驗	138
第五節 プレチュナイダアの實驗	142
第六節 バッハの實驗	145
第七節 フェップルの實驗	147
第八章 軸の曲面の研究	151
第二編 軸の破壊	157
第一章 軸の經濟的形狀	157
第一節 斷面積と應力度との關係	157
第二節 斷面形狀と破壊強度との關係	158
第二章 軸に於ける應力の合成	162
第一節 扭力率と彎曲率との合成に依る主應力	162
第二節 扭力率と軸應力との合成に依る主應力	168
第三節 扭力率のみに依る主應力	169
第四節 扭力率と裁力との合成に依る主應力	169
第三章 剛性係數	170
第四章 軸の破壊	182

序 言

著者、曩きに日本工人俱樂部土木講義録のために、混凝土及び鐵筋混凝土工學を講述するに方り、鐵筋混凝土螺旋杭の設計を説明して、本書第四編中に採録するが如き、一つの理論公式を與へたりしが、該公式は軸の横断面に於ける鐵筋及び混凝土の抗裁力のみを考慮したるものにして、本書第三編第四章に紹介せる、アグスト・フュッブル教授の制定せる公式と、期せずして相一致したるものとす。

然れども此の公式は鐵筋混凝土軸の設計にあたりて、充たされざる可らざる必要條件の一を與ふるのみにして、未だ以て充分なる條件と稱す可らざるは、當時既に著者の指摘したる所にして、混凝土軸に縱鐵筋を挿入するも、さしてその扭力抵抗を増大することなきに反し、之に螺旋筋を挿入すれば著しく軸の扭力抵抗を増す事實は、毫も此の公式に依りて説明する能はず。思へらく、鐵筋混凝土軸の設計に使用す可き公式は、斜めの方向に於ける主應張力の理論的研究と混凝土の彈性に關する實驗的結論との基礎の上に樹立せられざる可らずと。

偶々大正十二年十月より同十四年三月に至る間、歐米各國を巡遊するの好機を得て、到る所、此の問題の解決のために意を用ひたりしが、佛國にありては佛國學士院會員メナアジュエ教授 (Prof. Mesnager) を訪ねて、同國に於ける此の種の研究の猶ほ未だ、極めて幼稚なる實狀を聞知して、早く既に失望の念に驅られたりと雖も、次いで居を獨逸に移すに及んで、親しくシュツットガルト及びミュンヘンに於けるテヒニッシュ・ホホ・シュウレ 附屬材料試験所を訪れ、獨逸に於ける混凝土及び鐵筋混凝土の扭力抵抗に關する研究が、遙かに他の歐米各國を凌駕するものあるを見聞して、汎くそれらの實驗資料を蒐集する傍ら、シュツットガルトのバウマン教授、ミュンヘンのフュッブル教授等に指導を仰ぎ疑義を質す機會を得て、古來歐米各國に於て發表せられたる扭力理論の研究及び單に混凝土のみならず、金屬材料に就て古來試みられたる、扭力に關する幾多の實驗報告を通讀するがために、數箇月を伯林に送りり。

鐵筋混凝土軸に關するパッフ教授の實驗 (1912年發表) に就ては、著者は既に米國ティラア及びトムソンの著作に係る、混凝土及び鐵筋混凝土中に、その一斑を窺知することを得たりしが、佛國鐵筋混凝土委員會の實驗、獨逸に於けるシュムルシュ教授の實驗、グラフ氏の實驗、フュッブル教授の實驗、加奈陀に於けるヤング

教授の實驗の如き幾多有益なる實驗報告を蒐集したるのみならず、親しく此等の實驗が行はれたる材料試験所を訪ねて、その實驗裝置を縦覽すると共に、具さに之が説明を聴取することを得たるは、偏へに著者、今回の外遊の賜と言はざる可らず。

英國にありては、未だ鐵筋混凝土の扭力實驗の行はれたるものあるを見ず、著者は之を倫敦、シティ・エンド・ギルズ工科大学のディクソン教授に確かむることを得たりしが、加奈陀に於けるヤング教授の實驗に就て聞知することを得たるは、米國イリノイ大學に於けるタルボット教授の懇篤なる注意に依り、又同實驗の報告を入手することを得たるは、實にトロント大學ヤング教授の好意に出づ。

本論文第一編乃至第三編は、殆んど全部著者伯林滯在中の執筆に係り、歸朝後之に多少の補正を施すと共に、數字的計算を追加したりしが、第四編は専ら歸朝後の起草に係る。

本論文に於て歐米各國に於ける古來の貴重なる文献を列擧し、殆んど剩す所なく扭力の研究資料を網羅することを得たるは、私かに著者の本懐とする所なりと雖も、それらを茲に採録するにあたりては、その間、原著者の眞意を誤り傳へ、或は原著者に對して禮を失する評論を試みたるなきを保せず。或は又著者が筆寫又は公式變形に際し、若しくは原稿の活字印刷に際し、多少の誤を含むことある可きは多言を須ひず。加之、著者の推論、固より生硬杜撰にして、徒らに先賢篤學の文献に尾して、その業績を冒瀆することなきやを恐る。此等の點に關し、後日、大方の叱正に浴することを得れば、著者の幸ひ之に過ぎず。

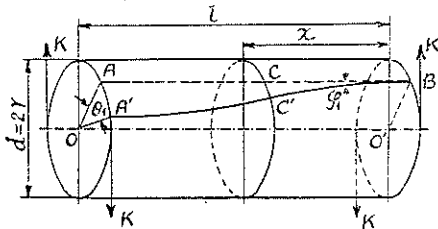
鐵筋混凝土の扭力抵抗は、近來漸く世の視聽を惹くに至れる、最も興味ある、而して最も重要なる問題なり。之に對して斷定的鐵案を下すが如きは、固より淺學なる著者の任にあらず。唯、此の問題の解決のために、わが學界に於ける幾分の注意を喚起することを得れば、即ち著者の願は足る。

本論文の起草に關し、或は之が材料を蒐集する上に於て、或は公式の演繹轉化を試みる上に於て、有益なる助力を與へられたる、獨逸カールスルウエに於けるプロブスト教授 (Prof. Probst)、同シュツットガルトに於けるパウマン教授 (Prof. Baumann) 及びグラフ氏 (Herr Graf)、同ミュンヘンに於けるフェップル教授 (Prof. A. Föppl) 及び、理學博士田丸卓郎氏、工學博士物部長穗氏等に深甚なる謝意を表す。

第一編 扭力の理論

第一章 總 論

最も簡單なる圓形斷面の物體を取りて扭力を説明せんは、第一圖に示すが如き
 棒體が KK なる二對の偶力を蒙りて平衡を保つ時は、棒體に及ぼす KK なる偶
 力の作用を名づけて扭力 (Torsion, la torsion, die Verdrehung) と稱し、扭力の作
 用を蒙る圖の如き棒體を名づけて軸 (Shaft, le tige, die Welle) と稱す。 KK の
 偶力率は此の場合には Kd を以て表はされ Kd を名づけて扭力率 (Twisting mo-
 ment or torque, le moment de torsion, das Verdrehungsmoment) と稱す。偶力
 KK の平面は常に棒體 AB の中心軸 OO' に垂直にして之に平行なる分力を生ずる



第一圖

ことなく、且つ棒體の端面には外力の存在
 するものなきが故に、棒體の中に任意の横
 断面 C を假定する時は、棒體の部分 AC は
 棒體の部分 BC に対して、扭力率 Kd の方
 向に従つて扭ぢらるゝ傾向あり。 AC に於
 ける應力變形は縦變形に非ずして歪形

(Shearing strain, le glissement—après Saint-Venant, Verschiebung) なることを
 知る可く、中心軸 OO' に平行なる端面上の縦線 ABC を取りて考ふる時は、斷
 面 C の周上の一 $点 C$ は扭力を蒙りたる結果、 B を基準として周上を C より C'
 に向つて變位す可く、同理によりて端面 A の周上の一 $点 A$ は此の周上を A よ
 り A' に向つて變位す可し。従つて軸の横断面には一定の法則に従つて其の大き
 さと方向とを變ずる應裁力が働くことを知る。軸 AB の部分の長さを l とし、圓
 弧 AA' が斷面の中心 O に対して挟む角を θ_1 とせば、 θ_1 を l の長さに於ける扭力
 角 (Twisting angle, l'angle de torsion, der Verdrehungswinkel) と稱し、 l が單位の
 長さなる場合の θ_1 の値を θ とせば、此の θ を單位扭力角 (Specific angle, l'angle
 spécifique, der spezifische Winkel) と稱す。始めの直線 ACB は變形後螺旋曲線
 $A'C'B$ となり、圓棒の展開面に於ける $A'C'B$ は勿論曲線にして、之と始めの
 直線 ACB とが此の展開面上に於て挟む角を ϕ_1 とせば、 ϕ_1 は應裁力に對する歪
 形を表はす。従つて軸を構成する物體の抗裁彈性係数を G とし、斷面の周邊に
 於ける應裁力度を τ_1 とすれば、彈體に對するフックの法則の成立する範圍内に於

ては、 $\tau_1 = \varphi_1 G$ なる周知の関係あり。

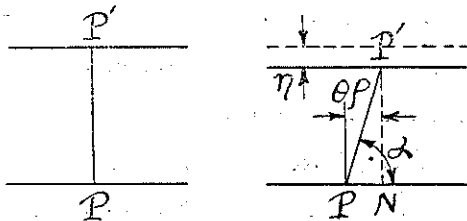
軸の横断面に於ける應裁力の分布及び最大應裁力度と扭力率との間の関係は、理論と実験との基礎の上に於て決定せらる可きものにして、古來之に關する研究の結果の發表せられたるもの少からず。特に一般彈性理論の研究家としてのポアソン (Poisson, 1781—1840) ナヴエエ (Navier, 1785—1836) カウシイ (Cauchy, 1789—1857) ラメエ (Lamé, 1795—1870) クラペイロン (Clapeyron, 1799—1864) 特に扭力に關する理論家としてのクウロム (Coulomb, 1736—1806) ビオエ (Biot) 及び扭力に關する實驗家としてのサヴァア (Savart, 1791—1841) デュロオ (Duleau) ビイヴァン (Bevan) ジュリオ (Giulio) クップア (Kupffer, 1799—1865) の如きは其の最も著しきものに屬すれども、第十九世紀に於ける佛蘭西の偉大なる彈性理論家バレー・ド・サン・ヴナン (Barré de Saint-Venant, 1797—1886) が扭力の研究に對する貢獻は特筆すべき業績として、今猶ほ動かす可らざる法則を確立したるものとす。獨逸シュツトガルト材料試験所に於ける老大家バッハ (Carl Bach) は近世に於ける幾多の扭力理論の研究を評して言はく——此等の研究は一步と雖も、サン・ヴナンの域を脱したるものあるを見ず (Bach und Baumann: *Elastizität und Festigkeit*, neunte Aufl. 1924, S. 360) と。以てサン・ヴナンの業績の偉大なるを察知す可し。

トバハンター (Todhunter and Pearson: *A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials*, Cambridge, 1886) に依れば、扭力に關する研究は遠く第十八世紀の七十年代に創まる。1777年佛國の彈性理論家クウロムは毛髮及び絹絲に關する扭力の理論を發表し、超えて1784年此の理論を金屬線に及ぼしたりしが、當時に於けるクウロムの研究は主として線狀物體の扭力抵抗に依る反覆回轉運動を論ずるにありて、今日の所謂扭力の研究とは其の趣を異にしたり。既に扭力の研究が線狀物體に依りて創められたる以上、扭力を蒙りたる軸の平衡状態を線狀物體に就ての既往の觀察を基礎として説明せんとするは、理の當然に屬す。従つて古代に於ける扭力の理論は之を今日より見れば頗る幼稚杜撰にして、軸の歪形、従つて物體の抗裁力の存在を無視して、軸を相互的に何等の凝集力を有せざる纖維の集合體と考へ、斯の如き假定の下に於ける軸の縱變形に依りて扭力を説明せんとしたりしが、此の謬見は1807年ヤング (Young, 1773—1829) に依りて粉碎せられたるに係らずセグニツ (Segnitz) の如き學者は猶ほその非を

悟らず、1852年に於て上記の假定の下に軸の扭力を論じたるを見る (E. Segnitz : Ueber Torsionswiderstand und Torsionsfestigkeit, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Bd. 43, 1852, S. 340—364)

然れども斯の如きは稀なる例外に屬せり。1807年ヤング (Young : A Course of Lectures on Natural Philosophy and the Mechanical Arts, Vol. I. London, 1807, p. 139) は軸が扭力の作用を蒙りたる場合の縦繊維の受くる張力は扭力角の3乗に比例するが故に、其の影響は之を無視し得る程度に小さく、扭力抵抗は専ら歪形従つて裁力に起因す可きことを指摘したりしが、此の間の關係は扭力理論の發達史上に一轉機を劃するが故に、次にサン・ヴナンが1853年に發表したる論文 (Mémoire sur la torsion des prismes 此の論文に關しては後に詳述す)を籍りて之を略述す可し。

第一圖に於て見るが如く、始め中心軸に平行なりし直線 ACB は扭力を蒙りたる結果、螺旋曲線 $A'C'B$ となり、従つて之に屬する縦繊維は張力 σ を蒙る。第二圖に於て PP' を半径 r なる圓嚙の中心軸より ρ の距離に於ける纖維とし、且



第二圖

つ其の長さを單位長に於て相距たる二つの横斷面の間に挟まれたる部分に限定す。換言すれば PP' の長さは單位長とす。

扭力の結果二つの横斷面が η だけ相接近するものとせば第二圖の右圖に於て

$$PP' = \sqrt{P'N^2 + PN^2} = \sqrt{(1-\eta)^2 + \theta^2 \rho^2} = (1-\eta) \sqrt{1 + \left(\frac{\theta \rho}{1-\eta}\right)^2}$$

$$\doteq (1-\eta) \sqrt{1 + \theta^2 \rho^2} \doteq (1-\eta) [1 + \frac{1}{2} \theta^2 \rho^2] \doteq 1 - \eta + \frac{1}{2} \theta^2 \rho^2$$

E を彈性係數とするときは、纖維に於ける應張力度は

$$\sigma = E [\frac{1}{2} \theta^2 \rho^2 - \eta]$$

σ の總代力を Z とし、軸の斷面積を f とせば

$$Z = \int E [\frac{1}{2} \theta^2 \rho^2 - \eta] df = 2\pi E \int_0^r [\frac{1}{2} \theta^2 \rho^2 - \eta] \rho d\rho$$

軸の中心軸の方向に於ける Z の分力は零ならざる可らざるが故に

$$2\pi E \int_0^r [\frac{1}{2} \theta^2 \rho^2 - \eta] \rho d\rho \sin \alpha = 0$$

α は 90° に近き角なるが故に、 $\sin \alpha \doteq 1$ として上式を積分するときは

$$\frac{1}{4} \theta^2 r^4 = r^2 \eta, \quad \therefore \eta = \frac{1}{4} \theta^2 r^2$$

故に η は θ の 2 乗に正比例す。次に中心軸に對する Z の力率を計算すれば

$$\begin{aligned} M &= \int E \left[\frac{1}{2} \theta^2 \rho^2 - \eta \right] df \rho \cos \alpha = 2\pi E \int_0^r \left[\frac{1}{2} \theta^2 \rho^2 - \frac{1}{4} \theta^2 r^2 \right] \rho d\rho \cdot \theta \rho \cdot \rho \\ &= \pi E \theta^3 \int_0^r \rho^3 (\rho^2 - \frac{1}{2} r^2) d\rho = \frac{\pi E r^5}{24} (\theta r)^3 \end{aligned}$$

即ち纖維の張力に因る影響は扭力角 θ の 3 乗に正比例するが故に、 θ が小なる限り此の影響は之を無視し得可きものとす。

扭力抵抗が軸の縦變形に起因せずして専ら其の横變形即ち歪形に因る可きことを認むるに及んで、扭力の研究は新生面を開き、次章に於て説明せんとする所謂扭力の舊理論は此の間に樹立せられたるものとす。1821年5月14日ナヴァエエが佛國學士院 (l'Académie des Sciences) に提出したる論文 (Mémoire sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques) は近世彈性理論の淵源と稱せらるる名著にして、矩形嚙の扭力に關するナヴァエエの理論は實に此の論文中に於て發表せられたるものとす。超えて1828年にはボアッソンにより、1829年にはカウシイによりて扭力に關する新理論の發表を見るに至れるが中にも、カウシイの理論は猶ほ此の問題に對する近似値を提供したりしに過ぎずと雖も、その研究は扭力理論の發達に對して新生面を開きたる功績を没す可らず。

後年に於けるサン・ヴナンの研究の基礎をなすものは、實にカウシイの理論 (Cauchy: Sur la torsion et les vibrations tournantes d'une verge rectangulaire, *Exercices Mathématiques par M. Cauchy*, T. 4, 1829, p. 47-64) に外ならず。即ち1843年サン・ヴナンはカウシイの理論に依りて矩形嚙の扭力を取扱ひたる論文 (Saint-Venant: Sur la torsion à base rectangle, *Traité à la manière de Cauchy, Extrait des Comptes Rendus*, T. 17, 1843, p. 1180-90) を發表し、扭力の舊理論 (本編第二章參照) は軸の平面斷面が扭力の結果、曲面となることを考慮せざるが故に、圓形斷面以外に之を適用して誤りを生ず、然るにカウシイの樹立せる理論は始めて軸の横斷面の彎曲を考慮せる點に於て新機軸を出せることを指摘したりしが、此の理論は猶ほ不完全なる略式に過ぎざりしが故に、その後4年にして1847年サン・ヴナンは1820年のデュロオの實驗 (Duleau: *Essai théorique et expérimental sur la résistance du fer forgé*, Paris, 1820) 1829年のサヴァアの實驗 (Savart:

Mémoire sur la reaction de torsion des lames et des verges rigides, *Annales de Chimie et de Physique*, T. 41, 1829, p. 373-97) 及び彼自身の實驗を根據として矩形斷面軸の眞理論を發表したりしか、サン・ヴナンの扭力理論に於ける基本公式

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \theta y \right) dy - \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - \theta z \right) dz = 0$$

は實に此の時に紹介せられたるものにして、茲に y, z は軸の横斷面に於ける矩坐標、 ξ は y, z の函數にして斷面の各點に於ける縦變位を表はすものとす、サン・ヴナンの理論は1853年に發表せられたる稀世の名著に基きて之を第三章に略述す可しと雖も、1847年の論文 (Saint-Venant: Mémoire sur la torsion des prismes et sur la forme affectée par leurs sections transversales primitivement planes, *Comptes Rendus*, T. 24, 1847, p. 485-8 et p. 847-9) の中に於て サン・ヴナンは橢圓斷面に對しては

$$\xi = -\theta \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2} yz$$

なる結果を生じ、始めの平面斷面は扭力を蒙りたる結果双曲拋物曲面 (le paraboloid hyperbolique) となり、矩形斷面に對するカウシイの略解が橢圓斷面に對しては正確なる解式を與ふる所以を明らかにしたり。

1849年ウエルタイム (Wertheim, 1815—1861) は扭力に關する論文 (Wertheim Notes sur la torsion des verges homogènes, *Annales de Chimie et de Physique*, T. 25, 1849, p. 209—15) を公にして、カウシイの理論を支持し、サン・ヴナンに反對したれども、1853年6月13日佛國學士院に提出朗讀せられたる劃時代的名著、扭力に關する研究 (Saint-Venant: Mémoire sur la torsion des prismes, avec des considérations sur leur flexion, ainsi que sur l'équilibre intérieur des solides élastiques en général, etc.) によりて、サン・ヴナンは扭力理論の研究史上に於ける不動の位置を與へらるゝに至れり。此の論文は學士院の選定せる委員、カウシイ、ボンスレ (Poncelet), ピオベール (Piobert), ラメエの審査に附せられたりしが、ラメエの起草に係る審査報告 (*Comptes Rendus*, T. 37, Déc. 26, 1853, p. 984—8) の結論は、今猶ほ此の不朽の名論文に對して當時如何に、賞讃の辭が惜まれざりしかを察知せしむるに足る。

既に軸断面の曲面を考慮する以上は、與へられたる坐標 x, y, z に對して縱變位 u の値を知る事を得れば、その點の應力度を算出する事は簡單なる微分の問題に過ぎずと雖も、之に反して應力が與へられたる場合の、曲面の縱變位 u を求むる問題は理論上不可能に屬す。サン・ヴナンの研究の特色は所謂混合解法 (Méthode mixte ou sémi-inverse) に依りて、此の問題を解決せんとする所に存し、一部の應力度と一部の u の値を假定して殘餘の應力度と殘餘の u とを正確なる解法の下に決定せんとする方法是れなり。(Voir chapitres troisième et quatrième de la Mémoire sur la torsion des prismes, 1853)

1854年カウシイの發表せる論文 (Cauchy: Sur la torsion des prismes, *Comptes Rendus*, T. 38, 1854, p. 326—32) に於て、サン・ヴナンの理論はカウシイ自らの是認する所となりしが、超えて1858年、1864年、1878年及び1879年に亘りて數次の研究を公表し、以て其の理論を大成して以來、サン・ヴナンの扭力論は廣く彈性理論上の定説として公認せらるゝに至れり。圓形断面及び橢圓形断面の軸に關する理論は新しくサン・ヴナンの研究を俟たず、既にポアッソン、カウシイに依りて確立せられたれど、矩形断面に對する理論の大成は主として、其の功をサン・ヴナンに歸せざる可らず。此の故に後世矩形軸の扭力に關する理論を名づけて、サン・ヴナンの問題 (das de Saint-Venantsche Problem) と稱する慣用を生じたがしが、此の慣用は獨逸カールスルウエ・テヒニツェ・ホホシュウレ教授たりしクレプシュ (Clebsch, 1833—1872) に創まる。(Clebsch: *Theorie der Elastizität der festen Körper*, 1862, S. 74)

サン・ヴナンの研究は1853年の大論文 (之は *Mémoire des Savants étrangers*, 1853, p. 233—560 中に收めらる) を除きては、専ら佛國學士院紀要 (*Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*) 中に收録せられたるのみにして、別にその總括的著述あるを聞かずと雖も、ナヴ・エエの著作にかゝる應用力學講義 (*Leçons sur l'application de la mécanique*, première édition, 1826; seconde édition, 1833; troisième édition, 1863) の第三版はサン・ヴナンの増補訂正する所に係り、此の方法の下にサン・ヴナンは其の扭力理論の要領をナヴ・エエの著述中に挿入したりしが、超えて1883年前記クレプシュの著作にかゝる固體の彈性理論を佛譯 (*Théorie de l'élasticité des corps solides de Clebsch*) するに方り、之に補正を施し脚註を加へ、此の獨逸彈性理論家の名著をして不朽の生命に

生きしめたるは、亦以てサン・ヴナンの二大業績に數ふるに足ると共に此等を通じてサン・ヴナンの理論を窺ふべし。

サン・ヴナンの扭力理論は彼れ自身の言葉 (Saint-Venant: Sur une Formule donnant approximativement le moment de torsion, *Comptes Rendus*, T. 88, 1879, p. 142) を籍りて言へば、前掲の如く 1854年カウシイ (*Comptes Rendus*, T. 38, p. 326) に依りて認められたる外、1859年キルヒホフ (*Journal de Crelle*, T. 7) に依り; 1862年クレプシュに依り、最後に 1867年ロッド・ケルヴンに依りて採用せらるゝと共にデュロオ、サヴァア、ウエルタイムの實驗に依りて確證せられたりしが、後世に於ける彈性理論、應用力學及び材料強弱に關する著述は何れも、サン・ヴナンの理論によりて扭力を説明するに至れるは、茲に贅言するも須ひずと雖も、ゴツケ (R. Götzke: Zur Theorie der Torsion rechteckig-prismatischer Stäbe, *Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure*, 1909, S. 933) の説くが如く、サン・ヴナンの理論は數學家に非ざるものに取りては極めて難解なるが故に、今猶ほ工學者の大多數は此の理論を知らざるか、若しくは略式を使用して所謂、サン・ヴナンの問題を解決せんとするを以て現下の状態とす。

前掲クレプシュの後繼者として、カールスルウエ・テヒニツェ・ホホシュウレに教授たりしグラスホフの著述 (F. Grashof: Theorie der Elastizität und Festigkeit, Berlin, 1878—本書の第一版は1866年の出版にかゝり Festigkeitslehre mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse des Maschinenbaues と題せられしが、1878年の第二版に於て上記の如く改題せられたるものとす) の如きは、此の略式解法を以てサン・ヴナンの問題を説明せる著しき特例なるが、第十九世紀の末葉以後、理論家及び實驗家の扭力に關する研究は専らサン・ヴナンの理論を中心として、或は之が解釋を新たにし、或は特殊の場合に對する之が應用を講究し、或は之が數字的結論を實驗的に證明することを以て、其の主眼としたる傾向にあるは之を否定す可らず。

著者の寡聞を以てしても、猶ほ1881年に於けるバウシンガア (Bauschinger) の研究、1883年に於けるヘルマン (Hermann) の研究、1889年以後に於けるバハ (Bach) の研究、1903年に於けるプラントル (Prandtl) の研究、1904年に於けるヘンネベルグ (Henneberg) の研究、1909年に於けるゴツケ (Götzke) の研究、1922年に於けるフュップル (A. Föppl) の研究、同じくウェエバア (Weber) の研究の如き

數ふることを得。此等の研究は次章以下に於て之を引用する機會ある可きが故に、茲に之を詳説せずと雖も、唯バハがシュツットガルト材料試験所 (Materialprüfungsanstalt zu Stuttgart) の完備せる實驗設備を使用せる過去30餘年の實驗の結果は、舉げて其の名著、彈性及び強度 (C. Bach und R. Baumann: *Elastizität und Festigkeit*, neunte vermehrte Auflage, Berlin, 1924) 中に収録せらるゝが故に材料の彈性及び強度を研究するものに取りて、絶好の資料を提供するものと稱して憚らず。此の著作の第一版は遠く1889年の出版にかゝり、バウマンとの共著の形式を取れるは上記の第九版より創まる。

次に好學の士のために扭力に關する古來の文献を列擧して、其の參考に供す。此等の研究の中、論文にして單行の著作に非ざるものは、括弧内に其の出所を明らかにしたり。著者は扭力理論の發達を研究するに方り、前掲トバハの彈性理論及び材料強度の歴史 (Cambridge, 1886) を以て指針としたりしが、其の後の研究は滯獨中、著者自らの蒐集する所に係るが故に、勢ひ獨逸の學界に偏重せるの嫌ひなき能はず。

1. Coulomb : Recherches théorétiques et expérimentales sur la force de torsion, et sur l'élasticité des fils de métal, 1784 (*Histoire de l'académie des sciences*, année 1784, Paris, 1787)
2. Cauchy : Sur la torsion et les vibrations tournantes d'une verge rectangulaire (*Exercices mathématiques par M. Cauchy*, T. 4, 1829, p. 47-64)
3. Cauchy : Sur la torsion des prismes (*Comptes Rendus*, T. 38, 1854, p. 326-332)
4. Navier : Résumé des Leçons données à l'école des ponts et chaussées sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines, troisième édition, avec des notes et des appendices par M. de Saint-Venant, 1863.
5. Biot : *Traité de Physique expérimentale et mathématique*, Paris, 1816, T. 1, Chapit. 23, p. 466-528.
6. Savart : Mémoire sur la réaction de torsion des lames et des verges rigides (*Annales de Chimie et de Physique*, T. 41, 1829, p. 373-397)
7. Hill : *Disputatio physica de elasticitate torsionis in filis metallicis*, Lundae, 1819,
8. Ritchie : On the elasticity of threads of glass with some of the most useful

- applications of this property to torsion balances (*Phil. Trans.* 1830, p. 215-222)
9. Gerstner: Handbuch der Mechanik, Erster Bd. Mechanik fester Körper, 1831, S. 377-381)
 10. Pacioti: Esperienze sulla resistenza elastica dei legni (*Il Cimento, Giornale di Fisica, Chimica e Storia Naturale*, Pisa, 1845, p. 241-297)
 11. Bevan: Experiments on the Modulus of Torsion (*Phil. Trans.* 1829, p. 127)
 12. Hodgkinson: Experimental Reserches on the Strength and other Properties of Cast Iron, 1846, p. 495-504
 13. Vicat: Recherches expérimentales sur les phénomènes physiques qui précèdent et accompagnent la rupture ou l'affaissement d'une certaine classe de solides (*Annales des Ponts et Chaussées*, 1883, deuxième semestre, p. 201-268)
 14. Duleau: Essai théoritique et expérimental sur la résistance du fer forgé, Paris, 1820
 15. Giulio: Sur la torsion des fils métalliques et sur l'élasticité des ressorts en helices (*Mémorie della reale Accademia delle Scienze di Torino, Serie II., T. 4*, 1842, p. 329-383)
 16. Kupffer: Recherches expérimentales sur l'élasticité de métaux (*Mémoire de l'Académie de Saint-Petersbourg, sixième série, Sciences mathématiques, physiques et naturelles, T. 7*, 1853, p. 231-302)
 17. Saint-Venant: Sur la torsion à base rectangle, traité à la manière de Cauchy (*Extrait des Comptes Rendus, T. 17*, 1843, p. 1180-90)
 18. Saint-Venant: Mémoire sur la torsion des prismes et sur la forme affectée par leurs sections transversales primitivement planes (*Comptes Rendus, T. 24*, 1847, p. 485-8 et p. 847-9)
 19. Saint-Venant: Mémoire sur la torsion des prismes, avec des considérations sur leur flexion, ainssi que sur l'équilibre intérieur des solides élastiques en général, et des formules pratiques pour le calcul de leur résistance à divers efforts s'exerçant simultanément, 1853 (*Mémoire par divers Savants étrangers, T. 14*, 1855, p. 233-560)
 20. Saint-Venant: Etablissement élémentaire des Formules de la torsion des prismes élastiques (*Comptes Rendus, T. 46*, 1858, p. 34-8)
 21. Saint-Venant: Travail ou potential de torsion. Manière nouvelle d'établir les équations qui régissent cette sorte de déformation des prismes élastiques

- (*Comptes Rendus*, T. 59, 1864, p. 806-9)
22. Saint-Venant: Sur la torsion des prismes à base mixtiligne, et sur une singularité que peuvent offrir certains emplois de la coordonnée logarithmique du système cylindrique isotherme de Lamé (*Comptes Rendus*, T. 87, 1878, p. 849-54 et p. 893-9)
 23. Saint-Venant: Sur une formule donnant approximativement le moment de torsion (*Comptes Rendus*, T. 88, 1879, p. 142-7)
 24. Saint-Venant. Théorie de l'élasticité des corps solides de Clebsch. Traduite par MM. Barré de Saint-Venant et Flammant, avec des notes étendues de M. de Saint-Venant, Paris, 1883.
 25. Kirchhof: Verlesungen über mathematische Physik, Bd. I: Mechanik, Berlin, 1874-76.
 26. Clebsch: Theorie der Elastizität der festen Körper, Leipzig, 1862.
 27. Sir W. Thomson and P. G. Tait: Treatise on Natural Philosophy, Vol. I., Oxford, 1867.
 28. Wertheim: Notes sur la torsion des verges homogènes (*Annales de Chimie et de Physique*, T. 25, 1849, p. 209-15)
 29. Wertheim: Mémoire sur la torsion, 1855 (*Comptes Rendus*, T. 40, 1855, p. 411-4 et p. 1234-7; *Annales de Chimie et de Physique*, T. 50, 1857, p. 195-321 et p. 385-431)
 30. Boussinesq: Complément à une étude de 1871 sur la théorie de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques dont certaines dimensions sont très petites par rapport à d'autres, 1876 (*Journal de mathématiques*, T. 5, 1879, p. 163-94)
 31. F. Neumann: Bestimmung der Elastizitätskonstanten des Steinsalzes (*Poggendorfs Annalen*, Ergänzungsband 7, 1876, S. 1-53 und S. 177-214)
 32. Segnitz: Ueber Torsionswiderstand und Torsionsfestigkeit (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Bd. 43, 1852, S. 340-64)
 33. Ritter: Lehrbuch der technischen Mechanik, Hannover, 1865.
 34. Morin: Leçons de mécanique pratique, T. 5, Résistance des matériaux, 1853, p. 432-53)
 35. Wade: Reports of Experiments on the Strength and other properties of Metals for Cannon, etc., Philadelphia, 1856.
 36. Wöhler: Bericht über die Versuche, welche mit Apparaten zum Messen der Biegung und Verdrehung von Eisenbahnwagenachsen während der

- Fairst angestellt wurden (*Erbkams Zeitschrift für Bauwesen*, Jahrgang 8, S. 642-52, Berlin, 1858.)
37. Bauschinger: Experimentelle Prüfung der neueren Formeln für die Torsion prismatischer Körper (*Der Civilingenieur*, 1881, S. 169 u. f.)
 38. E. Hermann: Die Torsionsspannung regelmässiger Vielecke (*Zeitschrift des österreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereins*, 1883, S. 169 u. f.)
 39. C. Bach: Versuche über Drehungsfestigkeit (*Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure*, 1889, S. 137 u. f., u. S. 162 u. f.)
 40. L. Prandtl: Zur Torsion von prismatischen Stäben (*Physikalische Zeitschrift*, 1903, S. 758 u. f.)
 41. L. Prandtl: Eine neue Darstellung der Torsionsspannungen bei prismatischen Stäben von beliebigem Querschnitt (*Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 1904, Bd. 13, S. 31 u. f.)
 42. L. Henneberg: Zur Torsionsfestigkeit (*Zeitschrift für Mathematik und Physik*, Bd. 51, 1904, S. 225 u. f.)
 43. L. Henneberg: Ueber einige Folgerungen, die sich aus dem Satz von Green für die Torsion von Stäben ergeben (*Zeitschrift für Mathematik und Physik*, Bd. 51, 1904, 242 u. f.)
 44. C. Bach: Mitteilung zur Gültigkeit der de Saint-Venantschen Formel für den Verdrehungswinkel (*Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure*, 1905, S. 960 u. f.)
 45. C. Bach: Versuche über die Drehungsfestigkeit von Körpern mit trapezförmigem und dreieckigem Querschnitt (*Z. d. V. d. I.*, 1906, S. 481 u. f.)
 46. R. Götzke: Zur Theorie der Torsion rechteckig-prismatischer Stäbe (*Z. d. V. d. I.*, 1909, S. 935 u. f.)
 47. O. Bretschneider: Versuche über die Verdrehung von Stäben mit rechteckigem Querschnitt und zur Ermittlung der Längs- und Querdehnung auf Zug beanspruchter Stäbe (*Z. d. V. d. I.*, 1912, S. 253, u. f., oder *Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens*, vom V. d. I., Heft 121)
 48. A. Föppl: Ueber den elastischen Verdrehungswinkel eines Stabes (*Die Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie der Wissenschaften*, Jahrgang 1917, S. 5)
 49. A. Föppl: Versuche über die Verdrehungsfestigkeit der Walzeisenträger (*Die Sitzungsber. der Bayer. Akad. der Wiss.*, Jahrgang 1921, S. 295)
 50. A. Föppl: Verdrehversuche mit Stäben von kreuzförmigem Querschnitt

(*Z. d. V. d. I.*, 1922, S. 827 u. f.)

51. C. Weber: Die Lehre der Drehungsfestigkeit (*Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens*, vom V. d. I., Heft 249, 1921)
52. A. Föppl: Vorlesungen über technische Mechanik, Bd. 3, Festigkeitslehre, neunte Aufl., Berlin, 1922; u. Bd. 5, Die wichtigsten Lehren der höheren Elastizitätstheorie, vierte Aufl., 1922)
53. C. Bach und R. Baumann: Elastizität und Festigkeit, neunte Aufl., Berlin, 1924
54. E. Mörsch: Schub- und Scherfestigkeit (*Schweizerische Bauzeitung*, Zürich, 1904, Bd. XLIV. S. 295-7, und S. 307-10)
55. A. Föppl: Verdrehungsversuche mit Wellen aus Eisenbeton (*Mitteilungen aus dem Mechanisch-technischen Laboratorium der K. technischen Hochschule München*, 1912, Heft 32, S. 1-29)
56. C. Bach und O. Graf: Versuche über die Widerstandsfähigkeit von Beton und Eisenbeton gegen Verdrehung (*Veröffentlichungen des deutschen Ausschusses für Eisenbeton*, 1912, Heft 16)
57. O. Graf und E. Mörsch: Verdrehungsversuche zur Klärung der Schubfestigkeit von Eisenbeton (*Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens*, 1922, Heft 258)
58. E. Mörsch: Der Eisenbetonbau, 1923, Stuttgart, sechste Aufl., I Band, 1 Hälfte und 2 Hälfte.
59. Ministère Français des Travaux Publics, Commission du Ciment Armé: Expériences, Rapports et Propositions, Instruction Ministérielle relatives à l'emploi du Béton Armé, Paris, 1907.
60. C. R. Young: Torsional Strength of Rectangular Sections of Concrete, Plain and Reinforced (*Bulletin No. 3*, University of Toronto, Canada, Faculty of Applied Science and Engineering, 1922, Section No. 9)

第二章 扭力の舊理論

軸として使用せらるゝ断面形状は圓形なるを普通とし、且つ其の理論は極めて簡單なるが故に、圓形断面に對する扭力の理論は最も古く發達を見たるは前掲の如し。今第一圖を取りて圓形断面の軸の理論を説明にせん

l ; 軸 OO' の部分の長さ

r ; 軸の半徑

- τ ; 断面重心より ρ の距離に於ける應裁力度
 τ_1 ; 最大應裁力度
 G ; 剛性係數或は抗裁彈性係數
 M_n ; 扭力率
 I_1, I_2 ; 断面の主慣性率 (Principal moments of inertia, les moments d'inertie principaux, die Hauptträgheits momente)
 I_0 ; 断面の極慣性率 (Polar moment of inertia, le moment d'inertie polaire, der polare Trägheits moment) $I_0 = I_1 + I_2$
 f ; 断面積
 φ ; 断面重心より ρ の距離に於ける歪形
 φ_1 ; 最大歪形
 θ ; 軸の單位扭力角

軸が扭力を蒙りたる場合の變形(後述)を驗するに、各縦纖維の變位 (Displacement, le déplacement, die Verrückung) は中心軸 OO' より距離 ρ に正比例するを見る。故に歪形と扭力角との間に次の關係あり。

$$\theta_1 r = \varphi_1 l, \quad \theta_1 \rho = \varphi l, \quad \therefore \frac{\varphi}{\varphi_1} = \frac{\rho}{r}$$

或は
$$\varphi = \varphi_1 \frac{\rho}{r} \dots \dots \dots (1)$$

軸が完全なる彈體を以て作られ、實驗が其の彈性限度 (Limit of elasticity, la limite d'élasticité, die Elastizitätsgrenze) 内に於てなざるゝときには、應力 τ と歪形 φ との間に、フックの法則が成立するが故に

$$\tau = \varphi G, \quad \tau_1 = \varphi_1 G, \quad \therefore \frac{\tau}{\tau_1} = \frac{\varphi}{\varphi_1}$$

之に (1) 式の關係を入るゝときは

$$\tau = \tau_1 \frac{\rho}{r} = \varphi_1 G \frac{\rho}{r} \dots \dots \dots (2)$$

即ち應力度 τ は ρ に正比例す。然れども應力と變形との間にフックの法則が成立するは、完全なる彈體の場合に限り、鑄鐵又は混凝土の如き材料に對しては嚴密なる意味に於てフックの法則を使用すること能はざるが故に、 τ と ρ との間には (2) の如き公式を使用する能はず。一般に G は常數に非ず、 τ と共に變化す

る變數なるを以て、 τ - φ の關係はフックの法則が示すが如き直線を以て表はす事を得ずして、曲線に依りて表はさる可きものとす。此の點に關しては後章に於て詳論す可きが故に、茲には τ が φ に正比例す可き彈體の場合のみを取扱ひ、從つてフックの法則を以て推論の基礎とす可し。

軸の端面には外力の存在するものなきが故に、應力 τ は斷面の周上に於て恒に之に切線方向を取らざる可らず。換言すれば τ_1 の方向は常に半徑に直角なるを要す。是圓形斷面の場合の唯一の環境條件 (Boundary conditions, la condition de frontière, die Grenzbedingung) とす。而して一つの半徑に沿へる應力の方向は互に平行ならざる可らざるが故に、 τ の方向は常に半徑に直角にして、應力線は斷面重心 O を中心とする同心圓なり。

而して斷面中心より ρ の距離に於ける一點 P の微分面積を df とせば、斷面中心 O に關する應力 τdf の力率は $dM = \tau df \cdot \rho$ にして、其の總和は扭力率 M_a に等しからざる可らざるが故に、(2) 式を用ひ

$$M_a = \int dM = \int \tau \rho df = \frac{\tau_1}{r} \int \rho^2 df$$

P 點の坐標を y, z とする時は $\rho^2 = y^2 + z^2$ なるが故に

$$\int \rho^2 df = \int [y^2 + z^2] df = \int y^2 df + \int z^2 df = I_1 + I_2 = I_0$$

$$\therefore M_a = \frac{\tau_1}{r} I_0 \dots \dots \dots (3)$$

$$\tau_1 = \frac{M_a r}{I_0} \dots \dots \dots (4)$$

又單位扭力角 θ を求むるには次の關係を利用す。

$$\theta r = \varphi_1, \quad \varphi_1 = \frac{\tau_1}{G}$$

$$\therefore \theta = \frac{\tau_1}{rG} = \frac{M_a}{GI_0} \dots \dots \dots (5)$$

圓形斷面の場合には $I_1 = I_2 = \frac{\pi}{4} r^4$, $I_0 = \frac{\pi}{2} r^4$

此の値を (3), (4), (5) の各式に適用するときは

$$M_a = \frac{\pi}{2} \tau_1 r^3 \dots \dots \dots (6)$$

$$\tau_1 = \frac{2}{\pi} \frac{M_a}{r^3} \dots \dots \dots (7)$$

$$\theta = \frac{2}{\pi} \frac{M_n}{Gr^3} \dots \dots \dots (8)$$

又 (4) 式より

$$\tau = \tau_1 \frac{\rho}{r} = \frac{M_n \rho}{I_0} \dots \dots \dots (9)$$

故に應力度 τ は扭力率 M_n 及び断面中心よりの距離 ρ に正比例し、極慣性率 I_0 に逆比例す。

扭力の舊理論は専ら圓形断面の軸に對する上記の理論と實驗との上に發達し、茲に求めたる (3) 乃至 (5) 式及び (9) 式の結果を取りて、直ちに他の一般断面に適用せんとしたる所に、根本的の誤謬を藏す。即ち扭力の舊理論に従へば (9) 式に依りて、最大應力度 τ_1 は ρ の最大値、換言すれば断面重心より最も遠距離にある纖維に就て起る可きが故に、之を橢圓形断面及び矩形断面に適用せば、次の如き結果を生ず可し。

橢圓の長軸を $2c$ 、其の短軸を $2b$ とすれば

$$I_1 = \frac{\pi}{4} b^2 c, \quad I_2 = \frac{\pi}{4} b c^2, \quad I_0 = \frac{\pi}{4} b c (b^2 + c^2)$$

此の場合に (9) 式を用ひ、 ρ の最大値、 $\rho_1 = c$ を代入する時は

$$\tau_1 = \frac{4}{\pi} \frac{M_n}{b(b^2 + c^2)}$$

之を扭力の新理論の與ふる結果(後述)

$$\tau_1 = \frac{2}{\pi} \frac{M_n}{b^2 c}$$

と對比すれば、其の相違の餘りに甚しきに驚嘆す可し。又矩形の場合には其の幅を b 、高さを h として ($b \leq h$)

$$I_1 = \frac{1}{12} b^3 h, \quad I_2 = \frac{1}{12} b h^3, \quad I_0 = \frac{1}{12} b h (b^2 + h^2)$$

ρ の最大値は此の場合には $\rho_1 = \frac{1}{2} \sqrt{b^2 + h^2}$

故に (9) 式を用ひ $\tau_1 = \frac{6}{bh \sqrt{b^2 + h^2}} \frac{M_n}{I_0}$

之を新理論の與ふる次の公式と對比す可し。

$$\tau_1 = 4.5 \frac{M_n}{b^2 h}$$

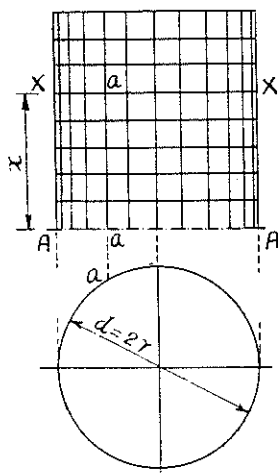
但し茲に與へたる τ_1 の公式は所謂略式にして、サン・ヴナンは茲に使用せる數

係數 4.5 の代りに、 b/h の比に依りて相違する變數を用ひたる事は、後章に於て説明する所の如し。

之を要するに、舊理論の教ふる所に依れば、最大應力度は断面重心より最も遠き纖維に起る可きが故に、茲に示せるが如く橢圓断面の場合には長軸の兩終點、矩形断面の場合には其の 4 隅に於て最大應力度を生ずと言ふ、俗耳に親しみ易き結果を生ずれども、此の結果は實驗の明らかに否定する所なると共に、扭力の新理論とは全く正反對の結論に立つものとす。軸が扭力を加へられたる後に起す變形を示す圖面は、既にサン・ヴナンの 1853 年の大論文中に之を見出す事を得れども、寫眞印刷術の發達せざりし今より 70 年前の當時にありては、僅かに之を不完全なる木版印刷に依りて圖示するの外なかりしが故に、此の大論文が含む圖面は甚だしく不鮮明にして、且つ曖昧なる憾みあり。之に對してバハが其の彈性及ひ強度中に挿入せし寫眞版は、極めて精巧にして軸の變形に對する觀念を何等の説明を用ひずして捕捉せしむるに足るが故に、之を寫眞第一乃至第三に再録して讀者の參考に供す。

此の實驗はシュツットガルト材料試験所に於て、硬質鉛 (das Hartblei) に就て施行せられたるものにして、其の結果は極めて興味深き現象を示せり。

軸に扭力を加ふるに先だち其の嚙面を、互に平行にして且つ同一の間隔を保つ縦線 (中心軸に平行なる直線) 及び横線 (軸の横断面の周線) を以て區劃す。之を圓嚙軸 (第三圖) に就て説明せん、其の圓嚙面を、中心軸に平行なる aa の如き



第三圖

n 個の縦線を以て縦に等分したりとすれば、此等の縦線の間隔は $2\pi r/n$ なり。而して更に軸の嚙面を、軸に直角にして互に $2\pi r/n$ の間隔を有する bb の如き平行圓を以て横に區分する時は、軸の圓嚙面は $2\pi r/n$ の邊長を有する正方形に區劃せらる可し。橢圓形断面及び矩形断面の軸に就ても、同様の方法によりて其の嚙面を正方形に區劃す。今此等の軸に扭力を作用せしむる時に起る變形を觀測するに、軸の断面形狀の相違するに従つて、各異なる現象を呈するを見る。

(イ) 圓形断面の軸

1. 荷重を加ふる前に圓嚙面に描きし正方形は互に相

似なる菱形に變形せらる。換言せば圓嚙の展開面に於ける aa の如き縦線、及び bb の如き横線は何れも直線として残り、始め中心軸に平行なりし縦線 aa は變形後之と斜交して、圓嚙面に螺旋曲線を描くが故に、始めの正方形は互に相似なる菱形に變ずるなり。

2. 平行圓の平面即ち軸の横断面は變形後も猶ほ平面として残り、且つ軸の中心軸に垂直なり。換言せば圓形断面の軸にありては、各分子の間に縦變位なし。

3. 相連続する 2 個の横断面は常に同量だけ相對的に扭ぢらる。換言せば始め断面 AA 中の一點 a に對應せし断面 XX 中の一點 a の歪形弧長は、二つの断面間の距離 x に正比例す。之を第一圖に就て見る時は、 $AB=l$, $BC=x$ として

$$\frac{\text{圓弧 } AA'}{\text{圓弧 } CC'} = \frac{l}{x}, \quad \text{圓弧 } CC' = \text{圓弧 } AA' \frac{x}{l}, \quad \text{或は } \text{圓弧 } CC' = Cx, \quad C \text{ は常數}$$

なる關係あり。次に橢圓の長軸の兩端を連ぬる 2 個の縦線を pp , 短軸の兩端を連ぬる 2 個の縦線を qq を以て表はすときは、次の如き變形の生ずるを見る。

(ロ) 橢圓形断面の軸

1. 嚙面に描きし正方形は菱形に變ず。即ち正方形が菱形に變ずる事は圓形断面の場合と同一なれど、此の場合には菱形は互に相似ならず。

2. 凡ての縦線は變形後、嚙面に螺旋曲線を描き、其中 qq を一邊とする菱形の、始め直角なりし内角の歪形は最大にして、 pp を一邊とする菱形の、始め直角なりし内角の歪形は最小なり。換言せば變形は短軸の終端に於て最大、長軸の終端に於て最小なり。而して應力は變形に比例す可きが故に、最大應力は短軸の終端に起るを見る。

3. 始め平面なりし横断面は彎曲 (Warping, le gauchissement, die Krümmung) を起して曲面となる。即ち此の場合には分子の縦變位を認む可し。

4. 横断面の兩主軸は始めの平面中に止まり、且つ猶ほ互に直角を保つ。前項に依り、横断面が曲面となるに關せず、兩主軸が猶ほ始めの平面に止まる限り、此等の彎曲は主軸を境として其の兩側に於て互に反對の符號(方向)を取らざる可らず。換言せば兩主軸によりて區劃せらるゝ横断面の象限 (Quarter, le quartier, das Viertel) の中、對角線的に相對する 2 個の象限に於ては縦變位は正符號、即ち彎曲が凸彎曲 (Convex, konvex) にして、對角線的に相對する他の 2 個の象限に於ては縦變位は負符號、即ち彎曲が凹彎曲 (Concave, konkav) なる事を知る可し。

5. 相連続する2個の横断面に於ける兩主軸は常に同量だけ相對的に扭ぢらる。即ち此の場合には圓形断面の場合に凡ての縦線に就て成立したりし 3. の關係が、單に pp, qq に就てのみ成立するものとす。

此の最後の現象を數字的に説明するために、次に1881年バウシంగాが獨逸ミュンヘン材料試験所 (Das mechanisch-technische Laboratorium der technischen Hochschule in München) に於て施行せる扭力試験 (此の試験の成績に關しては、後に之を詳説す) の報告 (Bauschinger: Experimentelle Prüfung der neueren Formeln für die Torsion prismatischer Körper, *Der Civilingenieur*, 1881, S. 115) の一節を引用す可し。

此の實驗は長さ 100 cm. 長軸 $2c=10.23$ cm. 短軸 $2b=5.13$ cm. 即ち軸比約 2 の橢圓形断面の鑄鐵軸に就てなされたるものにして、扭力角を測定する基本たる可き軸の觀測長(第一圖の l)を 50 cm. とし、且つ扭力角は極めて小なるが故に、之を半徑 350 cm. の圓弧上に擴大し、弧長 s を測定したるものなるを以て、次表に於ける觀測弧長 s と單位扭力角 θ との間には次の關係あり。

$$l=50, \quad r=350, \quad s=l\theta=17,500\theta, \quad \therefore \theta=\frac{s}{17,500}$$

又荷重 P に對する扭力率 M_a の臂長は 49.2 cm. なるが故に

$$M_a=49.2 P \quad (\text{長さの單位は cm.})$$

第一表 橢圓断面軸の兩主軸の相對的扭力角の比較

P (噸)	M_a (噸徑)	扭力角弧長 s (徑)		
		短軸に於て 0	長軸に於て 0	平均 0
0.20	9.84	2×0.54	2×0.53	1.12
0.40	19.68	2×1.09	2×1.13	2.23
0.60	29.52	2×1.63	2×1.74	3.42
0.80	39.36	2×2.30	2×2.34	4.64
1.00	49.20	2×2.89	2×2.94	5.83

usw.

上表を見れば橢圓の兩主軸に於ける扭力角の値は同一に非ず、其の間に多少の相違を認むと雖も、其の主因は供試體が完全なる幾何學的形狀を取ること能はざりしに存し、且つ此の表は扭力角の相違が最大なりし一例を引用したることに注意すれば、橢圓断面軸の兩主軸に於ける相對的變形、換言すれば其の單位扭力角

の一定なる事は、數字的に之を立證し得たりと言ふ可し。次に矩形斷面の幅を b 、其の高さを h とし、且つ幅の中點を連ぬる縦線を pp 、高さの中點を連ぬる縦線を qq を以て表はす時は、矩形斷面軸の實驗に就て次の關係あり。

(ハ) 矩形斷面の軸

1. 嚢面に描きし正方形は多少其の始めの形狀を失ひて菱形の形を取る。横斷線は變形後も軸の4稜に於ては之と直角に交はり、横斷線と縦斷線との間の直角は矩形の邊の各中點、即ち pp , qq に就て最も著しく變形す。従つて直角の變形、即ち歪形は軸の4稜に於ては零、之より各邊の中央に向つて可なり急速に増大し此の中 qq 線に沿へる歪形は pp 線に沿へる歪形より大なり。換言せば應力は矩形の4稜に於ては零、之より各邊の中央に向つて増大し、最大應力度は橢圓形斷面の場合と同様に、斷面重心より最も近き纖維に起る。

2. 始め平面なりし横斷面は曲面となる。

3. 横斷面の兩主軸は變形後も、猶ほ始めの平面中に止まる。従つて橢圓形斷面の場合に就て述べたると同理にして、矩形の兩主軸によりて區分せらるる象限の内、對角線的に相對する2個の象限にありては曲面は凸彎曲、對角線的に相對する他の2個の象限にありては曲面は凹彎曲となる。特に正方形の場合にありては相對する邊の中央を連ぬる2個の主軸の外に、2個の對角線も亦斷面の主軸となるが故に、軸の横斷面は斷面重心を通過する4個の主軸に依りて8區割せられ、従つて曲面は互に對角線的に相對する2對の凸彎曲と2對の凹彎曲とより成立する事となる可し。(後章参照)

4. 相連續せる2個の横斷面の兩主軸は常に同量だけ相對的に扭ぢらること橢圓斷面の場合と同一なり。

以上の結果を綜合するに、圓形斷面の場合には横斷面の彎曲、従つて分子の縦變位なきが故に、舊理論と新理論との間に何等の差異を生ぜずと雖も、横斷面の彎曲を考慮するに及んで、扭力の理論は根本的の變革に遭遇したりと言ふ可く、而して此の彎曲を指摘しだりしは前述の如くカウシイに創まる。

扭力の舊理論に従へば最大應力は斷面重心より最も遠き纖維に起る可きものなれど、新理論の教ふる所は全く之と相反し、斷面重心に最も近き纖維に於て最大應力の起る可きを以てす。従つて舊理論に従へば橢圓斷面の最大應力は長軸の兩端に起らざる可らざるに、新理論の指摘する所は全く之と相容れず、最大應力は

短軸の兩端に起る事を教ふるのみならず、矩形断面にありても舊理論が最大應力の點を軸の4稜に歸するに反し、新理論は軸の4稜にありては却つて應力零なる事を立證す。此の間に於ける扭力理論の變遷は寔に、學徒をして津々たる興味を喚起せしめずんば已まざるものあり。是れ著者が繁雜を敢てして其の沿革を略述する所以なり。

第三章 扭力の新理論

第一節 サン・ヴナンの解法

サン・ヴナンが1853年に發表したる扭力の研究は、實に330頁の大論文にして、又殆んど全部サン・ヴナンの執筆する所にかゝるナヴ・エエ應用力學講義（第三版）第一編、材料の強度（Les Leçons sur la Résistance des Matériaux et sur l'Etablissement des Constructions en Terre, en Maçonnerie et en Charpente）第一章、固體の強度（De la Résistance de corps Solides）第五節、扭力に對する稜體の強度（De la Résistance d'un corps prismatique à la torsion）（p. 237-504）も270頁に達する長編なり。サン・ヴナンの解法は此等を通じて之を知悉し得可しと雖も、今之を詳細に亘りて紹介する事は著者の本旨に非ざるが故に、茲には前記1847年の論文、1853年の論文及びナヴ・エエの著書の三つを根據として、扭力上に於けるサン・ヴナンの理論の大要を摘録す可し。基本公式誘導の論據に就ては、上記の論文とナヴ・エエの著書との間に多少の相違あり。惟ふにサン・ヴナンが前者にありては之を彈性理論の一般公式より誘導し、後者にありては之を始めより特殊條件の下に取扱ひし所以の者は、比較的、程度の高からざる應用力學講義としての上記の著書の必要と便宜とに出でたるものなる可し。著者は姑く後者に従ふ。後に彈性理論の一般式との間の關係を略解する機會ある可し。

サン・ヴナンの研究は、物體の彈性が凡ての方向に同一なる場合（即ち G の値が凡ての方向に對して同一なる場合、サン・ヴナンは斯る物體をカウシイの定義に従つて *isotrope* と呼ぶ）及び、物體の彈性が方向に依りて異なる場合（即ち G の値が方向と共に變ずる場合、サン・ヴナンは斯る物體を *homogène* と呼ぶ。木材の如きは此の一例なり）の二つを含めども、茲には凡ての方向に對して G の値が同一なる均質（*Isotropic, isotrope, isotrop*）の場合のみを取扱ひ、所謂齊質（*Homogeneous, homogène, homogen*）の場合には之を省略す。應力と變形との間に

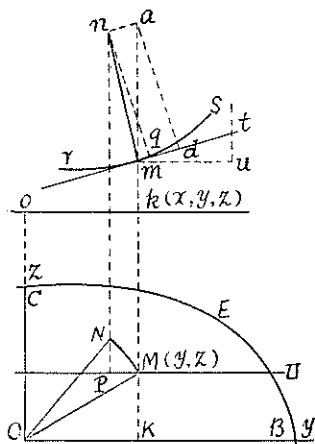
フックの法則を假定することは前章に同じ。猶ほ公式に使用する記號には英佛獨の學者によりて各其の慣用を異にすれど、著者は多くの場合、獨逸流の記號を採用したり。又凡ての論文及び著作を通じて、之を本書に引用せる限りは其の記號、符號を凡て本書の慣用に從つて改訂統一したり、例へば q が變數 y, z の函數なる場合の偏微分係數を表はすに、サン・ヴナンは $d\xi/dy, d\xi/dz$ の如き符號を使用したれども、著者は之を $\partial\xi/\partial y, \partial\xi/\partial z$ に改めたるが如き是なり。

圓形斷面の場合、換言すれば軸の横斷面が變形後も猶ほ平面として残る場合には、歪形 φ は單位扭力角 θ と動徑 (Radius vector, le rayon vecteur, der Fahrstrahl) ρ との積に等しく、 $\varphi = \theta\rho$ にして、扭力率 M_a は斷面の極惰性率 I_0 に比例すること、公式 (5) の示す所の如しと雖も、其の他の斷面即ち軸の横斷面に彎曲の起る場合にありては、歪形 φ は $\theta\rho$ の積に依りて表はすこと能はず、從つて公式 (5) を書き改めたる $M_a = G\theta I_0$ の如き公式を使用する事能はず、一般に

$$M_a = CG\theta I_0 \dots\dots\dots(10)$$

とし、圓形斷面に對しては係數 $C=1$ なれど、其の他の一般斷面に對しては $C < 1$ なるを以て通則とす。

斷面が彎曲する場合の歪形 φ を表はす公式は次の如くにして求めらる。軸として使用する斷面は實用上、必ず對稱圖形に限らるるが故に、本編に於て取扱ふ



第四圖

軸の斷面は必ず對稱圖形とす。第四圖に於て、 BEC を鉛直軸の横斷面、 OB, OC を重心 O を通過する兩主軸とす。此の横斷面中の任意の一點 M の平面坐標を y, z とし、 M を通過して OB 即ち y 軸に平行なる鉛直平面 MU を以て軸を縦斷したる場合に於て、此の鉛直平面上に於ける横斷面 BEC の始めの位置を ok 、後の位置を rms を以て表はす。換言すれば、始め ok に依りて表はされたる平面横斷面は、鉛直平面 MU 上に於て曲線 rms を以て表はさるる曲面に變じたるものとす。

扭力を加ふる前に M を通過したりし鉛直纖維は變形後少しく傾斜し、且つ O を通過する螺旋曲線に變ずるが故に、此の纖維の一小部分を取りて考ふるときは、その横斷面上の射影 (Projection, la projection, die

Projektion) は O を中心とする圓弧 MN を以て表はさるゝと共に、其の縦斷面上の射影は曲線 mn を以て表はされ、纖維の長さを極めて小さく取りたる場合に於ては、 mn は之を直線と見做すことを得。

$$\rho = \sqrt{y^2 + z^2}; M \text{ 點の動徑}$$

θ ; 單位扭力角

φ ; M 點に於ける主歪形 (Principal shearing strain, le glissement principal, die Hauptverschiebung)

φ_y, φ_z ; 兩坐標軸 y, z 上の φ の分歪形

ξ ; 彎曲斷面 rms の鉛直縱距 (Vertical ordinate, l'ordonnée verticale, die vertikale Ordinate) 即ち mk の長さ

$i = \partial \xi / \partial y$; 曲線 rms の m 點に於ける勾配, 換言すれば曲線 rms の m 點に於ける切線 mt が水平線 mn 又は ok となす勾配

$j = \partial \xi / \partial z$; 同様に於て M 點を通過し OG 即ち z 軸に平行なる縦斷面上に於ける同様なる曲線, $r'm's'$ の m 點に於ける勾配

先づ横斷面が平面として残り彎曲を生ぜざる場合を考ふるに、此の時は mn の長さを單位長に取りて、其の水平射影 $MN = \theta\rho$ は斷面の主歪形 φ を以て表はさると共に、圓弧 MN を直線と見做し、三角形 OMK と三角形 MNP との相似性を考ふる時は、容易に次の關係を見出すことを得。

$$\varphi_y = -MP = -\theta z, \quad \varphi_z = NP = \theta y$$

即ち
$$\varphi = \theta\rho, \quad \varphi_y = -\theta z, \quad \varphi_z = \theta y \dots\dots\dots(11)$$

次に横斷面が彎曲するも M 點を通過する纖維が、猶ほ鉛直に止まる場合を考ふるに、此の時は分歪形 φ_y は此の鉛直纖維上の單位長 ma の、切線 mt 上に於ける射影 md に等しかる可し。而して射影 md は切線 mt の、水平線 mu 上に於ける勾配に外ならざるが故に次の關係あり。

$$\left. \begin{aligned} \varphi_y = i = \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \varphi_z = j = \frac{\partial \xi}{\partial z} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(12)$$

横斷面が彎曲し且つ M 點を通過する纖維が傾斜する、實際の場合の φ_y, φ_z の値は (11), (12) 兩式によりて表はされたる關係を、幾何學的合成の原理、從つて

代數學的加法に依りて合成する事によりて、容易に見出す事を得可し。之を第四圖に就て見るも、分歪形 φ_y は單位纖維長 mn の、切線 mi 上に於ける射影 mq を以て表はされ

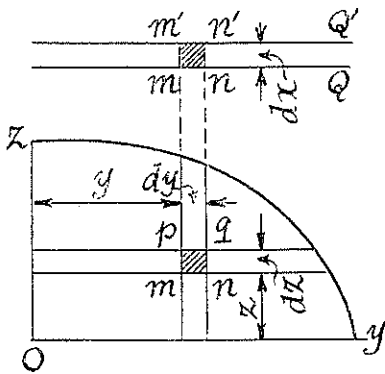
$$mq = md - qd, \quad qd = na = PM$$

此の内 md は (12) 式より之を求め、 PM は (11) 式より之を求め得るが故に、纖維の傾斜と断面の彎曲とが同時に起る場合の一點 (M, m) の分歪形に對して、次の公式を誘導することを得。

$$\left. \begin{aligned} \varphi_y &= i - \theta z = \frac{\partial \xi}{\partial y} - \theta z \\ \varphi_z &= j + \theta y = \frac{\partial \xi}{\partial z} + \theta y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

従つて主歪形 φ に関しては

$$\varphi = \sqrt{\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - \theta z\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \theta y\right)^2} \dots\dots\dots (14)$$



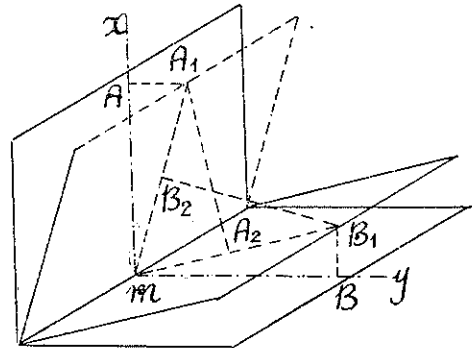
第五圖

次に第五圖に於て軸の横断面中の任意の一點 m の坐標を x, y, z とし、 $mnqp$ を以て dy, dz を 2 邊とする纖維の矩形底面を表はす。此の矩形纖維が、微分距離 dx を以て相距たる 2 個の横断面 Q, Q' の間に挟まる、短小なる部分の、鉛直の方向に於ける釣合の状態を考ふるに、純扭力の場合にありては纖維の自重を無視する限り、矩形 $mnqp$ の面には垂面應力 (Normal stress, la pression normale, die Normalspannung) の

存在するものなきが故に、4 邊 mp, nq, mn, pq に働く唯一の鉛直應力は、鉛直の方向に起る歪形に起因する切觸應力 (Tangential stress, la pression tangentielle, die Tangentialspannung) ならざる可らず。而して此等の切觸應力の應力度は歪形に弾性係數 G を乗じたる積を以て表はさる。

x 軸の方向に於ける軸の縦断面 mp の歪形は、 y 軸の方向に於ける軸の横断面 $mnqp$ の歪形と、一點 m に於ては同一の値を有せざる可らず。

何となれば此等の歪形は始め互に直角
なりし 2 線 mA, mB 上の単位長 $mA_1,$
 mB_1 が, 變形後, 各他の上に投ずる射影
 mA_2, mB_2 に等しくして, 其の値は必然
的に相等しからざる可らざるが故なり。
(第六圖) 此の歪形は又 mA_1, mB_1 の間
の直角の變形によりても, 之を表はすこ
とを得 (Voir Navier: Les Leçons de la
mécanique, p. 249; s. Bach: Elastizität
und Festigkeit, s. 335)



第 六 圖

$$\varphi_{xz} = \varphi_y \div \frac{mA_2}{A_1A_2} = \frac{mB_2}{B_1B_2} \div mA_2 = mB_2 = \frac{AA_1}{mA} + \frac{BB_1}{mB}$$

茲に φ_{xz}, φ_y は夫々 x, y 軸の方向に於ける縦断面 mp 及び横断面 $mnqp$ の歪形
を表はす。同様にして φ_{xy}, φ_z を以て夫々 x, z 軸の方向に於ける縦断面 mn 及
び横断面 $mnqp$ の歪形を表はす時は

$$\varphi_{xy} = \varphi_z$$

此等の關係は互に直角なる二つの断面に働く裁力度の値が相等しき, 一般裁力
の周知の性質よりも亦, 容易に且つ直接に導くことを得可し。換言すれば矩形織
維の邊 mp には $G\varphi_y$ の切觸應力, 邊 mn には $G\varphi_z$ の切觸應力が働くことを知
る。而し mp の對邊 nq に働く切觸應力は $G\varphi_y$ とは反對の符號, mn の對邊
 pq に働く切觸應力は $G\varphi_z$ とは反對の符號を有し, 且つ兩者の間の應力度の差違
は夫々 $\partial(G\varphi_y)/\partial y, \partial(G\varphi_z)/\partial z$ を以て表はし得るが故に, 物體平衡の原則より

$$\frac{\partial(G\varphi_y)}{\partial y} + \frac{\partial(G\varphi_z)}{\partial z} = 0, \text{ 或は } \frac{\partial\varphi_y}{\partial y} + \frac{\partial\varphi_z}{\partial z} = 0$$

此の式中の φ_y, φ_z に (13) 式の値を代入する時は

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial\xi}{\partial y} - \theta_z \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial\xi}{\partial z} + \theta_y \right) = 0$$

或は

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} = 0 \dots\dots\dots(15)$$

(15) 式は扭力の場合に於ける弾性理論の基本公式にして, サン・ヴナンが, 扭力
を蒙る塊體の凡ての點に就ての不定微分方程式 (L'équation différentielle indé-

finie, relative à tous les points du prisme tordu) と稱する所の重要な公式なり。

次に扭力を蒙る嚙體の断面周邊 (Circumference, le contour, der Rand) 上の點に於ける特殊の條件を考慮せんに、軸の周面上に於ては切觸應力の働くものなく、從つて周面上には歪形の起ることなきが故に、變形後の彎曲面は常に其の周面と直角に交はり、從つて此の周面に對する法線は變形後も断面周邊及び螺旋稜線に沿ひては、依然として周面の法線として止まる。從つて此の螺旋曲線の、横斷面或は其の切面上に於ける射影は、断面周邊に切觸す。而して y, z の方程式として與へられたる断面周邊の微小部分 ds の、 y, z 軸の方向に於ける射影は夫々 dy, dz にして、螺旋纖維の周邊上に於ける射影は其の主歪形の方に起り、後者の y, z 軸の方向に於ける射影は夫々 $i-\theta z, j+\theta y$ にして、此等の 2 方向が同一なるためには

$$\frac{dy}{dz} = \frac{i-\theta z}{j+\theta y} = \frac{\partial \xi / \partial y - \theta z}{\partial \xi / \partial z + \theta y}$$

なることを必要とす。或は

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \theta y \right) dy - \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - \theta z \right) dz = 0 \dots\dots\dots (16)$$

(16)式は主歪形が軸の断面周邊に於ては、常に之が切線の方に起る可きことを示す重要な公式にして、サン・ヴナンが断面周邊上の點に對する定方程式 (L'équation définie à satisfaire pour les points du contour des sections du prisme) と稱する所の公式なり。

次に軸の斷面に於ける應裁力と扭力率との間の關係を求めんに

τ ; y, z の坐標を有する一點 P に於ける應力度

τ_y ; y 軸の方向に於ける τ の分力

τ_z ; z 軸の方向に於ける τ の分力

df ; P に於ける微分面積

dM ; P に於ける應力の、断面重心 O に關する力率

とせば、 P に於ける y の方向の應力は

$$\tau_y df = G \varphi_y df = G \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \theta y \right) df$$

同じく z の方向の應力は

$$\tau_z df = G\varphi_z df = G\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - \theta z\right) df$$

従つて

$$\begin{aligned} dM &= (\tau_{zy} - \tau_{yz}) df = G(\varphi_{zy} - \varphi_{yz}) df \\ &= G\left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \theta y\right)y - \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} - \theta z\right)z\right] df \end{aligned}$$

$$\therefore M_a = \int G\left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \theta y\right)y - \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} - \theta z\right)z\right] df \dots\dots\dots (17)$$

扭力の問題は要するに (15) 乃至 (17) の 3 方程式の解法に歸着す。今若し變位が坐標の函數として與へられたる時は、不定方程式 (15) 及び定方程式 (16) は明らかに簡單なる微分の方法に依りて、應力を決定せしむるに足る (サン・ヴナンの problèmes directs と稱する場合) と雖も、逆に外力又は應力を與へて變位を求めんとする場合には、不定方程式 (15) を積分して其の任意の常數又は函數 (Constantes ou fonctions arbitraires) を定方程式 (16) を満足する様に決定せざる可らず (サン・ヴナンの problèmes inverses と稱する場合) にして、此の問題は今猶ほ其の一般的解法を不可能とせらる。唯此の場合に於て一部の應力と一部の變位若しくは其の間の相互的關係が與へらるゝ時は、此等の關係は微分方程式を簡單にして、殘餘の部分の積分を容易ならしむ (サン・ヴナンの problèmes mixtes と稱する場合)

而してサン・ヴナンの採用したる方法は所謂混合解法 (Les méthodes mixtes ou sémi-inverses; voir Saint-Venant: Mémoire sur la torsion, 1853, p. 234 et p. 278) にして、次に問題を全く逆に考へ、坐標 y, z の函數として變位 ξ の方程式を假定し、之に對應す可き斷面周邊の方程式 $f(y, z) = 0$ を見出す場合に就て之を説明す可し。

今變位 ξ を y, z の代數的函數 (Algebraical function, la fonction algébrique, die algebraische Funktion) と假定し得る最も簡單なる場合を取りて考ふるに、變位 ξ の函數の形を次の如く假定せば、此の函數は明らかに不定方程式 (15) を満足す可し。

$$\begin{aligned} \xi &= \theta[A_1 z + A_2 2yz + A_3(3y^2 z - z^3) + A_4(4y^3 z - 4yz^2) + \dots \\ &\quad + B_1 y + B_2(y^2 - z^2) + B_3(y^3 - 3yz^2) \\ &\quad + B_4(y^4 - 6y^2 z^2 + z^4) + \dots] \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

茲に A, B は係数を表はし、各項の數係数は後の積分に對し方程式の形を簡單にせんがために用ひたるものとす。(18) 式を y, z に就て偏微分し (13) 式を用ひて次式を得。

$$\varphi_y = \frac{\partial \xi}{\partial y} - \theta z = \theta \left[-z + 2A_2z + 3A_3 \cdot 2yz + 4A_4(3y^2z - z^3) + \dots \right. \\ \left. + B_1 + 2B_2y + 3B_3(y^2 - z^2) + 4B_4(y^3 - 3yz^2) + \dots \right] \dots \dots (19)$$

$$\varphi_z = \frac{\partial \xi}{\partial z} + \theta y = \theta \left[A_1 + 2A_2y + 3A_3(y^2 - z^2) + 4A_4(y^3 - 3yz^2) + \dots \right. \\ \left. + y - 2B_2z - 3B_3 \cdot 2yz - 4B_4(3y^2z - z^3) + \dots \right] \dots \dots (20)$$

(19), (20) 式を定方程式 (16) に代入して積分する時は

$$f(y, z) = \frac{y^2 + z^2}{2} + A_1y + A_2(y^2 - z^2) + A_3(y^3 - 3yz^2) \\ + A_4(y^4 - 6y^2z^2 + z^4) + \dots \\ - B_1z - B_2 \cdot 2yz - B_3(3y^2z - z^3) - B_4(4y^3z - 4yz^3) - \dots - K = 0 \quad (21)$$

又 (19), (20) 式の値を (17) 式に代入する時は

$$M_\theta = G\theta \int df \left[y^2 + z^2 + A_1y + 2A_2(y^2 - z^2) + 3A_3(y^3 - 3yz^2) \right. \\ \left. + 4A_4(y^4 - 6y^2z^2 + z^4) + \dots \right. \\ \left. - B_1z - 2B_2 \cdot 2yz - 3B_3(3y^2z - z^3) - 4B_4(4y^3z - 4yz^3) - \dots \right] \dots (22)$$

扭力を蒙りたる軸の斷面の縱變位 ξ が (18) 式にて表はされ、從つて其の歪形が (19), (20) 式にて與へらるゝ時は、斷面周邊の方程式は (21) 式の如き形を取り、扭力率は (22) 式を以て表はさるゝが故に、(21) 式の係數に夫々適當なる値を代入することに依りて、與へられたる斷面形狀に對する扭力の問題は容易に解決せらる可し。次に二、三の例を示す。

(1) 圓形斷面の場合

(21) 式に於て $A_1 = A_2 = A_3 = \dots = 0$, $B_1 = B_2 = B_3 = \dots = 0$, $K = r^2/2$ と置けば

$$f(y, z) = \frac{y^2 + z^2}{2} - \frac{r^2}{2} = 0, \quad \therefore y^2 + z^2 = r^2$$

即ち r を半径とする圓の方程式を得たり。係數 A, B, K の此の値を (18) 式に代入する時は $\xi = 0$, 即ち圓形斷面の場合には縱變位零にして横斷面の彎曲な

し。又 (19), (20) 兩式より $\varphi_y = -\theta z, \varphi_z = \theta y$

従つて (14) 式より

$$\varphi = \theta \sqrt{y^2 + z^2} = \theta \rho, \quad \tau = G\varphi = G\theta \rho$$

次に扭力率を求むるには (22) 式を用ひ

$$M_a = G\theta \int (y^2 + z^2) df = G\theta I_0 = G\theta \frac{\pi r^4}{2}$$

即ち既に前章に於て求めたると同一の公式を得たり。

(□) 橢圓形断面の場合

(21) 式に於て係數 A, B の中 A_2 を除きたる他の凡てを零とせば

$$f(y, z) = \frac{y^2 + z^2}{2} + A_2(y^2 - z^2) - K = 0$$

更に $2K/(1 + 2A_2) = b^2, 2K/(1 - 2A_2) = c^2$ と置けば

$$A_2 = -\frac{b^2 - c^2}{2(b^2 + c^2)}, \quad K = \frac{2b^2c^2}{2(b^2 + c^2)}$$

$$\therefore f(y, z) = \frac{y^2 + z^2}{2} - \frac{(b^2 - c^2)(y^2 - z^2)}{2(b^2 + c^2)} - \frac{2b^2c^2}{2(b^2 + c^2)} = 0, \quad \text{或は} \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

即ち $2b, 2c$ を兩軸とする橢圓の方程式を得たり。 A_2, K の此の値を (18) 式に代入する時は

$$\xi = -\theta \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2} yz \dots\dots\dots(23)$$

即ち 双曲拋物曲面 (le paraboloid hyperbolique) の方程式を得たり。又歪形を求むるには (19), (20) 式を用ひ

$$\varphi_y = -\left[1 + \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2}\right] \theta z = -\frac{2b^2}{b^2 + c^2} \theta z,$$

$$\varphi_z = \left[1 - \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2}\right] \theta y = \frac{2c^2}{b^2 + c^2} \theta y$$

$$(14) \text{ 式より } \varphi = \frac{2\theta}{b^2 + c^2} \sqrt{c^4 y^2 + b^4 z^2}, \quad \text{従つて } \tau = G\varphi = \frac{2G\theta}{b^2 + c^2} \sqrt{c^4 y^2 + b^4 z^2}$$

扭力率は (22) 式を用ひ

$$M_a = \frac{2G\theta}{b^2 + c^2} [b^2 \int z^2 df + c^2 \int y^2 df]$$

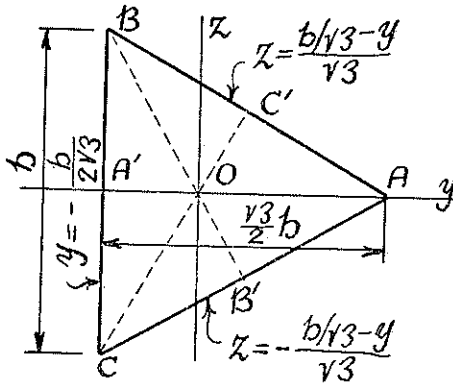
然るに $b^2 \int z^2 df = \frac{\pi b^3 c^3}{4}, \quad c^2 \int y^2 df = \frac{\pi b^3 c^3}{4}$

$$\therefore M_d = G\theta \frac{\pi b^3 c^3}{b^2 + c^2} = G\theta \frac{4b^2 c^2}{(b^2 + c^2)^2} \cdot \frac{\pi}{4} bc(b^2 + c^2) = CG\theta I_p$$

$$b \leq c \text{ 従つて } \frac{b}{c} \leq 1 \text{ とせば } C = \left[\frac{\frac{2b}{c}}{1 + \left(\frac{b}{c}\right)^2} \right]^2 \leq 1$$

即ち (10) 式の結果と符合す。

(ハ) 正三角形断面の場合



第七圖

(21) 式に於て A_3 以外の係数 A, B を凡て零と置けば

$$f(y, z) = \frac{y^2 + z^2}{2} + A_3(y^2 - 3yz^2) - K = 0$$

更に $A_3 = -\frac{1}{\sqrt{3}b}$,

$$K = \frac{b^2}{18} \text{ と置けば}$$

$$\frac{y^2 + z^2}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}b}(y^2 - 3yz^2) - \frac{b^2}{18} = 0$$

此の方程式の左邊を因子に分解して

$$\begin{aligned} & \left(y + \frac{b}{2\sqrt{3}}\right) \left[z^2 - \frac{\left(\frac{b}{\sqrt{3}} - y\right)^2}{3}\right] \\ &= \left(y + \frac{b}{2\sqrt{3}}\right) \left[z - \frac{\frac{b}{\sqrt{3}} - y}{\sqrt{3}}\right] \left[z + \frac{\frac{b}{\sqrt{3}} - y}{\sqrt{3}}\right] = 0 \dots\dots (24) \end{aligned}$$

(24) 式は明らかに第七圖に於ける正三角形 ABC の 3 邊を表はす方程式なり。
即ち BC の方程式は

$$y = -\frac{b}{2\sqrt{3}}, \quad \therefore y + \frac{b}{2\sqrt{3}} = 0$$

$$AB \text{ の方程式は } \frac{y}{b} + \frac{z}{b} = 1, \quad \therefore z - \frac{\frac{b}{\sqrt{3}} - y}{\sqrt{3}} = 0$$

同様にして AC の方程式は $z + \frac{\frac{b}{\sqrt{3}} - y}{\sqrt{3}} = 0$

上の A, K の値を (19), (20) 式に代入する時は

$$\varphi_y = -\theta \left[z + \frac{yz}{\frac{2\sqrt{3}}{b}} \right] = -\theta \left[z + \frac{2\sqrt{3}yz}{b} \right],$$

$$\varphi_z = \theta \left[y - \frac{y^2 - z^2}{\sqrt{3}} \right] = \theta \left[y - \frac{\sqrt{3}(y^2 - z^2)}{b} \right]$$

又縦變位 ξ の方程式は (18) 式より

$$\xi = -\frac{3y^2z - z^3}{\sqrt{3}b} \theta \dots\dots\dots (25)$$

次に扭力率は (22) 式より

$$M_n = G\theta \left[\int (y^2 + z^2) df - \frac{\sqrt{3}}{b} \int (y^3 - 3yz^2) df \right]$$

然るに $I_0 = \int (y^2 + z^2) df = 2 \int y^2 df = 2 \int z^2 df = 2I_1 = 2I_2 = \frac{1}{16\sqrt{3}} b^4$

又 $\int (y^3 + z^3) y df = \int (y^3 + yz^2) df = 0$

$$\therefore \int yz^2 df = -\int y^3 df, \quad \therefore \int (y^3 - 3yz^2) df = 4 \int y^3 df$$

然るに $\int y^3 df = \int y^3 dy \int dz = \int y^2 dy \left[\frac{\frac{b}{\sqrt{3}} - y}{\sqrt{3}} - \left(-\frac{\frac{b}{\sqrt{3}} - y}{\sqrt{3}} \right) \right]$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \int y^2 \left(\frac{b}{\sqrt{3}} - y \right) dy = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\frac{b}{4\sqrt{3}} y^4 - \frac{1}{5} y^5 \right]_{-y_1}^{+y_2}$$

而して $y_1 = b/2\sqrt{3}$, $y_2 = b/\sqrt{3}$ なるが故に

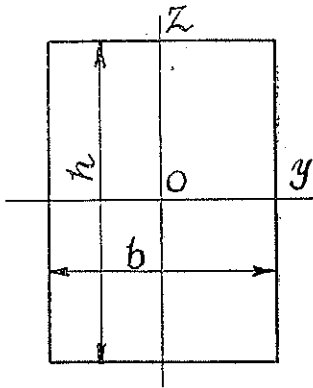
$$\int y^3 df = \frac{b^4}{32 \times 15}, \quad \therefore \int (y^3 - 3yz^2) df = \frac{b^4}{8 \times 15}$$

従つて $M_n = G\theta \left[\frac{b^4}{16\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{b} \frac{b^4}{8 \times 15} \right] = G\theta \frac{b^4}{16\sqrt{3}} \left(1 - \frac{2}{5} \right)$

$$= 0.6 G\theta I_0 = CG\theta I_0$$

即ち此の場合にも係数 $C=0.6$ にして (10) 式を満足す。

此等の例が示す如く (21) 式の係数 A, B 及び常数 K に適當なる値を代入する事によりて、種々なる断面形狀を決定する事を得れども、 ξ を (18) 式の如き y, z の代數的函數と假定する限り、 A, B, K に如何なる値を代入するも (21) 式の方程式は矩形断面を表はすこと能はず。依りて矩形断面の場合には ξ を代數的函數と假定せずして、超函數 (Transcendental function, la fonction transcendante, die transzendente Funktion) と假定せざる可らざることを知る可し。



第八圖

矩形の底邊 b を y 軸に平行、其の高さ h を z 軸に平行に取る時は、 b の長さを有する邊上に於ては $z = \pm h/2$ 従つて $dz = 0$ となると共に、 h の長さを有する邊上に於ては $y = \pm b/2$ 従つて $dy = 0$ (第八圖)

故に (16) 式によりて與へられたる定方程式の條件は、此の場合には之を次の如く言ひ表はすことを得可し。即ち z が $h/2$ 及び $-h/2$ の間の如何なる値なるに關せず、 $y = \pm b/2$ なる限り $\partial\xi/\partial y = \theta z$ なることを必要とす。

是れ (16) 式即ち $(\partial\xi/\partial z + \theta y) dy - (\partial\xi/\partial y - \theta z) dz = 0$ の第一項が零なる場合には、同時に其の第二項が又零ならざる可らざることを條件づくるものとす。次に y が $b/2$ 及び $-b/2$ の間の如何なる値なるに關せず $z = \pm h/2$ なる限り $\partial\xi/\partial z = -\theta y$ なる事を必要とす。 是れ (16) 式の第二項が零なる場合に、同時に第一項が又零とならざる可らざる事を條件づくるものなり。

今 ξ の特殊積分を $-\theta yz$ とせば $\xi = -\theta yz$ は明らかに (15) 式を満足するが故に

$$\xi = -\theta yz + \xi_1 \dots\dots\dots (26)$$

とし、従つて (15) 式の代りに

$$\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial z^2} = 0 \dots\dots\dots (27)$$

を使用するも、理論の正鵠を失はざるのみならず、(26) 式を使用する事によりて (16) 式の條件を簡單ならしむる事を得。即ち此の場合には (16) 式の代りに

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \theta y &= \frac{\partial \xi_1}{\partial z}, & \frac{\partial \xi}{\partial y} - \theta z &= \frac{\partial \xi_1}{\partial y} - 2\theta z \\ \therefore \frac{\partial \xi_1}{\partial z} dy - \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial y} - 2\theta z \right) dz &= 0 \dots\dots\dots (28) \end{aligned}$$

を使用し得可きが故に、此の場合には次の条件あり。即ち $y = \pm b/2$ なる場合には z の $h/2$ 及び $-h/2$ の間の凡ての値に對して $\partial \xi_1 / \partial y = 2\theta z$ 、及 $z = \pm h/2$ なる場合には y の $b/2$ 及び $-b/2$ の間の凡ての値に對して $\partial \xi_1 / \partial z = 0$ 、而して此の條件に適合せしむるがために ξ_1 を次の如き超函數と假定す。

$$\xi_1 = \sum A_m (e^{my} - e^{-my}) \sin mz \dots\dots\dots (29)$$

然る時は

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_1}{\partial y} &= \sum m A_m (e^{my} + e^{-my}) \sin mz, \\ \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial y^2} &= \sum m^2 A_m (e^{my} - e^{-my}) \sin mz, \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial z} &= \sum m A_m (e^{my} - e^{-my}) \cos mz, \\ \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial z^2} &= - \sum m^2 A_m (e^{my} - e^{-my}) \sin mz \end{aligned}$$

にして (29) 式は (27) 式を満足すること明らかなり。此の不定方程式に定方程式の第二の條件を入れる時は

$$\left[\frac{\partial \xi_1}{\partial z} \right]_{z = \pm \frac{h}{2}} = \sum m A_m (e^{my} - e^{-my}) \cos \left(\pm \frac{mh}{2} \right) = 0$$

即ち $\left[\frac{\partial \xi_1}{\partial z} \right] = 0$ なるがためには $\cos \frac{mh}{2} = 0$,

故に n を任意の正整数とせば

$$\frac{mh}{2} = (2n-1) \frac{\pi}{2}, \quad \therefore m = (2n-1) \frac{\pi}{h}$$

次に A_m の値を決定するには定方程式の第一の條件を用ふ。即ち

$$\left[\frac{\partial \xi_1}{\partial y} \right]_{y = \pm \frac{b}{2}} = \sum m A_m (e^{\frac{mb}{2}} + e^{-\frac{mb}{2}}) \sin mz = 2\theta z$$

今 $\frac{mA_m}{2\theta} (e^{\frac{mb}{2}} + e^{-\frac{mb}{2}}) = A_n$

と置けば上の條件式は $\sum A_n \sin mz = z$ となり、此の式の右邊をフウリエエの定理によりて展開する時は

$$\begin{aligned} z = \sum A_n \sin (2n-1) \frac{\pi z}{h} &= \frac{4h}{\pi^2} \left[\sin \frac{\pi z}{h} - \frac{1}{3^2} \sin \frac{3\pi z}{h} + \frac{1}{5^2} \sin \frac{5\pi z}{h} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{7^2} \sin \frac{7\pi z}{h} + \dots \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{4h}{\pi^2} \sum \frac{(-1)^{n+1} \sin(2n-1) \frac{\pi z}{h}}{(2n-1)^2}$$

$$\therefore A_n = \frac{mA_m}{2\theta} (e^{\frac{mb}{2}} + e^{-\frac{mb}{2}}) = \frac{4h}{\pi^2} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}$$

指數函數の代りに双曲函數 (Hyperbolic function, la fonction hyperbolique, die hyperbolische Funktion) の符號を用ふる時は

$$\sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}, \quad \cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}, \quad \tanh y = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}$$

なるが故に

$$A_n = \frac{4h}{\pi^2} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2} \frac{\theta}{(2n-1) \frac{\pi}{h} \cosh(2n-1) \frac{\pi}{2} \frac{b}{h}}$$

$$= (-1)^{n+1} \frac{4h^2}{\pi^3(2n-1)^3} \frac{\theta}{\cosh(2n-1) \frac{\pi}{2} \frac{b}{h}}$$

此の値を (29) 式に代入する時は

$$\xi_1 = \sum (-1)^{n+1} \frac{8h^2\theta}{\pi^3(2n-1)^3} \frac{\sinh(2n-1) \frac{\pi}{h} y \sin(2n-1) \frac{\pi}{h} z}{\cosh(2n-1) \frac{\pi}{2} \frac{b}{h}}$$

(26) 式の代りに $\xi = \theta yz + \xi_1 \dots\dots\dots(30)$

従つて (28) 式の代りに

$$\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial z} + 2\theta y\right) dy - \frac{\partial \xi_1}{\partial y} dz = 0 \dots\dots\dots(31)$$

(29) 式の代りに

$$\xi_1 = \sum A_n (e^{mz} - e^{-mz}) \sin my \dots\dots\dots(32)$$

を使用するも猶ほ理論の眞を失はず。此の時には同様にして

$$\xi_1 = \sum (-1)^n \frac{8b^2\theta}{\pi^3(2n-1)^3} \frac{\sinh(2n-1) \frac{\pi}{b} z \sin(2n-1) \frac{\pi}{b} z}{\cosh(2n-1) \frac{\pi}{2} \frac{h}{b}}$$

を得可きが故に、 ξ_1 に対して y 及び z, b 及び h に就て對稱なる 2 種の函數を與ふる事を得可し。依りて (26), (30) 式を用ひ

$$\begin{aligned} \xi &= \theta b h \left[-\frac{yz}{bh} + \frac{1}{8} \left(\frac{4}{\pi} \right)^2 \frac{h}{b} \sum \frac{(-1)^{n+1} \sinh(2n-1) \frac{\pi}{h} y \sin(2n-1) \frac{\pi}{h} z}{(2n-1)^2 \cosh(2n-1) \frac{\pi}{2} \frac{b}{h}} \right] \\ &= \theta b h \left[\frac{yz}{bh} - \frac{1}{8} \left(\frac{4}{\pi} \right)^2 \frac{b}{h} \sum \frac{(-1)^{n+1} \sinh(2n-1) \frac{\pi}{b} z \sin(2n-1) \frac{\pi}{b} y}{(2n-1)^2 \cosh(2n-1) \frac{\pi}{2} \frac{h}{b}} \right] \end{aligned} \quad (33)$$

従つて (13) 式より

$$\begin{aligned} \varphi_y &= -\theta h \left[\frac{2z}{h} - \frac{1}{2} \left(\frac{4}{\pi} \right) \sum \frac{(-1)^{n+1} \cosh(2n-1) \frac{\pi}{h} y \sin(2n-1) \frac{\pi}{h} z}{(2n-1)^2 \cosh(2n-1) \frac{\pi}{2} \frac{b}{h}} \right] \\ &= -\frac{\theta h}{2} \left(\frac{4}{\pi} \right)^2 \frac{b}{h} \sum \frac{(-1)^{n+1} \sinh(2n-1) \frac{\pi}{b} z \cos(2n-1) \frac{\pi}{b} y}{(2n-1)^2 \cosh(2n-1) \frac{\pi}{2} \frac{h}{b}} \end{aligned} \quad (34)$$

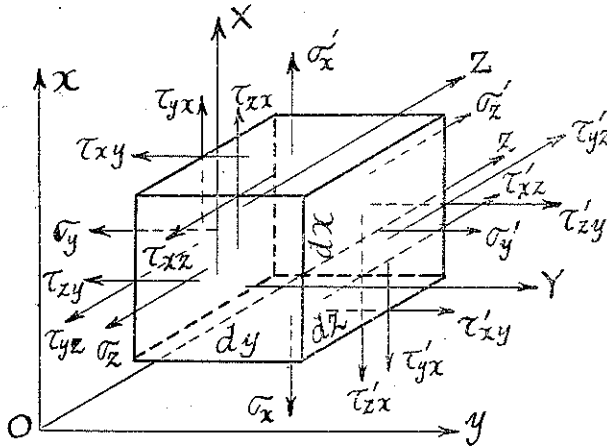
$$\begin{aligned} \varphi_z &= \frac{\theta b}{2} \left(\frac{4}{\pi} \right)^2 \frac{h}{b} \sum \frac{(-1)^{n+1} \sinh(2n-1) \frac{\pi}{h} y \cos(2n-1) \frac{\pi}{h} z}{(2n-1)^2 \cosh(2n-1) \frac{\pi}{2} \frac{b}{h}} \\ &= \theta h \left[\frac{2y}{b} - \frac{1}{2} \left(\frac{4}{\pi} \right)^2 \sum \frac{(-1)^{n+1} \cosh(2n-1) \frac{\pi}{b} z \sin(2n-1) \frac{\pi}{b} y}{(2n-1)^2 \cosh(2n-1) \frac{\pi}{2} \frac{h}{b}} \right] \end{aligned} \quad (35)$$

扭力率を求むるには (17) 式を使用す。(17) 式に (34),(35) 式の値を代入して積分し、其の結果を簡単にすれば (Voir Saint-Venant: Mémoire sur la torsion, 1853, p. 369; s. A. Föppl: Vorlesungen über Technische Mechanik, Bd. 5, 4te. Aufl 1922, S. 145)

$$\begin{aligned} M_d &= G\theta b h^3 \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{16} \left(\frac{4}{\pi} \right)^2 \frac{h}{b} \sum \frac{\tanh(2n-1) \frac{\pi}{2} \frac{b}{h}}{(2n-1)^2} \right] \\ &= G\theta b^3 h \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{16} \left(\frac{4}{\pi} \right)^2 \frac{b}{h} \sum \frac{\tanh(2n-1) \frac{\pi}{2} \frac{h}{b}}{(2n-1)^2} \right] \end{aligned} \quad (36)$$

以上はサン・ヴナンの扭力理論の骨子にして、著者は之を弾性理論の一般公式より演繹せず、特に扭力の場合を主眼としてその基本公式を誘導したれど、(15)

の如き基本公式は實に彈性理論の一般公式の特殊の場合たるに過ぎず。一般に $dx dy dz$ なる容積を有する微小物體の平衡の條件を考ふるに



第 九 圖

$X, Y, Z; x, y, z$ の方向に於ける外力の總代力

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z; x, y, z$ の方向に於ける垂面應力度

$\tau_{xy}, \tau_{xz}; x$ に直角なる面上にありて夫々 y, z の方向に働く切觸應力度

$\tau_{yz}, \tau_{yx}; y$ に直角なる面上にありて夫々 z, x の方向に働く切觸應力度

$\tau_{zx}, \tau_{zy}; z$ に直角なる面上

にありて夫々 x, y の方向に働く切觸應力度とせば (第九圖)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + Z &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (37)$$

是れ彈性理論の一般式にして、互に直角に交はる面に於ける直角に交はる切觸應力度は相等しきが故に

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} \dots \dots \dots (38)$$

なる關係あり。扭力の場合には $X = Y = Z = 0, \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0, \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0$ にして、 $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ は $y-z$ の平面即ち軸の横断面に於ける y の方向の應裁力度なるが故に、之を τ_y を以て表はし、 $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ は同じく $y-z$ の平面に於ける z の方向の應裁力度なるが故に、之を τ_z を以て表はす時は (37) 式は

$$\frac{\partial \tau_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \tau_z}{\partial x} = 0 \dots \dots \dots (39)$$

(39) 式の第一式に $\tau_y = G\phi_y, \tau_z = G\phi_z$ なる關係を入るゝ時は

$$\frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial z} = 0$$

之に (13) 式の値を代入する時は (15) 式を得可し。而して (39) 式の第二及び第三式は、夫々 τ_y, τ_z が x に無関係なる事を示すものとす。

猶ほ (36) 式に與へたる M_a の値は、次の關係を用ひて別の形に書き改むることを得。

$$\begin{aligned} \sum \frac{1}{(2n-1)^5} &= \frac{1}{1} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} + \frac{1}{7^5} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{1}{2^5}\right) \frac{\pi^5}{295.1215} \\ \therefore \frac{1}{16} \left(\frac{4}{\pi}\right)^5 \sum \frac{1}{(2n-1)^5} &= \left(1 - \frac{1}{2^5}\right) \frac{64}{295.1215}, \end{aligned}$$

即ち $0.209137 \sum \frac{1}{(2n-1)^5} = 0.210083$

故に (36) 式の第二式を用ひ

$$\begin{aligned} M_a &= G\theta l^3 h \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{16} \left(\frac{4}{\pi}\right)^5 \frac{b}{h} \sum \frac{1}{(2n-1)^5} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{16} \left(\frac{4}{\pi}\right)^5 \frac{b}{h} \sum \frac{1 - \tanh(2n-1) \frac{\pi}{2} \frac{h}{b}}{(2n-1)^5} \right] \\ &= G\theta b^3 h \left[\frac{1}{3} - 0.210083 + 0.209137 \frac{b}{h} \sum \frac{1 - \tanh(2n-1) \frac{\pi}{2} \frac{h}{b}}{(2n-1)^5} \right] \quad (40) \end{aligned}$$

(二) 矩形断面の場合

(40) 式の括弧内の最後の項は、矩形の兩邊の比 h/b が大なるに従つて、之を無視し得可き程度に小なり。例へば

$i =$	2	3	4	5
$1 - \tan hi \frac{\pi}{2} =$	0.003728	0.0001615	0.000007	0.0000003

故に b に比して h が相當に大なる範圍内に於ては、次の略式を使用して可なり。

$$\begin{aligned}
 M_a &= G\theta b^3 h \left(\frac{1}{3} - 0.210083 \frac{b}{h} \right) \\
 &= \frac{1}{3} G\theta b^3 h \left(1 - 0.630249 \frac{b}{h} \right), \quad h > b \\
 \text{同様に} \quad M_a &= G\theta b h^3 \left(\frac{1}{3} - 0.210083 \frac{h}{b} \right) \\
 &= \frac{1}{3} G\theta b h^3 \left(1 - 0.630249 \frac{h}{b} \right), \quad h < b
 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(41)$$

(ホ) 正方形断面の場合

此の時は $b=h$ にして (33) 式の代りに

$$\begin{aligned}
 \xi &= -\theta yz + \frac{1}{8} b^2 \theta \left(\frac{4}{\pi} \right)^3 \sum \frac{(-1)^{n+1} \sinh(2n-1) \frac{\pi}{b} y \sin(2n-1) \frac{\pi}{b} z}{(2n-1)^3 \cosh(2n-1) \frac{\pi}{2}} \\
 &= \theta yz - \frac{1}{8} b^2 \theta \left(\frac{4}{\pi} \right)^3 \sum \frac{(-1)^{n+1} \sinh(2n-1) \frac{\pi}{b} z \sin(2n-1) \frac{\pi}{b} y}{(2n-1)^3 \cosh(2n-1) \frac{\pi}{2}}
 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(42)$$

を得可く, (36) 式の代りに

$$M_a = G\theta b^4 \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{16} \left(\frac{4}{\pi} \right)^5 \sum \frac{\tanh(2n-1) \frac{\pi}{2}}{(2n-1)^5} \right] \quad \dots\dots\dots(43)$$

或は $\sum \frac{\tanh(2n-1) \frac{\pi}{2}}{(2n-1)^5}$ を計算して

$$M_a = 0.140577 G\theta b^4 \quad \dots\dots\dots(44)$$

此の場合には $I_0 = b^4/6$ なるが故に

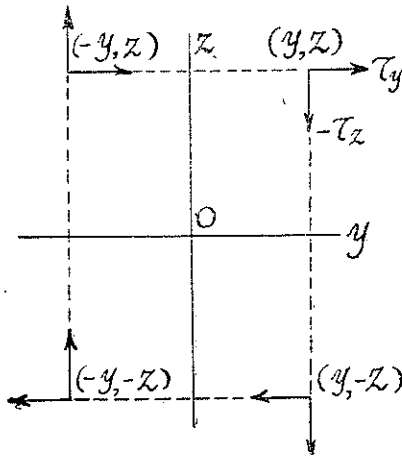
$$M_a = 0.843462 G\theta I_0 = CG\theta I_0$$

と置けば $C = 0.843462$ は明らかに (10) 式を満足す。

第二節 グラスホフの解法

茲に説明せんとする解法はカウシイ、ウエルタイム等と系統を同じくするが故に、之をカウシイの解法と稱するを當れりとすれど、著者はグラスホフの推論 (Grashof: Theorie der Elastizität und Festigkeit, 1878, 2. Abschnitt, A. IV. Drehungselastizität, a) Die Spannungen, S. 134-142) の方法を採用するが故に、

便宜上之をグラスホフの解法と稱す。



第十圖

第十圖に於て τ_y, τ_z を夫々 y, z 軸の方向に於ける應裁力度とせば、 τ_y, τ_z は y, z の函數にして、特に對稱圖形の性質上、此の函數は次の如き性質を具へざる可らず。即ち τ_y は y の符號を變ずるも其の符號即ち方向を變せず、 z の符號を變ずる時は同時に其の符號を變ず。又 τ_z は y の符號を變ずる時は同時に其の符號を變ずれども、 z の符號を變ずるも其の符號を變ぜず。従つて τ_y は y の偶函數 (Even function, la fonction paire, die gerade Funktion) にして z の奇函數 (Odd function, la fonction impaire, die

ungerade Funktion) なると共に、 τ_z は y の奇函數にして z の偶函數ならざる可らず。依りて τ_y, τ_z を次の如き函數と假定す。

$$\left. \begin{aligned} \tau_y &= m_1 z + m_2 y^2 z + m_3 z^3 \\ \tau_z &= n_1 y + n_2 y z^2 + n_3 y^3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (45)$$

y^3, z^3 以上の高次の項を省略せしは、此の場合の條件式が6個以上の係数を決定すること能はざるが故にして、其處に扭力の略理論たるの必然性を藏す。

係數 m, n を決定するには次の條件を用ふ。

- (イ) 全斷面に於ける應力と外力の力率 M_u との間の平衡の條件
- (ロ) 物體中の微小分子の表面に働く内力、即ち應力との間の平衡の條件
- (ハ) 斷面周邊に於ては應力 τ が之に切線の方角を取らざる可らざる條件

此の内 (イ) の條件より次式を得可し。 df を微小面積として

$$\int \tau_y df = 0, \quad \int \tau_z df = 0, \quad \int (\tau_z y - \tau_y z) df = M_u$$

今 $\int y^2 df = I_1, \quad \int z^2 df = I_2$ とせば (45) 式を用ひ

$$n_1 I_1 - m_1 I_2 + (n_2 - m_2) \int y^2 z^2 df + n_3 \int y^4 df - m_3 \int z^4 df = M_u \dots\dots (46)$$

(ロ) の條件は (37), (38), (39) 式によりて表はさるゝを以て、此の場合には (39) 式の第一式を取りて

$$\frac{\partial \tau_y}{\partial y} = 2m_2 yz, \quad \frac{\partial \tau_z}{\partial z} = 2n_2 yz,$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\partial \tau_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_z}{\partial z} &= 2(m_2 + n_2)yz = 0 \\ \therefore m_2 + n_2 &= 0 \dots\dots\dots(47) \end{aligned}$$

(39) 式の第二, 第三式は係数 m_1, n_1 等が y 及び z のみならず, x に無関係なることを示す。又 (ハ) の条件より

$$\frac{\tau_y}{\tau_z} = \tan \alpha = \frac{dy}{dz} \dots\dots\dots(48)$$

茲に α は断面周縁の任意の點に於ける切線が y 軸と挟む角なり。(第十一圖)

(45) 乃至 (48) 式は此の解法に於ける基本公式にして, 之を特殊の場合に適用して種々の断面に對する解法を得可し。

(イ) 橢圓形断面の場合

橢圓の方程式を $y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ とせば

$$\frac{y dy}{b^2} + \frac{z dz}{c^2} = 0, \quad \therefore \frac{dy}{dz} = -\frac{b^2}{c^2} \frac{z}{y}$$

之を (45), (48) 式に代入する時は

$$\frac{m_1 + m_2 y^2 + m_3 z^2}{n_1 + n_2 z^2 + n_3 y^2} = -\frac{b^2}{c^2}$$

此の關係が橢圓の周縁上の凡ての點, 即ち y, z の凡ての値に對して成立するためには $m_2 = m_3 = n_2 = n_3 = 0$ なるを要し, 従つて $m_1 c^2 + n_1 b^2 = 0$

或は $I_1 = \pi b^3 c / 4, I_2 = \pi b c^3 / 4$ なるが故に $m_1 I_2 + n_1 I_1 = 0$

此の條件式によりて明らかに (47) 式は満足せらるゝと共に, (46) 式は

$$n_1 I_1 - m_1 I_2 = M_a$$

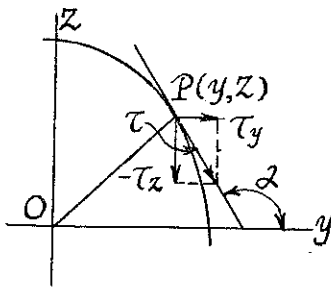
m_1, n_1, I_1, I_2 の間の此等 2 個の聯立方程式より

$$m_1 = -\frac{1}{2} \frac{M_a}{I_2}, \quad n_1 = \frac{1}{2} \frac{M_a}{I_1}$$

従つて

$$\tau_y = -\frac{1}{2} \frac{M_a}{I_2} z, \quad \tau_z = \frac{1}{2} \frac{M_a}{I_1} y$$

$$\begin{aligned} \tau &= \sqrt{\tau_y^2 + \tau_z^2} = \frac{1}{2} M_a \sqrt{\left(\frac{z}{I_2}\right)^2 + \left(\frac{y}{I_1}\right)^2} \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{M_a}{bc} \sqrt{\frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}} = \frac{2}{\pi} \frac{M_a}{b^3 c^3} \sqrt{c^4 y^2 + b^4 z^2} \end{aligned}$$



第十一圖

此の公式は前節に於てサン・ヴナンの一般理論より演繹したる結果と一致するものなり。

(ロ) 圓形断面の場合

此の時は $b=c=r$ なる橢圓の特殊の場合なるが故に

$$m_1 = -n_1, \quad I_1 = I_2 = \frac{\pi r^4}{4}$$

$$\tau = \frac{M_a}{2I_1} \sqrt{y^2 + z^2} = \frac{M_a}{2I_2} \sqrt{y^2 + z^2} = \frac{2M_a}{\pi r^4} \rho = \frac{M_a}{I_0} \rho$$

此の結果は舊理論と新理論とに論なく、凡ての解法に於て正確に一致する結論なりとす。

(ハ) 矩形断面の場合

矩形の邊長を第八圖を用ひて b, h とせば $I_1 = b^3h/12, I_2 = bh^3/12$

而して前述の如く z の値の如何に關せず、 $y = \pm b/2$ に對して $\tau_y = 0, y$ の値の如何に關せず、 $z = \pm h/2$ に對して $\tau_z = 0$ なるが故に、(45) 式を用ひて

$$\left. \begin{aligned} \tau_y &= \left(m_1 + m_2 \frac{b^2}{4} \right) z + m_3 z^2 = 0 \\ \tau_z &= \left(n_1 + n_2 \frac{h^2}{4} \right) y + n_3 y^2 = 0 \end{aligned} \right\}$$

y, z の値の如何に關せず、此等の公式の夫々第二、第一式が成立するためには

$$m_2 = -\frac{4m_1}{b^2}, \quad m_3 = 0, \quad n_2 = -\frac{4n_1}{h^2}, \quad n_3 = 0$$

故に
$$\tau_y = m_1 z \left(1 - \frac{4y^2}{b^2} \right), \quad \tau_z = n_1 y \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right)$$

次に (46) 式を用ひ

$$n_1 I_2 - m_1 I_2 + \left(\frac{4m_1}{b^2} - \frac{4n_1}{h^2} \right) \int y^2 z^2 df = M_a$$

然るに
$$\int y^2 z^2 df = \int y^2 dy \int z^2 dz = \frac{1}{9} \frac{b^3 h^2}{16} = \frac{1}{12} I_1 h^2 = \frac{1}{12} I_2 b^2$$

$$\therefore \left(\frac{4m_1}{b^2} - \frac{4n_1}{h^2} \right) \int y^2 z^2 df = -\frac{1}{3} m_1 I_2 + \frac{1}{3} n_1 I_1$$

従つて
$$\frac{2}{3} (-m_1 I_2 + n_1 I_1) = M_a,$$

或は
$$-m_1 I_2 + n_1 I_1 = \frac{3}{2} M_d$$

然るに (47) 式より

$$\frac{m_1}{b^2} + \frac{n_1}{h^2} = 0, \quad m_1 h^2 + n_1 b^2 = 0, \quad \text{或は} \quad m_1 I_2 + n_1 I_1 = 0$$

m_1, n_1, I_1, I_2 の間の此等 2 個の聯立方程式より

$$m_1 = -\frac{3}{4} \frac{M_d}{I_2}, \quad n_1 = \frac{3}{4} \frac{M_d}{I_1}$$

従つて
$$\tau_y = -\frac{3}{4} \frac{M_d}{I_2} z \left(1 - \frac{4y^2}{b^2}\right), \quad \tau_z = \frac{3}{4} \frac{M_d}{I_1} y \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right)$$

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{3}{4} \frac{M_d}{I_2} \sqrt{\left(\frac{z}{I_2}\right)^2 \left(1 - \frac{4y^2}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{I_1}\right)^2 \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right)^2} \\ &= \frac{9}{2} \frac{M_d}{bh} \sqrt{\left(\frac{2z}{h^2}\right)^2 \left(1 - \frac{4y^2}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{2y}{b^2}\right)^2 \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right)^2} \\ &= \frac{9}{2} \frac{M_d}{b^2 h} \sqrt{\left(\frac{2y}{b}\right)^2 \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right)^2 + \left(\frac{b}{h}\right)^2 \left(\frac{2z}{h}\right)^2 \left(1 - \frac{4y^2}{b^2}\right)^2} \end{aligned}$$

此の略式は今猶ほ矩形断面に對して使用せらるゝ公式にして、之がサン・ヴナンの嚴解に比して幾許の差違を生ずるかは、後に數字的に之を示す機會ある可し。

第三節 ヘルマンの解法

次に説明せんとする解法は教授ヘルマンが 1883 年に發表したる方法にして、其の推論の方法に多少特異の點を含めるが故に、茲に之を紹介す可し。(E. Hermann: Die Torsionsspannung regelmässiger Vielecke, *Zeitschrift des österreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereins*, 1883, S. 169, u. f.)

此の解法は茲に引用せる論文の表題が示すが如く、正多角形断面の軸に於ける應力を見出さんとするに在りて、サン・ヴナンも猶ほ之を取扱はざりし、三角形及び正方形以外の正多角形を取扱ひたりし點に特色を有す。

今迄使用したる記號を襲用して此の解法を説明せんに、軸の断面に於ける縱變位を $\xi = \theta \mathcal{V}$ と置き、ヘルマンは此の \mathcal{V} を名づけてサン・ヴナンの函數 (die de Saint-Venantsche Funktion) と稱す。

(15) 式を用ひ

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = 0, \quad \xi = \theta V, \quad \therefore \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

又断面周邊に對しては $\tau_y dz = \tau_z dy$ (48) 式參照

(13) 式の關係より

$$\begin{aligned} \tau_y &= G\varphi_y = G \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - \theta z \right) = G\theta \left(\frac{\partial V}{\partial y} - z \right), \\ \tau_z &= G\varphi_z = G \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \theta y \right) = G\theta \left(\frac{\partial V}{\partial z} + y \right) \end{aligned}$$

而して $M_a = \int (\tau_z y - \tau_y z) df$ なるが故に

$$M_a = G\theta \int \left[\left(\frac{\partial V}{\partial z} + y \right) y - \left(\frac{\partial V}{\partial y} - z \right) z \right] df$$

茲にヘルマンは

$$D = \int \left[\left(\frac{\partial V}{\partial z} + y \right) y - \left(\frac{\partial V}{\partial y} - z \right) z \right] df \dots\dots\dots (49)$$

として、此の D を断面の扭力係數 (Torsionsmodul) と名付く。此の D を用ふる時は

$$M_a = G\theta D, \quad \theta = \frac{M_a}{GD} \dots\dots\dots (50)$$

従つて $\tau_y = \frac{M_a}{D} \left[\frac{\partial V}{\partial y} - z \right], \quad \tau_z = \frac{M_a}{D} \left[\frac{\partial V}{\partial z} + y \right] \dots\dots\dots (51)$

ヘルマンの與へたる V の函數は次の如し。

$$V = \sum A_m \frac{(y+iz)^m - (y-iz)^m}{2im} \dots\dots\dots (52)$$

然る時は

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial y} &= \sum A_m \frac{(y+iz)^{m-1} - (y-iz)^{m-1}}{2i}, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= \sum A_m (m-1) \frac{(y+iz)^{m-2} - (y-iz)^{m-2}}{2i}, \\ \frac{\partial V}{\partial z} &= \sum A_m \frac{(y+iz)^{m-1} + (y-iz)^{m-1}}{2}, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} &= \sum A_m (m-1) \frac{(y+iz)^{m-2} - (y-iz)^{m-2}}{-2i} \end{aligned}$$

故に (52) 式は $\partial^2 V / \partial y^2 + \partial^2 V / \partial z^2 = 0$ の一般式を満足す。次に係數 A_m を定むるには環境條件の助けを藉る。今後の計算を簡單ならしむるために、坐標 y, z を

外接圓の半徑 r に對する比を以て表はすことゝすれば、 y, z は最早や長さに非ずして單に數を表はすことゝなり、従つて (49), (51) 式は

$$D = r^4 \int \left[\left(\frac{\partial V}{\partial z} + y \right) y - \left(\frac{\partial V}{\partial y} - z \right) z \right] df \dots \dots \dots (49_1)$$

$$\tau_y = \frac{rM_a}{D} \left[\frac{\partial V}{\partial y} - z \right], \quad \tau_z = \frac{rM_a}{D} \left[\frac{\partial V}{\partial z} + y \right] \dots \dots \dots (51_1)$$

矩坐標 y, z の代りに極坐標 ρ, φ を使用する時は $y = \rho \cos \varphi, z = \rho \sin \varphi$ として、ド・ムアヴル (De Moivre) の二項式を用ふる時は

$$\frac{(y + iz)^m - (y - iz)^m}{2i} = \rho^m \sin m\varphi,$$

$$\frac{(y + iz)^m + (y - iz)^m}{2} = \rho^m \cos m\varphi$$

なるが故に

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \sum A_m \rho^{m-1} \sin (m-1)\varphi,$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \sum A_m \rho^{m-1} \cos (m-1)\varphi$$

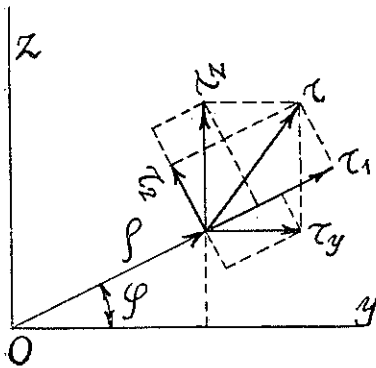
従つて

$$\tau_y = \frac{rM_a}{D} \left[\sum A_m \rho^{m-1} \sin (m-1)\varphi - \rho \sin \varphi \right]$$

$$\tau_z = \frac{rM_a}{D} \left[\sum A_m \rho^{m-1} \cos (m-1)\varphi + \rho \cos \varphi \right]$$

次に動徑 ρ の方向に於ける應力の分力を τ_1 、之と直角の方向の分力を τ_2 を以て表はせば、第十二圖に於て

$$\tau_1 = \tau_y \cos \varphi + \tau_z \sin \varphi, \quad \tau_2 = \tau_z \cos \varphi - \tau_y \sin \varphi$$

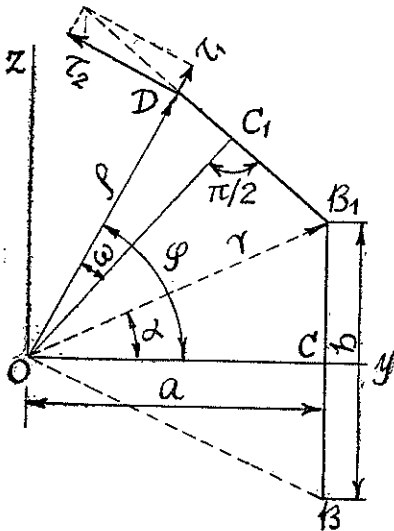


第十二圖

$$\therefore \tau_1 = \frac{rM_a}{D} \sum A_m \rho^{m-1} \sin m\varphi,$$

$$\tau_2 = \frac{rM_a}{D} \left[\rho + \sum A_m \rho^{m-1} \cos m\varphi \right]$$

次に第十三圖に於て D を正多角形の邊上の一點とし、其の極坐標を ρ, φ とす。正多角形の邊の中心角 (例へば、邊 BB_1 が中心 O に於て抱く角) の $1/2$ を



第十三圖

α とし、且つ D の動径 ρ と中心 O より此の邊に下せる垂線 OC_1 との間の角を ω とす。

b ; 正多角形の邊長

a ; 正多角形の内接圓の半徑

α ; 正多角形の邊の數よりも小なる整數

とせば $\varphi = 2x\alpha + \omega$

周邊上の應力は此の周邊に對する切線の方
向を取らざる可らざるが故に

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \tan \omega = \frac{\sum A_n \rho^{n-1} \sin(2m\alpha + m\omega)}{\rho + \sum A_n \rho^{n-1} \cos(2m\alpha + m\omega)}$$

此の關係は多角形の邊數に關係なく成立するが故に、此の式の右邊は ω に無關係なることを必要とす。従つて n を任意の整數とすれば

$$2m\alpha = 2n\pi, \quad \therefore \alpha = \frac{2n\pi}{2m}$$

今 σ を多角形の邊數とせば

$$\alpha = \frac{2\pi}{2\sigma}, \quad \therefore m = n\sigma$$

$$\therefore \tau_y = \frac{rM_a}{D} \left[\sum A_n \rho^{n\sigma-1} \sin(n-1)\varphi - \rho \sin \varphi \right]$$

$$\tau_z = \frac{rM_a}{D} \left[\sum A_n \rho^{n\sigma-1} \cos(n-1)\varphi + \rho \cos \varphi \right]$$

$$\tan \omega = \frac{\sum A_n \rho^{n\sigma-1} \sin n\sigma\omega}{\rho + \sum A_n \rho^{n\sigma-1} \cos n\sigma\omega}$$

此の最後の式より

$$\begin{aligned} \rho \sin \omega &= \cos \omega \sum A_n \rho^{n\sigma-1} \sin n\sigma\omega - \sin \omega \sum A_n \rho^{n\sigma-1} \cos n\sigma\omega \\ &= \sum A_n \rho^{n\sigma-1} \sin(n\sigma-1)\omega \dots \dots \dots (53) \end{aligned}$$

假定により ρ も亦 y, z と同様に、長さ非ずして外接圓の半徑 r に對する比によりて表はされたる數なるが故に

$$\rho \cos \omega = \cos \alpha, \quad \therefore \rho = \frac{\cos \alpha}{\cos \omega}$$

$$\therefore \tan \omega = \sum A_n \cos^{n\sigma-2} \alpha \frac{\sin(n\sigma-1)\omega}{\cos^{n\sigma-1} \omega} \dots \dots \dots (54)$$

問題は (54) 式に於て係数 A_n を決定するにあれど、此の一般的解法は明らかに不可能なるが故に、(54) 式の右邊に於ける無限級数を便宜の数の有限級数として取扱ふを以て唯一の解法とす。今 (54) 式に於ける右邊の項数を 3 に限定して、係数 A_1, A_2, A_3 を決定せんば、多角形の邊の中央に於ては $\omega=0, \tan \omega=0, \sin(n\sigma-1)\omega=0, \cos \omega=1$ なるが故に、(54) 式は係数 A_n の値の如何に關せず成立す可し。次に多角形の各頂點に於ては $\omega=\alpha, \sigma\alpha=\pi, \therefore \alpha=\pi/\sigma$ なるを以て (54) 式より

$$\begin{aligned}\tan \alpha &= \sum A_n \cos^{n\sigma-2} \alpha \frac{\sin(n\sigma-1)\alpha}{\cos^{n\sigma-1} \alpha} \\ &= \sum A_n \frac{\sin(n\pi-2)}{\cos \alpha} = \sum A_n (-1)^{n+1} \tan \alpha \\ \therefore 1 &= \sum A_n (-1)^{n+1} = A_1 - A_2 + A_3\end{aligned}$$

(54) 式の代りに (53) 式を使用するときは

$$\begin{aligned}\sin \omega &= A_1 \rho^{\sigma-2} \sin(\sigma-1)\omega + A_2 \rho^{2\sigma-2} \sin(2\sigma-1)\omega + A_3 \rho^{3\sigma-2} \sin(3\sigma-1)\omega \\ \text{或は } A_1 &\frac{\sin(\sigma-1)\omega}{\rho^{2\sigma} \sin(3\sigma-1)\omega} + A_2 \frac{\sin(2\sigma-1)\omega}{\rho^\sigma \sin(3\sigma-1)\omega} + A_3 = \frac{\sin \omega}{\rho^{3\sigma-2} \sin(3\sigma-1)\omega}\end{aligned}$$

今便宜上 D_1, D_2 の二點を多角形の邊上に取り、 D_1 に對しては

$$\omega_1 = \frac{\alpha}{3}, \quad \rho_1 = \frac{\cos \alpha}{\cos \omega_1} = \frac{\cos \alpha}{\cos(\alpha/3)}, \quad \mu_1 = \frac{1}{\rho_1} = \frac{\cos(\alpha/3)}{\cos \alpha}$$

と取り、 D_2 に對しては

$$\omega_2 = \frac{2\alpha}{3}, \quad \rho_2 = \frac{\cos \alpha}{\cos \omega_2} = \frac{\cos \alpha}{\cos(2\alpha/3)}, \quad \mu_2 = \frac{1}{\rho_2} = \frac{\cos(2\alpha/3)}{\cos \alpha}$$

と取る時は

$$\left. \begin{aligned}\beta_1 &= \frac{\mu_1^{2\sigma} \sin \frac{(\sigma-1)\alpha}{3}}{\sin \frac{\alpha}{3}}, & \gamma_1 &= \frac{\mu_1^\sigma \sin \frac{(2\sigma-1)\alpha}{3}}{\sin \frac{\alpha}{3}}, & \delta_1 &= \mu_1^{3\sigma-2} \\ \beta_2 &= \frac{\mu_2^{2\sigma} \sin \frac{2(\sigma-1)\alpha}{3}}{\sin \frac{2\alpha}{3}}, & \gamma_2 &= \frac{\mu_2^\sigma \sin \frac{2(2\sigma-1)\alpha}{3}}{\sin \frac{2\alpha}{3}}, & \delta_2 &= \mu_2^{3\sigma-2}\end{aligned}\right\} \dots (55)$$

として前式を書き改め、 $\sin(3\sigma-1)\omega_1 = \sin(\pi - \omega_1) = \sin \omega_1, \quad \sin(3\sigma-1)\omega_2 = \sin(2\pi - \omega_2) = -\sin \omega_2$ なる關係を入れる時は

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 A_1 + \gamma_1 A_2 + A_3 &= \delta_1 \\ \beta_2 A_1 + \gamma_2 A_2 - A_3 &= \delta_2 \end{aligned} \right\}$$

之に先きに求めたる $A_1 - A_2 + A_3 = 1$ なる關係を加へて A_1, A_2, A_3 の値を求めれば

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{(1 + \delta_2)(1 + \gamma_1) + (\delta_1 - 1)(1 - \gamma_2)}{(1 + \beta_2)(1 + \gamma_1) + (\beta_1 - 1)(1 - \gamma_2)} \\ A_2 &= \frac{\delta_1 - 1}{1 + \gamma_1} - \frac{\beta_1 - 1}{1 + \gamma_1} A_1 \\ A_3 &= 1 - A_1 + A_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (56)$$

又扭力率は

$$M_a = \int \tau_2 \rho r df = \frac{r^2 M_0}{D} \int (\rho + \sum A_m \rho^{m-1} \cos m\varphi) \rho df$$

然るに $r^2 \int \rho^2 df = I_0$, $m = n\sigma$ なるが故に

$$D = I_0 + r^2 \sum A_n \int \rho^{n\sigma} \cos n\sigma\varphi df$$

而して $\rho^{n\sigma} \cos n\sigma\varphi = \frac{(y + iz)^{n\sigma} + (y - iz)^{n\sigma}}{2}$, 及び $df = r dy \cdot r dz = r^2 dy dz$

此等の關係を用ふる時は

$$\begin{aligned} D &= I_0 + 2\sigma r^4 \sum A_n \int_0^{\cos \alpha} dy \int_0^{y \tan \alpha} \frac{(y + iz)^{n\sigma} + (y - iz)^{n\sigma}}{2} dz \\ &= I_0 + 2\sigma r^4 \sum A_n \int_0^{\cos \alpha} \frac{(1 + i \tan \alpha)^{n\sigma+1} - (1 - i \tan \alpha)^{n\sigma+1}}{2i(n\sigma + 1)} y^{n\sigma+1} dy \\ &= I_0 + 2\sigma r^4 \sum A_n \frac{(\cos \alpha + i \sin \alpha) - (\cos \alpha - i \sin \alpha)^{n\sigma+1}}{2i(n\sigma + 1) \cos^{n\sigma+1} \alpha} \int_0^{\cos \alpha} y^{n\sigma+1} dy \end{aligned}$$

再びド・ムアールの二項式を用ひ

$$D = I_0 + 2\sigma r^4 \sum A_n \frac{\sin(n\sigma + 1)\alpha}{(n\sigma + 1) \cos^{n\sigma+1} \alpha} \frac{\cos^{n\sigma+2} \alpha}{n\sigma + 2}$$

然るに $\sigma\alpha = \pi$, $\sin(n\pi + \alpha) = (-1)^n \sin \alpha$ なるが故に

$$D = I_0 + 2\sigma r^4 \sum A_n (-1)^n \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{(n\sigma + 1)(n\sigma + 2)}$$

三角形 OBB_1 の面積は

$$\frac{ab}{2} = \frac{2r \sin \alpha \cdot r \cos \alpha}{2} = r^2 \sin \alpha \cos \alpha$$

故に多角形の面積は $F = \sigma r^2 \sin \alpha \cos \alpha$ 此の關係を用ふる時は

$$D = I_0 + 2r^2 F \sum \frac{(-1)^n A_n}{(n\sigma + 1)(n\sigma + 2)}$$

又三角形 $OB B_1$ の惰性率は

$$I_1 = \frac{ab^3}{48}, \quad I_2 = \frac{\alpha^3 b}{4}, \quad \dots \quad I_0 = \frac{ab(12\alpha^2 + b^2)}{48}$$

故に多角形全體に就ては

$$I_0 = \frac{\sigma ab(12\alpha^2 + b^2)}{48} = \frac{(12\alpha^2 + b^2) F}{24}$$

$$\therefore D = F \left[\frac{12\alpha^2 + b^2}{24} - 2r^2 \left\{ \frac{A_1}{(\sigma + 1)(\sigma + 2)} - \frac{A_2}{(2\sigma + 1)(2\sigma + 2)} + \frac{A_3}{(3\sigma + 1)(3\sigma + 2)} \right\} \right] \dots \dots \dots (57)$$

以上はヘルマンの解法の大要にして、之を特殊の場合に應用して次の如き結果を得可し。

(イ) 正三角形の場合

此の時は (55), (56) 式を用ふるよりも, (54) 式を用ひ $\sigma = 3$ として

$$\tan \omega = 2A_1 \cos \alpha \tan \omega + A_2 \cos^4 \alpha \frac{\sin 5\omega}{\cos^5 \omega} + A_3 \cos^7 \alpha \frac{\sin 8\omega}{\cos^8 \omega}$$

此の方程式が成立するためには $A_1 = 1/(2 \cos \alpha)$, $A_2 = A_3 = 0$ なる事を要し、且 $\alpha = 60^\circ$, $\therefore \cos \alpha = 1/2$ 従つて $A_1 = 1$ なるが故に、之を (57) 式に代入して

$$D = F \left(\frac{12\alpha^2 + b^2}{24} - \frac{r^2}{10} \right)$$

然るに $r = \frac{b}{\sqrt{3}}$, $a = \frac{b}{2\sqrt{3}}$, $F = \frac{3}{2} ab = \frac{\sqrt{3}}{4} b^2$

$$\therefore D = \frac{\sqrt{3}}{4} b^2 \frac{b^2}{20} = \frac{\sqrt{3}}{80} b^4 = \frac{b^4}{46.2}$$

従つて (50) 式より $M_a = \frac{G\theta b^4}{46.2}$, 而して $I_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} b^2 \frac{b^2}{12} = \frac{\sqrt{3}}{48} b^4$

$$\therefore M_a = 0.6 G\theta I_0 = CG\theta I_0$$

即ち $C = 0.6$ にして、前々節に於てサン・ヴナンが求めたる結果と全く相同じ。

(ロ) 正方形の場合

此の時は $\sigma=4$, $\alpha=45^\circ$ にして, 此の値を (55) 式に代入して計算する時は

$$\begin{aligned}\beta_1 &= 33.120, & \gamma_1 &= 12.994, & \delta_1 &= 22.620, \\ \beta_2 &= 10.124, & \gamma_2 &= -2.250, & \delta_2 &= 7.593\end{aligned}$$

之を (56) 式に代入して A_1, A_2, A_3 を求むれば

$$A_1=0.7326, \quad A_2=-0.1365, \quad A_3=0.1309$$

而して
$$a = \frac{b}{2}, \quad r = \frac{b}{\sqrt{2}}, \quad F = b^2$$

故に (57) 式より

$$\begin{aligned}D &= b^2 \left[\frac{b^2}{6} - b^2 \left\{ \frac{0.7326}{30} + \frac{0.1365}{90} + \frac{0.1309}{182} \right\} \right] \\ &= \frac{b^4}{6} \left[1 - 6(0.0244 + 0.0015 + 0.0007) \right] \\ &= \frac{b^4}{6} (1 - 0.1596) = \frac{0.84}{6} b^4 = 0.14 b^4, \\ \therefore M_a &= 0.14 G \theta b^4 = 0.84 G \theta I_0\end{aligned}$$

是れ即ち曩きにサン・ヴナンの理論より求めたる (44) 式に外ならず

(ハ) 正六角形の場合

前例と同様にして $\sigma=6$, $\alpha=30^\circ$ として計算する時は (55) 式より

$$\begin{aligned}\beta_1 &= 20.627, & \gamma_1 &= 11.702, & \delta_1 &= 7.819 \\ \beta_2 &= 7.669, & \gamma_2 &= -3.067, & \delta_2 &= 3.692\end{aligned}$$

之を (56) 式に代入すれば

$$A_1=0.4598, \quad A_2=-0.1736, \quad A_3=0.3666$$

而して此の場合には

$$a = \frac{\sqrt{3}}{2} b, \quad r = b, \quad F = \frac{3\sqrt{3}}{2} b^2$$

故に (57) 式より

$$\begin{aligned}D &= \frac{3\sqrt{3}}{2} b^2 \left[\frac{5b^2}{12} - 2b^2 \left\{ \frac{0.4598}{56} + \frac{0.1736}{182} + \frac{0.3666}{380} \right\} \right] \\ &= \frac{5\sqrt{3}}{8} b^4 \left[1 - 4.8(0.00821 + 0.00095 + 0.00091) \right] \\ &= 1.0825 b^4 (1 - 0.04834) = 1.03 b^4,\end{aligned}$$

$$\therefore M_a = 1.03 G\theta b^4 = 0.952 G\theta I_0$$

此の結果は明かに (10) 式を満足す。此等の結果より見て (10) 式の係数 C は三角形の場合に最小にして、多角形の邊の數 σ と共に増大し、 σ が無限大に達したる窮極の場合、即ち圓の場合に C も亦その最大値 1 に達する事を知る可し。

第四節 フェップルの解法

本節及び次節に説明する解法は、理論物理學上の別個の方面に於ける或種の問題に對するその類似性に依りて、扭力の問題を解決せんとするものにして、任意の斷面を有する嚮體の應扭力に就て、從來の學者が採用したるとは全く別箇の取扱ひ方を創定し、之に新たなる表現を與へたるを以て新機軸となせど、扭力の理論は決して之がために變更せられたるに非ず。

フェップルの解法は液體動力學上の類似性より扭力を説明せんとするものにして、斯の如き解法は決してフェップルの獨創にあらず、その起源を遠くブウシネスクに發し (Boussinesq: Complément à une étude de 1871 sur la théorie de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques dont certaines dimensions sont très petites par rapport à d'autres, 1876, *Journal de mathématiques*, T. 5, 1879, p. 163-94) ロオド・ケルヴェンも亦之と同様の原理の下に扭力を取扱ひたるを見る (Sir W. Thomson and P. G. Tait: *Treatise on Natural philosophy*, Vol. I. 1867)

然れども著者は此の解法を説明するに方り、専らフェップルの推論 (A. Föppl: *Vorlesungen über tech. Mechanik*, Bd. 3, neunte Aufl. 1922, § 77, S. 427 u. f.) に従ふが故に、茲には暫くフェップルの名を此の解法の上に冠す可し。

軸の斷面に於ける應裁力 τ の力線を畫く時は、此の力線は斷面重心を中心とする自閉曲線となる可く、圓形斷面の場合には此等の自閉曲線は、斷面重心を中心とする同心圓なること、既に第二章に於て述べたる所の如し。此の自閉曲線を名づけて應力線 (die Spannungslinie) と呼び、斷面上の凡ての點を通過する應力線を畫く場合、換言すれば全斷面を應力線を以て被ふ場合には、特に此の應力線群を名づけて應力場 (das Spannungsfeld) と稱す。應力線と應力場との關係は、磁氣學上の磁力線と磁力場との關係に同じく、従つて應力線上の任意の點に於ける此の曲線の切線は、常にその點に於ける應力の方向を表はす。

此の應力線を液體動力學上の流線 (Stream line, die Strömungslinie, la ligne de

courant) と同一に取扱ふ時は、扭力の問題は直ちに之を液體動力學の理論に依りて解決し得可し。

第十四圖下圖に示すが如き、軸の断面と同一形狀を有する水槽中に水を入れ、此の水槽をその中心 O を中心として廻轉する時は、圖の如き流線を生じ、且つ水の表面は同上圖の如き曲面を作る。此の場合に於ける水の運動は所謂渦流 (Eddy, der Wirbel, le remous, toubillion) にして、 v を任意の點に於ける液體運動の速度、 v_y, v_z を夫々 y, z の方向に於ける v の分速度とせば、液體動力學上の連続性の條件 (Condition of continuity, la condition de continuité, die Kontinuitätsbedingung) より次式を得。

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots (58)$$

又此の場合の液體の運動に關して次の條件式あり。

$$\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = C \dots\dots\dots (59)$$

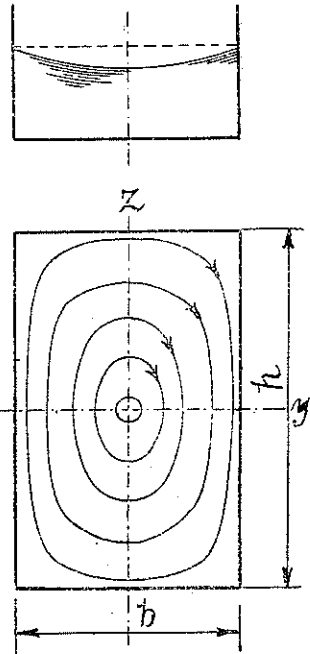
茲に C は常數にして、左邊は渦流の強さ (die Stärke des Wirbels) を表はすが故に、(59) 式は渦流の強さが流線の凡ての點に於て同一なる事を示すものとす。次に流線は水槽壁に於ては之と同一の形狀を取らざる可らざるが故に、水槽壁に於ては v が之に切線の方角を取り

$$\frac{v_y}{v_z} = \frac{dy}{dz}, \quad v_z dy - v_y dz = 0 \dots\dots\dots (60)$$

流線と應力線との類似性より、 v_y, v_z は夫々 τ_y, τ_z に同一の關係に於て比例す可きことを知るが故に、 m を比例の常數として、(13) 式を用ひ

$$\left. \begin{aligned} v_y &= m\tau_y = mG \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - \theta z \right) \\ v_z &= m\tau_z = mG \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \theta y \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (61)$$

(61) 式の値を (58) 式に代入する時は、 $\partial^2 \xi / \partial y^2 + \partial^2 \xi / \partial z^2 = 0$ 即ち扭力の不定方程式を得たり。又 (61) 式の値を (59) 式に代入する時は



第十四圖

$$\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = 2mG\theta, \quad \therefore C = 2mG\theta$$

にして $2mG\theta$ は常數なるが故に、(59) 式は明らかに満足せらる。次に (61) 式の値を (60) 式に代入せば

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \theta y\right) dy - \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - \theta z\right) dz = 0$$

即ち扭力の定方程式 (16) を得たり。

第十五圖を矩形断面を有する軸の 1/4 を表はすものとすれば、 y 軸上に於ては液體運動の方向は y 軸に直角ならざる可らざるが故に

$$v_y = 0, \quad \therefore \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0$$

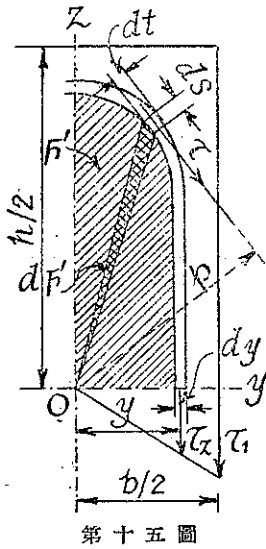
故に (59) 式より

$$\frac{\partial v_z}{\partial y} = C = 2mG\theta$$

$$\text{従つて} \quad \frac{\partial \tau_z}{\partial y} = 2G\theta \dots\dots\dots (62)$$

即ち y 軸上に於ては τ_z が距離 y に正比例するを以て、 $y = b/2$ の極限值に對する τ_z の値を τ_1 とせば

$$\tau_z = \frac{2\tau_1}{b} y \dots\dots\dots (63)$$



第十五圖

従つて (62) 式より

$$\frac{\partial \tau_z}{\partial y} = \frac{2\tau_1}{b} = 2G\theta, \quad \therefore \tau_1 = G\theta b \dots\dots\dots (64)$$

第十五圖に於て微分距離に於て相距たる 2 個の應力線の間には挟まれたる狭小なる部分の長さを ds 、その幅を dt 、此の點の應力度を τ とせば、應力 $\tau ds dt$ の、中心 O に關する力率 dM' は O より τ へ下せる垂線の長さを p として

$$dM' = \tau p ds dt$$

然るに液體動力學の理論より、微分距離に於て相距たる 2 個の流線の間には挟まれたる部分の流量は一定なるが故に

$$v dt = v_z dy, \quad \therefore \tau dt = \tau_z dy$$

従つて (63) 式を用ひ

$$dM' = \tau_z p \, ds \, dy = \frac{2\tau_1}{b} p y \, ds \, dy$$

故に此の應力線の全周に就ては

$$dM = \int dM' = \frac{2\tau_1}{b} y \, dy \int p \, ds$$

然るに第十五圖より

$$p \, ds = 2dF', \quad \therefore \int p \, ds = 2F'$$

F' は應力線がなす自閉曲線中に包まれたる面積とす。従つて

$$dM = 4 \frac{\tau_1}{b} y \, dy \cdot F'$$

$$\therefore M_a = \int dM = \frac{4\tau_1}{b} \int F' y \, dy \dots\dots\dots (65)$$

(64) 式の右邊の積分は、 F' を y の函數として表はし得る場合に非ずんば、之を計算すること能はず。次に二、三の例を示す。

(イ) 圓形断面の場合

第十六圖に於て

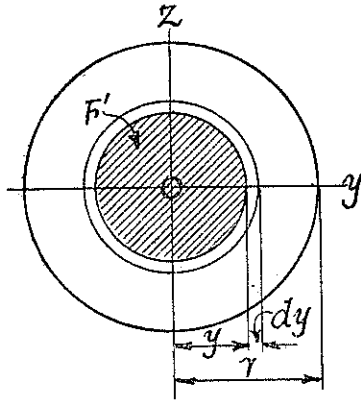
$$F' = \pi y^2, \quad \therefore \int F' y \, dy = \pi \int_0^r y^3 \, dy = \frac{\pi r^4}{4}$$

且つ此の場合には $b = 2r$ なるが故に、此等の値を (65) 式に代入して

$$M_a = \frac{\pi}{2} \tau_1 r^3$$

是れ曩に求めたる

(6) 式に外ならず。



第十六圖

(ロ) 橢圓形断面の場合

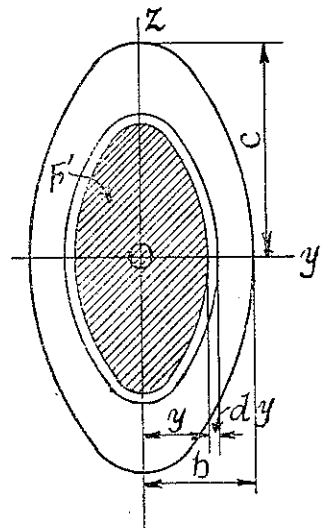
第十七圖に於て示せるが如く、此の場合の應力線は O を中心とする同心相似橢圓なるが故に

$$F' = \pi yz$$

同心相似橢圓の性質より $y/b = z/c$ なるを以て

$$F' = \frac{\pi c}{b} y^2, \quad \therefore \int F' y \, dy = \frac{\pi c}{b} \int_0^b y^3 \, dy = \frac{\pi b^3 c}{4}$$

且つ此の場合には (65) 式の b は、橢圓の短軸 $2b$



第十七圖

に相當するを以て、(65) 式より

$$M_a = \frac{\pi}{2} \tau_1 b^2 c$$

即ち楕圓の場合の公式を得たり

(ハ) 矩形断面の場合

矩形の幅 b に比して高さ h が相當に大なる場合には、略値として $F' \doteq 2yh$ と置くことを得るが故に

$$\int F' y \, dy = 2h \int_0^{\frac{b}{2}} y^2 \, dy = \frac{1}{12} b^3 h, \quad \therefore M_a = \frac{1}{3} \tau_1 \bar{b}^3 h$$

之に (64) 式の値を代入する時は

$$M_a = \frac{1}{3} G \theta b^3 h$$

此の値は $F' \doteq 2yh$ と假定せる結果、少しく過大に算出せられたる憾みあり。今 $F' = C \cdot 2yh$, $C < 1$ とすれば

$$M_a = \frac{C}{3} G \theta b^3 h$$

之をサン・ヴナンの求めたる略式 (41) と對比する時は $C = 1 - 0.630249 b/h$ なる事を知る可し。

第五節 プラントルの解法

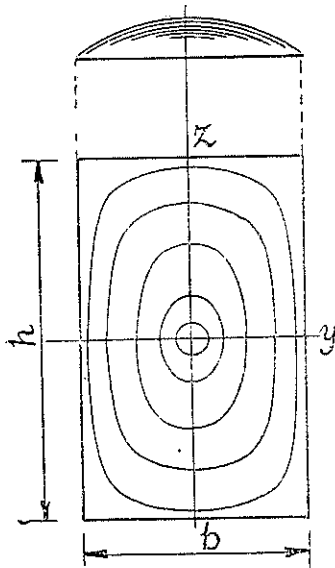
次に説明せんとするプラントルの解法 (Prandtl: Zur Torsion von prismatischen Stäben, *Physikalische Zeitschrift*, 1903, S. 758 u. f.; Eine neue Darstellung der Torsionsspannungen bei prismatischem Stäben von beliebigem Querschnitt, *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung*, Bd. 13, 1904, S. 31 u. f.——此の2種の論文の内、前者は單に後者の梗概たるに止まる)は、前節に於ける解法と同巧異曲にして、面に直角の方向に等布荷重を受くる薄膜 (Membrane, la membrane, die Membran) の平衡條件に依りて、扭力の問題を解決せんとしたるは、全く獨創の見解と稱す可しと雖も、斯の如き解法の動機は之をフエップルに負へる事は極めて明らかにして、上記の論文も亦之を認む。而もフエップルがその著書 (Vorlesungen über tech. Mechanik, 1922) の第三卷中に於て、茲にも亦プラントルの研究の若干を利用す可し——と言ひ、又その第五卷中に於て、斯の如き表現

は之をプラントルの功に歸せざる可らず——と言へるを見れば、フエップルの説明が亦、プラントルに負ふ所少からざるを察するに足る。

プラントルの解法次の如し。先づ軸の断面周邊と同一形状の框を作り、此の框に例へば石鹼液の如き薄膜を張り、此の薄膜に對して框の平面に直角の方向の等布荷重を加ふるものとせば、始め平面なりし薄膜は凹曲面を作る。此の曲面と應裁力の分布との間には次の關係あり。

1. 框に平行なる平面を以て此の曲面を切る時は、断面曲線は應力線を表はす。即ち此の曲線の切線は、その點に於ける應力の方向を表はす。地形平面圖に於て土地の高低を等高線を以て示すと同一の方法に依り、此等の断面曲線を框の平面

上に投影する時は第十八圖の如き應力場の圖面を作り得。



第十八圖

2. 曲面の傾斜 (das Gefälle) は常に應力の大きさに比例し、且つ此の傾斜は茲に作れる應力線の密度に依りて表はさるゝが故に、應力は又此等の應力線の密度に比例す可し。

3. 曲面の容積、即ち框の平面と曲面との間の容積は、軸の抗扭力に比例す。

此の内 1. の關係は前節の液體動力學に對する類似性より、説明せらるゝが故に茲に再説せず。

軸の x 軸の方向に對する平衡の條件よりは (39) 式の示すが如く

$$\frac{\partial \tau_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_z}{\partial z} = 0$$

之を向徑 (Vector, le vecteur, der Vektor) の符號を以て表はせば

$$\text{div. } \tau = 0 \dots \dots \dots (66)$$

次に基準平面より x の距離にある断面は、前者に比して扭力の結果 θx だけ扭ぢらるゝが故に、 y 及び z の方向に於ける其の變位は夫々 $\eta = -\theta xz, \xi = \theta xy$ を以て表はされ

$$\tau_y = G \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = G \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - \theta z \right),$$

$$\tau_z = G \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) = G \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \theta y \right)$$

$$\therefore \frac{\partial \tau_z}{\partial y} - \frac{\partial \tau_y}{\partial z} = 2G\theta$$

之を同じく向徑の符號を以て表はせば

$$\text{rot. } \tau = 2G\theta \dots\dots\dots (67)$$

(67) 式は (59) 式と同一にして、前節に於ける水槽内の流線が、 $2G\theta$ なる一定の渦流を有する事を示し、流線の函數を ψ を以て表はし、 $\tau_y = -\partial\psi/\partial z$ 、 $\tau_z = \partial\psi/\partial y$ と置けば、此の値は (66) 式を満足すること明かにして、(67) 式は

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 2G\theta \dots\dots\dots (68)$$

第十八圖の曲面の縦距を u 、單位面積上の等布荷重を p 、薄膜の應力を一定として之を S を以て表はせば、曲面の微分方程式は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{p}{S} \dots\dots\dots (69)$$

(68), (69) 式の類似性より、環境條件を適當に擇ぶ事によりて

$$\psi = ku, \quad k = \frac{2G\theta S}{p} \dots\dots\dots (70)$$

と置くことを得可く、従つて

$$\tau_y = -k \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \tau_z = k \frac{\partial u}{\partial y} \dots\dots\dots (71)$$

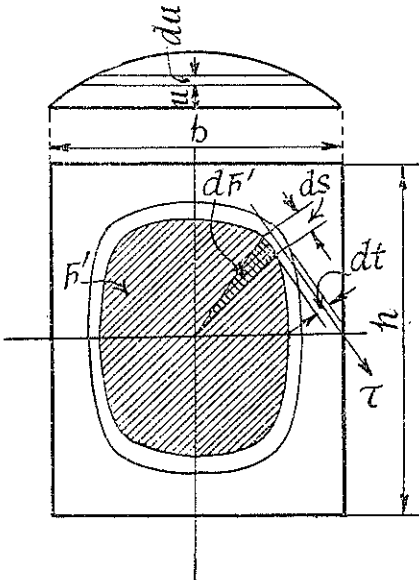
$\partial u/\partial y$, $\partial u/\partial z$ は曲面の勾配を表はすが故に、(71) 式は應力が曲面の傾斜に比例する事を示す。即ち前述の 2. を證し得たり。次に第十九圖に第十五圖と同一の作圖を施す時は (71) 式より

$$\tau = k \frac{du}{dt}$$

$$dM' = \rho \times \tau \cdot dt \, ds = \tau \, dt \cdot \rho \times d\mathbf{s} = k \, du \cdot 2d\mathbf{F}'$$

$$\therefore dM = 2kF \, du = 2kdV$$

$$\text{従つて } M_i = 2kV \dots\dots\dots (72)$$



第十九圖

V は框の平面と薄膜の曲面との間の容積とす。即ち (72) 式は、此の容積 V が 扭力率、換言せば軸の抗扭力に正比例する事を示すものにして、即ち前述の 3. を 證し得たり。

此等の關係を利用して、扭力の問題を解決す可き方法は次の如し。(50) 式により、 D を断面の扭力係數として $M_a = G\theta D$ なるが故に、(70)、(72) 式を用ひ

$$G\theta D = \frac{4 G\theta S}{p} V, \quad \therefore D = \frac{4 S V}{p} \dots\dots\dots(73)$$

此の D の値を (50) 式に代入して M_a を得可く、或は τ の最大値 τ_1 は

$$\tau_1 = k \left(\frac{du}{dt} \right)_{max} = \frac{2 G\theta S}{p} \left(\frac{du}{dt} \right)_{max} \dots\dots\dots(74)$$

なるが故に、(72) 式より $k = \tau_1 / \left(\frac{du}{dt} \right)_{max}$ として

$$M_a = \frac{2\tau_1 V}{\left(\frac{du}{dt} \right)_{max}} \dots\dots\dots(75)$$

(イ) 圓形断面の場合

此の時の曲面は廻轉拋物曲面 (Paraboloid of rotation, le paraboloid de rotation, das Umdrehungsparaboloid) にして、 u の最大値即ち断面重心に於ける u の値を u_1 とせば

$$u_1 = \frac{pr^2}{4S}, \quad \therefore V = \frac{1}{2} \pi r^2 u_1 = \frac{\pi}{8} \frac{pr^4}{S}$$

$$(73) \text{ 式より} \quad D = \frac{\pi}{2} r^4, \quad \text{又} \quad \left(\frac{du}{dt} \right)_{max} = \frac{pr}{2S}$$

$$(50) \text{ 式より} \quad M_a = \frac{\pi}{2} G\theta r^4 \quad (8) \text{ 式参照}$$

$$(75) \text{ 式より} \quad M_a = \frac{\pi}{2} \tau_1 r^3 \quad (6) \text{ 式参照}$$

(ロ) 橢圓形断面の場合

此の時の曲面は橢圓拋物曲面 (Elliptic paraboloid, le paraboloid elliptique, das elliptische Paraboloid) にして、 u の最大値 u_1 は同じく橢圓断面の重心に起り

$$u_1 = \frac{p}{2S} \frac{b^2 c^2}{b^2 + c^2}, \quad \therefore V = \frac{1}{2} \pi bc u_1 = \frac{p}{4S} \frac{\pi b^3 c^3}{b^2 + c^2}$$

従つて (73) 式より $D = \frac{\pi b^3 c^3}{b^2 + c^2}$, 又 $\left(\frac{du}{dt}\right)_{max} = \frac{p}{S} \frac{bc^2}{b^2 + c^2}$

$$(50) \text{ 式より } M_a = G\theta \frac{\pi b^3 c^3}{b^2 + c^2}$$

$$(75) \text{ 式より } M_a = \frac{\pi}{2} \tau_1 b^2 c$$

此等の結果はサン・ヴナン及びグラスホフの求めたるものと一致す。

(ハ) 矩形断面の場合

幅 b に比して高さの甚しく大なる場合 (第二十圖) には, V を拋物線断面を有する構體と見做して大差なきが故に, u の最大値を z 軸に沿ひて一定と取り

$$u_1 = \frac{pb^2}{8S}, \quad \therefore V = \frac{2}{3} bhu_1 = \frac{1}{12} \frac{p}{S} b^3 h$$

$$\text{従つて } D = \frac{1}{3} b^3 h, \quad \text{及び } \left(\frac{du}{dt}\right)_{max} = \frac{pb}{2S}$$

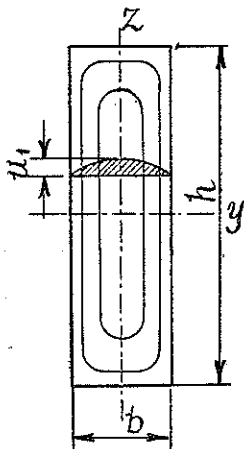
此の V の値従つて D の値が, 實際よりも過大に算出せられたるは言を俟たず。従つて C を 1 より小さき正数とすれば

$$V = \frac{C}{12} \frac{p}{S} b^3 h, \quad D = \frac{C}{3} b^3 h$$

$$\text{故に } M_a = \frac{C}{3} G\theta b^3 h, \quad \text{及び } M_a = \frac{C}{3} \tau_1 b^3 h$$

之をサン・ヴナンの略式 (41) に比較すれば, $C=1$

$= 0.630249 b/h$ なることを知る可し。



第二十圖

第六節 ヘンネベルグの解法

前節に説明せるプラントルの解法は, サン・ヴナンのその如く, 變位 ξ を y, z の函數と假定して, 此の點より推論を出發せしむるに非ずして, 先づ應力線の函數を考慮せる點に於て, 問題を間接解法より直接解法に轉換せしめたる特徴あり。茲に説明せんとするヘンネベルグの解法 (L. Henneberg: Zur Torsionfestigkeit, Zeitschrift für mathematik und Physik, Bd. 51, 1904, S. 225 u. f.) は, 古きグラスホフの解法とプラントルの解法とを結合せしめたりと考へらるゝ方法にして, ヘ

ンネベルグ自ら之を工學的解法 (die technische Methode) と稱する所のものなり。而して此の解法の主眼とする所は τ_y, τ_z を y 及び z の可及的簡單なる函數 (die möglichst einfache Funktionen) として假定する所に存す。

今プラントルに従つて $\tau_y = -\partial\psi/\partial z, \tau_z = \partial\psi/\partial y$ (前節参照) と置けば

$$\tau = \sqrt{\tau_y^2 + \tau_z^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2} = \frac{\partial\psi}{\partial n}$$

茲に n は應力線 ψ の法線を表はす。前掲の

$$\int \tau_y df = 0, \quad \int \tau_z df = 0, \quad \int (\tau_z y - \tau_y z) df = M_a$$

を書き改むる時は

$$\int \frac{\partial\psi}{\partial z} df = 0, \quad \int \frac{\partial\psi}{\partial y} df = 0 \dots \dots \dots (76)$$

$$\int \left[\frac{\partial\psi}{\partial y} y + \frac{\partial\psi}{\partial z} z \right] df - M_a = 0 \dots \dots \dots (77)$$

$\psi(y, z) = K$ (K は常數) は任意の應力線を表はし、軸斷面の周邊曲線も亦一個の應力線なると共に、 τ_y, τ_z の式中には ψ が微分係數の形として取り入れらるゝに過ぎざるが故に、 ψ に任意の常數を附加するも、 τ_y, τ_z の値には何等の影響を與へず。従つて斷面周邊に於て函數 ψ の値を任意に定め得るが故に、斷面周邊に於ては、 $\psi(y, z) = 0$ と假定することを妨げず。此の假定はプラントルの解法に比して正に一歩を進めたるものと言ふ可く、之に依りて計算を簡化せしめ得ること次の如し。(76) 式の左邊を書き改むる時は

$$\int \frac{\partial\psi}{\partial z} df = - \int \psi \cos(n, z) ds, \quad \int \frac{\partial\psi}{\partial y} df = - \int \psi \cos(n, y) ds$$

ds は斷面周邊に於ける微分邊長を表はす。然るに此の周邊に於ては、 $\psi = 0$ なるが故に、(76) 式は此の假定の下に明らかに成立するを見る。次に

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial z} z &= \frac{\partial(\psi z)}{\partial z} - \psi, & \frac{\partial\psi}{\partial y} y &= \frac{\partial(\psi y)}{\partial y} - \psi \\ \therefore \int \frac{\partial\psi}{\partial z} z df &= \int \frac{\partial(\psi z)}{\partial z} df - \int \psi df = - \int \psi z \cdot \cos(n, z) ds - \int \psi df = - \int \psi df \\ \int \frac{\partial\psi}{\partial y} y df &= \int \frac{\partial(\psi y)}{\partial y} df - \int \psi df = - \int \psi y \cdot \cos(n, y) ds - \int \psi df = - \int \psi df \end{aligned}$$

従つて (77) 式は $M_a = -2 \int \psi df \dots \dots \dots (78)$

今 k を常數、 u を任意の函數とせば、プラントルの公式 (70) と同様にして、

$\psi = ku$ と置くことを得可く、従つて (78) 式より

$$M_a = -2k \int u df, \quad k = -\frac{M_a}{2 \int u df} \dots\dots\dots (79)$$

問題は断面周邊に於て零となる可き函数 ψ を見出すにあるが故に、 $f(y, z) = 0$ を周邊の方程式とせば

$$u = f(y, z) \cdot \varphi(y, z), \quad \psi = kf(y, z) \cdot \varphi(y, z)$$

と置くことを得。茲に $\varphi(y, z)$ は任意の函数にして、周邊に於て無限大とならざることを以て唯一の條件とす。工學的解法にありては、 τ_y, τ_z を可及的簡單なる函数と假定することを目的とするが故に、 $\varphi(y, z) = 1$ と置けば

$$\psi = kf(y, z) \dots\dots\dots (80)$$

従つて
$$\tau_y = -k \frac{\partial f(y, z)}{\partial z}, \quad \tau_z = k \frac{\partial f(y, z)}{\partial y} \dots\dots\dots (81)$$

(79) 式より
$$M_a = -2k \int f(y, z) df, \quad k = -\frac{M_a}{2 \int f(y, z) df} \dots\dots\dots (82)$$

若し周邊曲線が n 次の代數的曲線なる時は、(80) 式により應力線 $\psi = K$ が又 n 次の曲線となる。而して (81) 式に依り、 τ_y, τ_z は $(n-1)$ 次の函数なる可きを以て、特に周邊曲線が坐標軸に對して對稱なる場合には、 τ_y は y の偶函数、 z の奇函数にして、 τ_z は y の奇函数、 z の偶函数なることを知る可し (前述)

次に此等の公式の使用例を示す。

(1) 圓形断面の場合

圓の方程式は $y^2 + z^2 = r^2$, $\therefore f(y, z) = y^2 + z^2 - r^2$

K_1 を常數として $f(y, z) = K_1$ と置きたるものは、應力線の方程式を表はすが故に應力線は軸の断面の同心圓なる事を知る。

$$\int f(y, z) df = \iint (y^2 + z^2 - r^2) dy dz = -\frac{1}{2} \pi r^4$$

依りて (82) 式の第二式より
$$k = \frac{M_a}{\pi r^4}$$

(80) 式より
$$\psi = \frac{M_a}{\pi r^4} (y^2 + z^2 - r^2)$$

従つて (81) 式より

$$\tau_y = -\frac{2M_a}{\pi r^4} z, \quad \tau_z = \frac{2M_a}{\pi r^4} y, \quad \therefore \tau = \frac{2M_a}{\pi r^4} \sqrt{y^2 + z^2} = \frac{M_a}{I_0} \rho$$

是れ曩にグラスホフの求めたる公式なり。

(ロ) 楕圓形断面の場合

$$\text{楕圓の方程式は } \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \therefore f(y, z) = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$$

故に此の場合には應力線, $f(y, z) = K_1$ は相似同心楕圓を表はす。

$$\int f(y, z) df = \iint \left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right) dy dz = -\frac{1}{2} \pi bc$$

$$\therefore k = \frac{M_n}{\pi bc}, \quad \psi = \frac{M_n}{\pi bc} \left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right)$$

$$\text{従つて } \tau_y = -\frac{2 M_n z}{\pi b c^2}, \quad \tau_z = \frac{2 M_n y}{\pi b^2 c}, \quad \therefore \tau = \frac{2 M_n}{\pi b^2 c^2} \sqrt{c^2 y^2 + b^2 z^2}$$

之も亦既にグラスホフの求めたる公式なり。

(ハ) 矩形断面の場合

矩形の邊長を b, h とせば, 矩形の4邊は $y = \pm b/2, z = \pm h/2$ にて表はさるゝが故に

$$\left(y - \frac{b}{2} \right) \left(y + \frac{b}{2} \right) \left(z - \frac{h}{2} \right) \left(z + \frac{h}{2} \right) = 0, \quad \therefore f(y, z) = \left(y^2 - \frac{b^2}{4} \right) \left(z^2 - \frac{h^2}{4} \right)$$

故に應力線 $f(y, z) = K_1$ は4次の曲線とす。

$$\int f(y, z) df = 4 \int_0^{\frac{h}{2}} dz \int_0^{\frac{b}{2}} \left(y^2 - \frac{b^2}{4} \right) \left(z^2 - \frac{h^2}{4} \right) dy = \frac{1}{36} b^3 h^2$$

$$\therefore k = -\frac{18 M_n}{b^3 h^2}, \quad \psi = -\frac{18 M_n}{b^3 h^2} \left(y^2 - \frac{b^2}{4} \right) \left(z^2 - \frac{h^2}{4} \right)$$

従つて

$$\tau_y = \frac{36 M_n}{b^3 h^2} \left(y^2 - \frac{b^2}{4} \right) z = -\frac{9 M_n}{b h^2} \left(1 - \frac{4y^2}{b^2} \right) z = -\frac{3}{4} \frac{M_n}{I_2} z \left(1 - \frac{4y^2}{b^2} \right),$$

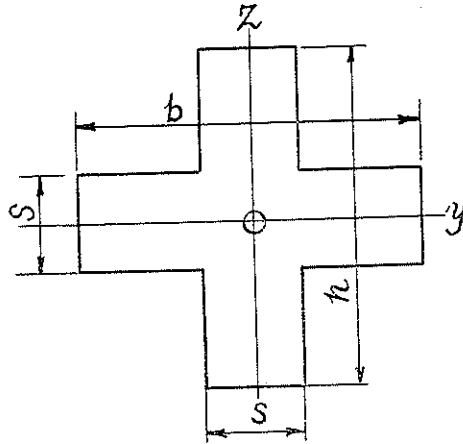
$$\tau_z = -\frac{36 M_n}{b^3 h^2} \left(z^2 - \frac{h^2}{4} \right) y = \frac{9 M_n}{b^3 h} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right) y = \frac{3}{4} \frac{M_n}{I_1} y \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right)$$

$$\tau = \frac{9}{2} \frac{M_n}{b h} \sqrt{\left(\frac{2z}{h^2} \right)^2 \left(1 - \frac{4y^2}{b^2} \right)^2 + \left(\frac{2y}{b^2} \right)^2 \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right)^2}$$

是れ即ちグラスホフの求めたる公式なり。

(ニ) 十字形断面の場合

第二十一圖の如き對稱圖形に於ては



第二十一圖

$$f(y, z) = \left(y^2 - \frac{b^2}{4}\right) \left(y^2 - \frac{s^2}{4}\right) \left(z^2 - \frac{b^2}{4}\right) \left(z^2 - \frac{s^2}{4}\right)$$

故に應力線 $f(y, z) = K_1$ は 8 次の曲線とす。

$$\int f(y, z) df = \int \left(y^2 - \frac{b^2}{4}\right) \left(y^2 - \frac{s^2}{4}\right) \left(z^2 - \frac{b^2}{4}\right) \left(z^2 - \frac{s^2}{4}\right) df$$

$$= \frac{1}{2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^2} s^2 (5b^2 - s^2) [2b^3(5s^2 - b^2) - s^2(5b^2 - s^2)]$$

$$\therefore k = - \frac{2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2 M_n}{s^2 (5b^2 - s^2) [2b^3(5s^2 - b^2) - s^2(5b^2 - s^2)]}$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_y &= - \frac{3^2 \cdot 5^2 M_n z (4y^2 - b^2) (4y^2 - s^2) [8z^2 - (b^2 + s^2)]}{s^2 (5b^2 - s^2) [2b^3(5s^2 - b^2) - s^2(5b^2 - s^2)]} \\ \tau_z &= - \frac{3^2 \cdot 5^2 M_n y (4z^2 - b^2) (4z^2 - s^2) [8y^2 - (b^2 + s^2)]}{s^2 (5b^2 - s^2) [2b^3(5s^2 - b^2) - s^2(5b^2 - s^2)]} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (83)$$

此の工學的解法に就ては、猶ほ多少の吟味す可きものあれど、茲には之を省略す。

第七節 ウェーバアの解法

扭力に關する最近の研究は1921年ウェーバアによりて發表せられたるものあり (C. Weber: Die Lehre der Drehungsfestigkeit, *Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens*, Heft 249, herausgegeben vom V. d. I., 1921; Drehungsfestigkeit von Stäben, *Z. d. V. d. I.*, 1922, S. 764 u. f.—此の内後者は前者の梗概たるに止まる) サン・ヴナン及びその以後の學者によりて研究せられたる、圓形、橢圓形、

三角形, 矩形, 六角形, 扇形 (サン・ヴナンの研究) その他の断面以外, 實地上猶ほ必要とせらるゝ種々の形狀, 例へば八角形, 狭長三角形, 狭長矩形, 及び狭長矩形によりて組成せられたる丁字形, 十字形, I字形, L字形, Z字形, 鐵道軌條の如き断面を有する軸に對する理論的研究を遂行したるものにして, 著者は之を最近に於ける最も有益なる研究の一つと稱して憚らずと雖も, その推論は上述のものと大同小異にして, 特異の點を含まず, 特にフェッパル及びプラントルの研究に負ふ所少なからざるを認め得可し。

軸の断面に於ける應力線の方程式を $F(y, z, K)=0$ とせば, K を常數として, 之を K に就て解き $f(y, z)=K$ を得。

第五節に示せる $\tau_y = -\partial f / \partial z, \tau_z = \partial f / \partial y$ なる關係を (67) 式即ち

$$\frac{\partial \tau_z}{\partial y} - \frac{\partial \tau_y}{\partial z} = 2G\theta$$

に代入せば $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2G\theta = \text{常數} \dots\dots\dots (68_1)$

即ち (68) 式と同一なる公式を得可く, ウェーバアの解法も亦此の基本公式より出發す。(68₁) 式の解法を求るに方り

$$f_1(y, z) = \left(\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} \right) 2G\theta$$

と置けば $\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2} = 2G\theta \dots\dots\dots (84)$

故に $f_1(y, z)=K$ は $f(y, z)=K$ の一解法なり。

(68₁), (84) 兩式より

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2} = 0, \text{ 或は } \frac{\partial^2 (f-f_1)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (f-f_1)}{\partial z^2} = 0$$

今 $f-f_1=f_2, f=f_1+f_2$ と置けば, 上式は

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial z^2} = 0 \dots\dots\dots (85)$$

f_2 は f, f_1 と同じく y, z の函數なり。而して a を任意の常數とし, $z+ay=t, z=t-ay$ と置く時は

$$f_2(y, z) = f_2(y, t-ay) = f_2(y, t), \quad f_2(y, t) = f_2(y, z+ay) = f_2(y, z)$$

従つて $\frac{\partial f_2(y, t)}{\partial t} = \frac{\partial f_2(y, z+ay)}{\partial z} = \frac{\partial f_2(y, z)}{\partial z}$

$$\therefore \frac{\partial^2 f_2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f_3}{\partial t^2}$$

$$\text{及び } \frac{\partial f_2(y, z)}{\partial y} = \frac{\partial f_3(y, t)}{\partial y} + \frac{\partial f_3(y, t)}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial y}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{\partial f_3}{\partial y} + a \frac{\partial f_3}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} \right) + a \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} \right) + a \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f_3}{\partial t} \right) + a^2 \frac{\partial^2 f_3}{\partial t^2},$$

$$\therefore \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f_3}{\partial y^2} + 2a \frac{\partial^2 f_3}{\partial y \partial t} + a^2 \frac{\partial^2 f_3}{\partial t^2}$$

此等の値を (85) 式に代入して

$$\frac{\partial^2 f_3}{\partial y^2} + 2a \frac{\partial^2 f_3}{\partial y \partial t} + a^2 \frac{\partial^2 f_3}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 f_3}{\partial t^2} = 0 \dots\dots\dots (86)$$

a は曩に任意の常數と假定せしが、今 (86) 式に於て $\partial^2 f_3 / \partial t^2$ の項を消失せしむる様に a の値を選ぶ時は、 $a^2 + 1 = 0$, $a = \pm i$ にして

$$\frac{\partial^2 f_3}{\partial y^2} + 2a \frac{\partial^2 f_3}{\partial y \partial t} = 0 \dots\dots\dots (86_1)$$

(86₁) 式を y に就て積分し、 $f_4(t)$ を y に無關係なる函數とすれば

$$\frac{\partial f_3}{\partial y} + 2a \frac{\partial f_3}{\partial t} = 2af_4(t) \dots\dots\dots (87)$$

と置く事を得可し。而して

$$\frac{\partial g_1}{\partial t} = f_4(t), \quad \int f_4(t) dt = g_1(t), \quad \frac{\partial g_1}{\partial y} = 0$$

とせば (87) 式は

$$\frac{\partial f_3}{\partial y} + 2a \frac{\partial f_3}{\partial t} - 2a \frac{\partial g_1}{\partial t} - \frac{\partial g_1}{\partial y} = 0, \quad \text{或は} \quad \frac{\partial}{\partial y} (f_3 - g_1) + 2a \frac{\partial}{\partial t} (f_3 - g_1) = 0$$

今 $f_3(y, t) - g_1(t) = f_5(y, t)$ と置けば

$$\frac{\partial f_5}{\partial y} + 2a \frac{\partial f_5}{\partial t} = 0 \dots\dots\dots (87_1)$$

次に $t = v + 2ay$, $v = t - 2ay$ と置けば

$$f_5(y, t) = f_5(y, v + 2ay) = f_5(y, v) = f_6(y, t - 2ay)$$

$$\text{従つて} \quad \frac{\partial f_5}{\partial t} = \frac{\partial f_6}{\partial v}, \quad \frac{\partial f_5}{\partial y} = \frac{\partial f_6}{\partial y} - 2a \frac{\partial f_6}{\partial v}$$

之を (87₁) 式に代入して

$$\frac{\partial f_6}{\partial y} - 2a \frac{\partial f_6}{\partial v} + 2a \frac{\partial f_6}{\partial v} = 0, \quad \text{或は} \quad \frac{\partial f_6(y, v)}{\partial y} = 0 \dots\dots\dots (87_2)$$

(87₂) 式を積分すれば $f_0 = g_2(v)$ 即ち v のみの函数を得可く、之に v の値を代入することに依りて

$$f_2(y, t) = g_2(t - 2ay), \text{ 従つて } f_3(y, t) = g_2(t - 2ay) + g_1(t)$$

或は t の値を代入して

$$f_2(y, z) = f_3(y, t) = g_1(z + ay) + g_2(z - ay)$$

而して此の式の右邊に $a = +i$ なる値を入るれば

$$f_2 = g_1(z + iy) + g_2(z - iy)$$

$f = f_1 + f_2$ に此の値を代入する時は (68₁) 式の一般解法として

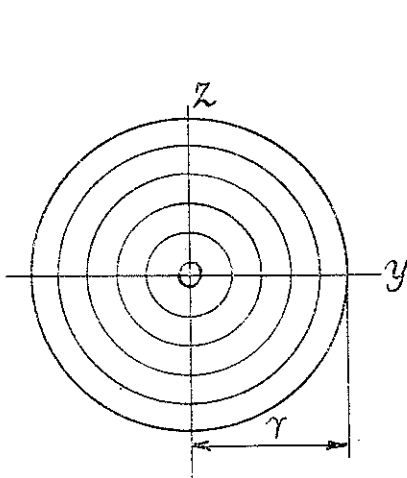
$$f(y, z) = 2 G\theta \left(\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} \right) + g_1(z + iy) + g_2(z - iy) \dots\dots\dots (88)$$

を得可し。(88) 式は未知の函数 g_1, g_2 を含むが故に、未だ全く應力線の方程式を求め得たりとは稱す可らざるも、断面周邊の曲線は同時に應力線たる可きが故に此の關係より (88) 式を解く事を得。猶ほ g_1, g_2 は $z \pm iy$ の函数なるが故に、單に代數函数のみならず、凡ての超函数も亦之に依りて表はし得可きものとす。

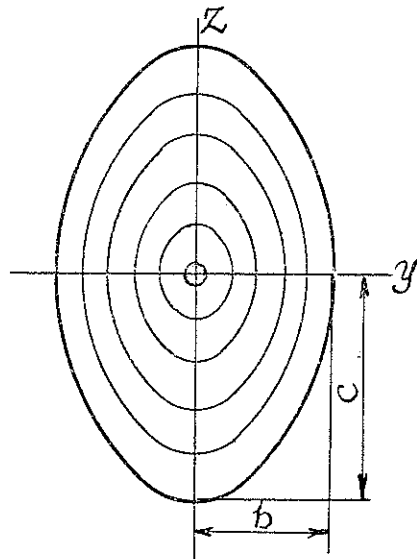
次に數例を示す。

(1) 圓形断面の場合 (第二十二圖)

圓の方程式を $y^2 + z^2 = r^2$ とすば、應力線の方程式を



第二十二圖



第二十三圖

$$f(y, z) = 2G\theta \left(\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} \right) = K$$

と取りて、断面周邊の應力線は

$$2G\theta \left(\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} \right) = K_1, \quad \therefore K_1 = 2G\theta \frac{r^2}{4}$$

故に應力線は同心圓なり。而して應力度は

$$\tau_y = -\frac{\partial f}{\partial z} = -G\theta z, \quad \tau_z = \frac{\partial f}{\partial y} = G\theta y, \quad \tau = G\theta \sqrt{y^2 + z^2} = G\theta \rho$$

(ロ) 橢圓形断面の場合 (第二十三圖)

橢圓の方程式を $y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ とすれば、 $g_1 + g_2 = -A(z^2 - y^2)$ と取りて、應力線の方程式は

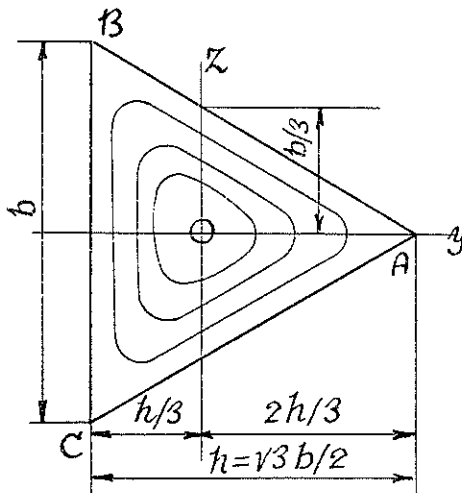
$$f(y, z) = 2G\theta \left(\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} \right) - A(z^2 - y^2) = K$$

茲に $A = -\frac{G\theta}{2} \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2}$ と置けば $f(y, z) = G\theta \left[\frac{c^2 y^2}{b^2 + c^2} + \frac{b^2 z^2}{b^2 + c^2} \right] = K$

故に應力線は相似同心橢圓なり。而して断面周邊に於ては

$$G\theta b^2 c^2 \left[\frac{y^2}{b^2(b^2 + c^2)} + \frac{z^2}{c^2(b^2 + c^2)} \right] = K_1, \quad \therefore K_1 = G\theta \frac{b^2 c^2}{b^2 + c^2}$$

而して $\tau_y = -\frac{2b^2 G\theta}{b^2 + c^2} z, \quad \tau_z = \frac{2c^2 G\theta}{b^2 + c^2} y, \quad \tau = \frac{2G\theta}{b^2 + c^2} \sqrt{c^4 y^2 + b^4 z^2}$



第二十四圖

(ハ) 正三角形の場合

第二十四圖に於て三角形 ABC の3邊の方程式を $y + h/3 = 0$, $y - 2h/3 + \sqrt{3}z = 0$, $y - 2h/3 - \sqrt{3}z = 0$ とせば、周邊の方程式は

$$\left(y + \frac{h}{3} \right) \left[\left(y - \frac{2}{3}h \right)^2 - 3z^2 \right] = 0,$$

或は

$$\frac{y^2 + z^2}{2} - \frac{y^2 - 3yz^2}{2h} = \frac{2h^2}{27}$$

又は

$$\frac{y^2 + z^2}{2} - \frac{y^2 - 3yz^2}{\sqrt{3}b} = \frac{b^2}{18}$$

故に

$$g_1 + g_2 = -\frac{G\theta}{2h}(y^2 - 3yz^2)$$

と置けば

$$f(y, z) = 2G\theta \left(\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} \right) - \frac{G\theta}{2h}(y^2 - 3yz^2) = K$$

周邊に於ては
$$f(y, z) = K_1 = \frac{2}{27} h^2 = \frac{1}{18} b^2$$

而して

$$\tau_y = -G\theta z - G\theta \frac{3yz}{h} = -G\theta \left[z + \frac{2\sqrt{3}yz}{b} \right],$$

$$\tau_z = G\theta y - \frac{3}{2h} G\theta(y^2 - z^2) = G\theta \left[y - \frac{\sqrt{3}}{b}(y^2 - z^2) \right]$$

(二) 矩形断面の場合

矩形の邊を b, h とせば次の條件あり。

1. $y=0, z=0$ の時は $\tau_y=0, \tau_z=0$
2. $y=\pm b/2$ の時は $\tau_y=0, \partial f/\partial z=0$ にして $f(y, z)$ が z に無關係
3. $z=\pm h/2$ の時は $\tau_z=0, \partial f/\partial y=0$ にして $f(y, z)$ が y に無關係

即ち此等の條件を満足する様に、(88) 式の g_1 及び g_2 を定めざる可からず。然るに如何なる代數的函數も斯の如き條件を満足すること能はざるが故に、 g_1, g_2 は超函數ならざる可からず。

第一解法

$$g_1 + g_2 = 2G\theta \left(\frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{4} \right) + \sum A_m \cosh \frac{m\pi}{b} z \cos \frac{m\pi}{b} y + C_1, \quad m \text{ は奇數}$$

と假定し、之を (88) 式に代入すれば

$$f(y, z) = G\theta y^2 + \sum A_m \cosh \frac{m\pi}{b} z \cos \frac{m\pi}{b} y + C_1 = K \dots (89)$$

従つて
$$\tau_y = -\frac{\partial f}{\partial z} = -\sum A_m \frac{m\pi}{b} \sinh \frac{m\pi}{b} z \cos \frac{m\pi}{b} y,$$

$$\tau_z = \frac{\partial f}{\partial y} = 2G\theta y - \sum A_m \frac{m\pi}{b} \cosh \frac{m\pi}{b} z \sin \frac{m\pi}{b} y$$

$y=0, z=0$ に對しては $\tau_y=0, \tau_z=0$ 即ち 1. の條件を満足す。次に $y=\pm b/2$ に對しては、 m が奇數にして $m=2n-1$ なる限り

$$\cos\left(\pm\frac{m\pi}{2}\right)=0, \quad \therefore f(\pm b/2, z)=\frac{b^2}{4} G\theta + C_1=K_1$$

にして、 f は z に無関係なり。即ち 2. の条件を満足す。次に $z=\pm h/2$ に對しては (89) 式は

$$f(y, z)=G\theta y^2 + \sum A_m \cosh \frac{m\pi}{2} \frac{h}{b} \cos \frac{m\pi}{b} y + C_1=K_1 \quad \dots(89_1)$$

或は
$$\sum A_m \cosh \frac{m\pi}{2} \frac{h}{b} \cos \frac{m\pi}{b} y = G\theta \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right)$$

とする事を得るが故に、 $\pi y/b=t_1$ と置けば上式は

$$\sum A_m \cosh \frac{m\pi}{2} \frac{h}{b} \cos mt_1 = G\theta \frac{b^2}{\pi^2} \left(\frac{\pi^2}{4} - t_1^2 \right)$$

此の式の右邊をフウリエの級數に分解せば

$$\begin{aligned} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - t_1^2 &= \frac{8}{\pi} \left(\cos t_1 - \frac{1}{3^3} \cos 3t_1 + \frac{1}{5^3} \cos 5t_1 - \frac{1}{7^3} \cos 7t_1 + \dots \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{m+1} \frac{1}{m^3} \cos mt_1 + \dots \right) \\ &= \frac{8}{\pi} \sum (-1)^{m+1} \frac{\cos mt_1}{m^3}, \end{aligned}$$

$$\therefore \sum A_m \cosh \frac{m\pi}{2} \frac{h}{b} \cos mt_1 = G\theta \frac{b^2}{\pi^2} \frac{8}{\pi} \sum (-1)^{m+1} \frac{\cos mt_1}{m^3}$$

$-b/2 \leqq y \leqq b/2$ 即ち $-\pi/2 \leqq t_1 \leqq \pi/2$ の間に於て、上式が恒等式なる様に係數を定むるものとすれば

$$A_m = \frac{G\theta b^2 (-1)^{m+1}}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 m^3 \cosh \frac{m\pi}{2} \frac{h}{b}} \quad \dots(90)$$

此の係數を用ふれば (89₁) 式より、上の y の値の範圍内に於て

$$f(y, \pm h/2) = \frac{b^2}{4} G\theta + C_1 = K_1 \quad \dots(91)$$

にして、 f は y に無関係なり。即ち 3. の条件を満足す。

又 $y=0, z=0$ の時に $K=K_0=0$ とすれば、(89) 式より

$$\begin{aligned} \sum A_m + C_1 &= 0, \\ \therefore C_1 &= -\sum A_m = -G\theta b^2 \sum \frac{(-1)^{m+1}}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 m^3 \cosh \frac{m\pi}{2} \frac{h}{b}} \end{aligned}$$

之を (91) 式に代入すれば

$$K_1 = \frac{G\theta b^2}{4} \left[1 - 4 \sum \frac{(-1)^{m+1}}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 m^3 \cosh \frac{m\pi}{2} \frac{h}{b}} \right] \dots\dots (92)$$

第二解法

$$g_1 + g_2 = 2G\theta \left(\frac{z^2}{4} - \frac{y^2}{4} \right) + \sum B_m \cosh \frac{m\pi}{h} y \cos \frac{m\pi}{h} z + C_2, \quad m \text{ は奇数}$$

と置けば (88) 式より

$$f(y, z) = G\theta z^2 + \sum B_m \cosh \frac{m\pi}{h} y \cos \frac{m\pi}{h} z + C_2 = K \quad \dots (93)$$

$$\tau_y = -\frac{\partial f}{\partial z} = -2G\theta z + \sum B_m \frac{m\pi}{h} \cosh \frac{m\pi}{h} y \sin \frac{m\pi}{h} z,$$

$$\tau_z = \frac{\partial f}{\partial y} = \sum B_m \frac{m\pi}{h} \sinh \frac{m\pi}{h} y \cos \frac{m\pi}{h} z$$

此の場合にも亦 1. の条件は明らかに満足せらる。次に $z = \pm h/2$ の時は

$$\cos \left(\pm \frac{m\pi}{2} \right) = 0, \quad \therefore f(y, \pm h/2) = \frac{h^2}{4} G\theta + C_2 = K_1$$

即ち f は y に無関係にして 3. の条件を證し得たり。又 $y = \pm b/2$ に對しては前解法と同様に $\pi z/h = t_2$ と置きて

$$\sum B_m \cosh \frac{m\pi}{2} \frac{b}{h} \cos m t_2 = G\theta \frac{h^2}{\pi^2} \left(\frac{\pi^2}{4} - t_2^2 \right)$$

従つて此の場合には

$$B_m = \frac{G\theta h^2 (-1)^{m+1}}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 m^3 \cosh \frac{m\pi}{2} \frac{b}{h}} \dots\dots (94)$$

此の係数を用ひ $-h/2 \leq z \leq h/2, -\pi/2 \leq t_2 \leq \pi/2$ の値に對して

$$f(\pm b/2, z) = \frac{h^2}{4} G\theta + C_2 = K_1 \dots\dots (95)$$

を得可く、即ち 2. の条件を満足したり。

又 $y=0, z=0, K=K_0=0$ より

$$\sum B_m + C_2 = 0, \quad \therefore C_2 = -\sum B_m = -G\theta h^2 \sum \frac{(-1)^{m+1}}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 m^3 \cosh \frac{m\pi}{2} \frac{b}{h}}$$

之を (94) 式に代入して

$$K_1 = \frac{G\theta k^2}{4} \left[1 - 4 \sum \frac{(-1)^{n+1}}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 m^2 \cosh \frac{m\pi}{2} \frac{b}{h}} \right] \dots\dots (96)$$

以上 2 種の解法より (89) 式を用ふると (93) 式を用ふるとに依りて、應力度に關し 2 種の表現法を見出す。即ち

$$\begin{aligned} \tau_y &= -\frac{G\theta h}{2} \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \frac{b}{h} \sum \frac{(-1)^{n+1} \sin n(2n-1) \frac{\pi}{b} z \cos(2n-1) \frac{\pi}{b} y}{(2n-1)^2 \cosh(2n-1) \frac{\pi}{2} \frac{h}{b}} \\ &= -G\theta h \left[\frac{2z}{h} - \frac{1}{2} \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \sum \frac{(-1)^{n+1} \cosh(2n-1) \frac{\pi}{h} y \sin(2n-1) \frac{\pi}{h} z}{(2n-1)^2 \cosh(2n-1) \frac{\pi}{2} \frac{b}{h}} \right] \\ \tau_z &= G\theta b \left[\frac{2y}{b} - \frac{1}{2} \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \sum \frac{(-1)^{n+1} \cosh(2n-1) \frac{\pi}{b} z \sin(2n-1) \frac{\pi}{b} y}{(2n-1)^2 \cosh(2n-1) \frac{\pi}{2} \frac{h}{b}} \right] \\ &= \frac{G\theta b}{2} \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \frac{h}{b} \sum \frac{(-1)^{n+1} \sinh(2n-1) \frac{\pi}{h} y \cos(2n-1) \frac{\pi}{h} z}{(2n-1)^2 \cosh(2n-1) \frac{\pi}{2} \frac{b}{h}} \end{aligned}$$

サン・ヴナンの公式 (34), (35) 参照。

(二) 正方形断面の場合

前項の解法に於て $b=h$ と置けば、直ちに正方形に對する解法を得可しと雖も、此の場合には正方形を多角形の一様として、又次の如き計算を用ふる事を得。

正多角形の中心より邊の中點迄の距離を r_m とせば、(89) 式に (90) 式の値を代入して

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} G\theta r_m^2 \left[\frac{2y^2}{r_m^2} + 0.825 \cosh \frac{\pi}{2} \frac{z}{r_m} \cos \frac{\pi}{2} \frac{y}{r_m} \right. \\ \left. - 0.001372 \cosh \frac{3\pi}{2} \frac{z}{r_m} \cos \frac{3\pi}{2} \frac{y}{r_m} \right. \\ \left. + 0.0000132 \cosh \frac{5\pi}{2} \frac{z}{r_m} \cos \frac{5\pi}{2} \frac{y}{r_m} - \dots - 0.825 \right] = K \end{aligned}$$

此の式中の双曲函數及び三角函數を (y/r_m) 及び (z/r_m) の級數として展開すれば上式は

$$\frac{1}{2} G\theta r_m^2 \left[\frac{2y^2}{r_m^2} + 0.825 - 1.00 \frac{y^2 - z^2}{r_m^2} + 0.182 \frac{y^4 - 6y^2z^2 + z^4}{r_m^4} \right. \\ \left. + 0.00 \frac{y^6 - 15y^4z^2 + 15y^2z^4 - z^6}{r_m^6} - \dots - 0.825 \right] = K$$

故に $y^6, y^{10}, \dots, y^{4n+2}$ の項は消失す。極座標を用ひて上式を書き改むれば

$$\frac{1}{2} G\theta r_m^2 \left[\left(\frac{\rho}{r_m} \right)^2 + 0.182 \left(\frac{\rho}{r_m} \right)^4 \cos 4\varphi - \dots \right] = K$$

此の式より推して、一般の n 邊正多角形に對し

$$\frac{1}{2} G\theta r_m^2 \left[\left(\frac{\rho}{r_m} \right)^2 + \frac{C_n}{n!} \left(\frac{\rho}{r_m} \right)^n \cos n\varphi + \frac{C_{2n}}{(2n)!} \left(\frac{\rho}{r_m} \right)^{2n} \cos 2n\varphi \right. \\ \left. + \frac{C_{3n}}{(3n)!} \left(\frac{\rho}{r_m} \right)^{3n} \cos 3n\varphi + \dots \right] = K \dots \dots (97)$$

之を再び矩座標に書き直せば

$$\frac{1}{2} G\theta r_m^2 \left[\frac{y^2 + z^2}{r_m^2} + \frac{C_n}{n!} \frac{y^n - \binom{n}{2} y^{n-2} z^2 + \binom{n}{4} y^{n-4} z^4 - \dots}{r_m^n} \right. \\ \left. + \frac{C_{2n}}{(2n)!} \frac{y^{2n} - \binom{2n}{2} y^{2n-2} z^2 + \dots}{r_m^{2n}} + \dots \right] = K \dots (97_1)$$

公式 (97) は一般式 (88) に對應するものにして、 $\rho=0$ に對して $K_0=0$ となる。此の方程式によりて表はさるゝ断面は n 個の對稱軸を有し、 y 軸はその内の一とす。何となれば坐標軸を $2\pi/n$ だけ廻轉するも (97) 式は何等の變形を受けざるが故なり。而して問題は係數 C_n, C_{2n}, \dots を求むるにあり。

$\varphi=0$ の値に對しては動徑は y 軸と一致して正多角形の邊の中點を過ぎり、更に $\rho=r_m$ の値に對しては断面周邊上の點を得可く、 $K=K_1$ とす、而して多角形の邊は y 軸に垂直なるが故に、此の點に關しては $dy/dz=0, d^2y/dz^2=0, d^3y/dz^3=0,$

(97₁) 式及び逐次に之を微分したるものに、 $\varphi=0, \rho=r_m$ 或は $z=0, y=r_m$ を代入したる結果を簡單にする時は

$$C_0 = \frac{K_1}{\frac{1}{2} G\theta r_m^2}$$

として

$$\left. \begin{aligned} \frac{C_n}{n!} + \frac{C_{2n}}{(2n)!} + \frac{C_{3n}}{(3n)!} + \dots &= C_0 - 1 \\ \frac{C_n}{(n-2)!} + \frac{C_{2n}}{(2n-2)!} + \frac{C_{3n}}{(3n-2)!} + \dots &= 2 \\ \frac{C_n}{(n-4)!} + \frac{C_{2n}}{(2n-4)!} + \frac{C_{3n}}{(3n-4)!} + \dots &= 0 \\ \frac{C_n}{(n-6)!} + \frac{C_{2n}}{(2n-6)!} + \frac{C_{3n}}{(3n-6)!} + \dots &= 0 \text{等} \end{aligned} \right\} \dots\dots (98)$$

(98) 式は無限の未知数を含む無限の聯立方程式なるが故に、その一般的解法は不可能なり。但し C_{mn} として m が増大するに従ひ C_{mn} なる項の存在の影響は逐次減小するが故に、略解として未知数 C_0, C_n, C_{2n}, \dots の数、従つて方程式の数を任意に局限するを以て唯一の解法とす。而して斯の如き解法の結果は、断面周邊を多角形とする代りに、各稜點に於て多少の丸味を帯びたる連續曲線（第二十五乃至第二十七圖參照）と假定することに歸す。

正方形の場合には未知数を C_0, C_4, C_8, C_{12} 及び C_{16} の 5 個に限定すれば (98) 式より

$$\frac{C_4}{4!} + \frac{C_8}{8!} + \frac{C_{12}}{12!} + \frac{C_{16}}{16!} = C_0 - 1$$

$$\frac{C_4}{2!} + \frac{C_8}{6!} + \frac{C_{12}}{10!} + \frac{C_{16}}{14!} = 2$$

$$C_4 + \frac{C_8}{4!} + \frac{C_{12}}{8!} + \frac{C_{16}}{12!} = 0$$

$$\frac{C_8}{2!} + \frac{C_{12}}{6!} + \frac{C_{16}}{10!} = 0$$

$$C_8 + \frac{C_{12}}{4!} + \frac{C_{16}}{8!} = 0$$

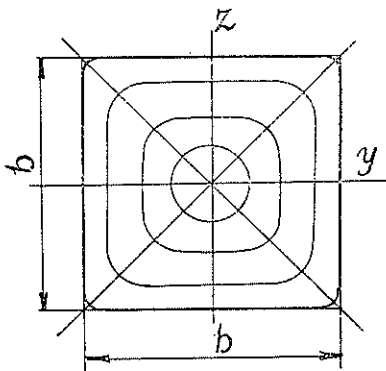
之を解きて

$$C_0 = 1.1786$$

$$\frac{C_4}{4!} = 0.1820$$

$$\frac{C_8}{8!} = -0.00357$$

$$\frac{C_{12}}{12!} = 0.000159$$



第二十五圖

$$\frac{C_{16}}{16!} = -0.0000058$$

故に周邊の方程式は

$$\rho^2 + 0.1820 \rho^4 \cos 4\varphi - 0.00357 \rho^6 \cos 8\varphi + 0.000159 \rho^{12} \cos 12\varphi - 0.0000058 \rho^{16} \cos 16\varphi = 1.1786 \dots \dots \dots (99)$$

にしてその曲線は第二十五圖に示すが如し。

(ホ) 正六角形断面の場合

此の場合にも未知数を 5 個とし

$$\frac{C_0}{6!} + \frac{C_{12}}{12!} + \frac{C_{18}}{18!} + \frac{C_{24}}{24!} = C_0 - 1$$

$$\frac{C_0}{4!} + \frac{C_{12}}{10!} + \frac{C_{18}}{16!} + \frac{C_{24}}{22!} = 2$$

$$\frac{C_0}{2!} + \frac{C_{12}}{8!} + \frac{C_{18}}{14!} + \frac{C_{24}}{20!} = 0$$

$$C_0 + \frac{C_{12}}{6!} + \frac{C_{18}}{12!} + \frac{C_{24}}{18!} = 0$$

$$\frac{C_{12}}{4!} + \frac{C_{18}}{10!} + \frac{C_{24}}{16!} = 0$$

之を解きて

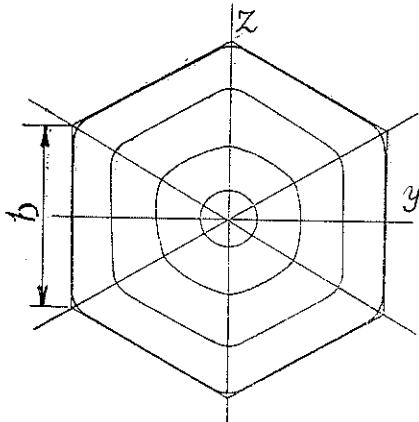
$$C_0 = 1.0778$$

$$\frac{C_6}{6!} = 0.0816$$

$$\frac{C_{12}}{12!} = -0.00407$$

$$\frac{C_{18}}{18!} = 0.000316$$

$$\frac{C_{24}}{24!} = -0.000016$$



第二十六圖

故に周邊の方程式は

$$\rho^2 + 0.0816 \rho^6 \cos 6\varphi - 0.00407 \rho^{12} \cos 12\varphi + 0.000316 \rho^{18} \cos 18\varphi - 0.000016 \rho^{24} \cos 24\varphi = 1.0778 \dots \dots \dots (100)$$

にしてその曲線は第二十六圖の如し。

(ヘ) 正八角形断面の場合

此の場合の解法は

$$\frac{C_8}{8!} + \frac{C_{16}}{16!} + \frac{C_{24}}{24!} + \frac{C_{32}}{32!} = C_0 - 1$$

$$\frac{C_8}{6!} + \frac{C_{16}}{14!} + \frac{C_{24}}{22!} + \frac{C_{32}}{30!} = 2$$

$$\frac{C_8}{4!} + \frac{C_{16}}{12!} + \frac{C_{24}}{20!} + \frac{C_{32}}{28!} = 0$$

$$\frac{C_8}{2!} + \frac{C_{16}}{10!} + \frac{C_{24}}{18!} + \frac{C_{32}}{26!} = 0$$

$$C_8 + \frac{C_{16}}{8!} + \frac{C_{24}}{16!} + \frac{C_{32}}{24!} = 0$$

と取りて

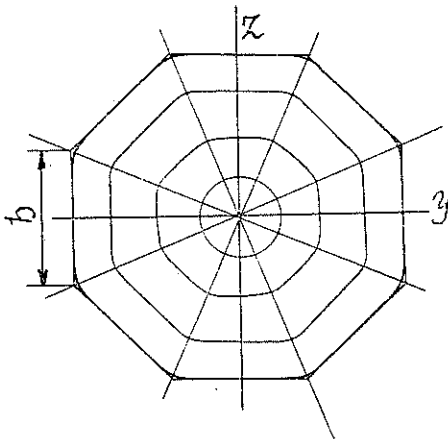
$$C_0 = 1.0437$$

$$\frac{C_8}{8!} = 0.0466$$

$$\frac{C_{16}}{16} = -0.00314$$

$$\frac{C_{24}}{24!} = 0.000285$$

$$\frac{C_{32}}{32!} = -0.000016$$



第二十七圖

故に周邊の方程式は

$$\rho^2 + 0.0466 \rho^8 \cos 8\varphi - 0.00314 \rho^{16} \cos 16\varphi + 0.000285 \rho^{24} \cos 24\varphi - 0.000016 \rho^{32} \cos 32\varphi = 1.0437 \dots\dots\dots(101)$$

にしてその曲線は第二十七圖の如し。

狭長矩形、狭長三角形その他の断面に對するウエニバアの解法は、同様に應力線の性質より推論したる略解にして、特に之をフエップルの實驗の結果と對比して極めて興味深きものあれど、茲には之を掲載せず。後章に於て之を略説する機會ある可し。

第八節 扭力の解法の評論

第一節乃至第七節に於て紹介せる解法は各その特徴を有し、扭力理論の綜合的

完成に對するその功績を無視す可らずと雖も、就中サン・ヴナンの根本理論はその後の研究に對する基調として、常にその樞軸をなせるは、何人も容易に之を看取し得可し。圓形、橢圓形及び三角形断面、特に矩形断面に對するサン・ヴナンの理論は、その後の研究一としてその牙城を搖がすものあるを知らず。殊にウエーバアの如きは、軸断面に於ける應力線の性質より、全然サン・ヴナンと同一の結論に到達したるものにして、一毫をだも之に加へず。

然れどもサン・ヴナンの理論、特にその矩形断面に對する解法は極めて難解にして、その結果として與へられたる (34), (35) の公式の如きも、之を實用に供する場合にあたりては、その數値を算出するに多大なる勞力を費やさざる可らざるは多言を要せず。實にサン・ヴナンがその 1853 年の論文に掲載したる幾多の係數表の助けを借るに非ずんば、その理論は全く實用に適せずと稱せんも過言に非ず、斯の如き貴重なる係數表の數字を算出したる意味に於ても、此の論文の價値の不朽なるを見る可し。

サン・ヴナンの公式 (21) は之を種々の断面形狀に使用して、一般の軸に對する解法を求め得可しと雖も、正多角形断面の中、三角形以外のものに對してはサン・ヴナンの研究之に觸れず。思ふに (21) 式は正方形に對しては既に之を使用し難く、六角形、八角形等の断面に對しては、假令 (21) 式を使用し得るとしても、その計算極めて困難なるに出づ可し。

正多角形に對してはヘルマンの研究及びウエーバアの研究あり。その功績決して輕視す可らずと雖も、兩者の推論は何れも略算たるの域を脱せず、ヘルマンの (56) 式は (54) 式の略解にして、ウエーバアの (99), (100), (101) 式は (98) 式の略解たるに過ぎざるは、既に説明せる所の如し。

従つて正多角形の一つとしての正方形に對するヘルマン及びウエーバアの解法は、嚴密なる計算に於てはサン・ヴナンの結果と一致し難きものとす。猶ほヘルマンが前記 1883 年の論文に於て發表せる正六角形に關する値は、誤算を含むが故に第三節に於ては著者自らの檢算に依りて之を訂正したり。

ヘルマンの公式とウエーバアの公式とを對照するの便宜上、(55) 乃至 (57) 式を使用して正八角形に對する著者の計算を示せば次の如し。

正八角形の場合には $\sigma=8$, $\alpha=22.5^\circ$ なるが故に、(55) 式より

$$\beta_1=18.803, \quad \gamma_1=12.449, \quad \delta_1=4.725,$$

$$\beta_2 = 7.607, \quad \gamma_2 = -3.900, \quad \delta_2 = 2.662$$

之を用ひて (57) 式より

$$A_1 = 0.3325, \quad A_2 = -0.1631, \quad A_3 = 0.5044$$

而して此の場合には

$$a = \frac{1}{2} \cot 22.5^\circ \cdot b = 1.2071 b, \quad r = \frac{1}{2} \operatorname{cosec} 22.5^\circ \cdot b = 1.3066 b,$$

$$F = 4ab = 4.8284 b^2, \quad I_0 = F \frac{12a^2 + b^2}{24} = 3.7189 b^4$$

なるが故に (57) 式より

$$\begin{aligned} D &= 4.8284 b^4 \left[0.77022 - 3.4144 \left\{ \frac{0.3325}{90} + \frac{0.1631}{306} + \frac{0.5044}{650} \right\} \right] \\ &= 4.8284 \times 0.77022 b^4 \left[1 - \frac{3.4144}{0.77022} (0.00369 + 0.00053 + 0.00078) \right] \\ &= 3.71893 b^4 (1 - 0.02217) = 3.6365 b^4, \end{aligned}$$

$$\therefore M_a = 3.6365 G\theta b^4 = 0.9778 G\theta I_0$$

即ち此の場合にも (10) 式は満足せられ、多角形の邊數が増加するに従つて (10) 式の係數 C の値も亦増大するを見る可し。

ヘルマンの解法に對する評論は、その一部を後章に譲る。

矩形に對するサン・ヴナンの解法に依れば、矩形の周邊上に於ける應力の分布は超函數なれど、グラスホフの略解は之を二次の拋物線と假定するにありて、その算式極めて簡單なるが故に、今日猶ほ此の解法によりて矩形の扭力を説明し後より之が補正として、サン・ヴナンの係數値を示す場合少なからず。前掲、バツハの彈性及び強度に關する著作の如きはその一例にして、フエップルの工業力學講義の如きも、その第五卷に於てはサン・ヴナンの正解を示したれど、第三卷に於ける説明はグラスホフの解法なり。

1909年の發表にかゝるゴツケの研究 (R. Götzke: Zur Theorie der Torsion rechteckig-prismatischer Stäbe, *Zeitschrift d. V. d. I.*, 1909, S. 935 u. f.) は、グラスホフの略解に對比せしめてサン・ヴナンの解法を演繹し、簡單なる近似的公式を作りたるものにして、後章に於て之を引用する機會ある可しと雖も、又以て如何に後世の研究家がサン・ヴナンの難解なる理論の一般的普及のために努力を惜し

まざりしかを察するに足る可し。

ブウシネスク、フェップル及びプラントルの解法は、扭力理論の研究上に於ける一異彩にして、固よりその目的とする所は扭力理論の根柢を動かさんとするに非ず、圓形及び楕圓形以外の断面、最も重要な矩形断面の如きに對しても、正確なる理論的結果を數字上に求むる事能はずと雖も、その着眼の獨創的なるは之を多とせざる可らず。著者は此等の解法に對して津津たる興味を覺ゆ。

著者は次にプラントルの理論に對して多少の解説を試みるの必要を認む。プラントルはその論文の末尾に於て、圓形断面及び楕圓形断面に對しては薄膜の曲面は、夫々廻轉曲面及び楕圓拋物曲面となる可きが故に、その解法は極めて容易なりと論斷したるのみにして、その算式を與へず。本章第五節に示せる圓形及び楕圓形断面に對する解法は、實に著者の計算する所にかゝる。プラントルの與へたる公式 (69) は明らかに拋物曲面の方程式にして、之を第二十圖に示せるが如き狹長矩形に適用するにあたりては、略算として u を y のみの函數と假定せるが故に (69) 式は $\partial^2 u / \partial y^2 = d^2 u / dy^2 = p/S$ となり、之を積分して

$$\frac{du}{dy} = \frac{p}{S} y + C_0, \quad C_0 \text{ は積分の常數}$$

を得可し。然るに du/dy は曲面の勾配を表はし、 $y=0$ の場合即ち z 軸に沿ひては $du/dy=0$ なる可きが故に、 $C_0=0$ 従つて $du/dy=(p/S)y$ にして、更に此の微分方程式を積分すれば

$$u = \frac{1}{2} \frac{p}{S} y^2 + C, \quad C \text{ は積分の常數}$$

此の方程式は明らかに拋物線を表はし $y=0$ の時は $u=-u_1$ 、 $y=\pm b/2$ の時は $u=0$ なるが故に、此の條件より係數 C の値を定め、且つ u の最大値 u_1 を求むる事を得可し。即ち

$$C = -u_1, \quad \therefore u = \frac{1}{2} \frac{p}{S} y^2 - u_1, \quad u_1 = \frac{1}{8} \frac{p}{S} b^2$$

$$\text{及び} \quad \left(\frac{du}{dt} \right)_{max} = \left(\frac{du}{dy} \right)_{y=\frac{b}{2}} = \frac{pb}{2S}$$

斯の如き平衡曲面の性質は吊橋に於ける線の平衡曲線の性質と同一にして、従つて上記の公式に使用せる S は實は薄膜の應力度に非ずして、その水平分力に等しきことを知る可く、此の水平分力を H とせば、徑間の中央に於ては S 最小

にして $S=H$ けれど、 $y=\pm b/2$ に対しては S 最大にして

$$S=H \frac{ds}{dy} = H \sqrt{1 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2} \doteq H \left(1 + \frac{8u_1^2}{b^2}\right) \doteq H$$

即ちプラントルの解法は $S=H$ 、換言せば薄膜の應力がその凡ての點に於て常數なりとの假定の上に出發することを忘る可らず。

此の理論を圓形断面に及ぼさんに、上記の推論を準用し、 y 軸及び z 軸に沿ひては u は夫々 y 及び z のみの函数なると共に、拋物曲面は凡ての直徑に就て同一の拋物線を表はす可きが故に

$$u = \frac{1}{2} \frac{p}{S} y^2 + C_1, \quad u = \frac{1}{2} \frac{p}{S} z^2 + C_1,$$

従つて
$$u = \frac{1}{4} \frac{p}{S} (y^2 + z^2) + C_1$$

C_1 を定む可き環境條件は $y^2 + z^2 = r^2$ に対して $u=0$ 、及び $y=z=0$ に対して $u=-u_1$ なるが故に

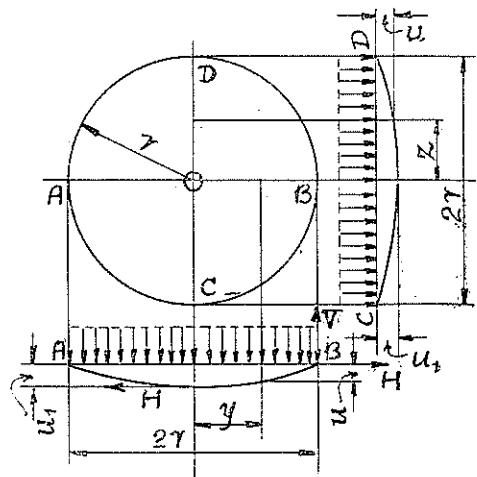
$$C_1 = -u_1, \quad \therefore u = \frac{1}{4} \frac{p}{S} (y^2 + z^2) - u_1, \quad u_1 = \frac{1}{4} \frac{p}{S} r^2$$

従つて
$$\left(\frac{du}{dt}\right)_{max} = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=r} = \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=r} = \frac{pr}{2S}$$

此の關係は又次の如く初等力學の範圍に屬する計算よりも求めらる。第二十八圖に於て、 Oy 及び Oz 軸に沿へる曲面の斷面は、同一形狀の拋物線にしてその方程式は夫々

$$u = \frac{u_1}{r^2} (r^2 - y^2), \quad u = \frac{u_1}{r^2} (r^2 - z^2)$$

にて表はさる。今半圓の部分 CBD の平衡の状態を考ふるに、 CBD の面上の鉛直荷重、 CBD の周邊に沿へる鉛直反力、及び放射狀水平反力、及び拋物線 CD に沿へる水平應張力は、此の部分に加へる凡ての外力なるが故に、次の平衡條件あり。即ち Oz 軸を力率の軸として



第二十八圖

- m_1 ; 半圓 CBD に於ける荷重 p の力率
 m_2 ; 圓弧 CD に於ける反力 V の力率
 m_3 ; 拋物線 CD に於ける應力 S の力率

とすれば、圓弧 CD に於ける放射狀水平反力の力率は 0 にして、 $\sum m = m_1 + m_2 + m_3 = 0$ ならざる可らず。然るに半圓 CBD に於ける荷重の總和は之を P とし、 $P = \frac{1}{2} p \pi r^2$ にして、その重心點の Oz 軸よりの距離は $y_0 = (4/3)(r/\pi)$ なるが故に

$$m_1 = P y_0 = \frac{1}{2} p \pi r^2 \cdot \frac{4}{3} \frac{r}{\pi} = \frac{2}{3} p r^3$$

次に鉛直反力は、荷重 P を圓弧 CD の長さにて除したる商なるが故に

$$V = \frac{1}{2} p \pi r^2 / \pi r = \frac{1}{2} p r$$

而して $m_2 = \int V y ds = V \int y \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} dy$, $x^2 + y^2 = r^2$,

$$\therefore \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - y^2}}$$

なるを以て

$$m_2 = 2Vr \int_0^r \frac{y}{\sqrt{r^2 - y^2}} dy = 2Vr^2 = pr^3$$

次に拋物線 CD は極めて扁平なるが故に、之を圓弧と假定するも差支へなし。而して此の場合には略算に於て、圓弧長 $s = \frac{1}{3} [8\sqrt{r^2 + u_1^2} - 2r]$, その重心の Oz 軸よりの距離は $(2/3)u_1$ を以て表はさるゝが故に

$$m_3 = \int H u ds \doteq \frac{H}{3} \frac{2}{3} u_1 [8\sqrt{r^2 + u_1^2} - 2r] = \frac{2}{9} H u_1 r \left[8\sqrt{1 + \left(\frac{u_1}{r}\right)^2} - 2 \right]$$

u_1 は r に比して小なるが故に $(u_1/r)^2 \doteq 0$ と置けば、 $m_3 = (4/3)H u_1 r = (4/3)S u_1 r$

$$\therefore \sum m = \frac{2}{3} p r^3 - p r^3 + \frac{4}{3} S u_1 r = 0$$

即ち $\frac{1}{3} p r^3 = \frac{4}{3} S u_1 r$, $u_1 = \frac{p r^2}{4S}$

是れ即ち曩きに第五節に於て與へたる値にして、 $(du/dt)_{\max}$ は $(du/dy)_{y=r}$ に、茲に求めたる u_1 の値を代入して、容易に之を見出す事を得可し。

次に楕圓断面の場合には、圓形断面の場合と同様に (69) 式を積分して

$$u = \frac{1}{2} \frac{p}{S} y^2 + C, \quad u = \frac{1}{2} \frac{p}{S} z^2 + C_1,$$

$$\therefore \frac{b^2 + c^2}{b^2 c^2} u = \frac{1}{2} \frac{p}{S} \left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) + C_2$$

但し此の最後の式の係数 C_2 は、 $C_2 = C/b^2 + C_1/c^2$ とす。同様に環境條件の助けを藉り、 $y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ の場合は $u = 0$ 、 $y = z = 0$ の場合は $u = -u_1$ なるが故に

$$C_2 = -\frac{b^2 + c^2}{b^2 c^2} u_1, \quad \therefore u = \frac{1}{2} \frac{p}{S} \frac{b^2 c^2}{b^2 + c^2} \left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) - u_1,$$

$$u_1 = \frac{1}{2} \frac{p}{S} \frac{b^2 c^2}{b^2 + c^2}$$

及び
$$\left(\frac{du}{dt} \right)_{max} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=b} = \frac{p}{S} \frac{bc^2}{b^2 + c^2}$$

即ち第五節に於て既に示せる所の如し。

以上はプラントルの理論に對する著者の解説にして、之に依りてその理論は數學上多少の略算を用ひずんば、扭力理論として簡單なる結果に到達し難きを察するに足る可し。

ヘンネベルグ及びウエバアの解法、何れも特筆す可きものなしと雖も、狹長矩形及び之を以て組成せられたる種々の断面に對するウエバアの解法は、略解は即ち略解なりと雖も、興味少からず。是れ著者が即ち、その解法を目して近世に於ける最も有益なる研究の一つと推稱せんとする所以なり。

第四章 軸の應裁力

第一節 圓形断面の軸

(1) 圓形充断面の軸

既に第二章に於て取扱ひたる圓形断面の場合の公式を茲に再録せんに

$$\tau = \frac{2}{\pi} \frac{M_a}{r^4} \rho = \frac{M_a}{2I_1} \rho = G\theta\rho \dots\dots\dots(102)$$

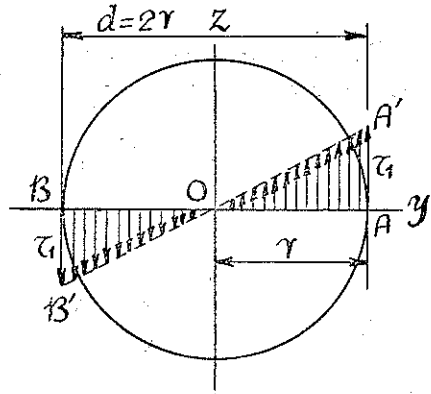
$$\tau_1 = \frac{2}{\pi} \frac{M_a}{r^3} = \frac{M_a}{2I_1} r = G\theta r \dots\dots\dots(103)$$

$$M_a = \frac{\pi}{2} \tau_1 r^3 = \frac{2I_1}{r} \tau_1 = 2I_1 G\theta \dots\dots\dots(104)$$

k_s を軸材料の許容抗裁強度とせば、軸の設計に於ては (104) 式より

$$M_t \leq \frac{\pi}{2} k_s r^3 \dots\dots\dots (105)$$

(102) 式の第一式より、軸の断面に於ける應裁力度は中心 O よりの距離 $\rho = \sqrt{y^2 + z^2}$ に正比例することを知らるが故に、 τ の値は何れの半徑に對しても 0 より τ_1 まで直線的に増大し、 τ_1 は軸の周邊上の凡ての點に起ることを知る。(第二十九圖)

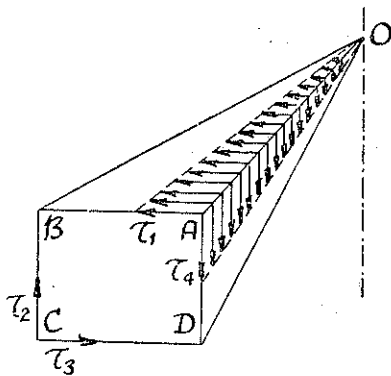


第二十九圖

半徑 r 及び τ_1 の値が凡ての動徑に就て一定なるが故に、半徑に沿ひての應力の總和を示す面積は、凡ての半徑に對して一定なり。即ち三角形 OAA' は三角形 OBB' に等し。

此の關係は又第三十圖を用ひても之を證することを得可し。即ち第三十圖に於て、 $ABCD$ を軸 O 又は軸の周面に平行なる任意の面とし、 AB, CD は水平、 AD, BC は鉛直と取れば三角形 ABO, BCO, CDO, DAO の面には、圖に示すが如き應裁力が働く。此等の應力の最大應力度を夫々、 $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$ とせば、 $\tau_1 = \tau_4, \tau_2 = \tau_3$ なるが故に、 AO, BO, CO, DO の長さを ρ として

$$\frac{1}{2} \tau_1 \rho = \frac{1}{2} \tau_4 \rho, \quad \frac{1}{2} \tau_2 \rho = \frac{1}{2} \tau_3 \rho$$



第三十圖

然るに中心軸 O に沿ひては、外力の存在するものなきが故に

$$\frac{1}{2} \tau_1 \rho = \frac{1}{2} \tau_2 \rho,$$

従つて
$$\frac{1}{2} \tau_1 \rho = \frac{1}{2} \tau_3 \rho$$

$\rho = r$ と取れば
$$\frac{1}{2} \tau_1 r = \frac{1}{2} \tau_3 r$$

此の關係は AO, CO の位置に關係なく成立するが故に、 C を常數として

$$\frac{1}{2} \tau_1 r = C$$

即ち第二十九圖に於て、三角形 $OAA' = C$

(□) 圓形中空断面の軸

第三十一圖を用ひ、 $r_0 = mr$ 、 $d_0 = md$ とせば

$$I_1 = I_2 = \frac{\pi}{4} (r^4 - r_0^4) = \frac{\pi}{4} (1 - m^4) r^4,$$

$$I_0 = \frac{\pi}{2} (r^2 - r_0^2) = \frac{\pi}{2} (1 - m^2) r^2,$$

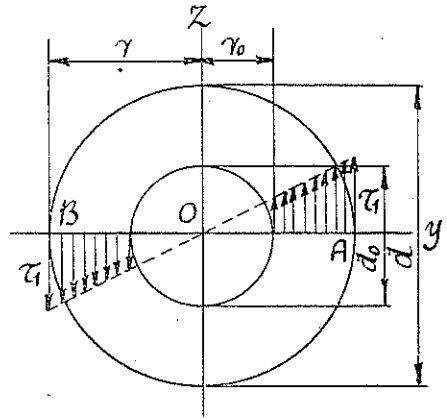
之を (102) 乃至 (105) 式に代入する時は

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{2}{\pi} \frac{M_a}{(1 - m^4) r^4} \rho = \frac{M_a}{2I_1} \rho \\ &= G\theta\rho \dots\dots\dots(106) \end{aligned}$$

$$\tau_1 = \frac{2}{\pi} \frac{M_a}{(1 - m^4) r^3} = \frac{M_a}{2I_1} r = G\theta r \dots\dots\dots(107)$$

$$M_a = \frac{\pi}{2} \tau_1 (1 - m^4) r^3 = \frac{2I_1}{r} \tau_1 = 2I_1 G\theta \dots\dots\dots(108)$$

$$M_a \leq \frac{\pi}{2} k_s (1 - m^4) r^3 \dots\dots\dots(109)$$



第三十一圖

$r_0 = 0$ 従つて $m = 0$ の場合には (106) 乃至 (109) 式は夫々、(102) 乃至 (105) 式に歸着す可し。(106) 式より、断面に於ける應裁力の分布は第三十一圖に示せるが如くなるを知る。

第二節 橢圓形断面の軸

(イ) 橢圓形充断面の軸

此の場合の τ , τ_1 , M_a の値に關し、サン・ヴナンの求めたる公式とグラスホフの求めたる公式とは、外見上多少の相違ありと雖も、後章に示すが如く橢圓形断面の軸に對する單位扭力角は

$$\theta = \frac{M_a}{G} \frac{b^2 + c^2}{\pi b^3 c^2}$$

なるが故に、此の關係を入る時は兩式は完全に一致す可し。

今 $b=nc, n \leq 1$ とせば次の關係あり。

$$\left. \begin{aligned} \tau &= \frac{2}{\pi} \frac{M_a}{b^2 c^3} \sqrt{c^4 y^2 + b^4 z^2} = \frac{2}{\pi} \frac{M_a}{n^3 c^4} \sqrt{y^2 + n^4 z^2} \\ &= G\theta \frac{2}{b^2 + c^2} \sqrt{c^4 y^2 + b^4 z^2} = G\theta \frac{2}{1+n^2} \sqrt{y^2 + n^4 z^2} \end{aligned} \right\} \dots (110)$$

故に τ の最大値 τ_1 を求むることは (110) 式に於ける $y^2 + n^4 z^2$ の最大値を求むる問題に歸着す。而して $n \leq 1$ と假定せるが故に、 $z=0, y=\pm b$ の場合に $y^2 + n^4 z^2$ の値は最大なり。従つて此の時は $\sqrt{y^2 + n^4 z^2} = b$

$$\left. \begin{aligned} \therefore \tau_1 &= \frac{2}{\pi} \frac{M_a}{b^2 c} = \frac{2}{\pi} \frac{M_a}{n^2 c^3} = \frac{M_a}{2I_1} b \\ &= G\theta \frac{2bc^2}{b^2 + c^2} = G\theta \frac{2b}{1+n^2} \end{aligned} \right\} \dots (111)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{従つて} \quad M_a &= \frac{\pi}{2} \tau_1 b^2 c = \frac{\pi}{2} \tau_1 n^2 c^3 = \frac{2I_1}{b} \tau_1 \\ &= G\theta \frac{\pi b^3 c^3}{b^2 + c^2} = G\theta \frac{\pi n^3 c^4}{1+n^2} = \frac{4G\theta I_1}{1+n^2} \end{aligned} \right\} \dots (112)$$

$$M_a \leq \frac{\pi}{2} k_s b^2 c \dots (113)$$

(110) 乃至 (113) 式に於て $n=1, b=c=r$ と置けば、圓形断面の場合の公式 (102) 乃至 (105) 式を得可きこと明かなり。又 (110) 式に於て $z=0$ とせば

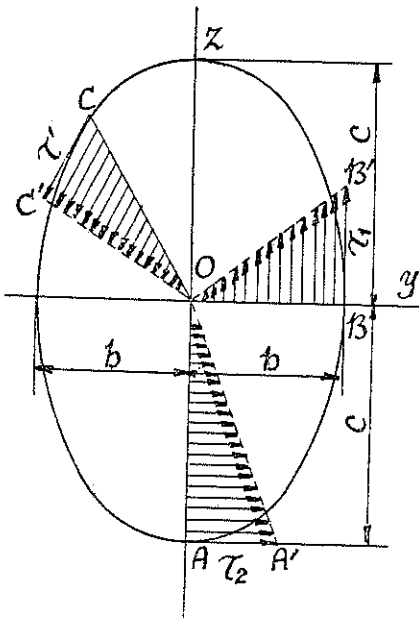
$$\tau = \frac{2}{\pi} \frac{M_a}{b^2 c} y = \frac{M_a}{2I_1} y = \frac{\tau_1}{b} y$$

同様に $y=0$ とせば

$$\tau = \frac{2}{\pi} \frac{M_a}{bc^2} z = \frac{M_a}{2I_2} z = \frac{\tau_2}{c} z$$

故に橢圓周邊上の應裁力度は短軸の兩端に於て最大、長軸の兩端に於て最小なることを知る可く、此等の値を夫々、 τ_1, τ_2 を以て表はせば

$$\tau_2 = \frac{M_a}{2I_2} c = \frac{b}{c} \tau_1 = n\tau_1, \quad n \leq 1 \dots (114)$$



第三十二圖

又 (110) 式の代りにグラスホフに依りて

$$\left. \begin{aligned} \tau_z &= \frac{2}{\pi} \frac{M_a}{b^3 c} y = \frac{M_a}{2I_1} y \\ \tau_y &= \frac{2}{\pi} \frac{M_a}{bc^3} z = \frac{M_a}{2I_2} z \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (115)$$

を用ふる時は、(115) 式は τ_y, τ_z が夫々 z, y に比例する事を示し、断面周邊上の點に於ては

$$y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1, \quad \therefore y^2 + n^2 z^2 = c^2 n^2$$

従つて

$$\begin{aligned} y^2 + n^2 z^2 &= n^2 [c^2 - (1-n^2)z^2] \\ \therefore \tau' &= \frac{2}{\pi} \frac{M_a}{n^2 c^4} \sqrt{c^2 - (1-n^2)z^2} \dots\dots\dots (116) \end{aligned}$$

(116) 式に於て $z=0$ とせば

$$\tau' = \frac{2}{\pi} \frac{M_a}{b^2 c} = \tau_1$$

$z=\pm c$ とせば

$$\tau' = \frac{2}{\pi} \frac{M_a}{bc^2} = \tau_2$$

故に (114) 乃至 (116) 式を用ひて、任意の動徑に沿へる應裁力の分布は第三十二圖の如く變化す可きを知る。即ち應裁力は凡ての動徑に就て、中心より周邊に向つて直線的に増大し、その方向は動徑の端に於ける橢圓の切線の方向を取る。而して曩きに圓形断面に就て證明せると同様に、此等の動徑上の應力三角形の面積は常に一定なり。即ち三角形 OAA' 、三角形 OBB' 、三角形 $OC C'$ 等の面積は相等し。

(□) 橢圓形中空断面の軸

内外の橢圓は相似形とす。

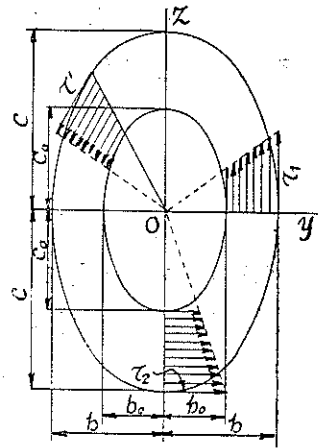
第三十三圖に於て、

$$b_0 = mb, \quad c_0 = mc, \quad b = nc, \quad b_0 = nc_0, \quad n \leq 1$$

とせば

$$I_1 = \frac{\pi}{4} (b^3 c - b_0^3 c_0) = \frac{\pi}{4} (1-m^4) n^3 c^4,$$

$$I_2 = \frac{\pi}{4} (bc^3 - b_0 c_0^3) = \frac{\pi}{4} (1-m^4) nc^4$$



第三十三圖

此の値を用ひグラスホフに従つて計算する時は (117) 式の第一式を得可く、之に後章に與ふるが如く

$$\theta = \frac{1}{\pi} \frac{M_a}{G} \frac{b^2 + c^2}{(1-m^4)b^3c^3}$$

なる關係を入るゝ時は、サン・ヴナンに依りて求めらるゝ (117) 式の第二式を得可し。即ち

$$\left. \begin{aligned} \tau &= \frac{2}{\pi} \frac{M_a}{(b^3c - b_0^3c_0)c^2} \sqrt{c^4y^2 + b^4z^2} = \frac{2}{\pi} \frac{M_a}{(1-m^4)n^3c^4} \sqrt{y^2 + n^4z^2} \\ &= G\theta \frac{2}{b^2+c^2} \sqrt{c^4y^2 + b^4z^2} = G\theta \frac{2}{1+n^2} \sqrt{y^2 + n^4z^2} \end{aligned} \right\} \quad (117)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \frac{2}{\pi} \frac{M_a}{b^3c - b_0^3c_0} b = \frac{2}{\pi} \frac{M_a}{(1-m^4)n^2c^3} = \frac{M_a}{2I_1} b \\ &= G\theta \frac{2bc^2}{b^2+c^2} = G\theta \frac{2b}{1+n^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (118)$$

$$\left. \begin{aligned} M_a &= \frac{\pi}{2} \tau_1 \frac{b^3c - b_0^3c_0}{b} = \frac{\pi}{2} \tau_1 (1-m^4)n^2c^3 = \frac{2I_1}{b} \tau_1 \\ &= G\theta \frac{\pi(b^3c - b_0^3c_0)c^2}{b^2+c^2} = G\theta \frac{\pi(1-m^4)n^3c^4}{1+n^2} = \frac{4G\theta I_1}{1+n^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (119)$$

$$M_a \leq \frac{\pi}{2} k_s \frac{b^3c - b_0^3c_0}{b} \dots\dots\dots (120)$$

(117) 乃至 (120) 式に於て $m=0$, $b_0=c_0=0$ と置けば楕圓充斷面の公式 (110) 乃至 (113) を得可く, $n=1$, $b=c=r$, $b_0=c_0=r_0$ と置けば圓形中空斷面の公式 (106) 乃至 (109) を得可く, 此の二つの假定を同時に採用して $m=0$, $n=1$ と置けば圓形充斷面の公式 (102) 乃至 (105) を得可し。

第三節 矩形斷面の軸

(イ) 矩形充斷面の軸

グラスホフの略式に従へば曩きに求めたるが如く τ_y, τ_z, τ を扭力率 M_a の函數として表はすことを得可く、之に後に求む可き單位扭力角の値

$$\theta = 3.6 \frac{M_a}{G} \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3}$$

の値を代入して次式を得。

$$\left. \begin{aligned} \tau_y &= -\frac{9M_a}{bh^2} z \left(1 - \frac{4y^2}{b^2}\right) = -\frac{3}{4} \frac{M_a}{I_2} z \left(1 - \frac{4y^2}{b^2}\right) \\ &= -G\theta \frac{2.5}{1 + \left(\frac{b}{h}\right)^2} z \left(1 - \frac{4y^2}{b^2}\right) \\ \tau_z &= \frac{9M_a}{b^2h} y \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) = \frac{3}{4} \frac{M_a}{I_1} y \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) \\ &= G\theta \frac{2.5}{1 + \left(\frac{b}{h}\right)^2} y \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (121)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau &= \frac{9}{2} \frac{M_a}{b^2h} \sqrt{\left(\frac{2y}{b}\right)^2 \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right)^2 + \left(\frac{b}{h}\right)^2 \left(\frac{2z}{h}\right)^2 \left(1 - \frac{4y^2}{b^2}\right)^2} \\ &= G\theta \frac{1.25b}{1 + \left(\frac{b}{h}\right)^2} \sqrt{\left(\frac{2y}{b}\right)^2 \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right)^2 + \left(\frac{b}{h}\right)^2 \left(\frac{2z}{h}\right)^2 \left(1 - \frac{4y^2}{b^2}\right)^2} \end{aligned} \right\} (122)$$

τ の最大値 τ_1 を求めるは (122) 式の括弧内の最大値を求める問題に歸着す。

今

$$R = \left(\frac{2y}{b}\right)^2 \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right)^2 + \left(\frac{b}{h}\right)^2 \left(\frac{2z}{h}\right)^2 \left(1 - \frac{4y^2}{b^2}\right)^2$$

と置けば $\left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) \leq 1, \quad \left(\frac{b}{h}\right)^2 \left(\frac{2z}{h}\right)^2 \leq 1$

なるが故に $R \leq \left(\frac{2y}{b}\right)^2 + \left(1 - \frac{4y^2}{b^2}\right)^2$
 $\leq \left[1 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2 \left(1 - \frac{4y^2}{b^2}\right)\right]$

故に R の最大値は $R_1=1$ にして、此の時には $z=0, y=\pm b/2$ なることを要し

$$\tau_1 = 4.5 \frac{M_a}{b^2h} = \frac{3}{8} \frac{M_a}{I_1} b = \frac{1.25b}{1 + \left(\frac{b}{h}\right)^2} G\theta \dots\dots\dots (123)$$

即ち矩形の最大應力度 τ_1 は長邊の中點 ($b \leq h$ として $y=\pm b/2, z=0$) に起ること前述の如し。而して短邊の中點 ($y=0, z=\pm h/2$) に於ては (122) 式より

$$\tau_2 = 4.5 \frac{M_a}{bh^2} = \frac{3}{8} \frac{M_a}{I_2} h = \frac{1.25h}{1 + \left(\frac{h}{b}\right)^2} G\theta = \left(\frac{b}{h}\right) \tau_1 \dots\dots (124)$$

次に扭力率は

$$M_a = \frac{2}{9} \tau_1 b^2 h = \frac{8}{3} \frac{I_1}{b} \tau_1 = G\theta \frac{5}{18} \frac{b^3 h^3}{b^2 + h^2} = G\theta \frac{10}{3} \frac{I_1}{1 + \left(\frac{b}{h}\right)^2} \dots (125)$$

軸の設計に於ては

$$M_a \leq \frac{2}{9} k_s b^2 h \dots (126)$$

次にサン・ヴナンの解法に従へば (34), (35) 兩式の各兩邊に G を乗じて $\tau_y = G\varphi_y$, $\tau_z = G\varphi_z$ を得可し。而して τ_1 を求むるには $\tau = \sqrt{\tau_y^2 + \tau_z^2}$ の公式を用ふるは、徒らに計算を複雑ならしむるに過ぎざるが故に、長邊の中點 ($y = \pm b/2$, $z = 0$) に於て、 $\tau_z = \tau_1$ (最大値), $\tau_y = 0$, 短邊の中點 ($y = 0$, $z = \pm h/2$) に於て $\tau_y = \tau_2$, $\tau_z = 0$ として、(34), (35) 式より計算せば、

$$\sin(2n-1) \frac{\pi}{2} = (-1)^{n+1}, \quad \sin 0 = 0, \quad \cos 0 = 1, \quad \cosh 0 = 1$$

にして

$$\begin{aligned} \tau_1 &= G\theta b \left[1 - \frac{8}{\pi^2} \sum \frac{1}{(2n-1)^2 \cosh(2n-1) \frac{\pi}{2} \frac{h}{b}} \right] \\ &= G\theta h \frac{8}{\pi^2} \sum \frac{(-1)^{n+1} \tanh(2n-1) \frac{\pi}{2} \frac{b}{h}}{(2n-1)^2} \\ \tau_2 &= G\theta b \frac{8}{\pi^2} \sum \frac{(-1)^{n+1} \tanh(2n-1) \frac{\pi}{2} \frac{h}{b}}{(2n-1)^2} \\ &= G\theta h \left[1 - \frac{8}{\pi^2} \sum \frac{1}{(2n-1)^2 \cosh(2n-1) \frac{\pi}{2} \frac{b}{h}} \right] \end{aligned}$$

而して (36) 式の第二式を用ひ、その括弧内の式を $\frac{1}{3} f_1\left(\frac{h}{b}\right)$ を以て表はす時は

$$f_1\left(\frac{h}{b}\right) = 1 - \frac{192}{\pi^5} \frac{1}{\frac{h}{b}} \sum \frac{\tanh(2n-1) \frac{\pi}{2} \frac{h}{b}}{(2n-1)^5} \dots (127)$$

$$M_a = \frac{1}{3} G\theta b^3 h f_1\left(\frac{h}{b}\right), \quad \therefore G\theta = \frac{3M_a}{b^3 h f_1\left(\frac{h}{b}\right)}$$

上に求めたる τ_1 の公式中、第一式の括弧内の式を $f(h/b)$, τ_2 の公式中、第二式の括弧内の式を $f(b/h) = f'(h/b)$ を以て表はせば

$$f\left(\frac{h}{b}\right) = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum \frac{1}{(2n-1)^2 \cosh(2n-1) \frac{\pi}{2} \frac{h}{b}} \dots (128)$$

$$\frac{8}{\pi^2} \sum \frac{(-1)^{n+1} \tanh(2n-1) \frac{\pi}{2} \frac{b}{h}}{(2n-1)^2} = \left(\frac{b}{h}\right) f\left(\frac{h}{b}\right)$$

$$f'\left(\frac{h}{b}\right) = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum \frac{1}{(2n-1)^2 \cosh(2n-1) \frac{\pi}{2} \frac{b}{h}} \dots (129)$$

$$\frac{8}{\pi^2} \sum \frac{(-1)^{n+1} \tanh(2n-1) \frac{\pi}{2} \frac{h}{b}}{(2n-1)^2} = \left(\frac{h}{b}\right) f'\left(\frac{h}{b}\right)$$

此等の關係を用ふる時は、 τ_1, τ_2 に関して次式を得可し。但し

$$f_2\left(\frac{h}{b}\right) = f\left(\frac{h}{b}\right) / f_1\left(\frac{h}{b}\right), \quad f_2'\left(\frac{h}{b}\right) = f'\left(\frac{h}{b}\right) / f_1\left(\frac{h}{b}\right),$$

$$f_3\left(\frac{h}{b}\right) = f_1\left(\frac{h}{b}\right) / f\left(\frac{h}{b}\right) = 1 / f_2\left(\frac{h}{b}\right)$$

とす。

$$\tau_1 = G\theta b f\left(\frac{h}{b}\right) = \frac{3M_a}{b^2 h} \frac{f\left(\frac{h}{b}\right)}{f_1\left(\frac{h}{b}\right)} = \frac{1}{4} \frac{M_a}{I_1} b f_2\left(\frac{h}{b}\right) \dots (130)$$

$$\tau_2 = G\theta h f'\left(\frac{h}{b}\right) = \frac{3M_a}{b^3} \frac{f'\left(\frac{h}{b}\right)}{f_1\left(\frac{h}{b}\right)} = \frac{1}{4} \frac{M_a}{I_2} \left(\frac{h}{b}\right)^2 h f_2'\left(\frac{h}{b}\right) \dots (131)$$

従つて (36), (127) 式より

$$\left. \begin{aligned} M_a &= \frac{1}{3} G\theta b^3 h f_1\left(\frac{h}{b}\right) = 4G\theta I_1 f_1\left(\frac{h}{b}\right) \\ &= \frac{1}{3} \tau_1 b^2 h \frac{f_1\left(\frac{h}{b}\right)}{f\left(\frac{h}{b}\right)} = 4\tau_1 \frac{I_1}{b} f_3\left(\frac{h}{b}\right) \end{aligned} \right\} \dots (132)$$

$$M_u \leq \frac{1}{3} k_s b^3 h f_3 \left(\frac{h}{b} \right) \dots\dots\dots (133)$$

$f(h/b), f_1(h/b), f_2(h/b), f_3(h/b)$ の値は次の如し。

第二表 サン・ヴァナンの扭力係数表

$\frac{h}{b}$	$f\left(\frac{h}{b}\right)$	$f_1\left(\frac{h}{b}\right)$	$f_2\left(\frac{h}{b}\right)$	$f_3\left(\frac{h}{b}\right)$
1.0	0.67531	0.42173	1.601	0.62451
1.1	0.71978	0.46195	1.558	0.64179
1.25	0.77633	0.51518	1.507	0.66363
1.5	0.84756	0.58726	1.443	0.69291
1.75	0.89663	0.64273	1.395	0.71688
2.0	0.93006	0.68604	1.356	0.73764
2.5	0.96807	0.74810	1.294	0.77277
3	0.98544	0.78995	1.248	0.80160
4	0.99698	0.84244	1.184	0.84498
5	0.99937	0.87395	1.144	0.87450
10	1.00000	0.93697	1.067	0.93696
∞	1.00000	1.00000	1.000	1.00000

ゴッツケ (R. Götzke : Zur Theorie der Torsion rechteckig-prismatischer Stäbe, Z. d. V. d. I., 1909, S. 935 u. f.) は (130) 乃至 (133) 式の代りに次の如き略式を發表せり。

$$\frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \frac{2e^{-x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{2e^{-x}(1 - e^{-2x})}{1 - e^{-4x}} \doteq 2e^{-x}(1 - e^{-2x})$$

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{(1 - e^{-2x})^2}{1 - e^{-4x}} \doteq (1 - e^{-2x})^2 \doteq 1 - 2e^{-2x}$$

x の値が増大するに従ひ e^{-4x} は 1 に比して遙かに小なる数となるが故に、近似値として之を上如く假定する事を得。 x の最小値は (127) 乃至 (129) 式に於て $x = \pi/2 \cdot h/b$ なるが故に、 $h=b$ の場合に於ても $x = \pi/2$ なり。而して此の時は

$$\frac{1}{\cosh \frac{\pi}{2}} = 0.39854 \quad \text{之に對して} \quad 2e^{-\frac{\pi}{2}}(1 - e^{-\pi}) = 0.39780$$

$$\tanh \frac{\pi}{2} = 0.91716 \quad \text{之に對して} \quad 1 - 2e^{-\pi} = 0.91358$$

即ち略式に依る誤差は極めて小なり。 $x = 3\pi/2$ の場合には更に $e^{-2x} \doteq 0$ と置くことを得るが故に

$$\frac{1}{\cosh \frac{3\pi}{2}} \doteq 2e^{-\frac{3\pi}{2}}, \quad \tanh \frac{3\pi}{2} \doteq 1,$$

同様にして $\frac{1}{\cosh \frac{5\pi}{2}} \doteq 0$

従つて (129) 式に於て $n=3$ 以上の項は之を省略して可なり。

$$\begin{aligned} \therefore f\left(\frac{h}{b}\right) &\doteq 1 - \frac{8}{\pi^2} \left[2e^{-\frac{\pi}{2} \frac{h}{b}} - 2e^{-\frac{3\pi}{2} \frac{h}{b}} + \frac{1}{3^2} 2e^{-\frac{3\pi}{2} \frac{h}{b}} \right] \\ &= 1 - \frac{16}{\pi^2} (1 - 0.8889e^{-\pi \frac{h}{b}}) e^{-\frac{\pi}{2} \frac{h}{b}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_1\left(\frac{h}{b}\right) &\doteq 1 - \frac{192}{\pi^5} \frac{1}{\frac{h}{b}} \left[1 + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - 2e^{-\pi \frac{h}{b}} \right] \\ &= 1 - \frac{0.6274}{\frac{h}{b}} (1.0045 - 2e^{-\pi \frac{h}{b}}) \end{aligned}$$

$$\frac{h}{b} = 1 \text{ に對しては } 1 - 0.8889e^{-\pi \frac{h}{b}} = 0.9568,$$

$$\frac{h}{b} = \infty \text{ に對しては } 1 - 0.8889e^{-\pi \frac{h}{b}} = 1$$

にしてその差僅小なるが故に、その平均値を取りて

$$1 - 0.8889e^{-\pi \frac{h}{b}} \doteq 0.9784, \quad f\left(\frac{h}{b}\right) \doteq 1 - 1.59e^{-\frac{\pi}{2} \frac{h}{b}},$$

$$f_1\left(\frac{h}{b}\right) \doteq 1 - \frac{0.63}{\frac{h}{b}} (1 - 1.99e^{-\pi \frac{h}{b}})$$

と置く事を得。此の式に於て $\pi/2, \pi$ の如き指數を有する事は、計算上不便なるが故に、 $\pi/2$ を 1.5 に改めて、適宜なる變化を數係數に加ふる時は

$$f\left(\frac{h}{b}\right) \doteq 1 - 1.45e^{-1.5 \frac{h}{b}} = \varphi\left(\frac{h}{b}\right) \dots\dots\dots(134)$$

$$f_1\left(\frac{h}{b}\right) \doteq 1 - \frac{0.63}{\frac{h}{b}} (1 - 1.64e^{-3 \frac{h}{b}}) = \varphi_1\left(\frac{h}{b}\right) \dots\dots\dots(135)$$

(128), (127) 式の代りに夫々 (134), (135) 式を用ひ、且つ

$$\varphi'\left(\frac{h}{b}\right) = \varphi\left(\frac{b}{h}\right), \quad \varphi_2\left(\frac{h}{b}\right) = \varphi\left(\frac{h}{b}\right) / \varphi_1\left(\frac{h}{b}\right),$$

$$\varphi_2'\left(\frac{h}{b}\right) = \varphi'\left(\frac{h}{b}\right) \varphi_1\left(\frac{h}{b}\right), \quad \varphi_3\left(\frac{h}{b}\right) = \varphi_1\left(\frac{h}{b}\right) / \varphi\left(\frac{h}{b}\right) = 1, \quad \varphi_3\left(\frac{h}{b}\right)$$

と置けば (130) 乃至 (133) 式の代りに次の略式を得可し。

$$\tau_1 = G\theta b \varphi\left(\frac{h}{b}\right) = \frac{3M_a}{b^2 h} \frac{\varphi\left(\frac{h}{b}\right)}{\varphi_1\left(\frac{h}{b}\right)} = \frac{1}{4} \frac{M_a}{I_1} b \varphi_2\left(\frac{h}{b}\right) \quad \dots (136)$$

$$\tau_2 = G\theta h \varphi'\left(\frac{h}{b}\right) = \frac{3M_a}{b^3} \frac{\varphi'\left(\frac{h}{b}\right)}{\varphi_1\left(\frac{h}{b}\right)} = \frac{1}{4} \frac{M_a}{I_2} \left(\frac{h}{b}\right)^2 h \varphi_2'\left(\frac{h}{b}\right) \quad (137)$$

$$\left. \begin{aligned} M_a &= \frac{1}{3} G\theta b^3 h \varphi_1\left(\frac{h}{b}\right) = 4G\theta I_1 \varphi_1\left(\frac{h}{b}\right) \\ &= \frac{1}{3} \tau_1 b^2 h \frac{\varphi_1\left(\frac{h}{b}\right)}{\varphi\left(\frac{h}{b}\right)} = 4\tau_1 \frac{I_1}{b} \varphi_3\left(\frac{h}{b}\right) \end{aligned} \right\} \dots (138)$$

$$M_a \leq \frac{1}{3} k_s b^2 h \varphi_3\left(\frac{h}{b}\right) \dots (139)$$

h が b に比して相當に大なる場合には (135) 式に於て $e^{-3\frac{h}{b}} \doteq 0$

$$\text{従つて} \quad \varphi_1\left(\frac{h}{b}\right) \doteq 1 - 0.63 \frac{b}{h}$$

を得るが故に、(138) 式の第一式より $M_a \doteq \frac{1}{3} G\theta b^3 h \left(1 - 0.63 \frac{b}{h}\right)$

是れ疊きにサン・ヴナンの求めたる (41) 式の第一式なり。又 $h/b=1$ の場合には (135) 式を計算して

$$\varphi_1\left(\frac{h}{b}\right) = 0.42145$$

之を (138) 式の第一式に代入せば

$$M_a = \frac{0.42145}{3} G\theta b^4 = 0.14048 G\theta b^4$$

之をサン・ヴナンの公式 (44) と對比すれば、その差は微細論ずるに足らざるを見る可し。即ち函數 $f(h/b)$ の代りに函數 $\varphi(h/b)$ を用ふるも、その誤差極めて小さきのみならず、函數 $\varphi(h/b)$ を計算することは函數 $f(h/b)$ を計算するよりも、その勞遙かに少なき利益あり。

第三表 ゴツケの扭力係數表

$\frac{h}{b}$	$\varphi\left(\frac{h}{b}\right)$	$\varphi_1\left(\frac{h}{b}\right)$	$\varphi_2\left(\frac{h}{b}\right)$	$\varphi_3\left(\frac{h}{b}\right)$
1.0	0.67646	0.42145	1.605	0.62305
1.1	0.72153	0.46191	1.562	0.64020
1.25	0.77764	0.51544	1.509	0.66269
1.5	0.84717	0.58765	1.442	0.69348
1.75	0.89496	0.64310	1.392	0.71839
2.0	0.92780	0.68628	1.352	0.73965
2.5	0.96590	0.74823	1.291	0.77459
3	0.98389	0.79004	1.245	0.80321
4	0.99640	0.84250	1.183	0.84531
5	0.99920	0.87400	1.143	0.87489
10	1.00000	0.93700	1.067	0.93721
∞	1.00000	1.00000	1.000	1.00000

次にグラスホフの略式 (123) 乃至 (126) を茲に求めたる諸公式と比較せんに

$$g\left(\frac{h}{b}\right) = \frac{1.25}{1 + \left(\frac{b}{h}\right)^2} \dots\dots\dots (140)$$

$$g_1\left(\frac{h}{b}\right) = \frac{5}{6} \frac{1}{1 + \left(\frac{b}{h}\right)^2} = \frac{0.8333}{1 + \left(\frac{b}{h}\right)^2} \dots\dots\dots (141)$$

として、此の場合には

$$g^i\left(\frac{h}{b}\right) = \frac{1.25}{1 + \left(\frac{h}{b}\right)^2} = \left(\frac{b}{h}\right)^2 g\left(\frac{h}{b}\right),$$

$$g_2\left(\frac{h}{b}\right) = g\left(\frac{h}{b}\right) / g_1\left(\frac{h}{b}\right) = 1.500,$$

$$g_2^i\left(\frac{h}{b}\right) = g^i\left(\frac{h}{b}\right) / g_1\left(\frac{h}{b}\right) = \left(\frac{b}{h}\right)^2 g_2\left(\frac{h}{b}\right),$$

$$g_3\left(\frac{h}{b}\right) = g_1\left(\frac{h}{b}\right) / g\left(\frac{h}{b}\right) = 1 / g_2\left(\frac{h}{b}\right) = \frac{2}{3}$$

なるが故に、(123) 乃至 (126) 式を次の如く書き改むる事を得可し。

$$\tau_1 = G\theta b g\left(\frac{h}{b}\right) = \frac{3M_a}{b^2 h} \frac{g\left(\frac{h}{b}\right)}{g_1\left(\frac{h}{b}\right)} = \frac{1}{4} \frac{M_a}{I_1} b g_3\left(\frac{h}{b}\right) \dots (142)$$

$$\begin{aligned} \tau_2 &= G\theta h g'\left(\frac{h}{b}\right) = G\theta h \left(\frac{b}{h}\right)^2 g\left(\frac{h}{b}\right) \\ &= \frac{3M_a}{bh^2} \frac{g\left(\frac{h}{b}\right)}{g_1\left(\frac{h}{b}\right)} = \frac{1}{4} \frac{M_a}{I_2} h g_3\left(\frac{h}{b}\right) \end{aligned} \left. \dots (143) \right\}$$

$$\begin{aligned} M_a &= \frac{1}{3} G\theta b^2 h g_1\left(\frac{h}{b}\right) = 4G\theta I_1 g_1\left(\frac{h}{b}\right) \\ &= \frac{1}{3} \tau_1 b^2 h \frac{g_1\left(\frac{h}{b}\right)}{g\left(\frac{h}{b}\right)} = 4\tau_1 \frac{I_1}{b} g_3\left(\frac{h}{b}\right) \end{aligned} \left. \dots (144) \right\}$$

$$M_a \leq \frac{1}{3} k_s b^2 h g_3\left(\frac{h}{b}\right) \dots (145)$$

且つ此の解法に従へば (142), (143) 式を比較して

$$\tau_2 = \frac{b}{h} \tau_1 \dots (146)$$

即ち短邊の中點に於ける應力度 τ_2 は長邊の中點に於ける應力度 τ_1 に、邊長比の逆數 b/h を乘じたる積に等し。

第四表 グラスホフの扭力係數表

$\frac{h}{b}$	$g\left(\frac{h}{b}\right)$	$g_1\left(\frac{h}{b}\right)$	$g_2\left(\frac{h}{b}\right)$	$g_3\left(\frac{h}{b}\right)$
1.0	0.62500	0.41667	1.500	0.66667
1.1	0.68439	0.45626	1.500	0.66667
1.25	0.76220	0.50813	1.500	0.66667
1.5	0.86538	0.57692	1.500	0.66667
1.75	0.94231	0.62821	1.500	0.66667

2.0	1.00000	0.66667	1.500	0.66667
2.5	1.07759	0.71839	1.500	0.66667
3	1.12500	0.75000	1.500	0.66667
4	1.17647	0.78431	1.500	0.66667
5	1.20192	0.80128	1.500	0.66667
10	1.23762	0.82508	1.500	0.66667
∞	1.25000	0.83333	1.500	0.66667

第四表の値を第二表の値と對比すれば、グラスホフの略式が如何にサン・ヴナンの正解と相違する事の甚しきかを窺知する事を得可し。

材料の扭力試験に於て、最も肝要なる要素をなすものは、扭力率 M_d と最大應裁力度 τ_1 の關係、及び扭力率 M_d と單位扭力角 θ との關係にして、それらは既に本節に於て之が關係を示す公式を與へたれど、その詳論に至りては之を後章に譲る。

次に矩形軸の斷面に於ける應力の分布を研究せんは、グラスホフに従へば應力分布の状態次の如し。

1. y 軸に沿へる分布 (121) 式の第三式に於て $z=0$ と置けば、 $\tau_z = \frac{3}{4} \frac{M_d}{I_1} y$ 故に τ_z は y に正比例し、 $y = \pm b/2$ の場合に τ_z 最大にして (123) 式の第一式に與へたる τ_1 の値を取る。故に $\tau_z = 2\tau_1 y/b$

2. z 軸に沿へる分布 (121) 式の第一式に於て $y=0$ と置けば、 $\tau_y = -\frac{3}{4} \frac{M_d}{I_2} z$ 故に τ_y は z に正比例し、 $z = \pm h/2$ の場合に τ_y 最大にして (124) 式の第一式に與へたる τ_2 の値を取る。故に $\tau_y = 2\tau_2 z/h$

3. y 軸に平行なる短邊に沿へる分布 (121) 式の第一式に於て $z = \pm h/2$ と置けば、

$$\tau_y = \frac{3}{8} \frac{M_d}{I_2} h \left(1 - \frac{4y^2}{b^2}\right) = \tau_2 \left(1 - \frac{4y^2}{b^2}\right)$$

故に應力は短邊の中點 ($y=0$) に於て最大にして $\tau_y = \tau_2$ 、矩形の稜點 ($y = \pm b/2$) に於ては $\tau_y = 0$ 、而して τ_y は τ_2 より 0 に至る迄 拋物線形 に變化し、此の拋物線は邊の中點にその頂點を有することを知る。

4. z 軸に平行なる長邊に沿へる分布 (121) 式の第三式に於て $y = \pm b/2$ と置けば、

$$\tau_z = \frac{3}{8} \frac{M_d}{I_1} b \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) = \tau_1 \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right)$$

故に應力は長邊の中點 ($z=0$) に於て最大にして $\tau_z=\tau_1$, 矩形の稜點 ($z=\pm h/2$) に於ては $\tau_z=0$, 而して τ_z は τ_1 より 0 に至る迄拋物線形に變化し, 此の拋物線は邊の中點にその頂點を有することを知る。

5. 對角線に沿へる分布 (122) 式の第一式を取り, 此の場合には y, z は

$$\frac{y}{z} = \frac{b}{h} \quad \text{即ち} \quad y = \frac{b}{h} z$$

なる關係を保つて變化す可きが故に,

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{3}{8} \frac{M_d}{I_1} b \sqrt{\left(\frac{2z}{h}\right)^2 \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right)^2 + \left(\frac{b}{h}\right)^2 \left(\frac{2z}{h}\right)^2 \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right)^2} \\ &= \tau_1 \left(\frac{2z}{h}\right) \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) \sqrt{1 + \left(\frac{b}{h}\right)^2} \end{aligned}$$

故に τ は z に就て 3 次の曲線にして, 矩形の中心に於ては $z=0, \tau=0$, 稜點に於ては $z=\pm h/2, \tau=0$, 又上式を z に就て微分し, その結果を零と置けば

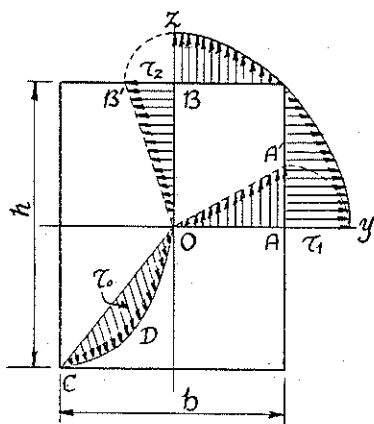
$$\frac{d\tau}{dz} = \frac{2\tau_1}{h} \sqrt{1 + \left(\frac{b}{h}\right)^2} \left[\left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) - \frac{8z^2}{h^2} \right] = 0,$$

$$1 - \frac{4z^2}{h^2} - \frac{8z^2}{h^2} = 1 - \frac{12z^2}{h^2} = 0, \quad \therefore z = \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{h}{2} = 0.577 \frac{h}{2}$$

即ち τ は z の此の値に對して最大値を有し, 之を τ に代入する時は

$$\tau_0 = \tau_1 \times 0.577 \times 0.667 \sqrt{1 + \left(\frac{b}{h}\right)^2} = 0.385\tau_1 \sqrt{1 + \left(\frac{b}{h}\right)^2} < \tau_1$$

τ の方向は (121) 式より, $y = bz/h$ として, $\tau_y/\tau_z = -b/h$ に依りて與へらる可し。



第三十四圖

第三十四圖は以上の結果を圖示したるものにして, 兩主軸 OA, OB 及び對角線 OC 上の圖形は應力度の大きさと同時に, その方向を示せども, 矩形の邊 AC, BC 上の圖形は單に應力度の大きさのみを示し, 方向は之を直角だけ左に廻轉して矩形の邊に切觸せしむるを要す。矩形の稜點 C に於て應力零なることは上記の解析的説明を俟たず, 應力は AC 上に於ては AC に切觸し, BC 上に於ては又 BC に切觸し, 且つ C は AC, BC の兩邊に屬する一點なるが故に,

應力が此の點に於て必然的に零ならざる可らざるは極めて明瞭なり。

此の場合にも圓形及び橢圓形斷面に就て説明せると同様に、任意の動徑上の應力面積は常に一定なることを要するが故に

$$\text{三角形 } OAA' = \text{三角形 } OBB' = \text{弓形 } OCD$$

次にサン・ヴナンの従へば、應力分布の状態は次の如し。

1. y 軸に沿へる分布 (35) 式の第一式を用ひ $z=0$ として

$$\tau_z = G\theta h \frac{8}{\pi^2} \sum \frac{(-1)^{n+1} \sinh(2n-1) \frac{\pi}{h} y}{(2n-1)^2 \cosh(2n-1) \frac{\pi}{2} \frac{b}{h}}$$

故に τ_z はグラスホフの解法の如く直線に非ずして指數函數曲線となり、 $y=0$ の場合に $\tau_z=0$ 、 $y=\pm b/2$ の場合に $\tau_z=\tau_1$

2. z 軸に沿へる分布 (34) 式の第二式を用ひ $y=0$ として

$$\tau_y = -G\theta b \frac{8}{\pi^2} \sum \frac{(-1)^{n+1} \sinh(2n-1) \frac{\pi}{b} z}{(2n-1)^2 \cosh(2n-1) \frac{\pi}{2} \frac{h}{b}}$$

即ち τ_y も亦指數函數曲線にして $z=0$ の場合に $\tau_y=0$ 、 $z=\pm h/2$ の場合に $\tau_y=\tau_2$

3. y 軸に平行なる短邊に沿へる分布 (34)式の第二式を用ひ $z=\pm h/2$ として

$$\tau_{yz} = -G\theta b \frac{8}{\pi^2} \sum \frac{(-1)^{n+1} \tanh(2n-1) \frac{\pi}{2} \frac{h}{b}}{(2n-1)^2} \cos(2n-1) \frac{\pi}{b} y$$

故に τ_{yz} はグラスホフの解法に於けるが如く拋物線に非ず、三角函數曲線にして $y=0$ の場合に $\tau_{yz}=\tau_3$ 、 $y=\pm b/2$ の場合に $\tau_{yz}=0$

4. z 軸に平行なる長邊に沿へる分布 (35) 式の第一式を用ひ $y=\pm b/2$ として

$$\tau_{xz} = G\theta h \frac{8}{\pi^2} \sum \frac{(-1)^{n+1} \tanh(2n-1) \frac{\pi}{2} \frac{b}{h}}{(2n-1)^2} \cos(2n-1) \frac{\pi}{h} z$$

同様に τ_{xz} は三角函數曲線にして $z=0$ の場合に $\tau_{xz}=\tau_4$ 、 $z=\pm h/2$ の場合に $\tau_{xz}=0$

5. 對角線に沿へる分布 (34) 式の第二式及び (35) 式の第一式を取り、之に $y=bz/h$ なる關係を入るゝ時は

$$\tau_y = -G\theta b \frac{8}{\pi^2} \sum \frac{(-1)^{n+1} \sinh(2n-1) \frac{\pi}{b} z \cos(2n-1) \frac{\pi}{h} z}{(2n-1)^2 \cosh(2n-1) \frac{\pi}{2} \frac{h}{b}}$$

$$\tau_z = G\theta h \frac{8}{\pi^2} \sum \frac{(-1)^{n+1} \sinh(2n-1) \frac{\pi}{h} y \cos(2n-1) \frac{\pi}{b} y}{(2n-1)^2 \cosh(2n-1) \frac{\pi}{2} \frac{b}{h}}$$

$$\tau = \sqrt{\tau_y^2 + \tau_z^2}$$

矩形の中心 ($y=0, z=0$) に於ては $\tau_y = \tau_z = 0$, 矩形の稜點 ($y = \pm b/2, z = \pm h/2$) に於ては $\tau_y = \tau_z = 0$.

應力分布の状態を瞭然たらしめんがために, $h=2b$ の場合を取りて τ_y, τ_z の値を計算せんに, (34), (35) 式より

$$\tau_y = -G\theta h \phi_1(y, z), \quad \phi_1(y, z) = -\frac{\tau_y}{G\theta h}$$

$$\tau_z = G\theta b \phi_2(y, z), \quad \phi_2(y, z) = \frac{\tau_z}{G\theta b}$$

と置けば, 函數 $\phi_1(y, z), \phi_2(y, z)$ の値次の如し。

第 五 表 函 數 $\phi_1(y, z)$ 但し $h=2b$ とす

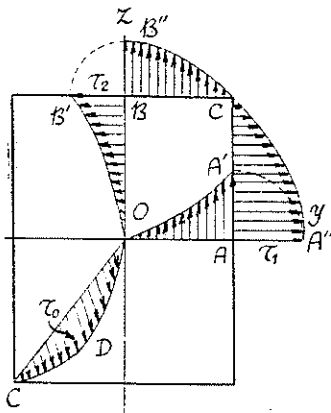
$\frac{z/h}{y/b}$	0	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
0	0	0.011	0.024	0.038	0.056	0.080	0.112	0.153	0.208	0.280	0.36973
0.05	0	0.011	0.023	0.037	0.055	0.079	0.110	0.152	0.206	0.277	0.36723
0.10	0	0.011	0.022	0.036	0.054	0.076	0.106	0.146	0.200	0.269	0.35972
0.15	0	0.010	0.021	0.034	0.050	0.072	0.100	0.138	0.189	0.257	0.34696
0.20	0	0.009	0.019	0.031	0.046	0.065	0.091	0.126	0.174	0.240	0.32859
0.25	0	0.008	0.017	0.027	0.040	0.057	0.080	0.112	0.155	0.217	0.30406
0.30	0	0.007	0.014	0.023	0.033	0.048	0.067	0.094	0.132	0.186	0.27214
0.35	0	0.005	0.011	0.018	0.026	0.037	0.052	0.073	0.104	0.152	0.23226
0.40	0	0.004	0.007	0.012	0.018	0.025	0.036	0.050	0.072	0.108	0.18086
0.45	0	0.002	0.004	0.006	0.009	0.013	0.018	0.026	0.037	0.057	0.11255
0.50	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

第 六 表 函 數 $\phi_2(y, z)$ 但し $h=2b$ とす

$\frac{y/b}{z/h}$	0	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
0	0	0.090	0.179	0.269	0.359	0.451	0.544	0.638	0.734	0.831	0.93006

0.05	0	0.089	0.178	0.267	0.357	0.448	0.541	0.635	0.730	0.828	0.92658
0.10	0	0.087	0.174	0.261	0.350	0.440	0.531	0.624	0.719	0.816	0.91577
0.15	0	0.084	0.168	0.253	0.339	0.426	0.515	0.607	0.700	0.796	0.89653
0.20	0	0.079	0.159	0.239	0.321	0.405	0.466	0.580	0.672	0.767	0.86689
0.25	0	0.073	0.146	0.220	0.296	0.375	0.456	0.541	0.630	0.723	0.82372
0.30	0	0.064	0.128	0.194	0.262	0.333	0.407	0.487	0.571	0.662	0.76229
0.35	0	0.052	0.105	0.159	0.215	0.275	0.340	0.411	0.488	0.574	0.67522
0.40	0	0.037	0.075	0.114	0.155	0.200	0.250	0.306	0.371	0.448	0.55022
0.45	0	0.020	0.039	0.060	0.082	0.107	0.134	0.167	0.208	0.262	0.36239
0.50	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

(イ) y 軸に沿へる τ_z の變化は第六表に於ける $z/h=0$ の横欄より之を求め可く、その最大値 $\phi_2(y, z)=0.93006$ は第二表に與へたる $h/b=2.0$ の場合の $f(h/b)$ の値と一致するを見る可し。(ロ) z 軸に沿へる τ_y の變化は第五表に於ける $y/b=0$ の横欄より之を求め可く、(ハ) y 軸に平行なる短邊に沿へる τ_y の變化は第五表に於ける $z/h=0.50$ の縦欄より、(ニ) z 軸に平行なる長邊に沿へる τ_z の變化は第六表に於ける $y/b=0.50$ の縦欄より之を求め。(ホ) 又對角線に沿へる τ_y, τ_z の變化は第五及び六表に於ける $y/b=z/h=0, y/b=z/h=0.05, y/b=z/h=0.10$ 等の對



第三十五圖

角線欄より之を求め可く、而して應力分布の状態は第三十五圖に示すが如く、 $A'O, B'O, A''C, B''C, CDO$ 等は何れも曲線にして、且つ此の場合にも $OB B', OAA', OCD$ 等の面積は相等し。

曲線 $A''C, B''C$ はグラスホフに従へば夫々

$$\tau_z = \tau_1 \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right), \quad \tau_y = \tau_2 \left(1 - \frac{4y^2}{b^2} \right)$$

にて表はさるゝ拋物線なりしが、サン・ヴナンに従へば前述の如き三角函數曲線なり。此の三角函數曲線の代りに近似的略式として拋物線の假定を採用する

ときは、パッハに従つて次の方程式を得。

$$\tau_z = \tau_1 \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^{\frac{h}{b} + 1} \right], \quad \tau_y = \tau_2 \left[1 - \left(\frac{2y}{b} \right)^{\frac{h}{b} + 1} \right] \dots \dots (147)$$

例へば $h=2b$ として、 $y/b=z/h=0.25$ を取りて (147) 式より計算する時は

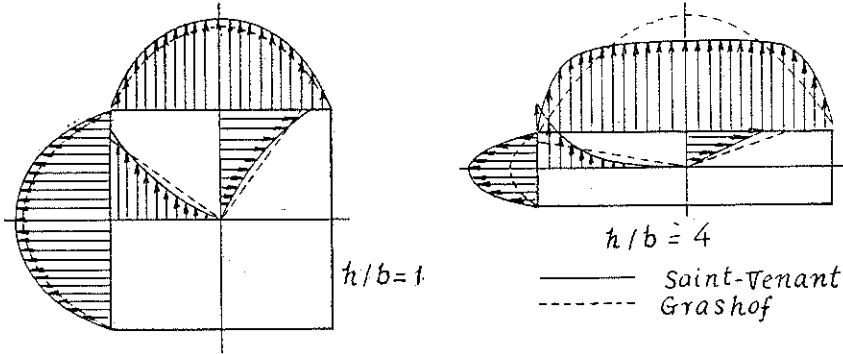
$$\frac{\tau_2}{\tau_1} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0.875, \quad \frac{\tau_u}{\tau_2} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0.875$$

然るに第六表より $\frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{0.82372}{0.93006} = 0.886,$

又第五表より $\frac{\tau_u}{\tau_2} = \frac{0.30406}{0.36973} = 0.823$

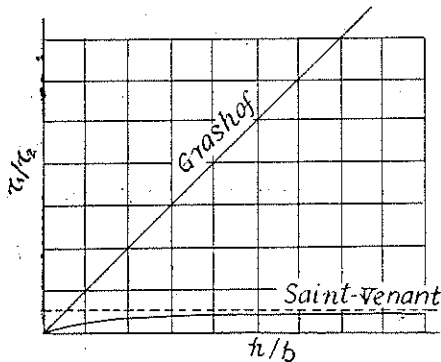
故に (147) 式を用ふる場合には少なからざる誤差を生ずるを見る可し。

最後にサン・ヴナンの正解に依る應力分布と、グラスホフの略解に依る應力分布とを對照的に圖示すれば第三十六圖を得可く、左圖は $h/b=1$, 右圖は $h/b=4$ の



第 三 十 六 圖

場合を示し、實線はサン・ヴナン、破線はグラスホフを表はす。而して h/b に對する τ_1/τ_2 の關係は、グラスホフに依れば (124) 式より直線となり、サン・ヴナンに



第 三 十 七 圖

依れば (130), (131) 式より一種の曲線となる可く、之を圖示すれば第三十七圖の如し。即ちグラスホフに従へば、 τ_1/τ_2 は h/b の増大するに従つて直線的に増大し、サン・ヴナンに従へば、 τ_1/τ_2 は h/b の増大するに従つて曲線的に増大し、漸近的にその最大値 $(\tau_1/\tau_2)_{max} = 1.347$ に近づく。

サン・ヴナンの此曲線に對する漸近線 (Asymptote, l'asymptote, dis Asymptote) を

求むる方法は次の如し。(128) 乃至 (131) 式により、 $h/b = \infty$ と置けば

$$\tau_1/\tau_2 = x \frac{\sum \frac{(-1)^{n+1} \tanh(2n-1) \frac{\pi}{2} \frac{1}{x}}{(2n-1)^2}}{\sum \frac{(-1)^{n+1} \tanh(2n-1) \frac{\pi}{2} x}{(2n-1)^2}}$$

然るに $x \rightarrow \infty$ なる時の極限值に於て, $\tanh(1/\zeta) \doteq 1/\zeta$, $\tanh \zeta = 1$ なるが故に

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\tau_1}{\tau_2} \right) &= \frac{\lim x \sum \frac{(-1)^{n+1} \tanh(2n-1) \frac{\pi}{2} \frac{1}{x}}{(2n-1)^2}}{\lim \sum \frac{(-1)^{n+1} \tanh(2n-1) \frac{\pi}{2} x}{(2n-1)^2}} \\ &= \frac{x \sum \frac{(-1)^{n+1} (2n-1) \frac{\pi}{2} \frac{1}{x}}{(2n-1)^2}}{\sum \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}} = \frac{\frac{\pi}{2} \sum \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)}}{\sum \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}} \end{aligned}$$

而して此の最後の式の分子の無限級数は収斂級数 (Convergent series, la série convergente, die konvergente oder konvergierende Reihe) にして

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$$

又分母の無限級数も収斂級数にして

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2} = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \dots \doteq 0.91585$$

$$\therefore \lim (\tau_1/\tau_2) = \frac{\pi^2}{8} \frac{1}{0.91585} \doteq 1.347$$

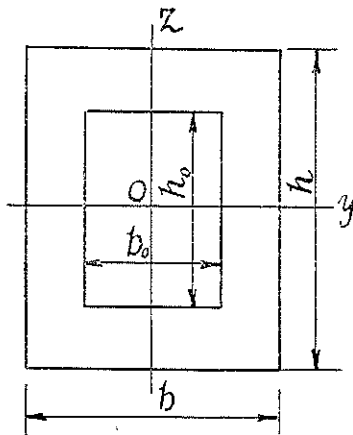
是れ即ち漸近線の方程式なり。

(□) 矩形中空断面の軸

内外の矩形は相似同心矩形とす。即ち $b_0 = mb$, $h_0 = mh$ とすれば, グラスホフに依り

$$I_1 = \frac{b^3 h - b_0^3 h_0}{12} = \frac{1}{12} (1 - m^4) b^3 h,$$

$$I_2 = \frac{b h^3 - b_0 h_0^3}{12} = \frac{1}{12} (1 - m^4) b h^3$$



第三十八圖

として (121) 乃至 (126) 式の代りに次式を得。

$$\left. \begin{aligned} \tau_y &= -\frac{9M_a}{(1-m^4)bh^2} z \left(1 - \frac{4y^2}{b^2}\right) = -\frac{3}{4} \frac{M_a}{I_2} z \left(1 - \frac{4y^2}{b^2}\right) \\ \tau_z &= \frac{9M_a}{(1-m^4)b^3h} y \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) = \frac{3}{4} \frac{M_a}{I_1} y \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) \end{aligned} \right\} \dots\dots (148)$$

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{9}{2} \frac{M_a}{(1-m^4)b^2h} \sqrt{\left(\frac{2y}{b}\right)^2 \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right)^2 + \left(\frac{b}{h}\right)^2 \left(\frac{2z}{h}\right)^2 \left(1 - \frac{4y^2}{b^2}\right)^2} \\ &= \frac{3}{8} \frac{M_a}{I_1} b \sqrt{\left(\frac{2y}{b}\right)^2 \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right)^2 + \left(\frac{b}{h}\right)^2 \left(\frac{2z}{h}\right)^2 \left(1 - \frac{4y^2}{b^2}\right)^2} \dots (149) \end{aligned}$$

$$\tau_1 = 4.5 \frac{M_a b}{(1-m^4)b^2h} = \frac{3}{8} \frac{M_a}{I_1} b \dots\dots\dots (150)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_2 &= 4.5 \frac{M_a h}{(1-m^4)b^2h} = \frac{3}{8} \frac{M_a}{I_2} h \\ &= \left(\frac{b}{h}\right) \tau_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (151)$$

$$M_a = \frac{2}{9} \tau_1 (1-m^4)b^2h = \frac{8}{3} \frac{I_1 \tau_1}{b} \dots\dots\dots (152)$$

$$M_a \leq \frac{2}{9} k_s (1-m^4)b^2h \dots\dots\dots (153)$$

(ハ) 正方形充断面の軸

此の場合には $b=h$ としてグラスホフの (121) 乃至 (126) 式の代りに次式を得可し。 $I_1=I_2=\frac{b^4}{12}$ として

$$\left. \begin{aligned} \tau_y &= -\frac{9M_a}{b^4} z \left(1 - \frac{4y^2}{b^2}\right) = -\frac{3}{4} \frac{M_a}{I_1} z \left(1 - \frac{4y^2}{b^2}\right) \\ &= -1.25 G\theta z \left(1 - \frac{4y^2}{b^2}\right) \\ \tau_z &= \frac{9M_a}{b^4} y \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) = \frac{3}{4} \frac{M_a}{I_1} y \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) \\ &= 1.25 G\theta y \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (154)$$

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{9}{2} \frac{M_a}{b^3} \sqrt{\left(\frac{2y}{b}\right)^2 \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right)^2 + \left(\frac{2z}{h}\right)^2 \left(1 - \frac{4y^2}{b^2}\right)^2} \\ &= \frac{1.25}{2} G\theta b \sqrt{\left(\frac{2y}{b}\right)^2 \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right)^2 + \left(\frac{2z}{h}\right)^2 \left(1 - \frac{4y^2}{b^2}\right)^2} \dots\dots\dots (155) \end{aligned}$$

$$\tau_1 = 4.5 \frac{M_a}{b^3} = \frac{3}{8} \frac{M_a}{I_1} b = \frac{1.25}{2} G\theta b \dots\dots\dots(156)$$

$$\tau_2 = \tau_1 \dots\dots\dots(157)$$

$$M_a = \frac{2}{9} \tau_1 b^3 = \frac{8}{3} \frac{I_1 \tau_1}{b} = \frac{5}{36} G\theta b^4 = \frac{5}{3} G\theta I_1 \dots\dots\dots(158)$$

$$M_a \leq \frac{2}{9} k_s b^3 \dots\dots\dots(159)$$

此の場合の對角線上の應力の大きさは (155) 式に於て $y=z$ として、 y 又は z に就ての 3 次の曲線にて表はされ、且つその方向は對角線に垂直なり。

又サン・ヴナンの解法に従へば、(130) 乃至 (133) 式を用ひて第二表より

$$\tau_1 = \tau_2 = 0.67531 G\theta b = 4.803 \frac{M_a}{b^3} = 0.400 \frac{M_a}{I_1} b \dots\dots\dots(160)$$

$$M_a = 0.14058 G\theta b^4 = 1.68692 G\theta I_1 = 0.20817 \tau_1 b^3 = 2.49804 \frac{\tau_1 I_1}{b} \dots\dots(161)$$

$$M_a \leq 0.20817 k_s b^3 \dots\dots\dots(162)$$

又ゴッペの解法に従へば (136) 乃至 (139) 式を用ひて

$$\tau_1 = \tau_2 = 0.67646 G\theta b = 4.815 \frac{M_a}{b^3} = 0.401 \frac{M_a}{I_1} b \dots\dots\dots(163)$$

$$M_a = 0.14048 G\theta b^4 = 1.68580 G\theta I_1 = 0.20767 \tau_1 b^3 = 2.49208 \frac{\tau_1 I_1}{b} \dots\dots(164)$$

$$M_a \leq 0.20767 k_s b^3 \dots\dots\dots(165)$$

(二) 正方形中空断面の軸

内外の正方形は同心とす。 $b_0 = mb$ として (148) 乃至 (153) 式の代りに次式を得。

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{12} (b^4 - b_0^4) = \frac{1}{12} (1 - m^4) b^4$$

$$\tau_y = - \frac{9M_a}{(1 - m^4) b^4} z \left(1 - \frac{4y^2}{b^2} \right) = - \frac{3}{4} \frac{M_a}{I_1} z \left(1 - \frac{4y^2}{b^2} \right) \dots\dots\dots(166)$$

$$\tau_z = \frac{9M_a}{(1 - m^4) b^4} y \left(1 - \frac{4z^2}{b^2} \right) = \frac{3}{4} \frac{M_a}{I_1} y \left(1 - \frac{4z^2}{b^2} \right) \dots\dots\dots(167)$$

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{9}{2} \frac{M_d}{(1-m^4)b^2} \sqrt{\left(\frac{2y}{b}\right)^2 \left(1 - \frac{4z^2}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{2z}{b}\right)^2 \left(1 - \frac{4y^2}{b^2}\right)^2} \\ &= \frac{3}{8} \frac{M_d}{I_1} b \sqrt{\left(\frac{2y}{b}\right)^2 \left(1 - \frac{4z^2}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{2z}{b}\right)^2 \left(1 - \frac{4y^2}{b^2}\right)^2} \dots\dots\dots (168) \end{aligned}$$

$$\tau_1 = 4.5 \frac{M_d}{(1-m^4)b^2} = \frac{3}{8} \frac{M_d}{I_1} b \dots\dots\dots (169)$$

$$\tau_2 = \tau_1 \dots\dots\dots (170)$$

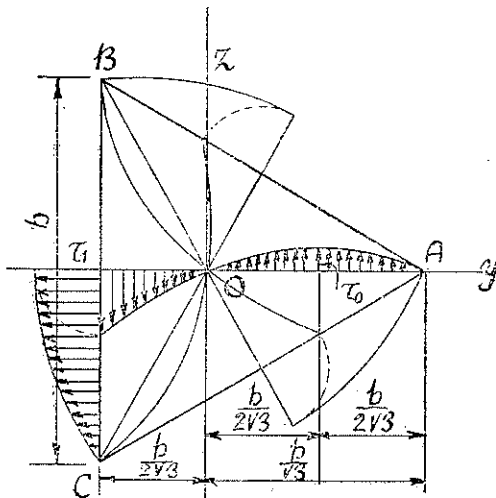
$$M_d = \frac{2}{9} \tau_1 (1-m^4)b^2 = \frac{8}{3} \frac{I_1 \tau_1}{b} \dots\dots\dots (171)$$

$$M_d \leq \frac{2}{9} k_s (1-m^4)b^2 \dots\dots\dots (172)$$

第 四 節 正多角形断面の軸

(イ) 正三角形断面の軸

$$\left. \begin{aligned} \tau_y &= -G\theta \left[z + \frac{2\sqrt{3}yz}{b} \right] \\ &= -46.2 \frac{M_d}{b^4} \left[z + \frac{2\sqrt{3}yz}{b} \right] = -0.833 \frac{M_d}{I_1} \left[z + \frac{2\sqrt{3}yz}{b} \right] \\ \tau_z &= G\theta \left[y - \frac{\sqrt{3}(y^2-z^2)}{b} \right] \\ &= 46.2 \frac{M_d}{b^4} \left[y - \frac{\sqrt{3}(y^2-z^2)}{b} \right] = 0.833 \frac{M_d}{I_1} \left[y - \frac{\sqrt{3}(y^2-z^2)}{b} \right] \end{aligned} \right\} (173)$$



第 三 十 九 圖

最大應力は軸の重心より最も近き點に起るが故に、三角形の邊の中點に起る。第三十九圖に於て、 $y = -b/(2\sqrt{3})$ 、 $z = 0$ は三角形の邊の中點の一つを表はし、此の値に對しては (173) 式より

$$\begin{aligned} \tau_y &= 0, \\ \tau_z &= G\theta \left[-\frac{b}{2\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}b}{12} \right] \\ &= -0.433 G\theta b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \tau_1 &= 0.433 G\theta b \\ &= 20 \frac{M_d}{b^3} = 0.36 \frac{M_d}{I_1} b \dots (174) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} M_a &= \frac{G\theta b^4}{46.2} = 1.2 G\theta I_1 \\ &= \frac{\tau_1 b^3}{20} = 2.77 \frac{I_1 \tau_1}{b} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (175)$$

此等の値はサン・ヴナンの解法よりも、亦ヘルマンの解法よりも同様に求められる。而して

$$M_a \leq \frac{k_s b^3}{20} \dots\dots\dots (176)$$

次に應力の分布を研究せんは、 y 軸に沿へる應力度は (173) 式に於て、 $z=0$ とせば、 $\tau_y=0$ にして、 $\tau_z = G\theta \left[y - \frac{\sqrt{3}}{b} y^2 \right]$

即ち τ_z は y に就て 2 次の曲線にして、 $y = -b/(2\sqrt{3})$ の場合に $\tau_z = \tau_1$ (最大) となり、 $y=0$ の場合に $\tau_z=0$ 、而して τ_z の符號は軸の重心 O を境として、その左右に於ては互に相反し、 $y = b/\sqrt{3}$ (三角形の頂點) の場合に再び $\tau_z=0$ となる。
 $0 \leq y \leq b/\sqrt{3}$ の間に於ける τ_z の最大値 τ_0 を求むれば

$$\frac{d\tau_z}{dy} = G\theta \left[1 - \frac{2\sqrt{3}}{b} y \right] = 0, \quad \therefore y = \frac{b}{2\sqrt{3}}$$

即ち AO の中點に於て τ_z 最大となり、此の時の τ_z の値、即ち τ_0 は

$$\tau_0 = G\theta \left[\frac{b}{2\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{b} \frac{b^2}{12} \right] = 0.144 G\theta b = -\frac{1}{3} \tau_1$$

即ち τ_0 は τ_1 の値の $1/3$ とす。此の應力分布の關係は、三角形の 3 中線の何れに對しても成立す。又三角形の邊に沿へる應力度は (173) 式に於て $y = -b/(2\sqrt{3})$ とせば、 $\tau_y=0$ にして

$$\tau_z = G\theta \left[-\frac{b}{2\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{b} \frac{b^2}{12} + \frac{\sqrt{3}}{b} z^2 \right] = -\frac{\sqrt{3}}{4} G\theta b \left[1 - \frac{4z^2}{b^2} \right]$$

τ_z は同様に z に就ての 2 次曲線にして、 $z=0$ の場合には $\tau_z = \tau_1$ 、之より漸減して $z = \pm b/2$ (三角形の頂點) の場合に $\tau_z=0$ 、

此の應力分布の關係は三角形の 3 邊の何れに對しても成立す。第三十九圖は三角形の邊及び中線に沿へる應力分布を圖示したるものにして、その方向は前者に就ては邊に接觸し、後者に就ては中線に垂直なること勿論とす。

(ロ) 正方形断面の軸

此の場合は既に前節に於て取扱へる所の如し。

(ハ) 正六角形断面の軸

ヘルマンに従へば前記の如く

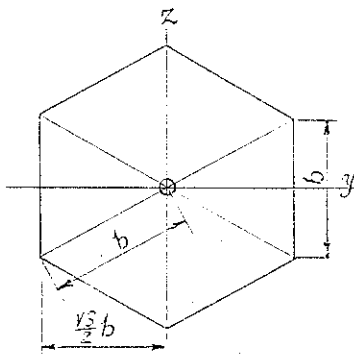
$$\left. \begin{aligned} \tau_y &= \frac{rM_d}{D} \left[\sum A_n \rho^{n\sigma-1} \sin(n-1)\varphi - \rho \sin\varphi \right] \\ \tau_z &= \frac{rM_d}{D} \left[\sum A_n \rho^{n\sigma-1} \cos(n-1)\varphi + \rho \cos\varphi \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots(177)$$

最大應力は正多角形の邊の中點に起り、此の點に就ては $\varphi=0$, $\rho=\cos\alpha$ なるが故に $\tau_y=0$ にして、

$$\tau_z = \frac{rM_d}{D} \left[\cos\alpha + \sum A_n \cos^{n\sigma-1}\alpha \right] = \tau_1$$

多項式の項数を 3 に限定し、且つ $r \cos\alpha = a$ なる関係を入れる時は

$$\tau_1 = \frac{aM_d}{D} \left[1 + A_1 \cos^{\sigma-2}\alpha + A_2 \cos^{2\sigma-2}\alpha + A_3 \cos^{3\sigma-2}\alpha \right] \dots\dots(178)$$



第四十圖

正六角形に對しては曩きに求めたるが如く、
 $\sigma=6$, $r=b$, $a=\sqrt{3}b/2$, $\alpha=30^\circ$ として、 $D=1.03b^4$,

$$A_1=0.4598, \quad A_2=-0.1736, \quad A_3=0.3666$$

を得可く、而して (50) 式より $M_d=G\theta D$ なるが故に、此等の関係を (178) 式に代入する時は次式を得。

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= 1.127 G\theta b \\ &= 1.09 \frac{M_d}{b^3} = 0.59 \frac{M_d}{I_x} b \end{aligned} \right\} \dots\dots(179)$$

$$\left. \begin{aligned} M_d &= 1.03 G\theta b^4 \\ &= 0.917 \tau_1 b^3 = 1.694 \frac{I_x \tau_1}{b} \end{aligned} \right\} \dots\dots(180)$$

$$M_d \leq 0.917 k_s b^3 \dots\dots(181)$$

ウエーバアの解法に従へば、最大應力は多角形の邊の中點、即ち $\varphi=0$, $\rho=r_m$ の場合に起るが故に、(97) 式を用ひ

$$\tau_1 = \left(\frac{\partial K}{\partial \rho} \right)_{\substack{\rho=r_m \\ \varphi=0}} = G\theta r_m \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{n C_n}{n!} + \frac{2n C_{2n}}{(2n)!} + \frac{3n C_{3n}}{(2n)!} + \dots \right) \right]$$

$$= G\theta r_m \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{C_n}{(n-1)!} + \frac{C_{2n}}{(2n-1)!} + \frac{C_{3n}}{(3n-1)!} + \dots \right) \right] \dots (182)$$

次に動徑 ρ に垂直なる分應力は $\tau_n = \partial K / \partial \rho$ より之を求め得可く、微分面積 $df = dy dz$ に關する應力の力率は $dM = \tau_n \rho df$ にして、多角形は之を $2n$ 個の同一部分に分割し得るが故に、次の關係あり。

$$\tau_n = \frac{\partial K}{\partial \rho} = \frac{1}{2} G\theta r_m^2 \left\{ \frac{2\rho}{r_m^2} + \frac{C_n}{(n-1)!} \frac{\rho^{n-1}}{r_m^n} \cos n\varphi + \frac{C_{2n}}{(2n-1)!} \frac{\rho^{2n-1}}{r_m^{2n}} \cos 2n\varphi + \dots \right\}$$

$$M_a = 2n \int_0^{r_m} dy \int_0^{\tan \frac{\pi}{n}} \frac{1}{2} G\theta r_m^2 \left\{ \frac{2\rho^2}{r_m^2} + \frac{C_n}{(n-1)!} \frac{\rho^n}{r_m^n} \cos n\varphi + \frac{C_{2n}}{(2n-1)!} \frac{\rho^{2n}}{r_m^{2n}} \cos 2n\varphi + \dots \right\} dz$$

$\rho^2, \rho^n \cos n\varphi$ 等を y, z の項に書き改め、上式を積分する時は、 F を多角形の面積として、 $F = r_m^2 n \tan(\pi/n)$ なるが故に

$$M_a = G\theta r_m^2 F \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{3} \tan^2 \frac{\pi}{n} \right) - \left\{ \frac{n C_n}{(n+2)!} \sec^n \frac{\pi}{n} - \frac{2n C_{2n}}{(2n+2)!} \sec^{2n} \frac{\pi}{n} + \frac{3n C_{3n}}{(3n+2)!} \sec^{3n} \frac{\pi}{n} - \dots \right\} \right] \dots (183)$$

第三章第七節に於けるが如く、係数 C_n, C_{2n} 等の數を 5 個に限定して、正六角形の場合に τ_1, M_a の値を計算すれば、 $\tau_1 = 1.223 G\theta r_m, M_a = 0.5331 G\theta r_m^2 F$

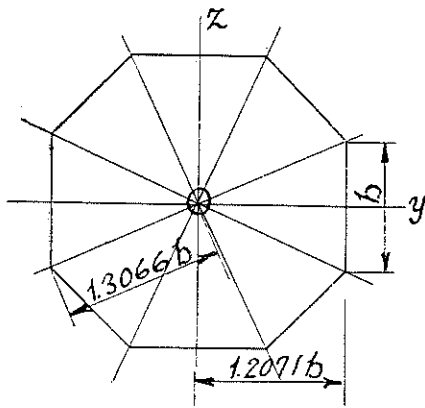
然るに此の場合には、 $r_m = \sqrt{3} b/2 = 0.866 b, F = 3\sqrt{3} b^2/2 = 2.598 b^2$ なるが故に

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= 1.059 G\theta b \\ &= 1.02 \frac{M_a}{b^3} = 0.55 \frac{M_a}{I_1} b \end{aligned} \right\} \dots (184)$$

$$\left. \begin{aligned} M_a &= 1.039 G\theta b^4 \\ &= 0.980 \tau_1 b^3 = 1.818 \frac{I_1 \tau_1}{b} \end{aligned} \right\} \dots (185)$$

(二) 正八角形断面の軸

前章第八節に於て計算せる諸係數を (178) 式に代入する時は、ヘルマンの解法として次の如き結果を得可し。



第四十一圖

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= 1.4984 G\theta b \\ &= 0.4120 \frac{M_a}{b^3} = 0.766 \frac{M_a}{I_1} b \end{aligned} \right\} \dots (186)$$

$$\left. \begin{aligned} M_a &= 3.6365 G\theta b^4 \\ &= 2.427 \tau_1 b^3 = 1.305 \frac{I_1 \tau_1}{b} \end{aligned} \right\} \dots (187)$$

$$M_a \leq 2.427 k_s b^3 \dots (188)$$

此等の値に對し、ウエエバアの解法に依る結果は次の如し。

$$\tau_1 = 1.164 G\theta r_m, \quad M_a = 0.5202 G\theta r_m^2 F$$

之に $r_m = 1.2071 b$, $F = 4.8284 b^2$ なる値を代入する時は

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= 1.417 G\theta b \\ &= 0.3872 \frac{M_a}{b^3} = 0.720 \frac{M_a}{I_1} b \end{aligned} \right\} \dots (189)$$

$$\left. \begin{aligned} M_a &= 3.6598 G\theta b^4 \\ &= 2.583 \tau_1 b^3 = 1.389 \frac{I_1 \tau_1}{b} \end{aligned} \right\} \dots (190)$$

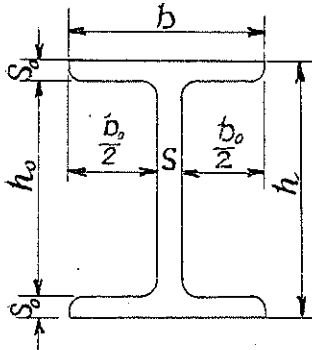
ウエエバアの解法、ヘルマンの解法は共に略解にして、多項式の項數を任意に限定する便法を採用せるが故に、その結果に於ても兩者は必ずしも符合せず。上記の公式が示すが如く、その間に可なりの差違を示すを見る可し。

猶上記の如き略解の結果として、ヘルマンの公式及びウエエバアの公式は、軸の斷面に於ける應力分布の状態を圖示するがために使用し難きは、説明を須ひずして明らかなり。

第五節 その他の斷面の軸

(イ) I 字斷面の軸

バックはシュツットガルト材料試験所に於ける鑄鐵軸に關する實驗の結果、グラスホフの矩形斷面に對する公式 (123) 及び (125) の各第一式を基調として、I 字斷面、十字斷面、 \square 字斷面及び L 字斷面の軸に對して、次の如き公式を誘導したり。(Bach: Versuche über Drehungsfestigkeit, Zeitschrift des V. d. I., 1889, S. 137 und S. 162; Elastizität und Festigkeit, 1924, S. 372 u. f.)



第四十二圖

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= 4.5 \frac{M_a}{s^2 l} \\ M_a &= \frac{2}{9} \tau_1 s^2 l \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(191)$$

茲に s は上記の断面に於ける突縁部及び幹部の厚さ、 l は突縁部及び幹部の長さの總和を表はす。

(191) 式は軸の破壊扭力率及び材料の破壊應力度、即ち突縁部の端に龜裂を生じたる刹那の應力度を基礎として誘導せられたる公式なるが故に、物體破壊の刹那に於てはフックの法則の適用し難き事實を考ふる時は、此の公式の理論的價値の高下は自ら明らかなる可し。

若し突縁部の幅と幹部の幅とが同一ならざる時は、(191) 式の代りに

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= 4.5 \frac{M_a}{\sum s^2 l} \\ M_a &= \frac{2}{9} \tau_1 \sum s^2 l \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(191_1)$$

茲に l は突縁部又は幹部の個々の長さにして、互に重複するを許さざるものとす。第四十二圖の如き I 字断面に對しては $s=s_0$ の場合には、(191) 式より

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= 4.5 \frac{M_a}{s^2(h+2b_0)} \\ M_a &= \frac{2}{9} \tau_1 s^2(h+2b_0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(192)$$

s と s_0 とが同一ならざる場合には、(191₁) 式より

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= 4.5 \frac{M_a}{s^2 h + 2s_0^2 b_0} \\ M_a &= \frac{2}{9} \tau_1 (s^2 h + 2s_0^2 b_0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(192_1)$$

此等の公式の適否に關する數字的證明をバッハの實驗に求むれば次の如し。但し (192) 式の第二式を使用して破壊扭力率を算出する場合の破壊應力度は、同一の材料による $b=1.66 \text{ cm}$ 、 $h=15.13 \text{ cm}$ 、即ち邊長比 $h/b=9$ の矩形断面の鑄鐵軸に對し、(123) 式即ち $\tau_1=4.5 M_a/(b^2 h)$ を使用して算出せる破壊應力度 $\tau_1=2,500 \text{ cm}^2$ を使用したるものとす。

第七表 I 字断面鑄鐵軸に関する實驗

$\frac{h}{b}$	寸 法 (cm)					破壊扭力率 (kg cm)	
	b	h	b_0	h_0	s	實驗	公式 (192)
1.5	10.3	15.2	8.7	12.0	1.6	46,500	46,360
3	5.0	15.1	3.4	11.9	1.6	32,500	31,150
6	2.5	15.1	0.9	12.0	1.6	25,250	24,040

(123) 式及び (125) 式の如きグラスホフの公式の適否如何は姑く論ぜず、上記 (191) 乃至 (192₁) の如き公式は、 s 又は s_0 が h 又は b に比して著しく小さき場合換言すれば、軸の断面が狭長矩形を以て組成せられたる場合の外は、之を適用すること能はざるものとす。

フエッブルはミュンヘン材料試験所に於ける展鋼 (Rolled steel, le fer laminé, das Walzeisen) 軸に関する實驗の結果、後に與ふるサン・ヴナンの公式を基調として

$$\left. \begin{aligned} J &= \frac{1}{3} \sum s^3 l \\ M_a &= \eta G \theta J = \frac{1}{3} \eta G \theta \sum s^3 l \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (193)$$

の如き公式を制定したり。(A. Föppl: Ueber den elastischen Verdrehungswinkel eines Stabes, *Die Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie der Wissenschaften*, Jahrgang 1917, S. 5; Versuche über die Verdrehungsfestigkeit der Walzeisenträger, *Die Sitzungsber. der Bayer. Akad. der Wissenschaften*, Jahrgang 1921, S. 295; Verdrehversuche mit Stäben von kreuzförmigem Querschnitt, *Zeitschrift des V. d. I.*, 1922, s. 827; Vorlesungen über technischen Mechanik, Bd. 5, 1922, S. 163 u. f.)

茲に s 及び l は (191₁) 式に使用せると同一の意味を有し、 η は断面形状に依りて異なる係数とす。而して (134), (135) 式に依り、矩形の幅 b が高さ h に比して著しく小なる場合には $f(h/b) = \varphi(h/b) \doteq 1$, $f_1(h/b) = \varphi_1(h/b) \doteq 1 - 0.63 b/h$ なるが故に (130), (136) の第二式より

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \frac{3 M_a}{b^2 h \left(1 - 0.63 \frac{b}{h}\right)} \\ \therefore M_a &= \frac{1}{3} \tau_1 b^2 h \left(1 - 0.63 \frac{b}{h}\right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (194)$$

今 $\xi = 1 - 0.63 b/h$ と置く時は (194) 式を書き改めて

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \frac{3M_a}{\zeta s^2 l} \\ M_a &= \frac{1}{3} \zeta \tau_1 s^2 l \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (194_1)$$

I 字断面，十字断面等を，之を組成する狭長なる矩形に分割して考へ，此等の矩形の幅，長さ，之に起る最大應力度，之の支ふる扭力率を夫々， s' ， l' ， τ_1' ，及び M_a' を以て表はす時は (194₁) 式の第一式より

$$\tau_1' = \frac{3M_a'}{\zeta s'^2 l'}$$

而して (193) 式より $M_a' = (1/3) \eta G \theta s'^2 l'$ なる關係を誘導し得るが故に

$$M_a' = \frac{s'^2 l'}{\sum s^2 l} M_a, \quad \therefore \tau_1' = \frac{3M_a s'}{\zeta \sum s^2 l}$$

故に軸の最大應力度は幅 s の最大なる條片 (之を s_1 とす) の部分に起り，之を τ_1 を以て表はせば

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \frac{3M_a s_1}{\zeta \sum s^2 l} \\ M_a &= \frac{1}{3} \zeta \tau_1 \frac{\sum s^2 l}{s_1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (195)$$

従つて

狭長矩形の場合には，フエッフルは $\zeta = 1 - 0.63 b/h \doteq 1$ と置き，(195) 式の代りに

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \frac{3M_a s_1}{\sum s^2 l} \\ M_a &= \frac{1}{3} \tau_1 \frac{\sum s^2 l}{s_1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (195_1)$$

の如き公式を與ふ。之をバツハの公式 (191₁) と比較せば，その係數に於て著しき相違ありと雖も，その軟鋼 (Mild steel, le fer fondu, das Flusszeisen) に依る實驗に於ては (192₁) 式の第二式に於て，2/9 の係數の代りに 1/3 を使用す可きことは，バツハも既に之を説けり。

(193), (195₁) 式を I 字断面に適用せば，後述の如く此の場合には，フエッフルの實驗の結果 $\eta = 1.30$ なるが故に， $s = s_0$ の場合には

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \frac{3M_a}{s^2(h+2b_0)} \\ M_a &= \frac{1.30}{3} G\theta(h+2b_0)s^2 \\ &= \frac{1}{3} \tau_1 s^2(h+2b_0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (196)$$

$s_0 > s$ の場合には

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \frac{3M_a s_0}{s^2 h + 2s_0^3 b_0} \\ M_a &= \frac{1.30}{3} G\theta (s^2 h + 2s_0^3 b_0) \\ &= \frac{1}{3} \tau_1 \frac{s^2 h + 2s_0^3 b_0}{s_0} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (196_1)$$

此等の断面の軸に対するウエエバアの解法は、同様にサン・ヴナンの公式(41)及び(130)式より出發したるものにして、 h/b が相當に大なる範圍内に於ては、 $f(h/b) \doteq 1$ なるが故に

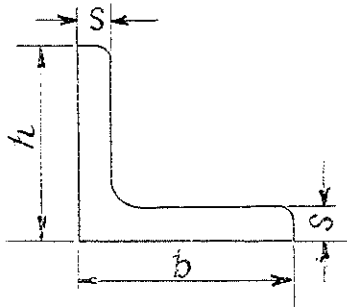
$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= G\theta s \\ M_a &= \frac{1}{3} G\theta s^2 l_c \\ &= \frac{1}{3} s^2 l_c \tau_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (197)$$

ウエエバアは此の l_c を理論的邊長と稱し、狹長矩形の場合には

$$l_c = \zeta l = l(1 - 0.63 s/l) = l - 0.63 s$$

と置く。而して I 字断面に対するウエエバアの公式は、

$$l_c = h + 2b - 1.2 s \dots\dots\dots (198)$$



第四十三圖

(ロ) L 字断面の軸

バツハの(191)式に依る時は

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= 4.5 \frac{M_a}{s^2(b+h-s)} \\ M_a &= \frac{2}{9} \tau_1 s^2(b+h-s) \end{aligned} \right\} \dots\dots (199)$$

L 字断面の鑄鐵軸に関するバツハの實驗は次の如し。

第八表 L 字断面鑄鐵軸に関する實驗

$\frac{h}{b}$	寸 法 (cm)			破壊扭力率 (kg cm)	
	b	h	s	實驗	公式(199)
1.9	10.2	10.3	2.15	47,350	47,120
1.7	6.3	10.4	2.15	37,750	37,370
1.7	6.0	10.3	2.10	35,000	34,790

L 字断面に対するフェップルの實驗は、 $\eta \doteq 1.0$ なるが故に、(193), (195₁) 式を

用ひて

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \frac{3M_a}{s^2(h+b-s)} \\ M_a &= \frac{1}{3} G\theta s^2(h+b-s) \\ &= \frac{1}{3} \tau_1 s^2(h+b-s) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(200)$$

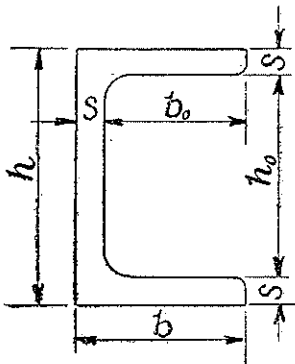
又此の場合のウエーバアの公式は、(197) 式を使用し

$$l_c = h + b - 1.6s \dots\dots\dots(201)$$

(ハ) □ 字断面の軸

バツハの (191) 式に依る時は

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= 4.5 \frac{M_a}{s^2(h+2b_0)} \\ M_a &= \frac{2}{9} \tau_1 s^2(h+2b_0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(202)$$



第四十四圖

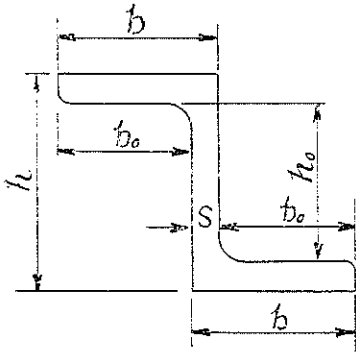
□ 字断面の鑄鐵軸に関するバツハの實驗は次の如し。

第九表 □ 字断面鑄鐵軸に関する實驗

$\frac{h}{b}$	寸 法 (cm)					破壊扭力率 (kg cm)	
	b	h	b_0	h_0	s	實驗	公式 (202)
1.7	6.1	10.2	4.0	6.1	2.1	38,500	44,590
1.7	6.2	10.3	4.1	6.1	2.1	39,000	45,320
2.5	4.1	10.1	2.1	5.9	2.0	34,750	31,780
2.5	4.2	10.0	2.05	5.9	2.0	36,250	31,330
1.5	10.3	15.2	3.6	12.0	1.7	35,500	54,520
3.0	5.2	15.3	3.5	12.0	1.7	24,000	35,800

前掲第七表、第八表及び次に示す第十表にありては、バツハの公式は大體に於て實驗の結果と符合し、その間の誤差僅小なれど、第九表に依ればバツハの公式 (202) は實驗の結果との間に著しき誤差を示し、殆んど公式としての價値を没却せしむるものあり。實驗値に對する誤差の百分率は最低 8.6% より最高實に 53.6% に達す。而して此の誤差は突縁部の幅の増大するに従つて増大し、幹部及び突縁部の厚さの減小するに従つて増大するが故に、突縁部の幅短小にして、幹部及び突縁部の厚さ著しく小ならざる □ 字断面に對しては、バツハの公式 (202) は比較的正確なる値を與ふ可しと雖も、此の範圍を脱しては (202) 式を使用す可らず。

□字断面に對するフェップルの實驗は、 $\eta \doteq 1.15$ なるが故に



第四十五圖

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \frac{3M_a}{s^2(h+2b_0)} \\ M_a &= \frac{1.15}{3} G\theta s^2(h+2b_0) \\ &= \frac{1}{3} \tau_1 s^2(h+2b_0) \end{aligned} \right\} \dots (203)$$

又此の場合のウエエバアの公式は

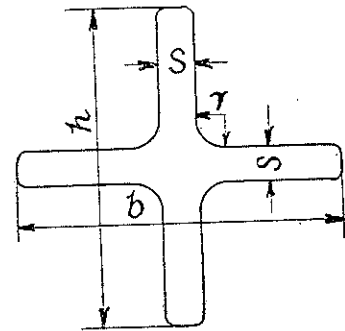
$$l_c = h + 2b - 2.6s = h + 2b_0 - 0.6s \dots (204)$$

第四十四圖の如き□字断面の代りに、第四十五圖の如き Z 字断面の軸を取るも、フェップル公式 (203) 及びウエエバアの公式 (204) は、之をそのまま使用し得れども、Z 字断面に就てはバツハに實驗の徵す可きものなし。

(二) 十字断面の軸

バツハの (191) 式に依れば

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= 4.5 \frac{M_a}{s^2(h+b-s)} \\ M_a &= \frac{2}{9} \tau_1 s^2(h+b-s) \end{aligned} \right\} \dots (205)$$



第四十六圖

之に對するバツハの實驗は次の如し。

第十表 十字断面鑄鐵軸に關する實驗

$\frac{h}{b}$	寸 法 (cm)			破壊扭力率 (kg cm)	
	b	h	s	實驗	公式 (205)
1.0	15.2	15.2	2.14	72,500	71,900
1.0	15.2	15.1	2.11	73,750	69,720

フェップルに依れば

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \frac{3M_a}{s^2(h+b-s)} \\ M_a &= \frac{1}{3} \eta G\theta s^2(h+b-s) \\ &= \frac{1}{3} \tau_1 s^2(h+b-s) \\ \eta &= 1.15 - 1.58 \end{aligned} \right\} \dots (206)$$

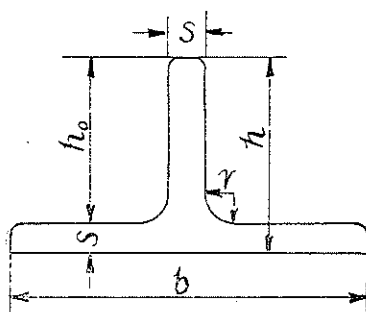
η は b 又は h に對する s の比及び第四十六圖に於ける内角曲率半径 r の大

小に依りて、上記の如く變ずるものにして、 r が比較的大なる時は $\eta=1.58$, r が比較的小なる時は $\eta=1.15$ の値を取る可きものとす。猶ほ此の點に關しては後章に於て詳論す可きが故に、茲には之を省略す。

又十字断面に對するウエバアの公式は次の如し。

$$l_t = h + b - 0.15s \dots\dots\dots(207)$$

(木) 上字断面の軸



第四十七圖

第四十七圖の如き 上字断面に對するフェップルの實驗は、 \square 字断面及び Z 字断面と同様に於て、 $\eta=1.15$ にして

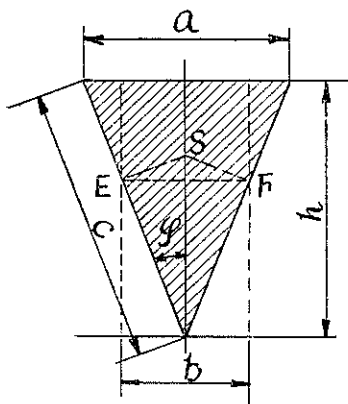
$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \frac{3M_a}{s^2(h+b-s)} \\ M_a &= \frac{1.15}{3} G\theta s^2(h+b-s) \\ &= \frac{1}{3} \tau_1 s^2(h+b-s) \end{aligned} \right\} \dots(208)$$

又ウエバアの公式は

$$l_t = h + b - 0.9s \dots\dots\dots(209)$$

上記の公式 (198), (201), (204), (207), (209) に於けるウエバアの断面に於ては、内角曲率半径 r は常に幅 s に等しくウエバアは此等の彎曲の影響を考慮して、その l_t の公式を制定したるものとす。

(へ) 二等邊三角形断面の軸



第四十八圖

バツハはその鑄鐵軸に關する實驗の結果、グラスホフの矩形断面に對する公式 (123) 及び (125) 式の各第一式を基調として、第四十八圖の如き狭長なる二等邊三角形及び第四十九圖の如き對稱的梯形に對し、次の如き解法を提出せり。(Bach: Versuche über die Drehungsfestigkeit von Körpern mit trapezförmigem und dreieckigem Querschnitt, Zeitschrift des V. d. I., 1906 S. 481 u. f.)

三角形又は梯形の重心 S よりその斜邊上に垂線 SE, SF を下しその脚 E, F を結ぶ。 EF は三角

形又は梯形の主軸に對して垂直なるが故に、 E, F を通過して三角形又は梯形の主軸に平行なる直線を引けば、生ずる平行四邊形は幅 $EF=b$ 、高さ h の矩形なり、此の矩形を三角形又は梯形の扭力に對する同値矩形 (Equivalent rectangle for torsion, das gleichwertige Rechteck für die Verdrehung, le rectangle équivalent pour la torsion) として、(123) 及び (125) 式を使用するものとす。

三角形の場合には

$$SE = \frac{2}{3} h \sin \varphi, \quad \frac{b}{2} = SE \cos \varphi = \frac{2}{3} h \sin \varphi \cos \varphi$$

$$= \frac{2}{3} h \frac{a}{2c} \frac{h}{c} = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} a \right) \left(\frac{h}{c} \right)^2$$

$$\therefore b = \frac{2}{3} a \left(\frac{h}{c} \right)^2 \quad \text{然るに} \quad c = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}}$$

$$\therefore \left(\frac{h}{c} \right)^2 = \frac{h^2}{h^2 + (a/2)^2} = \frac{1}{1 + (a/2h)^2}$$

依りて b と a, h の間に次の關係あり。 $b = \frac{2}{3} \frac{a}{1 + (a/2h)^2}$

此等の公式を使用して、同値矩形幅 b を計算し得可く、此の b の値を (123) 式の第一式に代入して破壊扭力率 M_a より、 τ_1 の値を算出すれば次表の如し。

第十一表 二等邊三角形斷面鑄鐵軸に關する實驗

番號	幅 (cm)		高 (cm) h	破壊扭力率 (kg cm) M_a	破壊應力度 (kg/cm ²) τ_1 公式 (123)
	a	b			
1	5.25	3.36	12.06	93,500	3,091
2	5.23	3.33	12.07	90,000	3,026
3	5.24	3.33	11.83	92,500	3,173
平均					3,097

而して此の表に依る破壊應力度の平均値 $\tau_1=3,090$ を、同一鑄鐵材料に依る、幅 $b=5.22\text{cm}$ 、高 $h=12.45\text{cm}$ の矩形軸の實驗に於て、公式 (123) を使用して算出せる平均値 $\tau_1=3,353$ と對比する時は、その誤差は 8% に過ぎざるを見る可し。

$a=c$ の場合には、二等邊三角形の代りに正三角形を得可く、此の時は $b=a/2$ 、 $h=\sqrt{3}a/2=0.866a$ なるが故に、之を (123) 式に代入すれば

$$\tau_1 = 4.5 \frac{M_a}{(0.5a)^2 (0.866a)} = 20.8 \frac{M_a}{a^3} \dots\dots\dots (210)$$

之をヘルマンの正三角形に就て求めたる公式 (174) の第二式と對照すれば、數

係数 20 の代りに 20.8 (誤差 4%) を用ふるの相違あるのみ。實驗に立脚せるバハの公式の、理論的價値の決して没却す可らざるを察するに足る。

第十二表 正三角形断面鑄鐵軸に関する實驗

番號	邊長 (cm) a	幅 (cm) b	高 (cm) h	破壊扭力率 (kg cm) M_a	破壊應力度 (kg/qcm)	
					公式 (174)	公式 (210)
1	9.36	4.68	8.11	136,500	3,329	3,458
2	9.35	4.68	8.09	133,000	3,377	3,505
3	9.41	4.71	8.17	134,000	3,216	3,327
平均					3,307	3,430

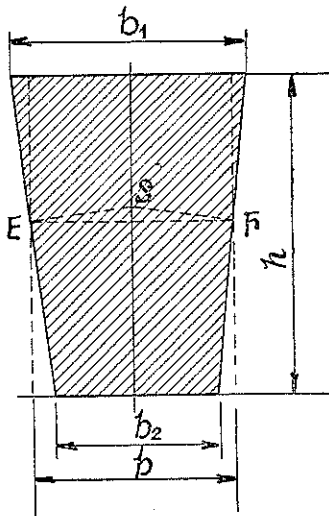
頂角 $2\phi < 15^\circ$ なる狭長二等邊三角形に對して、ウエバアの求めたる公式は

$$M_a = G\theta \left(\frac{1}{12} a^3 h - 0.105 a^4 \right) \dots \dots \dots (211)$$

三角形は梯形の下底 $b_2 = 0$ の特殊の場合に過ぎざるが故に、(211) 式は次に示す (214) 式の特例なることを見る可し。

(ト) 對稱的梯形断面の軸

二等邊三角形に就て述べたと同一の作圖により、同値矩形を作れば、バハの解法は此の矩形に對して (123) 及び (125) 式を適用するにありて、その鑄鐵軸に関する實驗の結果と正確に一致すること次表の如し。即ち次表に於ける算出平均値 $\tau_1 = 3,498$ を前掲の矩形軸に関する同一材料の實驗的平均値 $\tau_1 = 3,353$ と比較する時は、その誤差僅かに 4% 強に過ぎず。

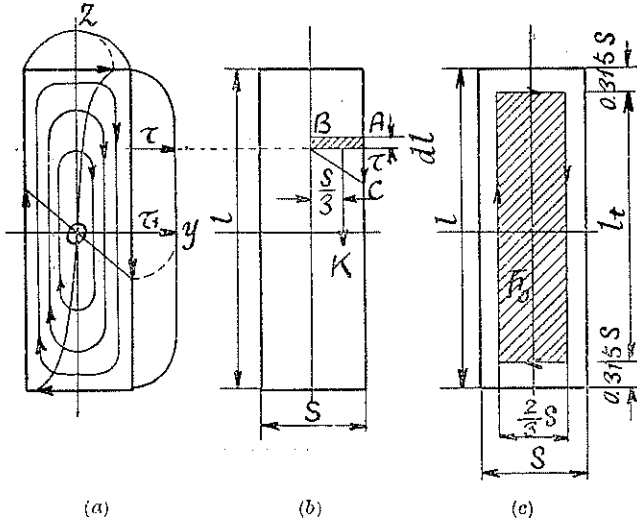


第四十九圖

第十三表 梯形断面鑄鐵軸に関する實驗

番號	幅 (cm)			高 (cm) h	破壊扭力率 (kg cm) M_a	破壊應力度 (kg/qcm) τ_1 公式 (123)
	b_1	b_2	b			
1	5.15	2.64	3.99	12.51	151,500	3,423
2	5.08	2.59	3.93	12.35	151,000	3,562
3	5.18	2.60	4.00	12.26	153,000	3,510
平均						3,498

第五十圖 (a) は狭長矩形断面に於ける應力線、及び應力分布の状態を圖示したるものにして、應力線は短邊に近き部分を除きては、殆んど長邊即ち x 軸に平行



第五十圖

なるのみならず、 y 軸に沿へる應力分布は殆んど直線的なるを見る可し。(第三十五圖参照) 矩形が狭長なる場合には、短邊に近き部分を除きては、 y 軸に平行なる直線即ち矩形の幅上の應力分布は、 y 軸上に於けると同じく直線的なる性質を有す。従つて第五十圖(b)に於て、短邊に近からざる任意の半幅 AB に沿へる應

力の分布は之を BC の如き直線と假定し得るのみならず、狭長矩形の長邊に沿へる應力の大きさは、短邊に近き部分を除きては殆んど一定にして τ_1 に等しきこと、第五十圖 (a) の示すが如くなるを以て、 BA 上の應力の總代力は、 $dl=1$ として

$$K = \frac{s}{2} \frac{\tau}{2} = \frac{s\tau_1}{4}$$

(197) 式の第一式により $\tau_1 = G\theta s$ なるが故に

$$K = \frac{G\theta s^2}{4} \dots \dots \dots (212)$$

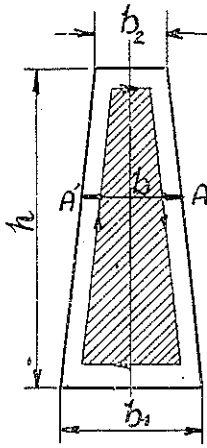
之を l の全長に及ぼす事は明かに不合理なるが故に、 $l_t < l$ とせば z 軸に関する K の力率の總和は

$$M' = Kl_t \frac{2}{3} s = \frac{1}{6} G\theta s^2 l_t$$

而して扭力の性質上、 y 軸に関する應力の力率の總和 M'' も亦 M' に等しからざる可からず、 $M_a = M' + M'' = 2M'$ なるが故に

$$M_a = \frac{1}{3} G\theta s^2 l_t$$

是れ即ちウエバアの公式 (197) の第二式にして、之をサン・ヴナンの公式 (41) と對比すれば、 $l_t = l - 0.63s$ なるを知る可く、第五十圖 (c) は此等の關係を圖示したるものとす。



第五十一圖

此の理論を狭長なる梯形の場合に適用せんに、第五十一圖に於て任意の幅 $AA'=b$ を取りて考ふるに、此の場合にも (212) 式を使用して $K \doteq G\theta b^2/4$ と置くことを得るが故に

$$M' = \int K \frac{2}{3} b dl = \frac{G\theta}{6} \int b^3 dl$$

$$\therefore M_u = 2M' \doteq \frac{G\theta}{3} \int b^3 dl \dots \dots \dots (213)$$

此の場合の積分は $l_c = l - 0.63(b_1 + b_2)/2 = l - 0.315(b_1 + b_2)$ の間に適用す可きものなるが故に (213) 式を

$$M_u \doteq G\theta \left[\frac{1}{3} \int_0^l b^3 dl - 0.105(b_1^4 + b_2^4) \right] \dots \dots \dots (213_1)$$

と書き改むることを得可し。(213₁) 式を狭長梯形に適用して

$$M_u = G\theta \left[\frac{1}{12} \frac{h(b_1^4 - b_2^4)}{b_1 - b_2} - 0.105(b_1^4 + b_2^4) \right] \dots \dots \dots (214)$$

を得可く、是れ即ちウエバアの公式にして、 $b_2=0$ とすれば三角形の場合の公式 (211) を得可し。又 (214) 式を書き改めて

$$M_u = G\theta \left[\frac{h}{12} (b_1^3 + b_1^2 b_2 + b_1 b_2^2 + b_2^3) - 0.105(b_1^4 + b_2^4) \right]$$

とし、 $b_1=b_2=b$ と置けば

$$M_u = G\theta \left[\frac{1}{3} b^3 h - 0.21b^4 \right] = \frac{1}{3} G\theta b^3 (h - 0.63b)$$

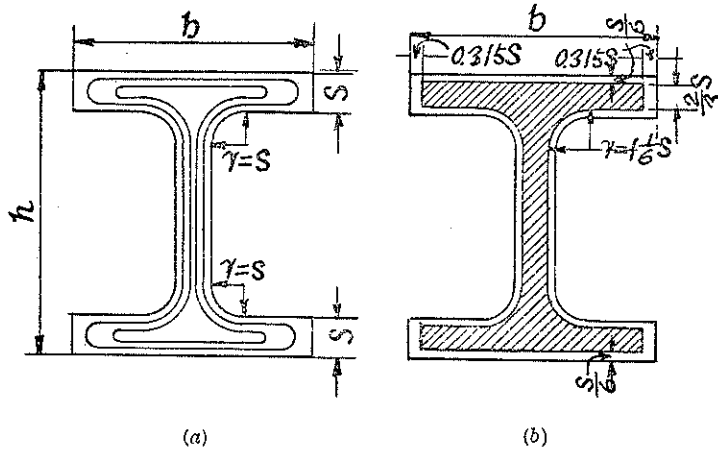
即ち狭長矩形の場合の公式 (41) 式を得可し。

以上の外サン・グナンの求めたるものに扇形断面、曲線四邊形断面、ウエバアの求めたるものに猶ほその他の二、三の断面形状ありと雖も、茲には採録を省略す。

本節に於て説明せる種々の形状断面の軸に關して、バウハの提出せる公式は殆んど全部實驗式にして、其處に何等の理論的根柢を含まず。實驗の結果に最もよく符合する二等邊三角形及び梯形に關する同値矩形の公式の如きは、之に理論的根柢を與ふることの極めて困難なるを覺ゆ。惟ふにバウハは實驗家にして理論家にあらず、その豊富なる實驗の結果を綜合蒐集して、典據を既往の理論公式に求め、その實驗の結果に符合せしむるに最も便宜なる公式の構造を案出したるに止ま

る。而もバツハが典型としたりし公式はグラスホフの略式に外ならざるが故に、著者は此等の公式に對して多くの理論的價値を認むることを憚る。之に反してフュップルは實驗家と言はんよりは寧ろ理論家なり。その實驗は必ず理論的根據の上になされたるを見る可く、殊にその理論をサン・ヴナンの解法の上に置けるは、又以てその實驗式を理論的に價値付くる上に於て卓効ありと言はざる可らず。此等の斷面に對するウェエバアの解法は、主としてバツハに依りてなされたる實驗を材料として、サン・ヴナンの理論の上に幾多の公式を制定したるものにして、著者は之を以て最も理論的なる解法と稱して憚らず。例へばその所謂理論的邊長の根據を検討せんは、第五十圖 (c) に於て影線を施したる部分の面積を F_0 とせば、 F_0 と l_t との間に次の關係あり。

$$F_0 = \frac{2}{3} s l_t \quad \text{或は} \quad l_t = \frac{3}{2} \frac{F_0}{s}$$



第五十二圖

此の關係を狹長矩形の組成斷面に適用せんは、第五十二圖 (a) を I 字斷面に於ける應力線、同 (b) を同一斷面に於て (212) 式にて示せる K の力線を圖示せるものとせば、此の力線の包む圖形の面積 F_0 は次の如し。

$$\begin{aligned} F_0 &= \frac{2}{3} s \left[2(b - 0.63s) + \left(h - \frac{5}{3}s \right) \right] + \left(1 \frac{1}{6} \right)^2 (4 - \pi) s^2 \\ &= \frac{2}{3} s (2b + h - 1.26s + 0.08s) \doteq \frac{2}{3} s (2b + h - 1.2s) \end{aligned}$$

$$\therefore l_t = 2b + h - 1.2s$$

是れ即ち曩きに求めたる (198) 式にして、前述の如く内角曲率半徑 $r=s$ の影響を考慮せる公式なり。I 字断面のみならず、その他の断面に對してウエバアの求めたる理論的邊長 l_1 は凡て斯の如くにして算出せられたるものにして、固より嚴密なる意味に於ける理論式に非ずと雖も、その解法はバツハ及びフェップルに一步を進めたりと稱せんも過言に非ざるを見る可し。

第五章 軸の扭力率

既に前章に於て種々の断面に對する扭力率と最大應裁力度及び單位扭力角との間の關係を示す公式を掲げたりしが、本章に於て M_a と τ_1 の關係、又第七章に於て M_a と θ との間の關係を概括せんとす。

M_a ; 扭力率, τ_1 ; 軸に起る最大應裁力度
 I_1 ; 小なる方の断面主慣性率, b ; 軸の寸法
 C ; 數係數

とし、 b は圓形断面の半徑 (中空断面に就ては外側の圓に就て言ふ。以下之に倣ふ)、橢圓断面の小なる方の半軸、矩形断面の小なる方の邊長、正多角形断面の邊長を表はすものとせば、一般に次の如き關係あり。

$$M_a = C\tau_1 \frac{I_1}{b} \dots\dots\dots (215)$$

圓形断面に就ては (104) 及び (108) 式より $C=2$

橢圓形断面に就ては (112) 及び (119) 式より $C=2$

矩形断面に就ては、グラスホフに従へば (125) 及び (152) 式より $C=8/3$

サン・ヴナンに従へば (132) 式より $C=4f_3(h/b)$ (第二表参照)

ゴツケに従へば (138) 式より $C=4\varphi_3(h/b)$ (第三表参照)

正三角形断面に就ては (175) 式より $C=2.77$

正方形断面に就ては、グラスホフに従へば (158), (171) 式より $C=2.667$

サン・ヴナンに従へば (161) 式より $C=2.498$

ゴツケに従へば (164) 式より $C=2.492$

正六角形断面に就ては、ヘルマンに従へば (180) 式より $C=1.694$

ウエバアに従へば (185) 式より $C=1.818$

正八角形断面に就ては、ヘルマンに従へば (187) 式より $C=1.305$

ウエバアに従へば (190) 式より $C=1.389$

此等の値を (215)式に代入すれば、 M_a の値より直ちに τ_1 の値を算出し得可く、最大應力度を決定するものは實に断面の 小なる方の主慣性率なることを知る可し。此の關係は扭力の新理論に於ける最も著しき特徴の一にして、断面の 大なる方の慣性率は之を考慮するを要せざるものとす。従つて之を本編第二章に掲げた舊理論の公式 (3) と對比せば、新舊兩理論に於ける公式の根本的差違の奈邊に存するかを看取することを得可し。

正三角形断面に對する數係數はバツハに従へば (Bach: Elastizität und Festigkeit, 1924, S. 363) $C=1.385$ にして、上記のもの、 $1/2$ に當れど、これはバツハが I_1 と I_0 とを混同したる不注意の誤算に出づ。

次に少しく矩形断面に對する係數 C に就て研究せんは、サン・ヴナンに従へば $C=4f_2(h/b)$ なるが故に、(132) 及び (215) 式より $M_a=C\tau_1 b^2 h/12$

$$\text{或は (130) 式より } \tau_1 = \frac{12}{C} \frac{M_a}{b^2 h} = 3f_2\left(\frac{h}{b}\right) \frac{M_a}{b^2 h}$$

$$\text{同様にしてゴエツケに従へば } \tau_1 = 3\varphi_2\left(\frac{h}{b}\right) \frac{M_a}{b^2 h}$$

$$\text{グラスホフに従へば } C=8/3 \text{ なるが故に } \tau_1 = 4.5 \frac{M_a}{b^2 h}$$

故に ψ を係數とせば一般に次の關係あり。

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \psi \frac{M_a}{b^2 h}, & M_a &= \frac{1}{\psi} \tau_1 b^2 h \\ \psi &= 12/C \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (216)$$

$$\text{サン・ヴナンに従へば } \psi = 3f_2(h/b) \dots\dots\dots (217)$$

$$\text{ゴエツケに従へば } \psi = 3\varphi_2(h/b) \dots\dots\dots (218)$$

$$\text{グラスホフに従へば } \psi = 3g_2(h/b) = 4.5 \dots\dots\dots (219)$$

サン・ヴナンに依りて與へらるゝ $\psi = 3f_2(h/b)$ の値を h/b の函數として曲線に作り、逆に ψ の値を h/b の 簡單なる代數的函數と假定して、此の曲線より最小自乗法の原理を應用して、その函數の形を決定せるものに、次の二つの近似的公式あり。

$$\psi = 3 + \frac{2.6}{0.45 + h/b} \dots\dots\dots (220)$$

$$\psi = 3 + 1.8 \frac{b}{h} \dots\dots\dots (221)$$

著者は前者をバハの著作 (Bach: *Elastizität und Festigkeit*, Berlin, 1924, S. 360) 中に見出し, 後者をモウレエの著作 (A. Morley: *Strength of Materials*, sixth edit., London, 1923, p. 296) 及びウェエバアの論文 (Weber: *Die Lehre der Drehungsfestigkeit*, 1921, S. 29) 中に見出したれど, カナダ・トロント 大學教授ヤング (C. R. Young: *Torsional Strength of Rectangular Sections of Concrete, Plain and Reinforced*, *University of Toronto, Bulletin* No. 3, Section No. 9, 1922) の説く所に依れば, (221) 式はサン・ヴナンが1853年の論文の脚註中に與へたる實驗式なりと言ふ。著者は該論文に於て此の脚註を看過したりしが故に, 姑くヤング教授の所説に従つて (221) 式をサン・ヴナンの略式と呼び, 且つ (220) 式をバハの公式と呼ぶ。猶ほヤングはウッズの著作 (R. J. Woods: *Strength and Elasticity of Structural Members*, London, 1903, p. 305) 中に掲げたる ψ の値を摘録して, 之とサン・ヴナンの (217) 式による係數値とを比較し, ウッズの係數は最もよくサン・ヴナンの係數と符合することを指摘したりしが, 著者の見る所を以てすれば, ウッズの係數は實にサン・ヴナンの係數そのものに外ならず。ウッズが別個の略式を案出して之によりて ψ を計算せるものに非ざることは, 上記の著書を見れば自ら明白なり。

之に反しスロウカムの著作 (S. E. Slocum: *Resistance of Materials*, Boston, 1914, p. 111) に於ては, サン・ヴナンの扭力に關する研究の結果を總括すと稱して

$$\psi = \frac{4.08 + 2.7 h/b}{\sqrt{1 + (h/b)^2}} \dots \dots \dots (222)$$

の如き公式を與へたれど, 此の公式は決してサン・ヴナンの與へたるものに非ざるのみならず, その値はサン・ヴナンの係數に對して著しき誤差を示すことは次表の示す所の如し。

第十四表 係數 ψ の値

$\frac{h}{b}$	サン・ヴナン 公式 (217)	サン・ヴナン 公式 (221)	ゴエツケ 公式 (218)	クラスホフ 公式 (219)	バハ 公式 (220)	スロウカム 公式 (222)
1.0	4.80	4.80	4.82	4.50	4.79	4.79
1.1	4.67	4.64	4.69	4.50	4.69	4.74
1.25	4.52	4.44	4.53	4.50	4.53	4.66
1.5	4.33	4.20	4.33	4.50	4.33	4.51
1.75	4.19	4.03	4.18	4.50	4.18	4.33

2.0	4.07	3.90	4.06	4.50	4.06	4.24
2.5	3.88	3.72	3.87	4.50	3.88	4.02
3	3.74	3.60	3.74	4.50	3.75	3.85
4	3.55	3.45	3.55	4.50	3.58	3.61
5	3.43	3.36	3.43	4.50	3.48	3.45
10	3.20	3.18	3.20	4.50	3.25	3.09
∞	3.00	3.00	3.00	4.50	3.00	2.70

(215) 式は M_d を I_1 と b との函数として表はしたれど、之を断面積 f の函数としても亦表はすことを得。即ち次の如し。

$$M_d = C_1 \tau_1 \sqrt{f^3}, \quad C_1 = \frac{CI_1}{b\sqrt{f^3}} \dots \dots \dots (223)$$

圓形断面に就ては

$$f = \pi r^2, \quad \sqrt{f^3} = \pi r^3 \sqrt{\pi}, \quad I_1 = \pi r^4 / 4, \quad C = 2, \quad b = r, \quad \therefore C_1 = 0.2821$$

楕圓形断面に就ては

$$f = \pi bc, \quad \sqrt{f^3} = \pi bc \sqrt{\pi bc}, \quad I_1 = \pi b^3 c / 4, \quad C = 2, \quad \therefore C_1 = 0.2821 \sqrt{(b/c)}$$

矩形断面に就ては

$$f = bh, \quad \sqrt{f^3} = bh \sqrt{(bh)}, \quad I_1 = b^3 h / 12,$$

グラスホフに従へば $C = 8/3, \quad \therefore C_1 = \frac{2}{9} \sqrt{\frac{b}{h}}$

サン・ヅナンに従へば $C = 4f_3\left(\frac{h}{b}\right), \quad \therefore C_1 = \frac{1}{3} f_3\left(\frac{h}{b}\right) \sqrt{\frac{b}{h}}$

ゴツケに従へば $C = 4f_3\left(\frac{h}{b}\right), \quad \therefore C_1 = \frac{1}{3} \varphi_3\left(\frac{h}{b}\right) \sqrt{\frac{b}{h}}$

正三角形断面に就ては

$$f = 0.433 b^2, \quad \sqrt{f^3} = 0.285 b^3, \quad I_1 = 0.018 b^4, \quad C = 2.77, \quad \therefore C_1 = 0.175$$

正方形断面に就ては

$$f = b^2, \quad \sqrt{f^3} = b^3, \quad I_1 = b^4 / 12,$$

グラスホフに従へば $C = 8/3, \quad \therefore C_1 = 2/9 = 0.22222$

サン・ヅナンに従へば $C = 2.498, \quad \therefore C_1 = 0.20817$

ゴツケに従へば $C = 2.492, \quad \therefore C_1 = 0.20767$

正六角形断面に就ては

$$f = 2.598 b^2, \quad \sqrt{f^3} = 4.1875 b^3, \quad I_1 = 0.54125 b^4,$$

ヘルマンに従へば $C = 1.694, \quad \therefore C_1 = 0.21896$

ウエエバアに従へば $C=1.818, \therefore C_1=0.23498$

正八角形断面に就ては

$$f=4.8284 b^2, \sqrt{f}=10.608 b, I_1=1.8595 b^4,$$

ヘルマンに従へば $C=1.305, \therefore C_1=0.22877$

ウエエバアに従へば $C=1.389, \therefore C_1=0.24349$

故に (215) 式の C は多角形の邊の數が増すと共に減小し, (222) 式の C_1 は多角形の邊の數が増すと共に増大す。

第六章 軸の仕事

軸の断面に於て任意の點の應裁力度を τ , その點の微分面積を $df=dy dz$, 軸の長さを l とせば, 斷面積 df , 長さ l の軸の部分に於ける 扭力率に依る仕事 (Work done by torsion, le travail par la torsion, die Drehungsarbeit) は次式にて表はさる。

$$dA = \frac{\tau}{2} df \rho l = \frac{1}{2G} l \tau^2 df$$

故に軸の全體の部分に就ては

$$A = \int dA = \frac{l}{2G} \int \tau^2 df \dots\dots\dots (224)$$

圓形充断面に就ては (2) 式を用ひ $\tau = \tau_1 \rho / r$

$$\therefore A = \frac{l}{2G} \left(\frac{\tau_1}{r}\right)^2 \int \rho^2 df = \frac{l}{2G} \left(\frac{\tau_1}{r}\right)^2 I_0 = \frac{l}{4G} \left(\frac{\tau_1}{r}\right)^2 \pi r^4$$

或は又 (9) 式を用ひ $\tau = M_a \rho / I_0$

$$\therefore A = \frac{l}{2G} \left(\frac{M_a}{I_0}\right)^2 \int \rho^2 df = \frac{l}{2G} \left(\frac{M_a}{I_0}\right)^2 I_0 = \frac{l}{G} \frac{M_a^2}{\pi r^4},$$

$$\text{故に } A = \frac{l}{4G} \tau_1^2 \pi r^2 = \frac{\tau_1^2}{4G} V = \frac{l}{G} \frac{M_a^2}{\pi r^4}, \quad V = \pi r^2 l \dots\dots\dots (225)$$

茲に V は軸の體積を表はす。

圓形中空断面に就ては同様にして, $I_0 = (\pi/2)(1-m^4)r^4$ なるが故に

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{l}{4G} \tau_1^2 \pi (1-m^4) r^2 = \frac{\tau_1^2}{4G} (1+m^2) V \\ &= \frac{l}{G} \frac{M_a^2}{\pi (1-m^4) r^4}, \\ V &= \pi (1-m^2) r^2 l \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (226)$$

楕圓形充斷面に就ては (110) 及び (111) 式より

$$\tau = \frac{\tau_1}{nc} \sqrt{y^2 + n^2 z^2} = \frac{2}{\pi} \frac{M_a}{n^3 c^4} \sqrt{y^2 + n^2 z^2}$$

$$A = \frac{l}{2G} \left(\frac{\tau_1}{nc} \right)^2 \int [y^2 + n^2 z^2] df = \frac{l}{2G} \left(\frac{\tau_1}{nc} \right)^2 (I_1 + n^4 I_2) = \frac{l}{2G} \left(\frac{2}{\pi} \right)^2 \left(\frac{M_a}{n^3 c^4} \right)^2 (I_1 + n^4 I_2)$$

$$I_1 = \frac{\pi}{4} b^3 c = \frac{\pi}{4} n^3 c^4, \quad I_2 = \frac{\pi}{4} b c^3 = \frac{\pi}{4} n c^4$$

$$\therefore A = \frac{l}{8G} \tau_1^2 \pi n (1 + n^2) c^2 = \frac{\tau_1^2}{8G} (1 + n^2) V$$

$$= \frac{l}{2G} \frac{1 + n^2}{n^3} \frac{M_a^2}{\pi c^4},$$

$$V = \pi n c^2 \quad \left. \begin{array}{l} \dots\dots\dots (227) \end{array} \right\}$$

楕圓形中空斷面に就ては同様にして, (117) 及び (118) 式より

$$\tau = \frac{\tau_1}{nc} \sqrt{y^2 + n^2 z^2} = \frac{2}{\pi} \frac{M_a}{(1 - m^4) n^3 c^4} \sqrt{y^2 + n^2 z^2}$$

$$\therefore A = \frac{l}{8G} \tau_1^2 \pi n (1 + n^2) (1 - m^4) c^2 = \frac{\tau_1^2}{8G} (1 + n^2) (1 + m^2) V$$

$$= \frac{l}{2G} \frac{1 + n^2}{n^3} \frac{M_a^2}{\pi (1 - m^4) c^4},$$

$$V = \pi n (1 - m^2) c^2 \quad \left. \begin{array}{l} \dots\dots\dots (228) \end{array} \right\}$$

矩形斷面に就てはグラスホフに従へば (122), (123) 及び (124) 式より

$$\tau^2 = \left(\frac{9}{2} \right)^2 \left(\frac{M_a}{b^2 h} \right)^2 \left[\left(\frac{2y}{b} \right)^2 \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right)^2 + \left(\frac{b}{h} \right)^2 \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \left(1 - \frac{4y^2}{b^2} \right)^2 \right]$$

$$= \tau_1^2 \left(\frac{2}{b} \right)^2 \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right)^2 y^2 + \tau_2^2 \left(\frac{2}{h} \right)^2 \left(1 - \frac{4y^2}{b^2} \right)^2 z^2$$

今 $\tau_1 (2/b) = m$, $\tau_2 (2/h) = n$ とせば

$$\int \tau^2 df = m^2 \int y^2 df + n^2 \int z^2 df - 8 \left(\frac{m^2}{h^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \int y^2 z^2 df + \frac{16m^2}{h^4} \int y^2 z^4 df + \frac{16n^2}{b^4} \int y^4 z^2 df$$

$$= \frac{m^2 b^3 h}{12} + \frac{n^2 b h^3}{12} - 8 \left(\frac{m^2}{h^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \frac{b^3 h^3}{144} + \frac{16m^2}{h^4} \frac{b^3 h^5}{960} + \frac{16n^2}{b^4} \frac{b^5 h^3}{960}$$

$$= \frac{m^2 f h}{10} + \frac{n^2 b h^3}{10} - \frac{1}{18} \left(\frac{m^2}{h^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) b^3 h^3$$

之に $\tau_2 = \tau_1 (b/h)$ なる関係を入れて結果を簡単にすれば

$$\int \tau^2 df = \frac{8}{45} \tau_1^2 b h \left[1 + \left(\frac{b}{h} \right)^2 \right]$$

(123) 式を用ひ

$$\left. \begin{aligned} \int \tau^2 df &= \frac{8}{45} \left(\frac{9}{2} \right)^2 \left(\frac{M_a}{b^2 h} \right)^2 b h \left[1 + \left(\frac{b}{h} \right)^2 \right] = \frac{18}{5} \frac{M_a^2}{b^2 h} \left[1 + \left(\frac{b}{h} \right)^2 \right] \\ \therefore A &= \frac{4}{45} \frac{l}{G} \tau_1^2 b h \left[1 + \left(\frac{b}{h} \right)^2 \right] = \frac{4}{45} \frac{\tau_1^2}{G} \left[1 + \left(\frac{b}{h} \right)^2 \right] V \\ &= \frac{9}{5} \frac{l}{G} \frac{M_a^2}{b^2 h} \left[1 + \left(\frac{b}{h} \right)^2 \right], \end{aligned} \right\} (229)$$

$$V = b h l$$

矩形断面に対するサン・ヅナンの公式を(224)式に適用することは、計算を極めて複雑ならしむるが故に、此の時は仕事 A を扭力率 M_a 及び単位扭力角 θ を以て表はしたる次の公式を用ふるを便とす。即ち

$$A = \frac{1}{2} M_a \theta \dots \dots \dots (230)$$

然るに (130) 式より $\theta = \frac{\tau_1}{G b f (h/b)}$, (132) 式より $\theta = \frac{3 M_a}{G b^3 h f_1 (h/b)}$

従つて $M_a \theta = \frac{1}{3} G \theta^2 b^3 h f_1 \left(\frac{h}{b} \right)$

故に (230) 式より

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{6} \frac{l}{G} \tau_1^2 b h \frac{f_3 (h/b)}{f (h/b)} = \frac{1}{6} \frac{\tau_1^2}{G} \frac{f_3 (h/b)}{f (h/b)} V \\ &= \frac{3}{2} \frac{l}{G} \frac{M_a^2}{b^2 h} \frac{1}{f_1 (h/b)} \dots \dots \dots (231) \end{aligned}$$

同様にしてゴエツケに従へば

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{6} \frac{l}{G} \tau_1^2 b h \frac{\varphi_3 (h/b)}{\varphi (h/b)} = \frac{1}{6} \frac{\tau_1^2}{G} \frac{\varphi_3 (h/b)}{\varphi (h/b)} V \\ &= \frac{3}{2} \frac{l}{G} \frac{M_a^2}{b^2 h} \frac{1}{\varphi_1 (h/b)} \dots \dots \dots (232) \end{aligned}$$

又グラスホフの公式 (229) を (231), (232) と同一の形に書き改むる時は、

$$\frac{4}{45} \left[1 + \left(\frac{b}{h} \right)^2 \right] = \frac{1}{6} \frac{\frac{5}{6} \frac{1}{1+(b/h)^2}}{\left[\frac{5}{4} \frac{1}{1+(b/h)^2} \right]^2} = \frac{1}{6} \frac{g_3 \left(\frac{h}{b} \right)}{g \left(\frac{h}{b} \right)},$$

$$\frac{9}{5} \left[1 + \left(\frac{b}{h} \right)^2 \right] = \frac{3}{2} \frac{6}{5} \left[1 + \left(\frac{b}{h} \right)^2 \right] = \frac{3}{2} \frac{1}{g_1 \left(\frac{h}{b} \right)}$$

$$\begin{aligned} \therefore A &= \frac{1}{6} \frac{l}{G} \tau_1^2 b h \frac{g_3(h/b)}{g(h/b)} = \frac{1}{6} \frac{\tau_1^2}{G} \frac{g_3(h/b)}{g(h/b)} V \\ &= \frac{3}{2} \frac{l}{G} \frac{M_a^2}{b^3 h} \frac{1}{g_1(h/b)} \dots \dots \dots (233) \end{aligned}$$

正方形断面に就ては (229) 又は (233) 式より

$$A = \frac{8}{45} \frac{l}{G} \tau_1^2 b^2 = 0.1778 \frac{\tau_1^2}{G} V = 3.6 \frac{l}{G} \frac{M_a^2}{b^4} \dots \dots \dots (234)$$

又 (231) 式より第二表を用ひ

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{6} \frac{0.62451}{0.67531} \frac{l}{G} \tau_1^2 b^2 = 0.1541 \frac{\tau_1^2}{G} V \\ &= \frac{3}{2} \frac{1}{0.42173} \frac{l}{G} \frac{M_a^2}{b^4} = 3.557 \frac{l}{G} \frac{M_a^2}{b^4} \dots \dots \dots (235) \end{aligned}$$

又 (232) 式より第三表を用ひ

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{6} \frac{0.62302}{0.67646} \frac{l}{G} \tau_1^2 b^2 = 0.1535 \frac{\tau_1^2}{G} V \\ &= \frac{3}{2} \frac{1}{0.42145} \frac{l}{G} \frac{M_a^2}{b^4} = 3.559 \frac{l}{G} \frac{M_a^2}{b^4} \dots \dots \dots (236) \end{aligned}$$

第 七 章 軸の扭力角

第 一 節 グラスホフの解法

軸の扭力角を求むるグラスホフの解法は次の如し。(Grashof: Theorie der Elastizität und Festigkeit, 1878, S. 142-7)

F, F' ; 坐標原点より $x, x+dx$ の距離にある軸の横断面

θdx ; F' に於ける對稱軸が F に於ける之に對應する對稱軸に對して、扭力のために扭ぢらるゝ角

$P, P'; F, F'$ に於ける互に對應する質點。従つて扭力を加へらるゝ前の状態に

於ては P, P' の坐標は夫々 x, y, z 及び $x+dx, y, z$ とす

$PQ, P'Q'$; 夫々 F, F' 上にありて始め y (又は z) 軸に平行なりし微分質線

ζ ; 扭力率 M_n のために質点 P が z 軸の方向に起す變位

$(\partial\zeta/\partial x) dx$; z 軸の方向に於ける P' の P に對する相對的變位

$(\partial^2\zeta/\partial x\partial y) dx dy$; z 軸の方向に於ける Q' の Q に對する相對的變位と P' の P に對する相對的變位との差

$(\partial^2\zeta/\partial x\partial y) dx$; 質線 $P'Q'$ が質線 PQ に對して $y-z$ の方向に扭ぢらるゝ角

η ; 扭力率 M_n のために質点 P が y 軸の方向に起す變位

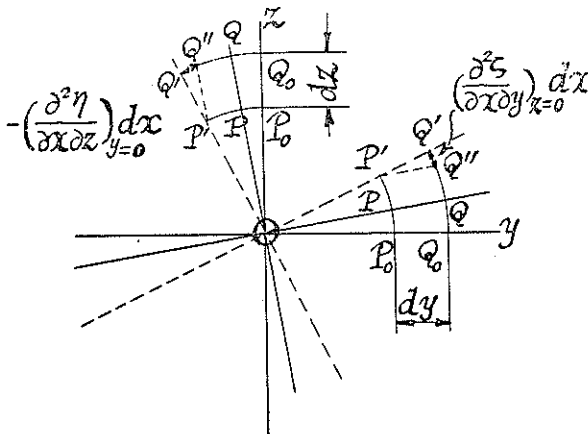
$(\partial\eta/\partial x) dx$; y 軸の方向に於ける P' の P に對する相對的變位

$(\partial^2\eta/\partial x\partial z) dx dz$; y 軸の方向に於ける Q' の Q に對する相對的變位と P' の P に對する相對的變位との差

$(\partial^2\eta/\partial x\partial z) dx$; 質線 $P'Q'$ が質線 PQ に對して $z-y$ の方向に扭ぢらるゝ角

$$\eta = F_1(y, z), \quad \zeta = F_2(y, z)$$

今 $z=0$ とせば P, P' 及び Q, Q' は何れも y 軸上にあり, $PQ=P'Q'=dy$ にして, $\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y}\right)_{z=0} dx$ は F' に於ける, y 軸に平行なる對稱軸の微分長が, F に於ける, 同様に y 軸に平行なる對稱軸の, 之に對應する微分長に對して, $y-z$ の方向に扭ぢらるゝ角にして, 之は明かに θdx に等し。又 $y=0$ とせば P, P' 及び Q, Q' は何れも z 軸上にあり, $PQ=P'Q'=dz$ にして $\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial z}\right)_{y=0} dx$ は F' に於ける z 軸に平行なる對稱軸の微分長が, F に於ける, 同様に z 軸に平行なる對稱軸の, 之に對應する微分長に對して, $z-y$ の方向に扭ぢらるゝ角にして, 之は明かに $-\theta dx$



第五十三圖

に等し

第五十三圖に於て P_0, Q_0 を F, F' 斷面上に於ける P 及び P', Q 及び Q' の始めの位置とし, 變形後の位置を夫々 P, Q 及び P', Q' にて表はすときは

$$\begin{aligned} PP' &= \left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)_{z=0} dx \\ &= -\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)_{y=0} dx \end{aligned}$$

$P'Q'$ を PQ に平行に引く時は

$$Q'Q'' = \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} \right)_{z=0} dx dy = - \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial z} \right)_{y=0} dx dz$$

従つて角を弧度にて表はせば

$$\begin{aligned} \text{角 } Q'P'Q'' &= \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} \right)_{z=0} dx = - \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial z} \right)_{y=0} dx \\ \therefore \theta &= \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} \right)_{z=0} = - \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial z} \right)_{y=0} \dots\dots\dots (237) \end{aligned}$$

第三章第五節に於て説明せるが如く、 ξ を x 軸の方向の變位とせば

$$\tau_y = G\varphi_y = G \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right), \quad \tau_z = G\varphi_z = G \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)$$

従つて (45) 式を用ひ

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_y}{\partial z} &= m_1 + m_2 y^2 + 3m_3 z^2 = G \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial z} \right), \\ \frac{\partial \tau_z}{\partial y} &= n_1 + n_2 z^2 + 3n_3 y^2 = G \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right) \end{aligned}$$

此等の公式の第一式に於て $y=0$, 第二式に於て $z=0$ とし (237) 式を用ふる時は

$$m_1 + 3m_3 z^2 = G \left[\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial y \partial z} \right)_{z=0} - \theta \right], \quad n_1 + 3n_3 y^2 = G \left[\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial y \partial z} \right)_{z=0} + \theta \right]$$

更に此等の公式の第一式に於て $z=0$, 第二式に於て $y=0$ として減法を行へば

$$\theta = \frac{1}{2} \frac{n_1 - m_1}{G} \dots\dots\dots (238)$$

此の公式を種々の断面に適用せば、次の如き結果を得可し。

楕圓形断面に就ては、本編第三章第二節に依り $m_1 = -M_a/(2I_2)$, $n_1 = M_a/(2I_1)$

$$\therefore \theta = \frac{1}{4} \frac{M_a}{G} \left(\frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2} \right) = \frac{1}{4} \frac{M_a}{G} \frac{1+n^2}{I_1} = \frac{1}{\pi} \frac{M_a}{G} \frac{1+n^2}{n^3 c^4} \dots\dots (239)$$

(112) 式参照。

圓形断面に就ては、 $I_1 = I_2 = \pi r^4/4$, $n=1$, $b=c=r$ として (239) 式より

$$\theta = \frac{1}{2} \frac{M_a}{G} \frac{1}{I_1} = \frac{1}{\pi} \frac{M_a}{G} \frac{2}{r^4} \dots\dots\dots (240)$$

(8) 及び (104) 式参照。

橢圓形中空断面に就ては、同様に (239) 式の代りに次式を得。

$$\theta = \frac{1}{4} \frac{M_a}{G} \left(\frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2} \right) = \frac{1}{4} \frac{M_a}{G} \frac{1+n^2}{I_1} = \frac{1}{\pi} \frac{M_a}{G} \frac{1+n^2}{(1-m^4)n^2c^4} \dots (241)$$

(119) 式参照。

圓形中空断面に就ては、(241) 式に於て $I_1 = I_2 = \pi r^4 (1-m^4)/4$, $n=1$, $b=c=r$ とせば

$$\theta = \frac{1}{2} \frac{M_a}{G} \frac{1}{I_1} = \frac{1}{\pi} \frac{M_a}{G} \frac{2}{r^4 (1-m^4)} \dots (242)$$

(108) 式参照。

矩形断面に就ては

$$m_1 = -\frac{3}{4} \frac{M_a}{I_2} = -9 \frac{M_a}{bh^3}, \quad n_1 = \frac{3}{4} \frac{M_a}{I_1} = 9 \frac{M_a}{b^3h}$$

(238) 式を用ひ

$$\theta = \frac{3}{8} \frac{M_a}{G} \left(\frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2} \right) = \frac{3}{8} \frac{M_a}{G} \frac{1}{I_1} \frac{1+(h/b)^2}{(h/b)^2} = 4.5 \frac{M_a}{G} \frac{1+(b/h)^2}{b^3h} \dots (243)$$

正方形断面に就ては (243) 式に於て、 $I_1 = I_2 = b^4/12$, $b=h$ とせば

$$\theta = \frac{3}{4} \frac{M_a}{G} \frac{1}{I_1} = 9 \frac{M_a}{G} \frac{1}{b^4} \dots (244)$$

此の解法は茲には假りにグラスホフの解法と稱したれど、實はウエルタイムの亞流にして、その圓形及び橢圓形断面に對する公式 (239) 乃至 (242) は、次節に於ける理論公式及び實驗の結果とよく符合すれども、矩形及び正方形断面に就ての公式 (243) 及び (244) は、その係數値に於て可なりの相違を生ずるを見る。此の缺陷は既にウエルタイム自らも之を認め、圓形及び橢圓形断面に對する公式

$$\theta = \frac{1}{4} \frac{M_a}{G} \left(\frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2} \right)$$

は能く實驗の結果と符合すれど、矩形断面に對する公式

$$\theta = \frac{3}{8} \frac{M_a}{G} \left(\frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2} \right) = \frac{1.5}{4} \frac{M_a}{G} \left(\frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2} \right)$$

は實驗値に比して、多少過大なる結果を與へ、その誤差は矩形が正方形に近づくに従つて、益々大なる傾向あるが故に、一般に次の公式を使用するを以て比較的正確なる値を與ふ可きことを提唱せり。

$$\theta = \frac{n}{4} \frac{M_a}{G} \left(\frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2} \right) \dots (245)$$

茲に m ; ポアソン比 $\doteq 3.18$ (鐵, 鋼, 銅及び硝子に對し)

E ; 彈體の伸縮係數

$$G = \frac{1}{2} \frac{m}{1+m} E \doteq 0.38 E \text{ (後章参照)}$$

n ; 係數 = 1.0 圓形及び橢圓形斷面に對し

= 1.2 正方形斷面に對し

= 1.2-1.5 矩形斷面に對し

(245) の半實驗式の實用的價值は之を次節に於ける公式と對照すれば、自ら明かなる可し。

第 二 節 仕事の公式に依る解法

軸の扭力角は又、その仕事に對する關係より極めて簡単に之を求むることを得可し。前章の公式 (230) より

$$\theta = \frac{2A}{M_a l} \dots \dots \dots (246)$$

圓形充斷面に就ては、(225) 式を用ひ $\theta = \frac{1}{\pi} \frac{M_a}{G} \frac{2}{r^4}$ (240) 式参照

圓形中空斷面に就ては、(226) 式を用ひ $\theta = \frac{1}{\pi} \frac{M_a}{G} \frac{2}{(1-m^4)r^4}$ (242) 式参照

橢圓形充斷面に就ては、(227) 式を用ひ $\theta = \frac{1}{\pi} \frac{M_a}{G} \frac{1+n^2}{n^2 c^4}$ (239) 式参照

橢圓形中空斷面に就ては、(228) 式を用ひ $\theta = \frac{1}{\pi} \frac{M_a}{G} \frac{1+n^2}{(1-m^4)n^2 c^4}$ (241) 式参照

矩形斷面に就ては、グラスホフに依れば (229) 及び (233) 式を用ひ

$$\theta = 3.6 \frac{M_a}{G} \frac{1+(b/h)^2}{b^3 h} = 3 \frac{M_a}{G} \frac{1}{b^3 h} \frac{1}{g_1(h/b)} \dots \dots \dots (247)$$

サン・ヴナンに依れば $\theta = 3 \frac{M_a}{G} \frac{1}{b^3 h} \frac{1}{f_1(h/b)} \dots \dots \dots (248)$

ゴエツケに依れば $\theta = 3 \frac{M_a}{G} \frac{1}{b^3 h} \frac{1}{\varphi_1(h/b)} \dots \dots \dots (249)$

正方形斷面に就ては、グラスホフに依れば (234) 式より

$$\theta = 7.2 \frac{M_a}{G} \frac{1}{b^4} \dots \dots \dots (250)$$

サン・ヴナンに依れば (235) 式より $\theta = 7.114 \frac{M_a}{G} \frac{1}{b^4} \dots\dots\dots(251)$

ゴエツケに依れば (236) 式より $\theta = 7.118 \frac{M_a}{G} \frac{1}{b^4} \dots\dots\dots(252)$

故にウェルタイムの半実験式 (245) は $n=1.2$ とせる場合に於ては、矩形及び正方形断面に對して (247) 及び (250) 式と正確に一致するものとす。此の故に著者は本編第四章第三節に於て、グラスホフの解法に依る單位扭力角の値を (247) 式を使用して $\theta = 3.6 (M_a/G) (b^2+h^2)/(b^3h)$ としたりと雖も、(247) 式は決してグラスホフの求めたるものに非ざるを見る可し。而も (247) 式がサン・ヴナンの公式 (248) ゴエツケの公式 (249) に比して、如何に著しき誤差を含むかは、次表に依りて極めて明白なり。

一般に矩形断面に對して

$$\theta = C_2 \frac{M_a}{G} \frac{1}{b^3h} \dots\dots\dots(253)$$

と置けば、グラスホフに従へば $C_2 = \frac{3}{g_1(h/b)} = \frac{12}{Cg(h/b)} = \frac{\psi}{g(h/b)}$

サン・ヴナンに従へば $C_2 = \frac{3}{f_1(h/b)} = \frac{12}{Cf(h/b)} = \frac{\psi}{f(h/b)}$

ゴエツケに従へば $C_2 = \frac{3}{\varphi_1(h/b)} = \frac{12}{C\varphi(h/b)} = \frac{\psi}{\varphi(h/b)}$

第十五表 單位扭力角の係數 C_2 の値

$\frac{h}{b}$	サン・ヴナン 公式 (248)	ゴエツケ 公式 (249)	グラスホフ 公式 (247)
1.0	7.114	7.118	7.200
1.1	6.494	6.495	6.575
1.25	5.823	6.820	5.904
1.5	5.108	5.106	5.200
1.75	4.667	4.665	4.776
2.0	4.373	4.371	4.500
2.5	4.010	4.009	4.176
3	3.798	3.798	4.000
4	3.561	3.561	3.825
5	3.433	3.432	3.744
10	3.202	3.201	3.636
∞	3.000	3.000	3.600

第 三 節 サン・ヴナンの解法

サン・ヴナン、ヘルマン等の解法にありては、扭力率 M_a を直ちに θ に依りて表はすが故に、逆に θ を M_a に依りて表はすことは極めて簡単なり。(132) 式 (138) 式の各第一式は、實に (248) 及び (249) 式と同一の公式たるに過ぎず。

正三角形断面に就ては、(175) 式より

$$\theta = 46.2 \frac{M_a}{G} \frac{1}{b^4} \dots\dots\dots (254)$$

正六角形断面に就ては、ヘルマンに従へば (180) 式より

$$\theta = 0.971 \frac{M_a}{G} \frac{1}{b^4} \dots\dots\dots (255)$$

ウエエバアに従へば (185) 式より

$$\theta = 0.962 \frac{M_a}{G} \frac{1}{b^4} \dots\dots\dots (256)$$

正八角形断面に就ては、ヘルマンに従へば (187) 式より

$$\theta = 0.275 \frac{M_a}{G} \frac{1}{b^4} \dots\dots\dots (257)$$

ウエエバアに従へば (190) 式より

$$\theta = 0.273 \frac{M_a}{G} \frac{1}{b^4} \dots\dots\dots (258)$$

以上の結果を總括して、サン・ヴナンは次の如き一般的公式を與ふ。(Saint-Venant: Sur une formule donnant approximativement le moment de torsion, *Comptes Rendus*, T. 88, 1879, p. 142)

$$\theta = C_3 \frac{M_a}{G} \frac{I_0}{f^4} \dots\dots\dots (259)$$

但しサン・ヴナンの目的は、茲に引用せる論文の表題が示す如く、扭力率を與ふる略式を制定するにありしが故に、此の論文中に掲げられし公式は、(259) を逆にしたる

$$M_a = \frac{1}{C_3} \frac{f^4}{I_0} G \theta \dots\dots\dots (259_1)$$

の如き形を有すれど、便宜上著者は (259) 式を採用す。

之を圓形断面に適用せんに、此の場合には $I_0 = \pi r^4 / 2$, $f^4 = (\pi r^2)^2 = \pi^2 r^4$ なるが故に、(240) 式より $C_3 = 4\pi^2 = 39.48$

橢圓形断面に就ては $I_0 = \pi(b^2 + c^2)bc/4$, $f^4 = (\pi bc)^4 = \pi^4 b^4 c^4$ なるが故に、同様に
して (241) 式より $C_3 = 4\pi^2 = 39.48$

矩形断面に就ては $I_0 = (b^2 + h^2)bh/12$, $f^4 = b^4 h^4$ なるが故に、(259), (253) 式より

$$\theta = C_3 \frac{M_n}{G} \frac{b^2 + h^2}{12 b^3 h^3}, \quad \theta = C_2 \frac{M_n}{G} \frac{1}{b^3 h}, \quad \therefore C_3 = 12 C_2 \frac{h^2}{b^2 + h^2} = \frac{12 C_2}{1 + (b/h)^2}$$

故にサン・ヅナンに従へば $C_3 = \frac{36}{f_1(h/b)[1 + (b/h)^2]}$

ゴエツケに従へば $C_3 = \frac{36}{\varphi_1(h/b)[1 + (b/h)^2]}$

グラスホフに従へば $C_3 = \frac{36}{g_1(h/b)[1 + (b/h)^2]} = 43.2$

猶ほ $C_3/12 = C_4$ として上式を書き改むる時は

$$\left. \begin{aligned} \theta &= C_4 \frac{M_n}{G} \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} = C_4 \frac{M_n}{G} \frac{1 + (b/h)^2}{b^3 h} \\ C_4 &= \frac{C_3}{12} = \frac{C_2}{1 + (b/h)^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (260)$$

故にサン・ヅナンに従へば $C_4 = \frac{3}{f_1(h/b)[1 + (b/h)^2]}$

ゴエツケに従へば $C_4 = \frac{3}{\varphi_1(h/b)[1 + (b/h)^2]}$

グラスホフに従へば $C_4 = \frac{3}{g_1(h/b)[1 + (b/h)^2]} = 3.6$

C_3, C_4 の値に就ては本章第五節を見よ。

又 (259) 式を正三角形断面に適用すれば、 $I_0 = 0.036 b^4$, $f^4 = 0.035 b^3$.

$$\therefore C_3 = 44.92 \doteq 45$$

正六角形断面に就ては $I_0 = 1.0825 b^4$, $f^4 = 45.557 b^3$ なるが故に、ヘルマンに従へば (255) 式より $C_3 = 40.86 \doteq 41$

ウエエバアに従へば (256) 式より $C_3 = 40.49 \doteq 40$

正八角形断面に就ては $I_0 = 3.719 b^4$, $f^4 = 54.351 b^3$ なるが故に、ヘルマンの (257) 式を用ふれば $C_3 = 40.19 \doteq 40$

ウエエバアの (258) 式を用ふれば $C_3 = 39.71 \doteq 40$

正三角形、正方形及び h/b の比が極めて大なる矩形の場合を除けば、サン・ヅ

ナンの求めたる扇形の場合に適用しても C_3 の値は約 40 と取りて大差なきが故にサン・ヴナンは θ を求むる略式として

$$\theta = 40 \frac{M_a}{G} \frac{I_0}{f^4} \dots\dots\dots (261)$$

なる公式を紹介したりしが、公式 (259₁) を發表したる前掲 1879 年の論文中に記して言はく——此の公式は係數 C_3 の値に僅少の變更を加ふる事によりて、橢圓断面のみならず他の凡ての形狀の断面に、之を適用し得可しと。蓋しサン・ヴナンの論文は橢圓断面に關する公式 $M_a = G\theta \cdot \pi b^2 c^2 / (b^2 + c^2)$ より出發して、公式 (259₁) を誘導したるに始まり、續いて之を矩形断面及び扇形断面に適用することを主眼とせしが故なり。果してサン・ヴナンの言ひしが如く、 C_3 の値に僅少の變更を加ふることに依りて (en faisant varier fort peu la fraction que nous avons appelée ψ) 換言せば、 $C_3 \doteq 40$ と假定し得る範圍内に於て (259) 式を、凡ての形狀の断面に適用し得るや否やに就ては、次に掲ぐる 4 節の實驗之を證す。

第 四 節 バウシंगाアの實驗

1881 年に發表せられたるバウシंगाアの實驗報告 (Bauschinger: Experimentelle prüfung der neueren Formeln für die Torsion prismatischer Körper, *Der Civilingenieur*, 1881. S. 115) は扭力の新公式、即ち 1879 年に發表せられたるサン・ヴナンの公式 (259₁) を實驗的に立證せんがために、獨逸ミュンヘン・テヒニッシュ・ホホシュウレ材料試験所に於て施行せられし實驗に關する報告にして、最も貴重なる資料たるを失はず。此の實驗の一部は既に本編第二章中に引用したりしが、茲には (259) 式の實驗的證明に關する部分を摘録す可し。

l ; 軸の二つの断面の距離、

θ_1 ; 此の二つの断面の相對的扭力角、

θ ; 單位扭力角、

r ; 扭力角の擴大半徑、

d ; 扭力角 θ_1 が r の半徑に就て抱く弧長

とせば、前述の如く $\theta_1 = \theta l$, $d = \theta_1 r = \theta l r$

此の關係を用ふる時は (259) 式より

$$d = C_3 \frac{M_a}{G} \frac{I_0}{f^4} l r \dots\dots\dots (262)$$

サン・ヴナンの略値に依り $C_3=40$ とせば, (261) 式より

$$d=40 \frac{M_n}{G} \frac{I_0}{f^3} l_r \dots\dots\dots(263)$$

バウシंगाの供試體は總長 100 cm. の鑄鐵軸 (鑄鐵は彈性係數 G の値が應力と共に變ずるが故に, 試験材料としては不適當なれど, 任意の形狀斷面を容易に且つ安價に得らるゝ唯一の長所あるが故に, 敢て鑄鐵を使用す——バウシंगा附記) にして, その斷面形狀寸法は次の如し。但し b は圓にありては半徑, 橢圓にありては短軸の 1/2, 正方形にありては邊長, 矩形にありては短邊の長さを表はす。(バウシंगाの報告は多少の誤植を含み, 且つ b の假定は上記のものとは異なり, 例へば橢圓にありては長軸の 1/2, 正方形にありては邊長の 1/2, 矩形にありては長邊の邊長の 1/2 と取りたれど, 著者は之を本書の慣用に從つて上記の如く改め, 且つ全く計算を新たにしたり)。

1. 圓形斷面 斷面積 $f_1=50 \text{ cm}^2$. 半徑 $b_1=\sqrt{f_1/\pi}=3.989 \text{ cm}$. 極樞性率 $I_{01}=\pi b_1^4/2=397.89 \text{ cm}^4$.

2. 軸比 1:2 の橢圓形斷面 斷面積 $f_2=50 \text{ cm}^2$. 半短軸 $b_2=\sqrt{f_2/(2\pi)}=2.821 \text{ cm}$. 極樞性率 $I_{02}=(\pi/4)[2b_2^4+8b_2^4]=5\pi b_2^4/2=497.36 \text{ cm}^4$.

3. 正方形斷面 斷面積 $f_3=50 \text{ cm}^2$. 邊長 $b_3=\sqrt{f_3}=7.071 \text{ cm}$. 極樞性率 $I_{03}=b_3^4/6=416.67 \text{ cm}^4$.

4. 邊長比 1:2 の矩形斷面 斷面積 $f_4=50 \text{ cm}^2$. 短邊長 $b_4=\sqrt{f_4/2}=5.000 \text{ cm}$. 極樞性率 $I_{04}=(1/12)[2b_4^4+8b_4^4]=5b_4^4/6=520.83 \text{ cm}^4$.

5. 邊長比 1:4 の矩形斷面 斷面積 $f_5=25 \text{ cm}^2$. 短邊長 $b_5=(1/2)\sqrt{f_5}=2.500 \text{ cm}$. 極樞性率 $I_{05}=(1/12)[4b_5^4+64b_5^4]=17b_5^4/3=221.35 \text{ cm}^4$.

此等 5 種の軸の實驗に於て, M_n, l 及 α, r の値を一定に取れば, 次の關係あり。

$$d_1:d_2:d_3:d_4:d_5=39.48 \quad I_{01}:39.48 \quad I_{02}:42.98 \quad I_{03}:42.00 \quad I_{04}:16 \times 40.20 \quad I_{05}$$

(262) 式に依る

$$=I_{01}:I_{02}:I_{03}:I_{04}:16 I_{05} \quad (263) \text{ 式に依る}$$

之上の I_0 の値を代入して計算する時は

$$d_1:d_2:d_3:d_4:d_5=15,703.70:18,635.77:17,783.48:21,874.86:14,237.23=1:1.25:$$

1.13:1.40:9.1

(262) 式に依る

$$=397.89 : 497.36 : 416.67 : 520.83 : 354.16$$

$$=1 : 1.25 : 1.05 : 1.31 : 8.9$$

(263) 式に依る。

バウシंगाアの目的は、 d に於ける此の關係を實驗的に證明するにありて、上記 5 種の断面形狀に就て各 2 個の供試體を作り、觀測断面間の距離 $l=50$ cm、扭力角の擴大半徑 $r=350$ cm と取りて之を試験したりしが、鑄鐵供試體は鑄製後の加工を省きたるが故に、正確に上記の如き断面形狀を有する事能はず、 d の比較に不便なりしが故に

$$\begin{array}{ll} I'_0 ; \text{觀測断面の極惰性率,} & I_0 ; \text{正等断面の極惰性率,} \\ f' ; \text{同 面 積,} & f ; \text{同 面 積,} \\ d' ; \text{觀測扭力角弧長,} & d ; \text{正等扭力角弧長} \end{array}$$

として

$$d = C_3 \frac{M_a}{G} \frac{I_0}{f^4} l r, \quad d' = C_3 \frac{M_a}{G} \frac{I'_0}{f'^4} l r, \quad \therefore d = d' \frac{I_0}{I'_0} \frac{f'^4}{f^4} = K d, \quad K = \frac{I_0}{I'_0} \frac{f'^4}{f^4}$$

即ち觀測断面に就ての扭力角弧長 d' に補正係數 K を乗じて、之を正等断面に就ての扭力角弧長 d に換算し、以て次表の如き正等觀測値を發表したり (第十六表)

表中 P は 49.2 cm の臂長に加へらる可き試験機の荷重にして、之に依りて生ずる扭力率は $M_a=49.2 P$ (噸糶) にて算出せらる。 P が一つの段階より次の段階に達する間の増加、即ち ΔP の變化に伴ふ扭力率弧長 d の變化を Δd 、扭力率の變化を ΔM_a とせば、(262) 式により

$$\Delta d = C_3 \frac{\Delta M_a}{G} \frac{I_0}{f^4} l r$$

此の公式を用ひ $C_3=39.48$ (圓形及び橢圓形), 42.68 (正方形), 42.00 (邊長比 1:2 の矩形), 40.20 (邊長比 1:4 の矩形) として、此の間に於ける G の値を計算するときは、 G は常數に非ずして第十六表の如く、 ΔM_a と共に變ずる一種の變數なることを知る可し。

第十六表に於て比較數と稱するは、 $d_1=1$ とせる場合の d_2, d_3 等の値にして此の數字を見れば、 d の間には大體に於て (262) 式に示されたるが如き關係の存在するを知る。

第十六表 扭力角に関するバウシंगाアの實驗 (その一)

P (t)	圓形断面			楕圓形断面(軸比1:2)			正方形断面			矩形断面(邊長比1:2)			矩形断面(邊長比1:4)		
	d cm	G t/cm ²	比較數	d cm	G t/cm ²	比較數	d cm	G t/cm ²	比較數	d cm	G t/cm ²	比較數	d cm	G t/cm ²	比較數
0	0	—	—	0	—	—	0	—	—	0	—	—	0	515	—
0.1	—	525	—	—	523	—	—	495	—	—	492	—	3.81	472	—
0.2	0.825	—	1	1.035	—	1.25	0.99	—	1.20	1.225	—	1.48	7.96	461	9.6
0.3	—	495	—	—	514	—	—	471	—	—	488	—	12.215	452	—
0.4	1.70	—	1	2.085	—	1.23	2.03	—	1.19	2.46	—	1.45	16.55	—	9.7
0.6	2.615	473	1	3.195	487	1.22	3.125	448	1.19	3.79	453	1.45	—	—	—
0.8	3.53	473	1	4.33	477	1.23	4.165	471	1.18	5.155	442	1.46	—	—	—
0.1	4.74	460	1	5.515	457	1.23	5.259	434	1.18	6.475	457	1.45	—	—	—
1.2	5.415	458	1	6.69	460	1.24	6.47	417	1.19	7.895	424	1.46	—	—	—
1.4	6.35	463	1	7.895	449	1.24	7.635	421	1.20	9.365	402	1.48	—	—	—
1.6	7.37	424	1	9.13	438	1.24	8.80	421	1.19	10.935	391	1.48	—	—	—
1.8	8.37	433	1	10.455	408	1.25	10.07	386	1.20	12.545	372	1.50	—	—	—
2.0	9.37	433	1	11.81	399	1.26	11.285	403	1.20	14.12	385	—	—	—	—
2.2	10.415	414	1	13.19	392	1.27	12.615	368	1.21	—	—	—	—	—	—
2.4	11.52	392	1	—	—	—	14.06	339	1.22	—	—	—	—	—	—
2.6	12.68	373	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2.8	13.935	345	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

之より先き、バウシंगाアは 1878 年鐵及び鋼を以て 13 種の軸を作り、その各に就て圓形(直徑約 10^{cm})及び正方形(邊長約 10^{cm})の 2 種の断面を擇び、上記のものと同一の方法に依りて、その扭力角を觀測したる實驗報告 (Bauschinger: L'essai de résistance de fontes fers et aciers de l'usine de Reschitza etc., Wien, 1878) を發表したりしが、同様にして (262) 式を使用する時は

$$d_1 : d_3 = \frac{39.48}{42.68} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{16}{4\pi^2} \cdot 6 = 1 : 0.698$$

此の實驗に於ては、 $l=40$ cm, $r=343.77$ cm と取り、且つ上記の實驗と同様にして

$$d = d' \frac{I_0}{I_0'} \frac{f'^4}{f^4} = Kd'$$

圓形に對しては $I_{01} = \frac{\pi}{2} b_1^4$, $f_1 = \pi b_1^2$, $\therefore K_1 = \left(\frac{b_1'}{b_1}\right)^4$

正方形に對しては $I_{02} = \frac{1}{6} b_3^4$, $f_3 = b_3^2$, $\therefore K_3 = \left(\frac{b_3'}{b_3}\right)^4$

として、正等扭力角弧長を算出したるものにして、此の實驗の中、彈性限度の直前に於て觀測せられたる扭力角弧長を、試験機の臂長 50^{cm} に加へらるゝ荷重を

噸にて表はしたる數にて除したる商、即ち彈性限度の直前に於ける單位荷重 ($P=1$, $M_0=50 \text{ t cm}$) 當りの正等扭力角弧長の値を摘記せば、第十七表の如くにして、此の實驗の比較數も亦正確に上に求めたる d の比、 $d_1:d_3=1:0.698$ と一致するを見る可し。

第十七表 扭力角に關するバウシंगाアの實驗 (その二)

	硬 度	$M_0 = 50 \text{ t cm}$ に對するの d 値 (cm)		比 較 數
		圓形 (直徑 10 cm)	正方形 (邊長 10 cm)	
マルテン鋼	2	0.397	0.259	1 :
“	3	0.351	0.254	0.653
“	4	0.365	0.248	0.724
“	5	0.376	0.255	0.686
“	6	0.383	0.249	0.678
“	7	0.361	0.246	0.650
ベセマア鋼	3	0.356	0.257	0.681
“	4	0.353	0.253	0.772
“	5	0.351	0.257	0.717
“	6	0.350	0.254	0.732
“	7	0.347	0.259	0.726
微粒子鐵	—	0.401	0.254	0.747
強 靱 鐵	—	0.394	0.278	0.633
平 均				0.702
				0.696

バウシंगाアの實驗に關しては、猶ほ後章に於て之を引用する機會ある可し。

第 五 節 ブレチュナイダアの實驗

1909 年ブレチュナイダアがシュツットガルト材料試験所に於て施行せる、扭力角に關する實驗はサン・ヴナンの公式 (260) に於ける係數 C_4 の驗證を以て、その目的とし、その報告 (O. Bretschneider: Versuche über die Verdrehung von Stäben mit rechteckigem Querschnitt und zur Ermittlung der Längs und Querdehnung auf Zug beanspruchter Stäbe, Z. d. V. d. I., 1912, S. 253 u. f. und Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, Heft 121) は、最も貴重なる參考資料たるの點に於て上記バウシंगाアの報告に遜らず。

(260) 式を用ひて M_0 及び θ の實驗値より係數 C_4 の値を定めんがためには、 G の値が應力と共に變ぜず、 τ と φ との間に、フックの正比例の法則が成立する材料を取りて供試體とする必要あり。(第二編第三章參照)

鋼 (Das Fluszeisen und der Stahl) は、その彈性限度迄は、此の要件に叶ふ材

料と考へらるゝが故に、ブレチュナイダアの選びし材料は軟鋼にして、その破壊抗張強度 3,605 kg/qcm 、弾性限度 2,232 kg/qcm とす。而して半径 3 cm の圓形断面の軸に於ける扭力試験に於ては、實驗の範圍内〔グラスホフの略式 (123) を使用して計算せる應力度 $\tau_1=1,500 \text{ kg}/\text{qcm}$ 即ち材料の弾性限度よりは、遙かに小さき τ_1 の値に對應するものとす〕に於ては、 M_a と θ 、從つて τ と ϕ の間に完全にフックの法則が成立し、應力度に無關係なる剛性係數 G の値を求むる事を得たり。

$$\frac{1}{G} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{824,200} + \frac{1}{825,100} \right) = \frac{1}{824,700}, \quad G=824,700$$

供試體は同質の材料より A, B の 2 種を選び、その端面は之を完全に加工して、 $1/1,000 \text{ cm}$ までを読み得る装置を用ひて、各横断面の寸法を同一ならしめんことを期す。 $G=824,700$ を用ひて (260) 式より算出せる C_4 の値は次の如し。

第十八表 C_4 に關するブレチュナイダアの實驗

番 號	$\frac{h}{b}$	断面寸法 (cm.)		係 數 C_4		
		h	b	實驗 1	實驗 2	平均
A_1	1	2.609	2.609	3.58	3.58	3.58
B_1		2.596	2.596	3.59	3.58	
A_2	2	3.591	1.805	3.53	3.53	3.53
B_2		3.598	1.795	3.53	3.52	
A_3	3	4.338	1.446	3.45	3.465	3.47
B_3		4.488	1.499	3.47	3.48	
A_4	4	4.747	1.186	3.39	3.40	3.40
B_4		4.796	1.199	3.40	3.42	
A_6	6	4.488	0.742	3.29	3.295	3.29
B_8		4.745	0.590	3.22	3.20	
B_{10}	10	4.796	0.473	3.17	3.19	3.18

$h/b=1$ より $h/b=6$ までは、 C_4 の此の平均値は殆んど直線によりて表はさるゝが故に、之をバツハの考案せる直線式

$$C_4 = A - B \frac{h}{b}$$

に適用する時は、 $A=3.645$, $B=0.06$

$$\therefore C_4 = 3.645 - 0.06 \frac{h}{b} \dots\dots\dots (264)$$

ブレチュナイダアの實驗値及びバツハの公式 (264) の與ふる値を、サン・ヴァン、ゴェツケ及びグラスホフと對照する時は次表を得可し。

第十九表 單位扭力角係數 C_4 の値

h/b	サン・ ヴナン	ゴエツケ	グラス ホフ	プレチュ ナイダア	バツハ 公式(264)
1	3.56	3.56	3.6	3.58	3.585
2	3.50	3.50	3.6	3.53	3.525
3	3.42	3.42	3.6	3.47	3.465
4	3.35	3.35	3.6	3.40	3.405
5	3.30	3.30	3.6	—	3.345
6	3.26	3.26	3.6	3.29	3.285
8	3.21	3.21	3.6	3.21	3.165
10	3.17	3.17	3.6	3.18	3.045
∞	3.00	3.00	3.6	—	0

サン・ヴナン及びゴエツケの係数は、大體に於てプレチュナイダアの實驗値と一致し、その間の誤差極めて微細なることは、第十九表によりて之を知る可く、此の實驗の關する限りに於ては、(264)式はサン、ヴナンよりも一層よく實驗の結果と符合するものとす。但し(264)式は $h/b=1-6$ に對する實驗値に對應す可きが故に、更に扁平なる矩形に對しては、之を使用す可らず。 $h/b=\infty$ の極限の場合に於ては、サン・ヴナンに依れば $C_4=3$ なれど、(264)式に依れば $C_4=0$ となるが如きは、明かに(264)式の使用範圍を局限するものと言ふ可し。

猶ほ、第十九表より $C_3=12 C_4$ なる關係を利用して算出せる係數 C_3 の値は次の如し。

第二十表 單位扭力角係數 C_3 の値

h/b	サン・ ヴナン	ゴエツケ	グラス ホフ	プレチュ ナイダア	バツハ 公式(265)
1	42.68	42.71	43.2	42.96	43.02
2	42.00	41.97	43.2	42.36	42.30
3	41.04	41.01	43.2	41.64	41.58
4	40.20	40.21	43.2	40.80	40.86
5	39.60	39.56	43.2	—	40.14
6	39.12	39.14	43.2	39.48	39.42
8	38.52	38.48	43.2	38.52	37.98
10	38.04	38.04	43.2	38.16	36.54
∞	36.00	36.00	43.2	—	0

故に係數 C_3 、從つて公式(259)を用ふる時はサン・ヴナンの理論式とプレチュナイダアの實驗との間には、多少の誤差の存するを見る可し。

猶ほ第二十表中に於けるバツハの係数は、 $C_3=12 C_4$ と(264)式とより

$$C_3 = 43.74 - 0.72 \frac{h}{b} \dots \dots \dots (265)$$

を用ひて算出せられたる事勿論とす。

第六節 バッハの實驗

1910年バッハが軟鋼、第二十番 I 字断面 (高 200 mm) に就て施行せる實驗は $C_3 = 40 - 42$ なる値を與へ、従つて (261) 式により

$$\theta = (40 - 42) \frac{M_n}{G} \frac{117 + 2,142}{33.5^4} = (0.072 - 0.075) \frac{M_n}{G}$$

の如き數字を示せり。従つて (259) 及び (261) 式は I 字断面に對しても亦、之を使用し得可きことを立證せるものとす。

然れどもサン・ヴナンが、その他の如何なる断面に對しても使用し得可しとせる公式 (259) 及び (261) は、之を中空断面に適用する能はざることは、既に、1905年バッハの指摘する所にかゝる。(Bach: Mitteilung zur Gültigkeit der de Saint-Venantschen Formel für den Verdrehungswinkel, Z. d. V. d. I., 1905, S. 960 u. f.)

此の論文は 1905 年軟鋼、圓形中空断面軸に就て施行せられたる、チェツチエの實驗報告 (Zschetsche: Die Formänderungsarbeit bei Torsion, Oesterreichische Wochenschrift für den öffentlichen Baudienst, Heft 6, 1905) に對するバッハの結論とも稱す可きものにして、圓形中空断面に就て (242) 式を用ふれば

$$\theta = \frac{32}{\pi} \frac{M_n}{G} \frac{1}{d^4 - d_0^4}$$

なれど、サン・ヴナンの (259) 式を用ふれば、 $C_3 = 4\pi^2$ として

$$\theta = \frac{32}{\pi} \frac{M_n}{G} \frac{d^4 - d_0^4}{(d^2 - d_0^2)^4}$$

茲に d, d_0 は外圓及び内圓の直徑を表はす。

チェツチエの實驗より $d = 32.6$ mm, $d_0 = 25.6$ mm の供試體を取れば、 θ の値〔但し完全なる彈體に於て、實驗がその彈性限度内にてなさるゝに非ざる限り應力變形は應力を取り去りたる後と雖も、始めの零の状態にかへらず、多少の餘剩變形を残す。總變形より此の餘剩變形を減じたる殘部の變形は、應力と共に消滅す可きものにして、之を彈性變形 (Die federnde Formänderung) と稱す。従つて扭力の場合にありてもバッハは必ず總扭力角、餘剩扭力角、彈性扭力角等を區別して、彈體な

らざる材料の應力變形の意義を明瞭ならしめたるは、常にその實驗報告に於て目撃する所なり。(第三編參照)。茲に示せる θ も亦實に彈性扭力角を指すものとす] 即ち次の如し

第二十一表 扭力角に關するチュッチェの實驗

扭力率段階 (kgcm)	ΔM_d	單位扭力角	$\Delta \theta$
500-1,500	1,000	$0.55 \times 2\pi/400 \times 50$	$0.55 \times 2\pi/400 \times 50$
500-2,500	1,000	$1.10 \times 2\pi/400 \times 50$	$0.55 \times 2\pi/400 \times 50$
500-3,500	1,000	$1.65 \times 2\pi/400 \times 50$	$0.57 \times 2\pi/400 \times 50$
500-4,500	1,000	$2.22 \times 2\pi/400 \times 50$	

即ち $\Delta M_d = 1,000 \text{ kgcm}$ に就て、 $\Delta \theta = 0.55 \times 2\pi/400 \times 50$ なる不變の關係あるが故に、此の場合には G は一定にして、(242) 式を用ふれば

$$\frac{0.55 \times 2\pi}{400 \times 50} = \frac{32}{\pi} \frac{1,000}{G} \frac{1}{3.26^4 - 2.56^4}$$

之より G を計算すれば $G = 842,200 \text{ kg/qcm}$

又サン・ヅナンの (259) 式を用ふれば

$$\frac{0.55 \times 2\pi}{400 \times 50} = \frac{32}{\pi} \frac{1,000}{G} \frac{3.26^4 - 2.56^4}{(3.26^2 - 2.56^2)^2}$$

之より G を計算すれば $G = 14,980,000 \text{ kg/qcm}$

(242) 式を使用して算出せる G の値は、軟鋼の剛性係數として普通に認定せられ得るものにして、前節に於けるブレチュナイダアの實驗値 $G = 824,700$ 、次節に於けるフェップルの實驗値 $G = 830,000$ と比較して大差なしと雖も、(259) 式を使用して算出せるものは、前者の約 18 倍に當り、到底軟鋼に對して之を許すこと能はず。此の結果は明らかに (259) 式が、中空斷面に適用し難きを立證すものとす。

此の事實は、之を d と d_0 との差が小さき場合、即ち壁厚 s の小なる中空斷面に對する、次の如き推論に依りても亦證明する事を得可し。(Buch: Elastizität und Festigkeit, 1924, S. 394)

$$d - d_0 = s, \quad d_m = d - s/2 = d_0 + s/2, \quad d = d_m + s/2, \quad d_0 = d_m - s/2$$

と置けば (242) 式に依れば、 $2I_1 = I_0 = (\pi/4)d_m^3 s$ として

$$\theta = \frac{4}{\pi} \frac{M_d}{G} \frac{1}{d_m^3 s} \dots \dots \dots (266)$$

(259) 式によれば, $I_0 = (\pi/4)d_m^3 s$, $f = \pi d_m s$ として

$$\theta = \frac{1}{\pi} \frac{M_d}{G} \frac{1}{d_m s^2} \dots\dots\dots (266_1)$$

而して今 $d_m = 20 \text{ cm}$, $s = 1 \text{ cm}$ とせば, (266) 式よりは

$$\theta = \frac{1}{\pi} \frac{M_d}{G} \frac{1}{2,000},$$

又 (266₁) 式よりは

$$\theta = \frac{1}{\pi} \frac{M_d}{G} \frac{1}{20}$$

を得可く, 後者の値は實に前者の 100 倍にあたり, 一見してその不條理なるを知るに足る可し。

第七節 フェツプルの實驗

第四章第五節に引用したりし 1917 年, 1921 年, 1922 年の發表にかゝるフェツプルの 3 種の論文の外, 1922 年の發表にかゝる第四の論文 (A. Föppl: Die Widerstandsfähigkeit von genieteten Trägern gegen Verdrehen, *Der Bauingenieur*, Heft 14, 1922) は, 一貫してサン・ヴナンの公式 (259), (261) 式の實驗的證明を目的とする, フェツプルの研究報告にして, その要點は既に第四章第五節に之を引用したり。

一般に單位扭力角を表はす公式は

$$\theta = \frac{M_d}{GJ} \dots\dots\dots (267)$$

にて與へらる。此の J は斷面の形狀寸法によりてのみ變ずる一種の常數にして, フェツプルは之を斷面の扭力抵抗率 (Der Drillungswiderstand) と名づけたりしが, (267) 式を (50) 式と對照する時は, 此の J はヘルマンが扭力係數 (Torsionsmodul) と名づけたるものと同一の大きさを有し, 長さの單位を cm. とせば, J の單位は cm^4 ならざる可らざるが故に, 又斷面の慣性率 I_1 又は I_2 , 従つて I_0 と同一の單位にて表はさる可きこと明かなり。

圓形斷面の場合には (240) 式に依りて, $J = I_0$ なること明かなる可く, 之をサン・ヴナンの公式 (259) に對照すれば

$$J = \frac{f^4}{C_3 I} \dots\dots\dots (268)$$

或は $C_3 \doteq 40$ と置けば (261) 式によりて

$$J = \frac{J^1}{40 I_0} \dots\dots\dots (269)$$

(269) 式に對し 1917 年フェップルの發表せる公式は次の如し。(第四章第五節 參照)

$$J = \frac{1}{3} \sum ls^3 \dots\dots\dots (270)$$

(270) 式は狭長矩形によりて組成せられし、I 字断面、L 字断面 \square 字断面等に對して使用せらる可く考案せられたるものにして、(269), (270) 兩式ともに、その略式たるの性質上、種々の断面に之を適用するに方りては、之に補正係數 η を乗ずるの要あり。従つて $J^1 = \eta J$ として

$$J^1 = \eta_1 \frac{f^4}{40 I_0} \dots\dots\dots (271)$$

$$J^1 = \eta_2 \frac{1}{3} \sum ls^3 \dots\dots\dots (272)$$

(271), (272) 式の實用的價值は、同種類の断面形狀に對して、略同一の補正係數 η_1 又は η_2 を使用し得るや否やによりて決せらる。

フェップルが展鐵軸に就て實驗せる結果 (A. Föppl: Versuche über die Verdrehungsfestigkeit der Walzeisenträger, *Sitzungsberichte der Bayer. Akad. der Wissenschaften*, München, 1921, S. 295-313) は、多くの場合に於て、 η_1, η_2 は同種類の断面形狀に對して、夫々略一定の値を有することを證明することを得たり。

第二十二表 扭力角に關するフェップルの實驗 その一

番號	断面形狀寸法 (cm)	觀 測 値			サン・ヴァナン		フェップル	
		$G(t/cm^2)$	$M_0(kgem)$	$\theta(10^{-6})$	J, 公式 (269)	η_1	J, 公式 (270)	η_2
1	L 5×5×0.5	843	528	2,910	0.534	0.76	0.372	1.10
2	L 5×5×0.7	825	1,320	1,070	1.49	0.76	1.05	1.08
3	L 7×7×0.9	*	3,300	347	4.94	0.70	3.62	0.96
4	L 10×10×1.0	821	5,500	200	8.92	0.68	6.17	0.99
5	L 10×10×1.2	826	7,700	125	13.93	0.72	9.82	0.99
6	L 12×12×1.3	822	11,000	66	24.5	0.75	17.2	1.06
7	L 4.5×4.5×0.5	831	440	4,190	0.447	0.64	0.334	0.86
8	L 7×7×0.6	843	1,320	1,358	1.38	0.63	0.964	0.91
9	L 4×8×0.6	834	880	1,379	1.064	0.82	0.867	1.00
10	L 5×10×0.8	836	2,640	449	3.32	0.81	2.66	1.00

11	L	8×12×1.0	828	5,500	225	7.86	0.63	5.62	0.96
12	[8 NP	821	2,200	566	2.95	0.73	1.98	1.09
13	[10 “	827	2,640	492	2.66	0.92	2.22	1.10
14	[10½ “	825	3,520	282	5.88	0.73	3.65	1.18
15	[12 “	*	4,400	289	4.69	0.89	4.27	0.98
16	[20 “	826	8,800	893	11.3	1.20	10.83	1.25
17	[30 “	823	17,600	30	33.0	1.21	35.06	1.14
18	[4×3.5×0.5×0.7 *	1,100	1,309	1.53	0.53	0.852	1.08	
19	Z	14 NP	*	5,500	180	7.53	0.88	5.92	1.13
20	Z	6×5×0.7×0.8 *	2,750	446	3.26	0.83	2.24	1.20	
21	⊥	6×6	851	1,760	808	2.58	0.53	1.34	1.09
22	⊥	7×7	828	3,300	341	6.09	0.58	3.18	1.12
23	⊥	8×8	836	3,960	245	7.63	0.61	4.13	1.18
24	⊥	10×10	823	6,600	107	16.35	0.69	9.11	1.25
25	⊥	9×4.5	851	2,200	463	4.02	0.63	2.04	1.24
26	⊥	12×6	837	4,400	197	9.04	0.67	4.81	1.25
27	⊥	7.5×6	*	880	975	2.42	0.51	1.35	0.92
28	I	10 NP	835	1,650	948	1.52	0.83	1.09	1.16
29	I	14 “	*	3,300	235	4.44	1.16	3.56	1.44
30	I	20 “	829	8,800	83	12.19	1.18	10.99	1.32
31	I	30 “	*	27,500	19	55.37	1.15	46.66	1.37
32	I	30** “	*	5,840	22	49.9	1.08	43.4	1.24
33	I	22 Gr.	*	16,500	22	93.6	0.58	42.5	1.28
34	I	24 “	820	33,000	11.2	165.3	0.66	74.4	1.47
35	I	16 P.	835	22,000	28	73.0	0.58	33.6	1.27
36	I	20 “	815	33,000	15	149.7	0.55	66.7	1.23
37	I	24 “	819	41,000	10	223.2	0.53	98.3	1.21

表中 M_a は実験に於ける最高扭力率, θ は実験の観測値を, $l=1\text{ cm}$, $M_a=1,000\text{ kgcm}$ の場合に換算したるもの, 剛性係数 G の欄中 * を附したるものは, 特に測定せられず, $G=830\text{ t/cm}^2$ と假定して計算したるもの, I 30 の中 ** を附したるものは, 軸を鉛直に置かず水平位置に置いて試験したるもの, NP は正等又は標準断面 (Normaler Profil) の略字にして, Gr. 及び P. は夫々グレイ型及びバイネ型 (Grey und Peine) を表はす。猶ほ I 字断面の中, 番號 33-37 は突縁部の幅大なる特殊の断面とす。

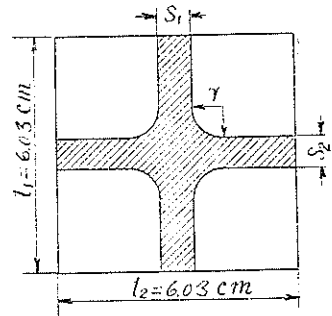
以上の結果より見て次の結論を得。

1. L字断面に就ては $\eta_1=0.72$, $\eta_2=0.99$ なる平均値を得可く、實用上 $\eta_2=1.0$ と取りて大差なし。
2. Z 及び ⊥ 字断面に就ては $\eta_1=0.61$, $\eta_2=1.15$ なる平均値を得可く、 η_2 は 1 と相去ること極めて小なるに係らず、 η_1 の値は 1 に比して遙かに小さし。
3. □ 字断面に就ては $\eta_1=0.89$, $\eta_2=1.12$ なる平均値を得可く、此の場合は 2 と同じく $\eta_2=1.15$ と取るも大差なし。
4. I 字断面に就ては、正等断面の場合は $\eta_1=1.08$, $\eta_2=1.31$, 廣幅突縁の場合には $\eta_1=0.58$, $\eta_2=1.29$ なる平均値を得るが故に、一般の I 字断面に就て $\eta_2=1.30$ と假定し得るに係らず、 η_1 に就ては正等断面と廣幅突縁断面との間に大差あり。

之を要するにフエップルの補正係數 η_2 は 1 との差極めて小さく、且つ同種断面群の中に於ては個々の値と平均値との間に、著しき誤差なきに反し、サン・ヴナンの補正係數 η_1 にありては、1 との差極めて大なるのみならず、同種断面群の中にありても個々の値と平均値との間に可なり誤差あり。従つて狭長矩形の組成断面に適用するに方りては、サン・ヴナンの (269) 及び (271) 式を使用するよりも、フエップルの (270) 及び (272) 式を使用するを以て、優れりとす可きを結論するに足る。此の間の關係は、之を次の如き十字断面の實驗に對比すれば、一層明瞭なるものあり。

第五十四圖の如き十字断面に於ては、 η_1 及び η_2 を常數と取ること能はず、その間に可なりの變動あること次表の如し。

表中 r は内角の曲率半徑にして、展鐵の剛性係數は $G=830,000 \text{ kg/cm}^2$ と取りて計算したるものとす。



第五十四圖

第二十三表 扭力角に關するフエップルの實驗 (その二)

番 號	十字断面寸法 (cm)				觀測值 $J(\text{cm}^4)$	サン・ヴナン		フエップル	
	l	s_1	s_2	r		$J, \text{公式}(269)$	η_1	$J, \text{公式}(270)$	η_2
1	6.03	2.0	2.0	0.5	35.0	54.08	0.65	27.10	1.29
2	6.03	1.03	1.03	0.5	4.9	10.78	0.45	4.01	1.22
3	6.03	1.03	0.39	0.5	2.63	4.23	0.62	2.29	1.15
4	6.02	0.39	0.39	0.5	0.38	0.779	0.49	0.240	1.58
5	6.03	0.39	0.39	0.25	0.28	0.779	0.36	0.240	1.17

此の表に於ける J の値は、内角に於ける曲率の存在を無視して計算せられたるものなるが故に、幅 s に比して曲率半径が大なる第四號の實驗の如き場合には、可なりの誤差を含む事となり、 $\eta_2=1.58$ の如き異常なる値を示したれど、その他の場合にありては、 $\eta_2=1.151-.30$ と取ることを得可く、 η_2 の値にはさしたる變動なきに反し、 η_1 の値には極めて大なる變動あり。従つて斯の如き断面に就てはサン・ザナン (269) 及び (271) 式を使用するよりも、フエップルの (270) 及び (272) 式を使用することが、より正確なる結果を所期し得可きを認定するに足る。

フエップルの公式 (270) とウエエバアの公式 (197) とを比較すれば、幅 s が一定なる場合には

$$\theta = \frac{3M_d}{G} \frac{1}{s^3 \sum l}, \quad \theta = \frac{3M_d}{G} \frac{1}{s^3 l_c}$$

にして、此の兩式の與ふる θ が相等しき場合には $\sum l = l_c$ ならざる可らず。而して理論上は勿論、實際上に於ても $\sum l$ は l_c に等しからざるが故に、フエップルは補正係數 η_2 を用ひ $\eta_2 \sum l$ として、實驗の結果と符合せしめんことを期したりしが内角曲率の影響を無視したるは、明らかにフエップルの公式の最大缺點なり。之に對してウエエバアには實驗の徴す可きものなしと雖も、之を實驗の結果と符合せしむるために、假令補正係數 η_3 の如きものを必要とし、 $\eta_2 \sum l = \eta_3 l_c$ の如き關係に置かるるものとしても、此の η_3 は極めて 1 に近かる可きは、ウエエバアの公式が内角曲率の影響を考慮したる點に於てフエップルに比して、より合理的なる假定の上に立てる事實より、推論し得るに庶し。

フエップルの實驗は、更に進んで 2 個の \perp 字鐵を銜綴して作りし十字断面の軸に及び、此等の断面にありては、單一體の十字断面に比して著しく小なる J 、従つて η_2 を與ふ可きことを指摘したれど、茲にはその詳論を省く。

第八章 軸の曲面の研究

次に少しく、軸が扭力を蒙りたる場合の横断面の彎曲に就て研究せんとす。

1. 圓形断面の軸

此の時は $\xi=0$ にして、縦變位なきが故に、横断面は彎曲を起さず。變形後も猶ほ横断面は始めの平面を保つ可きこと、前述の如し。實に圓形は、扭力を蒙りて後も、横断面が彎曲を起さざる唯一の断面形状とす。

2. 楕圓形断面の軸

此の場合には (23) 式によりて

$$\xi = -\theta \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2} yz = -\theta \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} yz, \quad \frac{b}{c} = n$$

即ち横断面は變形後、双曲拋物曲面となること前述の如し。ξ の値は $y=0$, $z=0$ の何れに對しても零なるが故に、楕圓の兩軸に沿ひては $\xi=0$ 、即ち兩主軸は變形後も猶ほ、始めの平面上に止まる。

今 (23) 式を書き改めて

$$\xi = -\theta \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} bc \frac{y}{b} \frac{z}{c} = \theta bc \frac{1 - n^2}{1 + n^2} \frac{y}{b} \frac{z}{c}$$

とせば、 $\theta bc(1-n^2)/(1+n^2)$ は楕圓の寸法及び扭力率の大きさに依りて定まる常數なるが故に、之を K_1 と置く時は

$$\xi = K_1(y/b)(z/c), \quad K_1 = \theta bc(1-n^2)/(1+n^2)$$

y, z が共に正なる場合の、 $y/b, z/c$ の種々の値に對する ξ/K_1 の變化は次表の如し。但し楕圓にありては、 $(y/b)^2 + (z/c)^2 = 1$ なるが故に

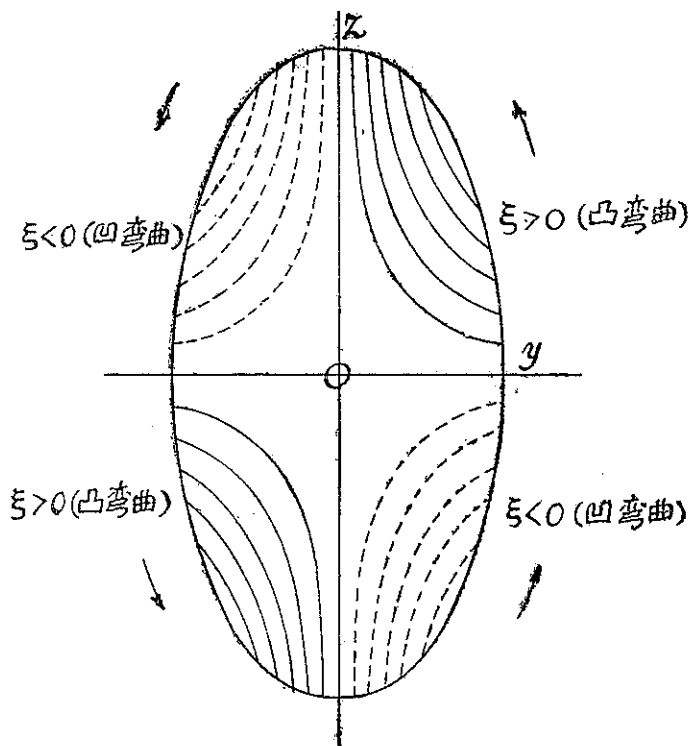
$$\frac{y}{b} = \sqrt{1 - \left(\frac{z}{c}\right)^2}, \quad \frac{z}{c} = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}$$

なる要件あり。

第二十四表 楕圓形断面に於ける ξ/K_1 の値

$\frac{y/b}{z/c}$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.1	0	0.01	0.20	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.09
0.2	0	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10	0.12	0.14	0.16	0.18	0.18
0.3	0	0.03	0.06	0.09	0.12	0.15	0.18	0.21	0.24	0.27	0.27
0.4	0	0.04	0.08	0.12	0.16	0.20	0.24	0.28	0.32	0.36	0.36
0.5	0	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.40	0.40
0.6	0	0.06	0.12	0.18	0.24	0.30	0.36	0.42	0.48	0.48	0.48
0.7	0	0.07	0.14	0.21	0.28	0.35	0.42	0.49	0.49	0.49	0.49
0.8	0	0.08	0.16	0.24	0.32	0.40	0.48	0.48	0.48	0.48	0.48
0.9	0	0.09	0.18	0.27	0.36	0.36	0.36	0.36	0.36	0.36	0.36
1.0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

第一象限 ($y > 0, z > 0$) 及び第三象限 ($y < 0, z < 0$) にありては $\xi > 0$ 、即ち彎曲は凸彎曲、サン・ヴナンの所謂凸出 (saillie) にして、第二象限 ($y < 0, z > 0$) 及び



第五十五圖

第四象限 ($y > 0, z < 0$) にありては $\xi < 0$, 即ち彎曲は凹彎曲, サン・ヴナンの所謂凹退 (creux) なり。

第二十四表の値を取りて, 断面の凸彎曲と凹彎曲とを等高線の圖法を用ひて示せば, 第五十五圖の如し。

而して ξ の最大値は $(y/b)(z/c)$ 即ち $(y/b)\sqrt{1 - (y/b)^2}$ の最大値に伴つて起るが故に

$$\frac{d}{dy} \left[\frac{y}{b} \sqrt{1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2} \right] = \frac{1}{b} \left[1 - 2\left(\frac{y}{b}\right)^2 \right] \left[1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} = 0,$$

$$\therefore \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = 0.707$$

此の時の ξ を ξ_0 とすれば, $\xi_0 = 0.5 \theta bc (1 - n^2) / (1 + n^2)$ とす。

3. 正三角形断面の軸

此の場合には (25) 式より

$$\xi = -\frac{3y^2 z - z^3}{\sqrt{3}b} \theta = -\frac{3y^2 - z^2}{\sqrt{3}b} \theta z$$

此の式に於て $\xi = 0$ と置けば, $z = 0, z = \pm\sqrt{3}y$ にして, $z = 0$ は y 軸 (第七圖参照) 即ち中線 AOA' を表はし, $z = \pm\sqrt{3}y$ は中線 COC', BOB' を表はすが故に, 正三角形の 3 中線上に於ては $\xi = 0$, 即ち 3 中線は變形後も猶ほ, 始めの平面上に止まる。而して正三角形の 3 中線は, 此の正三角形を 6 個の相等しき直角三角形に分つが故に, その 1 個に就て ξ を計算すれば他の 5 個に就ては, 交

互にその符號を變ずることに依りて、曲面を圖示することを得可し。今假りに直角三角形 $A'OB$ に就て ξ を計算せんか、此の場合の y の最大値は $y_0 = -b/2\sqrt{3}$

$$\therefore \left(\frac{y}{b}\right)_{max} = -\frac{1}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{6} = -0.28867$$

而して $z = -\sqrt{3}y$ なるが故に、 z の最大値は、 $z_0 = -\sqrt{3}(-b/2\sqrt{3}) = b/2$

$$\therefore \left(\frac{z}{b}\right)_{max} = 0.5$$

(25) 式を書き改めて

$$\xi = -\frac{3y^2z - z^3}{\sqrt{3}b^3} \theta b^2 = -\frac{\theta b^2}{\sqrt{3}} \left[3\left(\frac{y}{b}\right)^2\left(\frac{z}{b}\right) - \left(\frac{z}{b}\right)^3 \right]$$

とせば、 $\theta b^2/\sqrt{3}$ は三角形の寸法及び扭力率の大きさに依りて定まる常數なるが故に、之を K_2 と置く時は

$$\xi = -K_2 \left[3\left(\frac{y}{b}\right)^2\left(\frac{z}{b}\right) - \left(\frac{z}{b}\right)^3 \right], \quad K_2 = \frac{\theta b^2}{\sqrt{3}}$$

直角三角形 $A'OB$ に就て、 $z = -\sqrt{3}y$ の範圍内に於て、 y/b , z/b の種々の値に對する $-\xi/K_2$ の變化は次表の如し。

第二十五表 正三角形断面に於ける $-\xi/K_2$ の値

y/b	0	-0.05	-0.1	-0.15	-0.2	-0.25	-0.28867
0	0	0	0	0	0	0	0
0.05		0.00025	0.001375	0.00325	0.005375	0.00925	0.012375
0.1			0.002	0.00575	0.011	0.01775	0.024
0.15			0.001125	0.00675	0.014625	0.02475	0.034125
0.2				0.0055	0.016	0.0295	0.042
0.25				0.00125	0.014375	0.03125	0.046875
0.3					0.009	0.02925	0.048
0.35						0.02275	0.044625
0.4						0.011	0.036
0.45							0.021375
0.5							0

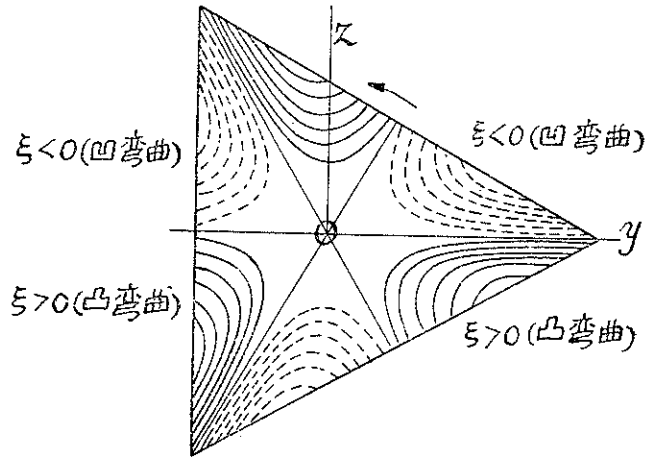
第二十五表の値を取りて、断面の凸彎曲と凹彎曲とを等高線の圖法を用ひて示せば第五十六圖の如し。即ち此の場合には 3 個の凸彎曲と 3 個の凹彎曲とを生ず。而して ξ の最大値は $3(y/b)^2(z/b) - (z/b)^3$ の最大値に伴つて起り、之を ξ_0 とせば、 ξ_0 は三角形の邊（此の場合には $y = -b/2\sqrt{3}$ ）上に起る可きが故に

$$3\left(\frac{y}{b}\right)^2\left(\frac{z}{b}\right) - \left(\frac{z}{b}\right)^3 = \frac{1}{4}\left(\frac{z}{b}\right) - \left(\frac{z}{b}\right)^3,$$

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{z}{b} \right) - \left(\frac{z}{b} \right)^3 \right] = \frac{1}{b} \left[\frac{1}{4} - 3 \left(\frac{z}{b} \right)^2 \right] = 0,$$

$$\frac{z}{b} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = -\frac{y}{b} = 0.28867$$

$$\text{従つて } \xi_0 = -\frac{\theta b^2}{\sqrt{3}} \cdot 2 \left(\frac{1}{2\sqrt{3}} \right)^3 = -0.04811 \frac{\theta b^2}{\sqrt{3}} = -0.02778 \theta b^2$$



第五十六圖

3. 正方形断面の軸

(42) 式を書き改めて

$$\xi = \theta b^2 \left[-\frac{y}{b} \frac{z}{b} + \frac{1}{8} \left(\frac{4}{\pi} \right)^3 \sum \frac{(-1)^{n+1} \sinh(2n-1) \frac{\pi}{b} y \sin(2n-1) \frac{\pi}{b} z}{(2n-1)^3 \cosh(2n-1) \frac{\pi}{2}} \right]$$

$$= \theta b^2 \left[\frac{y}{b} \frac{z}{b} - \frac{1}{8} \left(\frac{4}{\pi} \right)^3 \sum \frac{(-1)^{n+1} \sinh(2n-1) \frac{\pi}{b} z \sin(2n-1) \frac{\pi}{b} y}{(2n-1)^3 \cosh(2n-1) \frac{\pi}{2}} \right]$$

$$= \theta b^2 \psi_1 \left(\frac{y}{b}, \frac{z}{b} \right)$$

$y/b, z/b$ の種々の値に對して, $\psi_1(y/b, z/b)$ を計算したるものは次の如し。

$$\xi = K_3 \psi_1(y/b, z/b), \quad K_3 = \theta b^2, \quad \therefore \psi_1(y/b, z/b) = \xi / K_3$$

但し正方形の兩主軸は之を 4 個の正方形に分つが故に, 次表はその内の 1 個に就ての計算なり。

第二十六表より 正方形の兩主軸及び對角線に沿ひて $\xi=0$ なることを知り得るが故に, 兩主軸と兩對角線とは變形後も始めの平面上に止まること前掲の如し。

第二十六表 正方形断面に於ける ξ/K_2 の値

$\begin{matrix} y/b \\ z/b \end{matrix}$	0	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
0.5	0	-0.00869	-0.01697	-0.02439	-0.03048	-0.03474	-0.03654	-0.03519	-0.02971	-0.01889	0
0.45	0	-0.00641	-0.01240	-0.01755	-0.02140	-0.02345	-0.02311	-0.01971	-0.01237	0	0.01889
0.4	0	-0.00453	-0.00866	-0.01199	-0.01411	-0.01452	-0.01273	-0.00811	0	-0.01237	0.02971
0.35	0	-0.00304	-0.00572	-0.00766	-0.00850	-0.00781	-0.00514	0	-0.00811	0.01971	0.03519
0.3	0	-0.00191	-0.00349	-0.00445	-0.00441	-0.00306	0	0.00514	0.01273	0.02311	0.03654
0.25	0	-0.00109	-0.00192	-0.00219	-0.00165	0	0.00306	0.00781	0.01452	0.02345	0.03474
0.2	0	-0.00055	-0.00088	-0.00077	0	0.00165	0.00441	0.00850	0.01411	0.02140	0.03048
0.15	0	-0.00022	-0.00028	0	0.00077	0.00219	0.00445	0.00766	0.01199	0.01755	0.02439
0.1	0	-0.00006	0	0.00028	0.00088	0.00192	0.00349	0.00572	0.00866	0.01240	0.01697
0.05	0	0	0.00006	0.00022	0.00055	0.00109	0.00191	0.00304	0.00453	0.00641	0.00869
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

而して断面の彎曲は兩主軸及び兩對角線の兩側に於て、同形の凸彎曲と凹彎曲とが對稱的に相隣りす可きこと、理論上は勿論、第二十六表の數字に依るも亦極めて明白なるが故に、断面の彎曲は第五十七圖の示すが如く、4個の凸彎曲と4個の凹彎曲とより成る。

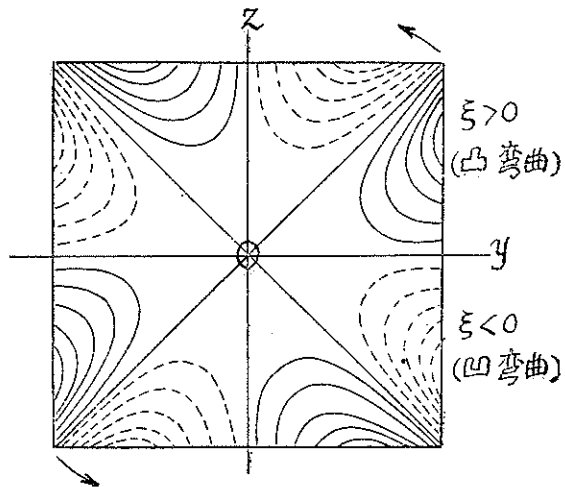
5. 矩形断面の軸

(33) 式の括弧内の式を $\psi_2(y/b, z/h)$ を以て表はせば

$$\xi = \theta b h \psi_2(y/b, z/h) = K_4 \psi_2(y/b, z/h), \quad K_4 = \theta b h, \quad \therefore \psi_2(y/b, z/h) = \xi / K_4$$

$\psi_2(y/b, z/h)$ は $y/b, z/h$ の函數たるに止まらず、同時に h/b の函數なるが故に h/b の値を任意に假定するに非ざる限り、 $\psi_2(y/b, z/h)$ を計算すること能はず。今 $h/b=2$ としたる場合の $\psi_2(y/b, z/h)$ の値を計算すれば、次表の如し。

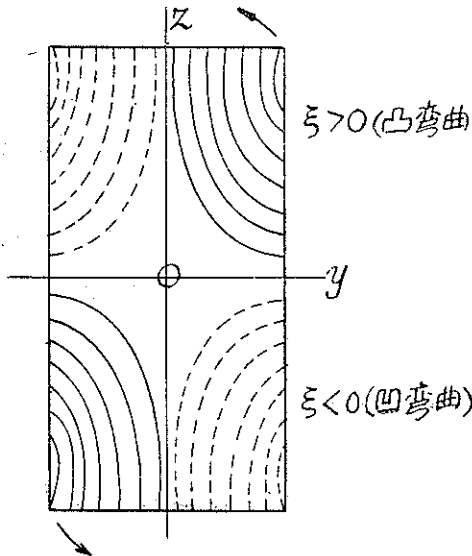
因みに第二十四及び第二十五表は著者の計算する所なれど、第二十六及び第二十七表はサン・ヴナンの論文 (Saint-Venant: Mémoire sur la torsion, 1853 年) 中の計算表を取り、著者の與へたる公式はサン・ヴナンの原式とは、多少その形を異にするが故に、之に適當なる補正を施したるものとす。



第五十七圖

第二十七表 矩形断面に於ける ξ/K_1 の値 ($h/b=2$)

z/c y/b	0	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
0.5	0	0.02145	0.04254	0.06288	0.08202	0.09935	0.11409	0.12515	0.13098	0.12914	0.11479
0.45	0	0.01899	0.03763	0.05553	0.07224	0.08717	0.09954	0.10829	0.11191	0.10811	0.09299
0.4	0	0.01662	0.03290	0.04848	0.06290	0.07562	0.08589	0.09270	0.09467	0.08982	0.07544
0.35	0	0.01433	0.02835	0.04171	0.05399	0.06468	0.07308	0.07831	0.07912	0.07390	0.06081
0.3	0	0.01213	0.02397	0.03520	0.04547	0.05429	0.06107	0.06501	0.06506	0.05997	0.04847
0.25	0	0.00999	0.01973	0.02894	0.03731	0.04442	0.04976	0.05266	0.05229	0.04766	0.03792
0.2	0	0.00791	0.01562	0.02289	0.02946	0.03499	0.03906	0.04114	0.04057	0.03665	0.02876
0.15	0	0.00589	0.01162	0.01701	0.02186	0.02592	0.02885	0.03023	0.02970	0.02664	0.02067
0.1	0	0.00390	0.00770	0.01126	0.01446	0.01712	0.01902	0.01991	0.01946	0.01736	0.01337
0.05	0	0.00195	0.00383	0.00561	0.00720	0.00851	0.00945	0.00987	0.00963	0.00856	0.00656
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0



第五十八圖

第二十七表の値を圖示すれば第五十八圖を得。即ち兩主軸に沿ひては $\xi=0$ なるが故に、兩主軸は變形後も猶ほ、始めの平面上に止まり、兩主軸に依りて分たる 4 個の象限の内、對角線的に相對する 2 個は凸彎曲、同じく他の 2 個は凹彎曲なり。

第二編 軸の破壊
第一章 軸の經濟的形狀
第一節 斷面積と應力度との關係

第一編第五章に掲げたる (223) 式を書き改むる時は

$$\tau_1 = \frac{1}{C_1} \frac{M_d}{\sqrt{f^3}} \dots \dots \dots (223_1)$$

なるが故に、一定の扭力率 M_d を與ふる時は、同一の斷面積 f を有する種々の斷面形狀の軸に於ける最大應力度 τ_1 は、係數 C_1 に逆比例す。従つて之を橢圓に就て檢するに、橢圓形斷面に就ては $C_1 = 0.2821\sqrt{b/c}$ なるが故に、 $b \leq c$ として橢圓の短軸に比して長軸が大なれば大なる程、換言すれば橢圓が扁平となればなる

程、 $\sqrt{b/c}$ 従つて C_1 が小さくなり、 τ_1 は反對に大きくなる。而して之を圓形斷面に對する係數 $C_1=0.2821$ と比較すれば、 $b=c$ の場合に於て橢圓は圓となり、 τ_1 の値最小なることを知るが故に、圓形斷面は橢圓形斷面に比して一層經濟的なることを結論し得可し。

次に矩形に就て之を検するに、サン・ザナンに依れば $C_1=(1/3)f_3(h/b)\sqrt{b/h}$ にして、 $b/h=1$ の時は $C_1=0.20817$ 、 $b/h=1/2$ の時は $C_1=0.17383$ 、 $b/h=1/4$ の時は $C_1=0.14083$ 、即ち第二表より $f_3(h/b)$ は h/b と共に増減すれど、 C_1 は h/b と反對に増減するを以て、 $h=b$ 即ち正方形の場合に C_1 の値最大、従つて τ_1 の値最小となる。換言すれば矩形の内正方形が最も經濟的なることを知る可し。 而して圓形と正方形とを比較せば、前者に對しては $C_1=0.2821$ 、後者に對しては $C_1=0.20817$ なるを以て、圓形斷面は又正方形斷面よりも一層經濟的なり。

次に正多角形を比較するに、正三角形の場合には $C_1=0.175$ 、正方形の場合にはサン・ザナンに従つて $C_1=0.20817$ 、正六角形の場合にはヘルマンに従つて、 $C_1=0.21896$ 正八角形の場合には同じくヘルマンに従つて $C_1=0.22877$ なるを以て正多角形はその邊數が増加すれば、する程經濟的となり、正多角形の邊數が無限に増大した極限の場合即ち圓形斷面が最も經濟的なることを知る可し。 之を要約すれば、同一の斷面積を有する種々の斷面形狀の軸の内、一定の扭力率に對して最小の最大應力度を與ふるものは、圓形斷面なることを知るが故に、圓形斷面は軸として最も經濟的なる斷面形狀なりと稱することを得。

第二節 斷面形狀と破壊強度との關係

實驗の結果に徴するに、軸材料の破壊強度は單に材料の種類に依りてその値を異にするに止まらず、又軸の斷面形狀の異なるに従ひ同一材料に就てもその間に大差あり。

破壊強度と斷面形狀との間に於ける此の關係は、前節に於ける結論に多少の變更を必要ならしむるものあり。例へば甲の斷面形狀に於ける最大應力度が乙の斷面形狀に於けるそれよりも小にして、従つて前者を後者よりも經濟的なりと斷定したる場合にありても、若し前者の斷面形狀に於ける破壊強度が、後者の斷面形狀に於けるそれよりも小なる場合には、前者が後者に先立つて破壊する場合ある可きは、之を想像するに難からず。假りに前者に於ける最大應力度が、後者のそ

れの $1/n$ に過ぎざる場合を想像するとしても、前者に於ける破壊強度が後者のその $1/n$ に當る時は、同一の斷面積、従つて同量の材料を使用して同一の扭力率に對し、兩者は同時に破壊すべきが故に經濟的斷面として兩者の間に何等の區別をも認め難きは理の當然なり。

次に斷面形狀と破壊強度との間の關係を示さんが爲めに、バツハの鑄鐵軸に關する實驗の二、三を引用すべし。軸の破壊強度 K_a を求める公式は、矩形に就ては著者はサン・ヴナンに從つて係數を定めたるが故に、 K_a はバツハがグラスホフに從つて算出せるものとはその値を異にす。

第二十八表 鑄鐵軸に關するバツハの實驗 その一

$$\text{破壊抗張強度 } K_z = (1,655 + 1,480 + 1,601)/3 = 1,579 \text{ kg/qcm}$$

斷面形狀	供試體員數	寸 法 (cm)	使用公式	破壊抗扭強度 K_a (kg/qcm)	K_a/K_z
矩形, $h/b=1$	4	$b=3.15$ $h=3.20$	$K_a=4.8 M_a/b^2 h$	2,376	1.50
同	2.5	$b=3.13$ $h=7.82$	$K_a=3.9 M_a/b^2 h$	2,192	1.39
同	5	$b=3.08$ $h=15.07$	$K_a=3.5 M_a/b^2 h$	1,840	1.17
同	9	$b=1.66$ $h=15.13$	$K_a=3.3 M_a/b^2 h$	1,839	1.16
圓 形	3	$d=10.23$	$K_a=(16/\pi) M_a/d^3$	1,618	1.02
同	1	$d=9.6$	„	1,655	1.05
同 (中空)	3	$d=10.2$ $d_0=6.97$	$K_a=(16/\pi) M_a d/(d^4-d_0^4)$	1,297	0.82
正方形 (中空)	4	$b=6.21$ $b_0=3.16$	$K_a=4.8 M_a b/(b^4-b_0^4)$	1,907	1.21

第二十九表 鑄鐵軸に關するバツハの實驗 その二

$$\text{破壊抗張強度 } K_z = (1,766 + 1,621 + 1,649)/3 = 1,679 \text{ kg/qcm}$$

斷面形狀	供試體員數	寸 法 (cm)	使用公式	破壊抗扭強度 K_a (kg/qcm)	K_a/K_z
矩形, $h/b=1$	4	$b=3.19$ $h=3.33$	$K_a=4.8 M_a/b^2 h$	2,768	1.65
同	1	$b=3.11$ $h=3.11$	„	2,948	1.76
圓形 (中空)	2	$d=10.23$ $d_0=6.95$	$K_a=(16/\pi) M_a d/(d^4-d_0^4)$	1,439	0.86
同	1	$d=9.65$ $d_0=7$	„	1,360	0.81

第三十表 鑄鐵軸に關するバツハの實驗 その三

$$\text{破壊抗張強度 } K_z = 2,252 \text{ kg/qcm}$$

斷面形狀	供試體員數	寸 法 (cm)	使用公式	破壊抗張強度 K_a (kg/qcm)	K_a/K_z
矩形, $h/b=2.5$	3	$b=5.17$ $h=12.32$	$K_a=3.9 M_a/b^2 h$	2,906	1.29
梯 形	3	$b_1=5.14$ $b_2=2.81$ $b=3.97$ $h=12.37$	$K_a=4.5 M_a/b^2 h$	3,498	1.55
二等邊三角形	3	$a=5.24$ $b=3.34$ $h=11.99$	„	3,097	1.38
正三角形	3	$a=9.37$ $b=4.69$ $h=8.12$	„	3,430	1.52

上の表に於ては軸の破壊抗扭強度の算出に (103), (107), 及び (216) の如き公式を使用したれど、此の點に關して二重の誤謬に陥れることを認めざる可らず。その一は、此等の公式は完全なる彈體に關する公式なるが故に、嚴密なる意味に於ては、之を鑄鐵に使用す可らず、況んや軸破壊の刹那に於ては如何なる實地上の物體も之を彈體と見做す可らざるに關せず、上掲の計算が彈體に對する公式に基づきてなされたること、その二は、此等の公式は軸の最大應裁力度を表はす可き公式にして、鑄鐵軸の破壊は應裁力に基づかざるを以て、此の最大應裁力度をそのまゝ破壊抗扭強度と取ること能はざる事實を無視せること、之なり。此の點に關しては後に詳論すべしと雖も、而も猶ほ斯の如き方法の下に算出せられたる破壊強度の値が、斷面形狀によりて著しく異なるものあるは、上記 3 表によりて之を窺ふ事を得べし。猶ほ之を曩きに紹介せるパウシンガアの實驗によりて、檢證すれば次の如し。但しパウシンガアは矩形の扭力角を求むる公式に就ては公式 (259) を使用してサン・ヴナンの係數 C_3 を採用せるに係らず、破壊強度の算出に就ては (216) 式を使用してグラスホフの係數 ψ を採用せるは、理論として不合理なるを免れず。著者は此の場合にも、サン・ヴナンの係數 ψ を使用することの妥當なるを認むるが故に、パウシンガアの計算を改む。

第三十一表 鑄鐵軸に關するパウシンガアの實驗

斷面形狀	番號	寸法 (cm)	M_t (ton)	使用公式	破壊抗扭強度 K_t (kg/cm)	
圓 形	A	$r=4.057$	200.9	$K_t = \frac{2}{\pi} \frac{M_t}{r^3}$	1,915	
	B	$r=4.08$	211.7		1,985	
橢圓形, $c/b=2$	A	$b=2.94 \quad c=5.675$	182.0	$K_t = \frac{2}{\pi} \frac{M_t}{b^2 c}$	2,362	
	B	$b=2.93 \quad c=5.700$	209.1		2,720	
正 方 形	A	$b=7.23 \quad h=7.40$	200.9	$K_t = 4.8 \frac{M_t}{b^2 h}$	2,493	
	B	$b=7.24 \quad h=7.40$	221.4		2,740	
矩 形, $h/b=2$	A	$b=5.20 \quad h=10.23$	157.4	$K_t = 4.1 \frac{M_t}{b^2 h}$	2,333	
	B	$b=5.13 \quad h=10.23$	174.7		2,660	
同	4	A	$b=2.77 \quad h=10.11$	58.4	$K_t = 3.6 \frac{M_t}{b^2 h}$	2,712
		B	$b=2.67 \quad h=10.29$	49.1		2,507

パウシンガアが $K_t = 4.5 M_t / b^2 h$ として計算せるものは、正方形に對して平均 $K_t = 2,450$, 邊長比 $h/b=2$ の矩形に對して平均 $K_t = 2,740$, 邊長比 $h/b=4$ の矩形に對して平均 $K_t = 3,260$ を得たるが故に、圓形と橢圓形とを比較すれば、前者の方強度小さく、矩形を比較すれば正方形は強度最小にして、矩形が扁平になるに従つて強度の増進することを示す數字的結論を得たり。此の現象に對してパウシンガアは説明を試みて言はく——圓形斷面にありては最大應力は周邊上の凡ての

點に起るに反し、橢圓形斷面にありては短軸の兩端に起るに過ぎず。又正方形にありては最大應力は 4 邊の各中點に起るに反し、矩形にありては長邊の各中點に起るに過ぎず、抗張材の破壊に方りては斷面の全面に最大應力度が起れども、桁の破壊に方りては最大應張力度は單に抗張邊維に起るに過ぎざるが故に、同一材料を以てしても、その抗張材としての強度よりも桁としての強度の方が一層大なると同一の理由に依り、扭力に對しても圓形斷面は橢圓形斷面より強度小さく、正方形斷面は矩形斷面より強度小さかる可く、而して圓形斷面は凡ての斷面の中、強度最小なる可きは容易に之を是認し得可しと。

此の説明は明らかに一面の眞理を傳ふと雖も、矩形斷面にして必ずしも正方形斷面より強度大ならざるものあるは、上掲バウシंगाアの實驗 (K_a に對する著者の計算に依る) 既に之を證するのみならず、バハの實驗 (第二十八表) にありては、却つて正方形に於て強度の最大なるを見る。

既に物體破壊の刹那に於て (216) 式を使用することの當否に關して根本的の疑義あるに關せず、僅少の實驗より結論してバウシंगाアの如き斷定に到達せんとするは、聊か早計に失する譏りを免れず、況んやその計算がグラスホフの如き略式の上に立脚するに於てをや。

唯バハの實驗とバウシंगाアの實驗とに論なく、之を通覽して見遁し難き共通の現象は、圓形斷面に於て強度最小なる一事なりとす。特にバハの實驗に於て重要なる觀察點は、充斷面に比して中空斷面の強度が著しく減殺せらるゝことにして、此の現象は單に鑄鐵のみならず、混凝土の實驗に於ても之を認むる事を得可く (鋼にありては中空斷面のものは、破壊に先立ちて壓潰せらるゝが故に、正確に此の現象を觀察し難し) 軸破壊の刹那に於ける應力の分布を研究する上に於て、肝要なる論點を構成するものとす。(後章參照)

前節に於て述べたるが如く、圓形斷面は同一斷面積の種々の軸の中、一定の扭力率に對して、最小なる最大應力度を與ふるものなれど、抗扭強度が前述の如く圓形斷面に於て最小なりとせば、果して圓形が軸として最適の經濟的斷面なりや否やは、俄かに之を斷定す可らず。バウシंगाアの實驗を取りて此の間の關係を研究せんに、同一の斷面積を有するバウシंगाアの 5 種の軸に於ては、 M_a を一定と取れば最大應力度 τ_1 は C_1 に反比例するが故に、次の關係あり。

$$(\tau_1)_1 : (\tau_1)_2 : (\tau_1)_3 : (\tau_1)_4 : (\tau_1)_5 = \frac{1}{0.2821} : \frac{\sqrt{2}}{0.2821} : \frac{1}{0.20817} : \frac{1}{0.17383} : \frac{1}{0.14083}$$

$$= 1 : 1.414 : 1.355 : 1.623 : 2.003$$

而して第三十一表よりその強度を比較せば

$$(K_a)_1 : (K_a)_2 : (K_a)_3 : (K_a)_4 : (K_a)_5 = 1,950 : 2,540 : 2,616 : 2,496 : 2,696$$

$$= 1 : 1.30 : 1.34 : 1.28 : 1.38$$

(K_a/τ_1) は以て軸の經濟的斷面の比較に於ける基數を與ふ可きが故に、之を比較せば

$$\left(\frac{K_a}{\tau_1}\right)_1 : \left(\frac{K_a}{\tau_1}\right)_2 : \left(\frac{K_a}{\tau_1}\right)_3 : \left(\frac{K_a}{\tau_1}\right)_4 : \left(\frac{K_a}{\tau_1}\right)_5 = 1 : \frac{1.30}{1.414} : \frac{1.34}{1.355} : \frac{1.28}{1.623} : \frac{1.38}{2.003}$$

$$= 1 : 0.919 : 0.989 : 0.789 : 0.690$$

若し相似斷面の間に於ては抗扭強度が一定なりとの斷定を下し得れば、圓形斷面はその強度が最低なるに係らず、猶ほ軸の斷面として最も經濟的形狀たる地歩を失はず。正方形斷面之に次ぐことを、此等の數字より推定し得可し。抗扭強度が斷面形狀に依りて異なることありとも、幾何學的相似形の間において同一の強度を有す可きは想像に難からずと雖も、而も此の推定は實驗の證明なくしては俄かに之を斷ず可らず。此の點に關しパウシンガアは實驗の結果を公表するの機會ある可きことを、前記 1881 年の報告の末尾に附記したりしが、不幸にして此の豫約せられたる實驗報告は世に表はるることなくして已みぬ。

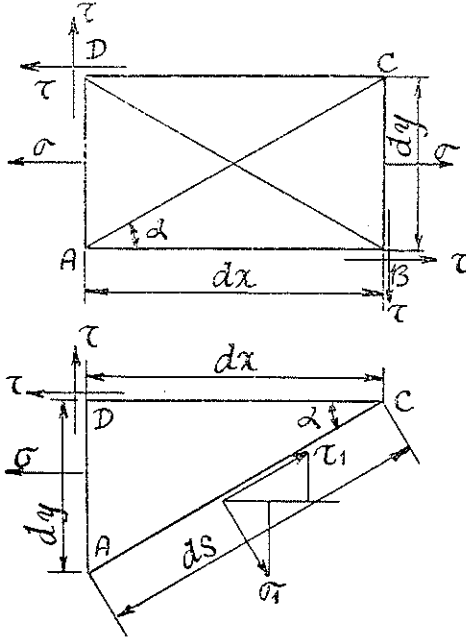
第二章 軸に於ける應力の合成

第一節 扭力率と彎曲率との合成に依る主應力

M_a ; 扭力率, τ ; M_a に依る應裁力,
 M_b ; 彎曲率, σ ; M_b に依る軸應力,

軸が M_a と同時に M_b を蒙る場合には、第五十九圖の上圖の如き軸の一部分 $ABCD$ (AB, CD は軸の中心軸即ち x 軸に平行、 AD, BC は軸の橫斷面即ち $y-z$ の平面に平行とす) を考ふるときは、面 AD, BC には σ 及び τ 、面 AB, CD には τ が働くこと圖の如し。今對角線の面 AC を取りて、此の面に働く垂面應力及び切觸應力を、夫々 σ_1, τ_1 とすれば、 ACD の部分 (第五十九圖下圖) の釣合に關して次の條件あり。

$$\sigma dy dz + \tau dx dz = \sigma_1 ds dz \sin \alpha + \tau_1 ds dz \cos \alpha = \sigma_1 dy dz + \tau_1 dx dz$$



第五十九圖

$$\begin{aligned} \tau dy dz &= \sigma_1 ds dz \cos \alpha - \tau_1 ds dz \sin \alpha \\ &= \sigma_1 dx dz - \tau_1 dy dz \end{aligned}$$

或は $(\sigma_1 - \sigma) \sin \alpha = (\tau - \tau_1) \cos \alpha,$

$$\therefore \sigma_1 - \sigma = (\tau - \tau_1) \cot \alpha$$

$$\sigma_1 \cos \alpha = (\tau + \tau_1) \sin \alpha,$$

$$\therefore \sigma_1 = (\tau + \tau_1) \tan \alpha$$

AC が主面 (Principal plane, le plan principal, die Hauptebene) 従つて σ_1 が主應力 (Principal stress, la pression principale, die Hauptspannung) なる時は

$$\begin{aligned} \tau_1 &= 0, \quad \therefore \sigma_1(\sigma_1 - \sigma) = \tau^2 - \tau_1^2 = \tau^2, \\ \sigma_1^2 - \sigma\sigma_1 - \tau^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{依りて } \sigma_1 = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2} \dots (273)$$

而して主面が軸の中心軸となす角は

$$\tan \alpha = \frac{\sigma_1}{\tau} = \frac{\sigma}{2\tau} \pm \sqrt{\frac{\sigma^2}{4\tau^2} + 1} \dots (274)$$

(273) 式に於ける σ_1 の 2 個の値は、最大及び最小の主應力を與ふるものにして (274) 式に於ける $\tan \alpha$ 従つて α の 2 個の値は、此等の主應力と働く主面を與へ此等 2 個の主面は互に垂直なることは、 $\tan(\pi/2 + \alpha) = -\cot \alpha$ なる關係より容易に之を證明することを得可し。又主面と $\pi/4$ の角を挟む面に於ては、 τ_1 最大にして此の時の τ_1 の値は

$$\tau_1 = \pm \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2} \dots (275)$$

軸が半径 r の圓形断面なる時は、 $\sigma = M_b r / I_1$ 、 $\tau = M_a r / 2I_1$ なるが故に、(273)

式より
$$\sigma_1 = \frac{M_b}{2I_1} r \pm \sqrt{\left(\frac{M_b}{2I_1} r\right)^2 + \left(\frac{M_a}{2I_1} r\right)^2} = \frac{r}{2I_1} [M_b \pm \sqrt{M_b^2 + M_a^2}]$$

今 $M_1 = M_b \pm \sqrt{M_b^2 + M_a^2}$ 、 $M_2 = M_a/2$ と置けば

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} \frac{M_1}{I_1} r, \quad \sigma_1 = \frac{M_2}{I_1} r \dots (276)$$

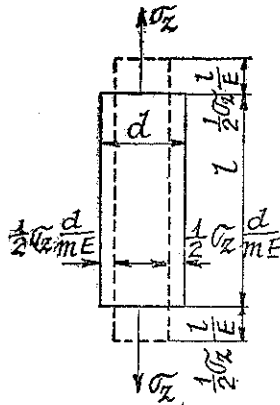
又 (275) 式より
$$\tau_1 = \pm \sqrt{\left(\frac{M_b}{2I_1} r\right)^2 + \left(\frac{M_a}{2I_1} r\right)^2} = \pm \frac{r}{2I_1} \sqrt{M_b^2 + M_a^2}$$

今 $M_3 = \sqrt{(M_b^2 + M_d^2)}$, $M_4 = M_3/2$ と置けば

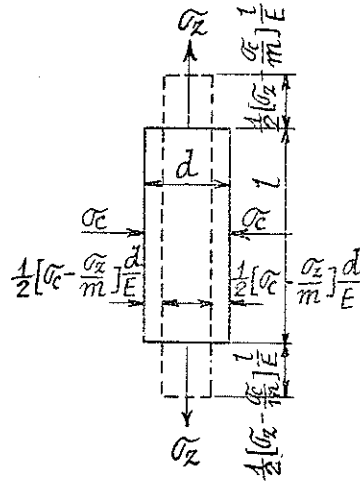
$$\tau_1 = \frac{1}{2} \frac{M_3}{I_1} r, \quad \tau_2 = \frac{M_4}{I_1} r \dots\dots\dots(277)$$

(276) 式の第二式より M_2 を同値彎曲率 (277) 式の第一式より M_3 を同値扭力率と呼ぶことを得可し。

(273) 式を検するに σ_1 の一つの値が正ならば他の値は負なるが故に、主應力の一つは應張力、他は應壓力なることを知る。



第六十圖



第六十一圖

第六十圖の如き抗張材が張力を蒙る結果として、縦變形 ϵl (伸張) を起す時は ϵl は同時に横變形 $\epsilon' d$ (壓縮) を伴ふ。縦變形率に對する横變形率の比、 ϵ'/ϵ は所謂ポアソン比にして、之を $1/m$ を以て表はせば、 $\epsilon'/\epsilon = 1/m$ なるを以て $\epsilon' = \epsilon/m$ なる關係あり。次に第六十一圖の如き抗張材が之と直角の方向に壓力を蒙る時は、張力の方向に於ける張力 σ_z のための變形 ϵl は $\epsilon l = \sigma_z/E$ にして、此の方向に於ける壓力 σ_c のための變形 $\epsilon' l$ は $\epsilon' l = -\sigma_c/(mE)$ なるが故に、此の方向に於ける總變形率は

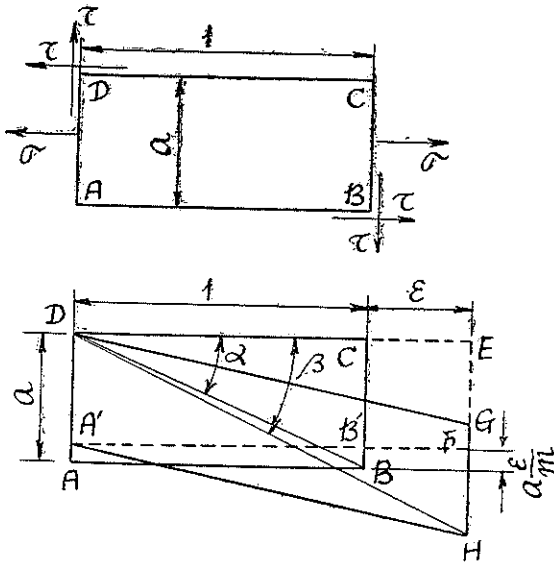
$$\sum \epsilon = \epsilon + \epsilon' = \frac{1}{E} \left(\sigma_z - \frac{\sigma_c}{m} \right)$$

此の關係を (273) 式に適用するに

$$\sigma_z = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2}, \quad \sigma_c = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2}$$

なるが故に、 $\sigma_0 = E \sum \varepsilon$ として

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2} - \frac{1}{m} \left[\frac{\sigma}{2} - \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2} \right] \\ &= \frac{m-1}{m} \frac{\sigma}{2} + \frac{m+1}{m} \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2} \dots\dots\dots (278) \end{aligned}$$



第六十二圖

此の關係は又次の如くにしても
 求めらる。第六十二圖に於て
 $AB=CD=1$, $AD=BC=a$ と取
 り、 AB, CD が應張力 σ のため
 に ε だけ伸び、従つて AD, BC
 が $a\varepsilon/m$ だけ縮まりたりとせば
 始めの形 $ABCD$ は σ のために
 $A'FED$ の如く變形す。次に應裁
 力の影響を考ふるに EF は GH
 の位置に變位す可きが故に、 σ
 τ との合成の結果は $ABCD$ を A'
 HGD の如く變形せしむることゝ
 なる可し。

$$\overline{B'F} = \overline{CE} = \varepsilon \quad \overline{AB} = \varepsilon, \quad \overline{AA'} = \overline{BB'} = \varepsilon' \quad \overline{BC} = \varepsilon \quad \overline{BC} / m = \varepsilon a / m$$

次に $\overline{EG} = \overline{FH} = \varphi \quad \overline{DE} = \varphi \quad (\overline{CD} + \overline{CE}) = \varphi (1 + \varepsilon)$

此の變形の結果、對角線 BD は HD となるが故に、その伸縮率を ε_1 とせば

$$\varepsilon_1 = \frac{\overline{HD} - \overline{BD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{HD}}{\overline{BD}} - 1 = \overline{HD} \cos \alpha - 1$$

然るに $\overline{HD} = (1 + \varepsilon) / \cos \beta$

又
$$\begin{aligned} \tan \beta &= \frac{\overline{EH}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{EG} + \overline{AD} - \overline{AA'}}{\overline{CD} + \overline{CE}} = \frac{\varphi(1 + \varepsilon) + a(1 - \varepsilon/m)}{1 + \varepsilon} \\ &= \frac{\varphi(1 + \varepsilon) + \tan \alpha(1 - \varepsilon/m)}{1 + \varepsilon} \div \frac{\tan \alpha(1 - \varepsilon/m) + \varphi}{1 + \varepsilon} \end{aligned}$$

$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{(1 + \tan^2 \beta)}} \div \frac{1 + \varepsilon}{\sqrt{(1 + 2\varepsilon + 2\varphi \tan \alpha + \tan^2 \alpha - 2\varepsilon/m \cdot \tan^2 \alpha)}}$$

$$\therefore \overline{HD} = \frac{1+\varepsilon}{\cos \beta} \doteq \sqrt{(1+2\varepsilon+2\varphi \tan \alpha + \tan^2 \alpha - 2\varepsilon/m \cdot \tan^2 \alpha)}$$

$$\begin{aligned} \text{依りて} \quad \varepsilon_1 &= \sqrt{(1+2\varepsilon) \cos^2 \alpha + \varphi \sin 2\alpha + \sin^2 \alpha (1-2\varepsilon/m)} - 1 \\ &= \sqrt{1+(2\varepsilon \cos^2 \alpha + \varphi \sin 2\alpha - 2\varepsilon/m \cdot \sin^2 \alpha)} - 1 \\ &\doteq 1 + \varepsilon \cos^2 \alpha + \varphi/2 \cdot \sin 2\alpha - \varepsilon/m \cdot \sin^2 \alpha - 1 \end{aligned}$$

然るに $\varepsilon = \sigma/E$, $\varphi = \tau/G$ 及び後説の如く $1/G = (1/E) \cdot 2(m+1)/m$ なる關係 (m はポアソン比例數) あるが故に、之を入るゝ時は

$$\varepsilon_1 \doteq \cos^2 \alpha \frac{m+1}{m} \frac{\sigma}{E} - \frac{1}{m} \frac{\sigma}{E} + \frac{m+1}{m} \frac{\tau}{E} \sin 2\alpha$$

ε_1 の最大値 ε_0 を求むるには

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon_1}{d\alpha} &= -2 \frac{m+1}{m} \frac{\sigma}{E} \sin \alpha \cos \alpha + 2 \frac{m+1}{m} \frac{\tau}{E} \cos 2\alpha = 0 \\ \therefore \tan 2\alpha &= \frac{2\tau}{\sigma} \dots \dots \dots (279) \end{aligned}$$

(279) 式より $\tan 2\alpha = 2 \tan \alpha / (1 - \tan^2 \alpha) = 2\tau/\sigma$ なるが故に

$$\tau(1 - \tan^2 \alpha) = \sigma \tan \alpha, \quad \tan^2 \alpha + (\sigma/\tau) \tan \alpha - 1 = 0,$$

$$\therefore \tan \alpha = -\sigma/2\tau \pm \sqrt{(\sigma/2\tau)^2 + 1}$$

是れ即ち (274) なり。又 (279) 式より

$$\cos^2 \alpha = \frac{2\tau^2}{\sigma^2 + 4\tau^2 - \sigma\sqrt{(\sigma^2 + 4\tau^2)}}, \quad \sin 2\alpha = \frac{2\tau[-\sigma + \sqrt{(\sigma^2 + 4\tau^2)}]}{\sigma^2 + 4\tau^2 - \sigma\sqrt{(\sigma^2 + 4\tau^2)}}$$

従つて $\sigma_0 = E\varepsilon_0$ と置けば

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \frac{m+1}{m} \left[\frac{2\tau^2\sigma}{\sigma^2 + 4\tau^2 - \sigma\sqrt{(\sigma^2 + 4\tau^2)}} + \frac{2\tau[-\sigma + \sqrt{(\sigma^2 + 4\tau^2)}]\tau}{\sigma^2 + 4\tau^2 - \sigma\sqrt{(\sigma^2 + 4\tau^2)}} \right] - \frac{\sigma}{m} \\ &= \frac{m+1}{m} \frac{2\tau^2}{\sqrt{(\sigma^2 + 4\tau^2)} - \sigma} - \frac{\sigma}{m} = \frac{m+1}{m} \frac{2\tau^2[\sqrt{(\sigma^2 + 4\tau^2)} + \sigma]}{\sigma^2 + 4\tau^2 - \sigma^2} - \frac{\sigma}{m} \\ &= \frac{m-1}{m} \frac{\sigma}{2} + \frac{m+1}{m} \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2} \end{aligned}$$

即ち (278) 式を得たり。

1. 圓形断面の軸

此の時は $\sigma = (4/\pi) M_b/r^3$, $\tau = (2/\pi) M_t/r^3$ なるが故に、物體の許容抗曲強度を k_b とせば、(278) 式より

$$k_b \geq \left[\frac{m-1}{m} \frac{2}{\pi} \frac{M_b}{r^3} + \frac{m+1}{m} \sqrt{\left(\frac{2}{\pi} \frac{M_b}{r^3} \right)^2 + \left(\frac{2}{\pi} \frac{M_t}{r^3} \right)^2} \right]$$

或は

$$k_b \cong \frac{2}{\pi r^3} \left[\frac{m-1}{m} M_b + \frac{m+1}{m} \sqrt{M_b^2 + M_a^2} \right] \dots \dots \dots (280)$$

2. 橢圓形断面の軸 (彎曲率の平面が短軸に平行なる場合)

短軸の端に於て $\sigma = (4/\pi)M_b/b^2c$, $\tau = (2/\pi)M_a/b^2c$ なるが故に, (278) 式を用ひ, (280) 式を得たると同様にして

$$k_b \cong \frac{2}{\pi b^2c} \left[\frac{m-1}{m} M_b + \frac{m+1}{m} \sqrt{M_b^2 + M_a^2} \right] \dots \dots \dots (281)$$

3. 橢圓形断面の軸 (彎曲率の平面が長軸に平行なる場合)

σ は長軸の端に於て最大値に達するに對し, τ は短軸の端に於て最大値に達するが故に, 如何なる位置に於て σ_0 が最大値に達す可きかを, 豫め研究せざる可らず。猶ほ σ_0 の最大値は必ず周邊上に起らざる可らざるが故に, 此の周邊上の點の短軸即ち y 軸よりの距離を z を以て表はせば

$$\sigma = \frac{M_b}{I_2} z = \frac{M_b}{(\pi/4)bc^2} z = \frac{4}{\pi} \frac{M_b}{bc^2} \left(\frac{z}{c} \right)$$

而して (110) 式より
$$\tau = \frac{2}{\pi} \frac{M_a}{b^2c} \sqrt{\left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2} \left(\frac{b}{c}\right)^2$$

y, z は橢圓周邊上の點なるが故に, $(y/b)^2 = 1 - (z/c)^2$

$$\therefore \tau = \frac{2}{\pi} \frac{M_a}{b^2c} \sqrt{1 - \frac{c^2 - b^2}{c^2} \left(\frac{z}{c}\right)^2}$$

故に (278) 式より

$$\begin{aligned} \sigma_0 = & \frac{2}{\pi} \frac{M_b}{bc^2} \left[\frac{m-1}{m} \left(\frac{z}{c}\right) \right. \\ & \left. + \frac{m+1}{m} \sqrt{\left(\frac{z}{c}\right)^2 + \left(\frac{M_a}{M_b}\right)^2 \left(\frac{c}{b}\right)^2 \left\{1 - \frac{c^2 - b^2}{c^2} \left(\frac{z}{c}\right)^2\right\}} \right] \dots (282) \end{aligned}$$

σ_0 の最大値は $d\sigma_0/dz = 0$ より求めらる。此の時の z の値を z_0 と置けば

$$\begin{aligned} k_b \cong & \frac{2}{\pi} \frac{M_b}{bc^2} \left[\frac{m-1}{m} \left(\frac{z_0}{c}\right) \right. \\ & \left. + \frac{m+1}{m} \sqrt{\left(\frac{z_0}{c}\right)^2 + \left(\frac{M_a}{M_b}\right)^2 \left(\frac{c}{b}\right)^2 \left\{1 - \frac{c^2 - b^2}{c^2} \left(\frac{z_0}{c}\right)^2\right\}} \right] \dots (283) \end{aligned}$$

4. 矩形断面の軸 (彎曲率の平面が短邊に平行なる場合)

長邊の中央に於て $\sigma = 6M_b/b^2h$, $\tau = \psi M_a/b^2h$ なるが故に, (278) 式を用ひ

$$k_b \cong \frac{3}{b^2h} \left[\frac{m-1}{m} M_b + \frac{m+1}{m} \sqrt{M_b^2 + \left(\frac{\psi}{3}\right)^2 M_a^2} \right] \dots \dots \dots (284)$$

正方形の場合には $\psi=4.8$ として

$$k_b \geq \frac{3}{b^3} \left[\frac{m-1}{m} M_b + \frac{m+1}{m} \sqrt{M_b^2 + 2.56 M_a^2} \right] \dots\dots (285)$$

5. 矩形断面の軸 (彎曲率の平面が長邊に平行なる場合)

この場合は前掲 3. と同様に推論することを可し。

第二節 撓力率と軸應力との合成に依る主應力

此の場合には軸の断面積 f 、之に垂直の方向に加はる外力 P 、従つて $\sigma=P/f$ として、此の σ を前節の M_b に依る σ と同様に取扱ふ時は、此の場合にも亦 (278) 式を使用し得。

1. 圓形断面の軸

此の場合には $f=\pi r^2$ 、 $\sigma=P/\pi r^2$ 、 $\tau=(2/\pi)M_a/r^3$ なるを以て、物體の許容抗張強度を k_z とせば、(278) 式より

$$k_z \geq \frac{2}{\pi r^3} \left[\frac{m-1}{m} \frac{Pr}{4} + \frac{m+1}{m} \sqrt{\left(\frac{Pr}{4}\right)^2 - M_a^2} \right] \dots\dots (286)$$

(286) 式を (280) 式と對比すれば、此の場合には $M_b=Pr/4$ の彎曲率を蒙りたる場合と同様の結果を生ず。唯 (280) 式は断面周邊上の一みに就てのみ成立すれど、(286) 式は周邊上の凡ての點に就て成立す。

2. 橢圓形断面の軸

此の場合には $f=\pi bc$ 、 $\sigma=P/\pi bc$ 、 $\tau=(2/\pi)M_a/b^2c$ にして

$$k_z \geq \frac{2}{\pi b^2c} \left[\frac{m-1}{m} \frac{Pb}{4} + \frac{m+1}{m} \sqrt{\left(\frac{Pb}{4}\right)^2 + M_a^2} \right] \dots\dots (287)$$

(287) 式を (281) 式と對比すれば、 $M_b=Pb/4$ にして此の場合には (287) 式は短軸の端に就てのみ成立すること (281) 式と同じ。

3. 矩形断面の軸

此の場合には $f=bh$ 、 $\sigma=P/bh$ 、 $\tau=\psi M_a/b^2h$ 、即ち長邊の中央に於て

$$k_z \geq \frac{3}{b^2h} \left[\frac{m-1}{m} \left(\frac{Pb}{6}\right) + \frac{m+1}{m} \sqrt{\left(\frac{Pb}{6}\right)^2 + \left(\frac{\psi}{3}\right)^2 M_a^2} \right] \dots\dots (288)$$

(288) 式を (284) 式と對比して、 $M_b=Pb/6$ の關係あり。

正方形の場合には、 $\psi=4.8$ として

$$k_z \geq \frac{3}{b^2} \left[\frac{m-1}{m} \frac{Pb}{6} + \frac{m+1}{m} \sqrt{\left(\frac{Pb}{6}\right)^2 + 2.56 M_a^2} \right] \dots\dots (289)$$

第三節 扭力率のみに依る主應力

軸が扭力率のみを蒙り、彎曲率若しくは軸應力を蒙ることなき場合には、軸の横断面及び之に垂直なる縦断面には、同一應力度 τ の應裁力が働く。此の作用の下に於ける主面及び主應力を求めることは、前 2 節に於ける $\sigma=0$ の場合に外ならざるが故に、(274) 式に於て $\sigma=0$ とせば、 $\tan \alpha=1$, $\therefore \alpha=\pi/4$ 即ち主面は中心軸に對して $\pi/4$ の角を以て傾斜す可く、又主應力度は (275) 式より $\sigma=0$ として

$$\sigma_0 = \pm \frac{m+1}{m} \tau \dots\dots\dots (290)$$

即ち物體が單純なる扭力の作用を蒙る時は、その中心軸の方向に應裁力 τ 、之に垂直なる横断面に應裁力 τ 、及び之に 45° の角を以て斜交する方向に、夫々 $\sigma_0 = \pm(m+1)/m \cdot \tau$ の應張力及び應壓力を蒙るものとす。

第四節 扭力率と裁力との合成に依る主應力

1. 圓形断面の軸

軸の断面積 f 、裁力 S に直角なる直径に沿へる S に因る應裁力度は最大にして

$$\tau_s = \frac{4}{3} \frac{S}{f} = \frac{4}{3} \frac{S}{\pi r^2}$$

而して断面周邊上の凡ての點に於て、扭力率 M_a に因る應裁力度最大にして

$$\tau_a = \frac{2}{\pi} \frac{M_a}{r^2} \quad (103) \text{ 式参照}$$

故に合成應裁力度は、 S に直角なる直径の端に於て最大となり

$$\tau = \tau_s + \tau_a = \frac{4}{3} \frac{S}{\pi r^2} + \frac{2M_a}{\pi r^2} = \frac{4}{\pi r^2} \left(\frac{S}{3} + \frac{M_a}{2r} \right) \dots\dots\dots (291)$$

主應力度 σ_0 を求めるには、(291) 式を (290) 式に適用す可し。

2. 橢圓形断面の軸

短軸に對して垂直の方向に S が働くときは、短軸に沿へる S に因る應裁力度は最大にして

$$\tau_s = \frac{4}{3} \frac{S}{f} = \frac{4}{3} \frac{S}{\pi bc}$$

短軸の兩端に於ける扭力率 M_a に因る應裁力度は最大にして

$$\tau_a = \frac{3}{\pi} \frac{M_a}{b^2c} \quad (111) \text{ 式参照}$$

故に合成應裁力度は短軸の端に於て最大となり

$$\tau = \tau_s + \tau_a = \frac{4}{3} \frac{S}{\pi bc} + \frac{2M_a}{\pi b^2 c} = \frac{4}{\pi bc} \left(\frac{S}{3} + \frac{M_a}{2b} \right) \dots \dots (292)$$

(292) 式を (290) 式に適用して、主應力度 σ_0 を得。

3. 矩形断面の軸

裁力 S は短邊に垂直の方向を取るものとすれば、短邊に平行する主軸に沿へる τ_s は最大にして

$$\tau_s = \frac{3}{2} \frac{S}{f} = \frac{3}{2} \frac{S}{bh}$$

此の主軸の兩端即ち長邊の中點に於ては、 τ_a 最大にして

$$\tau_a = \psi \frac{M_a}{b^2 h} \quad (216) \text{ 式参照}$$

従つて此の主軸の端に於て

$$\tau = \tau_s + \tau_a = \frac{3}{2} \frac{S}{bh} + \psi \frac{M_a}{b^2 h} = \frac{3}{2} \frac{1}{bh} \left(S + \frac{2}{3} \psi \frac{M_a}{b} \right) \dots (293)$$

正方形断面の時は $\psi = 4.8$ として

$$\tau = \frac{3}{2} \frac{1}{bh} \left(S + 3.2 \frac{M_a}{b} \right) \dots \dots \dots (294)$$

同様にして主應力を求めるには、(293), (294) 式を (290) 式に適用す可し。

第三章 剛性係數

τ ; 應裁力度

σ ; 應張(壓)力度

ϕ ; 歪形(應裁變形)

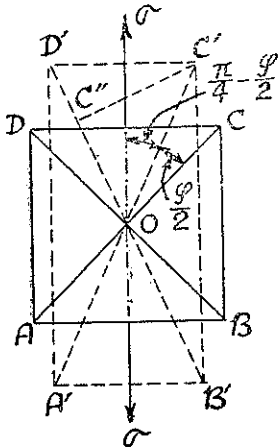
ϵ ; 伸縮率(應張又は應壓變形)

G ; 剛性係數(歪形に對する彈性係數)

E ; 伸縮係數又はヤング率(伸縮に對する彈性係數)

とせば、フックの法則に依り

$$\tau/\phi = G, \quad \tau = \phi G; \quad \sigma/\epsilon = E, \quad \sigma = \epsilon E \dots (295)$$



第六十三圖

種々の物體に對する G の値を求むるに先だち、ポアソン比 $1/m$ を用ひて、 G と E との間の關係を求めんとす。第六十三圖に於て $ABCD$ を邊長 1 の正四面體とし、その相對する 2 面 AB, CD に垂面應力 σ が働くとせよ。その結果、 AD, BC は ϵ だけの伸張を起すが故に、 $A'D' = B'C' = 1 + \epsilon$ なり。而して之に直角なる 2 面 AB, CD はポアソンの法則に従つて、 ϵ/m だけの壓縮を起すが故に、 $A'B' = C'D' = 1 - \epsilon/m$ となる。對角

線 AC, BD は σ の結果として, $A'C', B'D'$ の位置に來り, その間の角 $C'OD'$ は始めの直角より $C'OD'$ に減小するが故に, $C'O''$ を $B'D'$ に垂直に作れば歪形 φ は次の如し。

$$\varphi = \frac{OC''}{C'O''}$$

而して

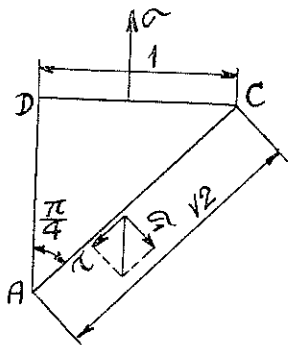
$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\varepsilon}{m}\right)}{\frac{1}{2}(1 + \varepsilon)} = \frac{1 - \frac{\varepsilon}{m}}{1 + \varepsilon}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1 - \tan \frac{\varphi}{2}}{1 + \tan \frac{\varphi}{2}} = \frac{1 - \frac{\varphi}{2}}{1 + \frac{\varphi}{2}}$$

$$\therefore \frac{1 - \varphi/2}{1 + \varphi/2} = \frac{1 - \varepsilon/m}{1 + \varepsilon}, \quad 1 + \varepsilon - \frac{\varphi}{2} - \frac{\varepsilon\varphi}{2} = 1 - \frac{\varepsilon}{m} + \frac{\varphi}{2} - \frac{\varepsilon\varphi}{2m}$$

ε 及び φ は共に小なる數量なるが故に, $\varepsilon\varphi$ の項を省略する時は

$$1 - \varphi = 1 - \left(1 + \frac{1}{m}\right)\varepsilon, \quad \text{或は } \varphi = \frac{m+1}{m}\varepsilon$$



第六十四圖

正六面體 $ABCD$ を對角線 AC にて兩分し, ACD の部分の釣合を考ふるに, AC の面の垂面應力を σ_1 , 切觸應力を τ とせば, AC の長さは $\sqrt{2}$ にて表はさるゝが故に, $\sigma \cdot \overline{CD} = \sigma$, $\sigma_1 \cdot \overline{AC} = \sigma_1 \sqrt{2}$, $\tau \cdot \overline{AC} = \tau \sqrt{2}$ とし

$$\sigma_1 \sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{2}} + \tau \sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{2}} = \sigma, \quad \therefore \sigma_1 + \tau = \sigma$$

$$\text{又 } \sigma_1 \sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{2}} - \tau \sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{2}} = 0,$$

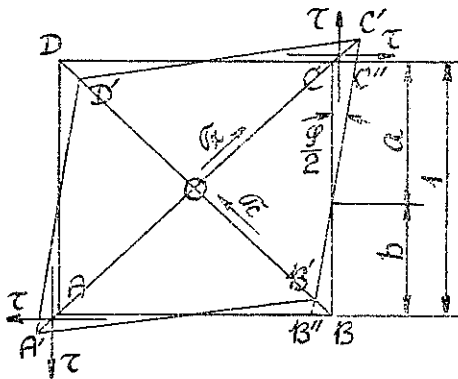
$$\therefore \sigma_1 = \tau, \quad \text{從つて } \tau = \frac{\sigma}{2}$$

之に (295) 式の關係を入るゝ時は $\varphi G = (1/2)\varepsilon E$

而して曩きに求めたるが如く, $\varphi = (m+1)/m \cdot \varepsilon$ なるが故に

$$\frac{m+1}{m} G = \frac{1}{2} E, \quad \text{或は } G = \frac{1}{2} \frac{m}{m+1} E \dots \dots (296)$$

此の關係は又次の如くにしても求められる。第六十五圖に於て第六十三圖と同一の正六面體の 4 面に、圖の如く應裁力が働く時は、面 $ABCD$ は $A'B'C'D'$ の



第六十五圖

如く變形す。換言せば對角線 AC に沿ひては、 τ に等しき應力度の張力、對角線 BD に沿ひては τ に等しき應力度の壓力が働き、その結果として對角線の $1/2$ 、 OC には CC' の應張變形、 OB には BB' の應壓變形が起る。應張力及び應壓力に對する彈性係數 E_z, E_c 及びポアソン比例數 m_z, m_c が同一なる材料にありては、 $\sigma_z = -\sigma_c = \tau$ なる關係より、 $AC = BD = \sqrt{2}$ 、 $OC = OB = \sqrt{2}/2$ として

$$CC' = BB' = \frac{1}{2} \sqrt{2} \frac{\tau}{E} \frac{1+m}{m}, \text{ 及び } CC'' = BB'' = \frac{CC'}{\sqrt{2}} = \frac{BB'}{\sqrt{2}}$$

而して稜點 C, B に於ける直角の變形の $1/2$ は

$$\frac{\varphi}{2} = \frac{CC''}{a} = \frac{BB''}{b} = \frac{CC'' + BB''}{a+b} = CC'' + BB'',$$

$$\therefore \frac{\varphi}{2} = 2 \left[\frac{1}{2} \sqrt{2} \frac{\tau}{E} \frac{1+m}{m} \right] / \sqrt{2},$$

$$\text{従つて } \varphi = 2 \frac{\tau}{E} \frac{1+m}{m}, \text{ 然るに } \varphi = \frac{\tau}{G}, \therefore G = \frac{1}{2} \frac{m}{m+1} E$$

即ち (296) 式を得たり。但し此の公式は $E_z = E_c, m_z = m_c$ の場合の外は之を適用す可らず。(第四編參照)

桁の場合には應裁力は必ず彎曲應力と伴ふが故に、 G の値を實驗的に算出せんがためには、純應裁力の場合即ち扭力率のみに作用せらるゝ軸の實驗に依らざる可らず。而して此の場合と雖も軸を水平に支ふる時は前章第一節に述べたる彎曲率の影響を蒙り、軸を鉛直位置に支ふる時は同第二節に述べたる軸應力の影響を蒙ること勿論なれど、軸の寸法が甚しく大ならざる限り、その自重に因る此等の影響は、之を無視するもさしたる誤差を生ずることなし。

軸の實驗より G を定むるには、サン・ヴガンの公式 (259) 又はフエップルの公式 (267) 等を用ひ、與へられたる扭力率 M_0 に對する單位扭力角 θ を測定せば、逆

に G の値を算出し得可く、斯の如き方法の下に計算せる、鑄鐵軸に就ての G の値は、パウシンガアの實驗より之を第十六表に示せり。

斯の如き直接の測定に依らず、物體の抗張又は抗壓試験に於て、(295) 式より E を測定し、同時に m の値を測定せば (296) 式を用ひて、間接に G の値を算出することを得可し。パウシンガアは第一編第七章第四節に紹介したると全く同形の供試體 5 對を作り、 $l=100\text{ cm}$ を兩分して 20 cm を抗壓材、 80 cm を抗張材として、間接に G を算出する實驗を施行したりしが、その成績次の如し。

P ; 全断面に對する荷重 (t), f ; 斷面積 (cm^2)
 ϵ ; 縦の方向の伸縮率 (10^{-6}), ϵ' ; 横の方向の伸縮率 (10^{-6})
 G, E ; 彈性係數 (kg/cm^2), $\mu = \Delta\epsilon' / \Delta\epsilon = 1/m$; ポアソン比

とすれば、(296) 式より
$$G = \frac{1}{2(1+\mu)} E$$

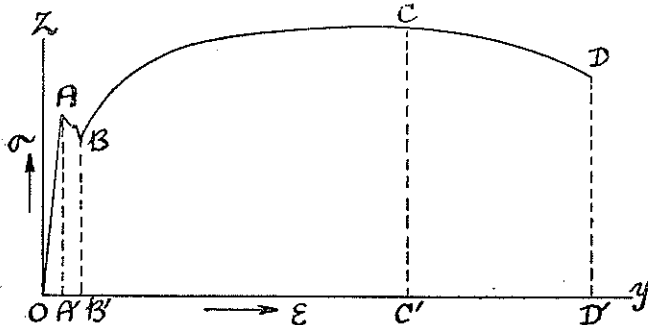
第三十二表及び三十三表の ϵ 及び ϵ' の値は 2 個の供試體の平均値とす。扭力試験より直接に求めたる G の値 (第十六表) は、抗壓試験及び抗張試験より間接に求めたる G の値 (第三十二及び三十三表) と大體に於て、一致するを見る可く、且つ G の値は斷面形狀によりて殆んど影響せられざることを知る可し。

殆んど凡ての材料に就て m の値は 3 と 4 との間に變化するが故に (296) 式より

$$\left. \begin{array}{l} m=3, \quad G=0.375 E \\ m=4, \quad G=0.4 E \end{array} \right\} \dots\dots\dots (297)$$

此の關係は又第三十二及び第三十三表に就ても、之を看取することを得可し。

然れども (295) 式の關係は、完全なる彈體に就てのみ成立す可きものにして、鋼の如き材料にありては、 τ 及び σ の一定の値迄 (295) 式を適用して誤なしと雖も、鑄鐵の如き材料にありては、應力度と應變率との間に、殆んど始めより正比例



第六十六圖

の法則を適用すること能はず。第六十六圖は鑄鐵の抗張又は抗壓試験に於ける、 $\sigma-\epsilon$ の關係を圖示したるものにして、應力度 σ を縦距 z に取り、伸縮率 ϵ を横距 y にとる。 σ が AD' 、従つて ϵ が OA' に達する迄は

第三十二表 鑄鐵の抗壓試験 (バウシソングア)

P	圓形断面 (f=50)				軸比 1:2 の楕圓形断面 (f=50)				正方形断面 (f=50)				邊長比 1:2 の矩形断面 (f=50)				邊長比 1:4 の矩形断面 (f=25)								
	ϵ	E	ϵ'	μ	ϵ	E	ϵ'	μ	ϵ	E	ϵ'	μ	ϵ	E	ϵ'	μ	ϵ	E	ϵ'	μ	G				
0	0	1,242	0	0.21	513	0	1,379	0	0.24	556	0	1,212	0	0.19	510	0	1,258	0	0.20	521	0	1,170	0	0.19	492
10	161	1,111	34	0.22	455	145	1,184	35	0.21	489	165	1,124	31	0.24	453	159	1,163	27	0.23	473	342	1,105	64	0.23	449
20	341	1,111	73	0.21	459	314	1,163	71	0.23	473	343	1,129	74	0.215	465	331	1,143	62	0.25	457	704	1,093	146	0.245	439
30	521	1,087	111	0.22	445	488	1,150	110	0.23	460	529	1,064	114	0.25	426	506	1,105	102	0.24	446	1,070	1,061	236	0.26	421
40	705	1,075	151	0.23	437	663	1,117	150	0.24	450	717	1,053	161	0.23	428	687	1,099	140	0.24	443	1,447	1,061	335		
50	891	1,070	193	0.26	421	842	1,093	193	0.24	441	907	1,036	204	0.24	408	869	1,047	184	0.25	419					
60	1,078	990	242	0.24	509	1,025	1,064	236	0.25	426	1,100	1,020	251	0.25	408	1,060	1,031	228	0.27	406					
70	1,280	980	291	0.28	383	1,213	1,026	283	0.28	401	1,296	971	300	0.26	381	1,254	1,005	275	0.26	399					
80	1,484		349			1,408		338			1,502		354			1,453		325							

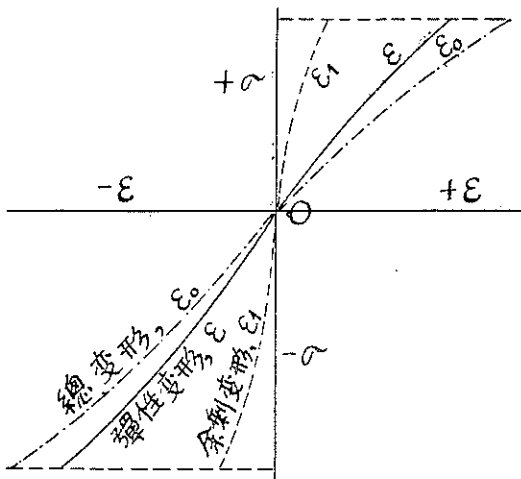
第三十三表 鑄鐵の抗張試験 (バウシソングア)

P	圓形断面 (f=50)				軸比 1:2 の楕圓形断面 (f=50)				正方形断面 (f=50)				邊長比 1:2 の矩形断面 (f=50)				邊長比 1:4 の矩形断面 (f=25)								
	ϵ	E	ϵ'	μ	ϵ	E	ϵ'	μ	ϵ	E	ϵ'	μ	ϵ	E	ϵ'	μ	ϵ	E	ϵ'	μ	G				
0	0	0	0	0.20	502	0	1,176	0	0.235	476	0	1,219	0	0.24	492	0	1,190	0	0.21	492	0	1,190	0	0.17	500
2.5	—	1,205	—	0.20	502	—	1,176	—	0.235	476	—	1,219	—	0.24	492	—	1,190	—	0.21	492	84	14.5	14.5	0.28	459
5	83	—	17	—	—	85	—	20	—	—	82	—	20	—	—	84	—	18	—	—	160	38	38	0.25	460
7.5	—	1,150	—	0.26	456	—	1,163	—	0.215	479	—	1,150	—	0.26	455	—	1,124	—	0.225	459	256	1,150	60	0.27	433
10	170	—	40	—	—	171	—	38.5	—	—	169	—	43	—	—	173	—	38	—	—	347	85	85		
15	258	—	60	—	—	261	—	61	—	—	261	—	67	—	—	267	—	63	—	—	—	—	—	—	
20	355	—	91	—	—	356	—	88	—	—	359	—	91	—	—	365	—	91	—	—	—	—	—	—	

ε は σ と共に増大すれども、 A に於て σ の値は急減し、 σ - ε の關係は AB の如き徑路を取る。之より後、 σ は ε と共に徐々に増大すれど、 σ に對する ε の増加率は OA の間に於けるよりも遙かに急激にして、 $\varepsilon=OC'$ に於て $OC'=\sigma_0$ は最大値に達し、破壊の刹那に於ける $\sigma=DD'$ は却つて σ_0 よりも小さきを常とす。物體の破壊強度は $K_c=\sigma_0$ 或は $K_c=\sigma_0$ にて表はされ、破壊の場合の實際の σ には無關係なり。鋼に就ても第六十六圖と略、同様の關係あり。唯此の場合には AB が殆んど y 軸に平行なるの相違あるのみ。第六十六圖に於ける A 點を物點の屈點 (Yield point, la limite d'allongement ou d'étirage, die Streckgrenze oder die Flieszugrenze) と稱し、その破壊試験に於て第六十六圖の如き σ - ε 曲線を示さず、換言せば此の屈點を正確に定め難き金屬にありても、餘剩應變率 ε_1 の値が、0.2-0.5% に達したる場合の σ を以て屈點と見做すを常とす。例へば獨逸エッセンのクルップ工場に於ては $\varepsilon_1=0.3\%$ の場合の σ を屈點と取るが如し。多くの場合に於て物體の屈點はその比例限度 (Limit of proportionality, la limite de proportionnalité, die proportionalitätsgrenze) の値と一致すれども、後者は σ と ε との間に殆んど正比例の法則が成立する場合の、 σ の限界値なるが故に、少くとも觀念の上より兩者は區別せられざる可らず。之に對して物體の彈性限度 (Elastic limit, la limite d'élasticité, die Elastizitätsgrenze) と稱するは、應力變形が應力と共に全然、又は殆んど消滅する場合の σ の限界値なるが故に、彈性限度の σ 以内の値に對しては $\varepsilon_1=0$ なる事を要し、獨逸エッセンのクルップ工場に於ては、餘剩應變率 $\varepsilon_1=0.03\%$ に對する σ の値を彈性限度と取るが如し。故に彈性限度と屈點又は比例限度とは、絶対に混同すべらざるを見る可し。

鋼の如きは第六十六圖の OA を直線と假定し得るが故に、屈點と比例限度とは殆んど同一の値を有すれども、鑄鐵の如き材料にありては、 OA も亦一種の曲線を表はす。換言せば前者に就ては、略 OA までは (295) 式を適用し得れど、後者に就ては OA の間にありても (295) 式を適用し難きものとす。以下論ずる所は凡て屈點以内の σ - ε の關係に限る。

一般に物體に荷重を加ふる時は、應力度を σ として、 λ_0 の變形を起す。而して此の荷重を取り去りて $\sigma=0$ となりたる後も、 λ_0 は全部消滅せず、 λ_0 の内 λ だけは荷重と共に消滅すれど、 $\lambda_0-\lambda=\lambda_1$ の變形は殘存するを通例とす。 λ_0 は總變形



第六十七圖

(Total deformation, la déformation totale, die gesamte Formänderung), λ_1 は余剰變形 (Permanent set, la déformation permanente, die bleibende Formänderung)にして, λ は弾性變形 (Elastic deformation, la déformation élastique, die elastische oder federnde Formänderung) なり。物體の長さを l とせば

$$\lambda_0/l = \epsilon_0, \quad \lambda_1/l = \epsilon_1, \quad \lambda/l = \epsilon$$

第六十七圖は σ に對する $\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon$

の關係を示す曲線にして、鑄鐵の實驗による。余剰變形には次の如き性質あり。未だ荷重を加へられたる事なき處女物體に就ての第一回試驗に於て、 $\sigma-\epsilon$ の間に第六十七圖の如き關係が成立するものとせば、一旦荷重を取り去りたる後、更に第二回試驗を行ひたる場合の余剰變形は殆んど零となり、弾性變形曲線即ち $\sigma-\epsilon$ の關係は略、第一回試驗と同一の曲線を示し、此の場合の總變形曲線は弾性變形曲線と一致す可し。(但し此の試驗を數回に亘りて反覆せば物體の弾性疲勞の結果、再び余剰變形を生ず可きは勿論なり)

此の故に斯の如き物體の弾性係數を論ずるにあたりては、此の弾性變形 λ に對する σ の關係を研究するを以て、至當なる着眼點とせざる可らず。而して此の意味に於ける $\sigma-\epsilon$ の關係は直線に非ずして、曲率の小なる一種の曲線なるが故に、之に若し (295) 式の第二式即ち $\sigma = \epsilon E$ 或は $\epsilon = \sigma/E$ なる關係を適用せば、 E は常數にあらずして、 σ の増大するに従つて減小すべき一種の變數ならざる可らず。此の關係はパウシంగాの實驗(第三十二表及び三十三表)に於ても、明らかに看取する事を得可く、近來 E を σ の直線式として

$$E = a - b\sigma, \quad a, b; \text{實驗的常數} \dots\dots\dots (298)$$

と假定すること屢々あれど、 E を變數とすることは實用上、不便少なからざるが故に、 E を常數として而も此の間の關係を (295) 式と同様の形の下に公式化せんとする試みは、既に1729年ビュルフォンガ (Bülfinger) に依りて創定せられ、その公式は1822年ホトキンソン (Hodgkinson) によりて採用せられたりしが、フックの

法則の改訂とも稱す可き此の公式は次の如し。

$$\epsilon = \frac{\sigma^n}{E}, \text{ 同様にして } \varphi = \frac{\tau^n}{G} \dots\dots\dots(299)$$

(299) 式より $\log \epsilon = n \log \sigma - \log E, \log \varphi = n \log \tau - \log G$ なる關係あるが故に、實驗値 ϵ, σ 又は φ, τ より最小自乗法の原理により、容易に指數 n 及び E, G の値を定め得べし。(299) 式即ちビュルフンガアの公式に對して、1897年メムケの發表せる公式は次の如し。(R. Mehmke: Zum Gesetz der elastischen Dehnungen, die Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1897)

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} + C\sigma^2, \quad C; \text{ 實驗的常數 } \dots\dots\dots(300)$$

然れども (300) 式は所謂混合解法に依るに非ずんば、之を解くこと能はざるが故に、 E 及び C の値を實驗的に定むるに不便なるを免れず。パッハは (299) 式を採用して、その過去 40年間の實驗より種々の材料に就て應張力及び應壓力に對する E 及び n を制定したりしが、その内供試體が未だ嘗つて荷重を加へられたることなき處女物體なる場合の値の數例を摘録すれば次の如し。 σ_z は應張力度、 σ_c は應壓力度とす。

鑄鐵	$\epsilon = \frac{1}{1,338,000} \sigma_z^{1.985}$	} \dots\dots\dots(301)
	$\epsilon = \frac{1}{1,320,000} \sigma_c^{1.6685}$	

軟鋼 $\epsilon = \frac{1}{2,109,700} \sigma_z \dots\dots\dots(302)$

鋼 $\epsilon = \frac{1}{2,133,000} \sigma_z \dots\dots\dots(303)$

銅 $\epsilon = \frac{1}{2,195,000} \sigma_z^{1.093} \dots\dots\dots(304)$

青銅 $\epsilon = \frac{1}{733,800} \sigma_z^{1.923} \dots\dots\dots(305)$

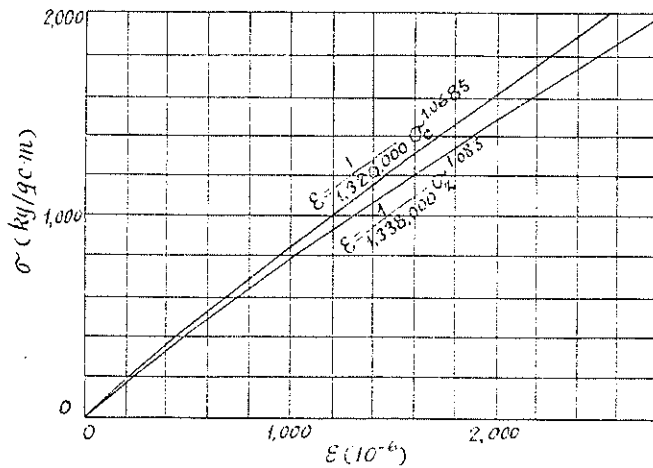
眞鍮 $\epsilon = \frac{1}{947,000} \sigma_z^{1.985} \dots\dots\dots(306)$

純セメント $\epsilon = \frac{1}{250,000} \sigma_c^{1.09} \dots\dots\dots(307)$

膠泥 (1:1½)	$\epsilon = \frac{1}{356,000} \sigma_c^{1.11}$	} (308)
(1:3)	$\epsilon = \frac{1}{315,000} \sigma_c^{1.15}$		
(1:4½)	$\epsilon = \frac{1}{230,000} \sigma_c^{1.17}$		
混凝土 (1:2½:5)	$\epsilon = \frac{1}{298,000} \sigma_c^{1.145}$	} (309)
(1:3:6)	$\epsilon = \frac{1}{380,000} \sigma_c^{1.161}$		
(1:5:6)	$\epsilon = \frac{1}{280,000} \sigma_c^{1.137}$		
(1:5:10)	$\epsilon = \frac{1}{217,000} \sigma_c^{1.157}$		

膠泥及び混凝土に就ては、材料、材齡、配合、用水量などに依りて著しき相違あり。(308), (309) 式はフナウの川砂及び川砂利を使用したる場合の平均値とす。

(299) 式の E は (295) 式の E とは全く性質を異にし、後者の E はそれ自身に



第六十八圖

於て物體の彈性を表はせども、前者の E は之を單獨に切離しては意味をなさず、指數 n と合同して始めて一聯の彈性を表はす可きが故に、少くとも觀念の上より兩者は嚴密に區別せられざる可らず。第六十八圖は (301) 式の第一及び第二の兩式より、 σ の種々の値に對

する ϵ の關係を圖示したるものとす。

應力度と應變率との間にフックの正比例の法則が成立する鋼の如き材料、即ち指數 $n=1$ にして (299) 式と (295) とが全く同一の公式と化する場合を除外して考ふるに、(295) 式に於ける E 及び G は變數なるが故に、實驗上より E 及び G を算出するに當りては、 τ 又は σ の微細なる變化、 $\Delta\tau$, $\Delta\sigma$ に對する ϕ 又は ϵ の

微細なる變化 $\Delta\varphi, \Delta\varepsilon$ を求め、此の間に於ける G 又は E を常數と假定して (295) 式より之を計算す。第三十二表及び第三十三表は實に斯の如くにして計算せられたるものに外ならず。之に對して (299) 式の E 及び G は常數にして (295) 式の値とは全くその特質を異にすること上述の如し。而して扭力の實驗より (299) 式を使用して n 及び G の値を定むることは極めて困難なるを免れず。扭力試験に於て觀測し得るものは、扭力率 M_a 及び扭力角 θ_1 にして圓形斷面の軸にありては、 M_a, θ_1 と τ_1, φ_1 との間に次の關係あり。(第一編第二章)

$$\theta_1 r = \varphi_1 l, \quad \frac{\theta_1}{l} r = \varphi_1, \quad \therefore \varphi_1 = \theta_1 r$$

然るに之に對應すべき τ_1 を求むる公式 (7) は、實に (295) 式の假定より出發せるが故に、(299) 式の假定に對しては之を採用す可らず。此の場合の計算は次の如し。

$$\varphi = \tau^n / G, \quad \therefore \tau = (\varphi G)^{\frac{1}{n}} = \varphi^{\frac{1}{n}} G^{\frac{1}{n}},$$

然るに $\varphi = \theta \rho, \varphi_1 = \theta r$ なるが故に

$$\tau = \theta^{\frac{1}{n}} \rho^{\frac{1}{n}} G^{\frac{1}{n}}, \quad \tau_1 = \theta^{\frac{1}{n}} r^{\frac{1}{n}} G^{\frac{1}{n}}$$

$$\therefore \tau = \tau_1 (\rho/r)^{\frac{1}{n}}$$

$$\text{従つて } M_a = \int \tau \rho \, df = \frac{\tau_1}{r^{\frac{1}{n}}} \int \rho^{\frac{n+1}{n}} \, df = \frac{\tau_1}{r^{\frac{1}{n}}} \iint \rho^{\frac{n+1}{n}} \cdot \rho \, d\theta \, d\rho = \frac{\tau_1}{r^{\frac{1}{n}}} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r \rho^{\frac{2n+1}{n}} \, d\rho$$

之を計算して

$$\begin{aligned} M_a &= 2\pi \tau_1 \frac{n}{3n+1} r^3 \\ &= 2\pi \frac{n}{3n+1} r^{\frac{2n+1}{n}} (G\theta)^{\frac{1}{n}} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{M_a} \right\} \dots\dots\dots (310)$$

$n=1$ の場合には (310) 式は (104) 式と同一の公式となる。(310) 式は複雑なるが故に、扭力に關する實驗より n 及び G を算出するに適せず。此の場合には G を變數と假定し、(295) 従つて (4) 又は (7) 式を使用して、 ΔM_a に對する $\Delta \tau_1$ を算出すると共に、此の間に於ける G を常數と見做し、種々の $\Delta \tau_1$ に對する變數 G の値を算出す可し。(299) 式の假定を採用する場合には、抗張又は抗壓試験よりの間接の計算に依りて n 及び G を決定するを便とす。抗張又は抗壓試験にありては、前掲の如く $\tau = \sigma/2$ にして $\mu = 1/m$ とせば $\varphi = (1+\mu)\varepsilon$ 或は $\Delta\varphi = (1+\mu)\Delta\varepsilon$ なるが故に、容易に (299) 式の G 及び n の値を決定し得可し。

例へばバウシंगाアの鑄鐵抗壓及び抗張試験の場合を取りて此の方法の下に G 及び n を計算すれば次の如し。(第三十二表及び第三十三表参照) ε 及び φ は 10^{-6} を以て表はす。

第三十四表 鑄鐵抗壓試験に依る G 及び n の計算

應力度 (kg/qcm)		圓形断面			楕圓形断面 (1:2)			正方形断面			矩形断面 (1:2)			矩形断面 (1:4)		
σ	τ	ε	μ	φ	ε	μ	φ	ε	μ	φ	ε	μ	φ	ε	μ	φ
0	0	0		0	0		0	0		0	0		0	0		0
200	100	161	0.21	195	145	0.24	150	165	0.19	196	159	0.20	191	—	0.19	—
400	200	341	0.22	416	314	0.21	380	343	0.24	425	331	0.23	407	342		407
600	300	521	0.21	630	486	0.23	598	529	0.215	643	506	0.25	633	—	0.23	—
800	400	705	0.22	860	663	0.23	815	717	0.25	896	687	0.24	852	704		866
1,000	500	891	0.23	1,096	812	0.24	1,044	907	0.23	1,116	869	0.24	1,078	—	0.245	—
1,200	600	1,078	0.26	1,358	1,025	0.24	1,271	1,100	0.24	1,364	1,060	0.25	1,325	1,070		1,332
1,400	700	1,280	0.24	1,587	1,213	0.25	1,516	1,296	0.25	1,620	1,254	0.27	1,593	—	0.26	—
1,600	800	1,484	0.28	1,900	1,408	0.28	1,802	1,532	0.26	1,993	1,453	0.26	1,831	1,447		1,823

第三十五表 鑄鐵抗張試験に依る G 及び n の計算

應力度 (kg/qcm)		圓形断面			楕圓形断面 (1:2)			正方形断面			矩形断面 (1:2)			矩形断面 (1:4)		
σ	τ	ε	μ	φ	ε	μ	φ	ε	μ	φ	ε	μ	φ	ε	μ	φ
0	0	0		0	0		0	0		0	0		0	0		0
100	50	83	0.20	100	85	0.235	105	82	0.24	102	84	0.21	102	84	0.17	98
200	100	170	0.26	214	171	0.215	208	189	0.26	213	173	0.225	212	169	0.22	216
300	150	258	0.23	317	261	0.25	326	261	0.26	329	267	0.27	339	253	0.25	320
400	200	355	0.32	469	356	0.28	456	359	0.245	447	365	0.285	469	347	0.27	441

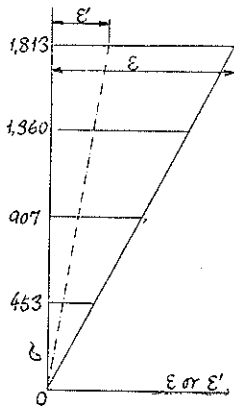
第三十四及び第三十五表の τ 及び φ の値より (299) 式を用ひ、最小自乗法の原理によりて、 n 及び G を定むる時は次の2式を得可し。

$$\varphi = \frac{1}{780,430} \tau^{1.0833} \dots \dots \dots (311)$$

$$\varphi = \frac{1}{780,430} \tau^{1.11} \dots \dots \dots (312)$$

而して斯の如くにして算定せられたる G と E との間には、最早や (296) 式の関係は成立せず、換言すれば (296) 式は (295) 式とは兩立すれど、(299) 式とは兩立せざるものとす。

而して世に流布する應用力學及び材料強弱に關する初歩の著述に多く散見する種々の物質の彈性係數 E 及び G は、何れもフックの法則即ち (295) 式を基調とするが故に、その間には必ず (296) 式の關係が成立するを常とす。鋼及び軟鋼にありては、應力度 σ に關せず E 及び m の値が一定なるが故に、(296) 式を使用し



第六十九圖

て、同様に一定なる G の値を計算し得可きは論を俟たず。前掲 1909年のプレチュナイダアの實驗にありては、軟鋼、圓形斷面供試體 (直徑 $d=2.903$ cm. 觀測長 $l=15$ cm) に就て、實驗の範圍内 ($\sigma=1,964$ kg/qcm. 即ち屈點よりも小さき應力度の値以下) に於ては、應張力度 σ と縱變形 λ 及び横變形 λ' との間に、完全に正比例の法則が成立することを證明し得たり。(第六十九圖) 而して第一回試驗に於ては、 $\sigma=1,813$ kg/qcm に對し $\lambda=12.15 \times 10^{-3}$ cm, $\lambda'=0.73 \times 10^{-3}$ cm にして

$$\varepsilon = \frac{12.58}{1,000 \times 15} = 839 \times 10^{-6}, \quad \varepsilon' = \frac{0.78}{1,000 \times 15} = 250 \times 10^{-6}$$

従つて $m = \varepsilon/\varepsilon' = 839/250 = 3.34$ 及び $E = 1,813/0.000839 = 2,161,700$

又第二回試驗に於ては同様にして、 $m = 3.34$ 及び $E = 2,167,800$

プレチュナイダアの實驗値 m 及び E を (296) 式に適用せば、その第一回試驗よりは

$$G = \frac{3.34}{8.68} \times 2,161,700 = 0.3848 \times 2,161,700 = 831,800$$

又第二回試驗よりは

$$G = \frac{3.34}{8.68} \times 2,167,800 = 0.3848 \times 2,167,800 = 834,200$$

従つて之を平均すれば

$$\frac{1}{G} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{831,800} + \frac{1}{834,200} \right) = \frac{1}{833,000}$$

より $G = 833,000$ を得可く、之を扭力試験より直接に求めたる平均値 $G = 824,700$ (前編第七章第五節) と比較せば、約 1.0% の誤差を生ぜるに過ぎず。

古代の學者は m の値を常に一定なりと信じたれど、後世の實驗は (295) 式を使用する限りに於て、多くの物質に就て E 及び G が σ 及び τ の函數なると同時に、 m が又 σ 及び τ の函數なることを明らかにしたりしが、斯の如き材料、例

へば鑄鐵及び混凝土等にありては σ 及び τ の段階を明示するに非ずんば、 E , G 及び m の値を一般的に云爲すること能はず。第三十二及び三十三表は鑄鐵に就ての E , G 及び $\mu=1/m$ の變化の状態を示す一例なるが、混凝土に就ては實驗の結果を後章に紹介す可し。

第四章 軸の破壊

物體の扭力破壊試験に於ては、水平試験機を使用する場合には扭力率と同時に彎曲率、鉛直試験機を使用する場合には扭力率と同時に軸應力の作用を蒙る可しと雖も、軸の自重に依る此等の彎曲率及び軸應力の影響は、供試體の寸法が著しく大なる特殊の場合を除けば、比較的微弱なるが故に、殆んど凡ての扭力破壊試験に於て、此等の影響を無視するを常とす。而して軸が單純に扭力率のみを受くるものと思ふ場合にありては、既に本編第二章第三節に於て述べたるが如く、軸の横斷面の方向及び之に直角なる縦斷面の方向に、最大應裁力 τ_1 、又中心軸に對して 45° の方向に $\sigma_0 = \pm(m+1)/m \cdot \tau_1$ にて表はさるゝ應張力及び應壓力を蒙る可きが故に

K_s ; 破壊抗張強度 K_c ; 破壊抗壓強度

K_t ; 破壊抗裁強度 K_a ; 破壊抗扭強度

とせば、軸の破壊の状態は次の4種に區別せらる。

1. K_s, K_c に比して K_t が小さく、 $K_s, K_c > K_t(m+1)/m$ なる物體にありては、 K_a は K_t と同一の意味を有し、軸は横斷面の方向に裁斷せらる。

2. 此の場合にありて、若し縦斷の方向に於ける K_c の値が横斷の方向に於けるそれよりも小さき時は、軸は縦斷面の方向に裁斷せらる。

3. K_s に比して K_t が小さく、 $K_s < K_c, K_t < K_s(m+1)/m$ なる物體にありては、 K_a は K_s と同一の意味を有し、軸は中心軸に對して 45° の方向に切斷せらる。

4. K_s に比して K_c が小さく、 $K_c < K_s, K_c < K_s(m+1)/m$ なる物體にありては、 K_a は K_c と同一の意味を有し、軸は中心軸に對して 45° の方向に壓碎せらる。

而して實地上の物體にありては、 $K_c < K_s$ なる關係は殆んど成立せざるが故に、軸の破壊は上記 1. 2. 3. の何れかの法則に従つて起るを常とし、軸が應裁力によりて裁斷せらるゝか、或は應張力によりて切斷せらるゝかの分岐點は、一に K_s と K_c との間の關係に係る。即ち $K_s \geq K_c(m+1)/m$ 、或は $K_s/K_c \leq m/(m+1)$ に従つて、

軸の破壊は裁斷に依り或は切斷に依る可きことを知る。凡ての金屬材料に就ては前述の如く m は 3-4 の間に變化するが故に $m=10/3$ と取れば、上の條件式は

$$K_s/K_z \leq 0.77 \dots\dots\dots(313)$$

となる。鋼又は軟鋼の如き物質にありては、その屈點まではフックの法則が成立すれど。破壊状態に於ては最早や此の法則を適用すること能はず。鑄鐵の如き物質にありては、その當初より此の法則の成立を認め難きが故に、軸の破壊を論ずるにあたりては、圓形斷面に關する (7) 式及び矩形その他の斷面に關する之に準ず可き諸公式は、破壊の刹那までフックの法則の下に終始する理想的彈體に就てのみ之を適用す可く、實地上の凡ての物質には斷じて之を適用す可らざるなり。従つて、本編第一章第二節の第二十八乃至三十一表に於て破壊抗扭強度として、上記の公式を使用して算出せる K_a の値は、決して眞の意味に於ける強度を與ふるものにあらずして、單に一種の假想的意義を有する數量を示すに過ぎざるなり。

姑く物體破壊の刹那まで (215) 式の如き彈體の公式が成立するものと假定せんか、(215) 式を用ひて算出せる K_a は要するに K_s と同義なる可きが故に (313) 式に於て、 K_s の代りに K_a を使用するとき

$$K_a/K_z \leq 0.77 \dots\dots\dots(314)$$

とすることを得可し。然るに第二十八乃至三十一表に示せる鑄鐵軸に關する實驗は、何れも (314) 式の複符號の下の場合を満足するが故に、此の假定の關する限りに於ては鑄鐵軸の破壊は上記 3. の法則に従はざる可らざることを結論することを得可し。而して實驗の結果はよく此の結論と一致し、鑄鐵軸の破壊は約 45° の方向に上る螺旋面を取りたること、バハの彈性及び強度中より再録したる、寫真第四乃至第六の示す所の如し。實驗の結果に徴するに

(イ) 強靱なる鍊鐵 (Weld iron, le fer soudé, das Schweiszeisen) を以て作れる圓形斷面の軸にありては、中心軸の方向に於ける個々の纖維間に於ける、抗裁強度比較的小なるが故に、扭力の量に應じて、螺旋形に走る縱龜裂を生ず可く、木材の如きも之と同様にして、その纖維の方向に裁裂せらる。是れ即ち上記の 2. の法則に従ふ破壊なり。

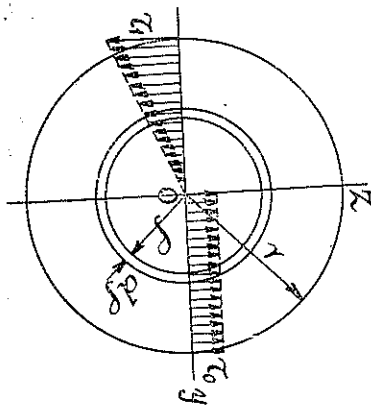
(ロ) 破壊の前に甚しき伸張を許す鋼、軟鋼の如き、柔かくして強靱なる物質にありては、破壊は全く軸の横斷面の方向に起る。是れ斯の如き物質にありては、その抗張強度に比して抗裁強度の小なるがためにして、上記の 1. の法則に従ふ

破壊なり。

(ハ) 鑄鐵, 混凝土, 石材の如き脆くして粒状組織の建築材料にありては, 軸の破壊面は扭力率の方向と反對の方向に約 45° の角度を以て上る螺旋曲線を以て, 軸の嚙面と交はる。是れ上記の 3. の法則に従ふ破壊にして, 斯の如き物體の破壊は斜めの方向に於ける主應張力の結果として, 材料の K_2 の敗北に起因するものと言ふ可く, K_a は K_2 と全く同一の意味を有するものとして取扱はざる可らざるものとす。

次に少しく軸が破壊する場合に於ける, 横断面に於ける應力分布の状態を研究せんとす。

完全なる弾體にありては, 第七十圖の如き圓形断面の軸に於て, (103) 式より



第七十圖

$$\tau_1 = \frac{M_a}{2I_1} r = \frac{2}{\pi} \frac{M_a}{r^3}$$

なる關係あり。此の關係は鋼, 軟鋼にありては, その彈性限度迄, 成立す可きものなれど, 既に第六十六圖にその一例を示せるが如く, 應力度對應變率の曲線は, 物體破壊の状態に達するに先立ち, 殆んど應變率の軸に平行となり, 材料の組織が實地上完全に粘性的 (Plastic, ductile ou doux geschmeidig,) と見做し得可き域に到達せることを示す。即ち應力度は殆んど應變率に無關係なる

が故に, 斯の如き場合にありては, 應力度 τ は断面中心よりの距離 ρ に正比例せず, 否 ρ に無關係にして断面上に等布的に分布するものと考ふるも, 實地上差支へなきのみならず, 上述の弾體の假定を採用するよりも, 一層眞に近き結果を與ふるものと言はざる可らず。即ち第七十圖に於て

$$M_a = \int \tau_0 \rho \, df = \int \int \tau_0 \rho \cdot \rho \, d\theta \, d\rho = 2\pi \tau_0 \int \rho^2 \, d\rho$$

$$\left. \begin{aligned} \text{即ち} \quad M_a &= \frac{2}{3} \pi \tau_0 r^3 \\ \tau_0 &= \frac{3M_a}{2\pi} \frac{1}{r^3} = \frac{3}{4} \tau_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (315)$$

(315) 式を第二十八表の圓形断面の場合に適用せば

$$K_a = 1,214 \text{ kg/qcm}, \quad \therefore K_a/K_z = 0.77,$$

$$K_a = 1,241 \text{ kg/qcm}, \quad \therefore K_a/K_z = 0.79$$

即ち此の場合には $m=10/3$ と假定して、正確に (290) 及び (314) 式の與ふる結果と一致するを見る可し。次に圓形中空断面軸に就ては (315) 式の代りに次式を得可し。

$$\left. \begin{aligned} M_a &= \frac{2}{3} \pi \tau_0 (r^3 - r_0^3) \\ \tau_0 &= \frac{3M_a}{2\pi} \frac{1}{r^3 - r_0^3} = \frac{3}{4} \tau_1 \frac{r^4 - r_0^4}{r(r^3 - r_0^3)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (316)$$

(316) 式を第二十八乃至二十九表の圓形中空断面の場合に適用せば

$$K_a = 1,117 \text{ kg/qcm}, \quad \therefore K_a/K_z = 0.71,$$

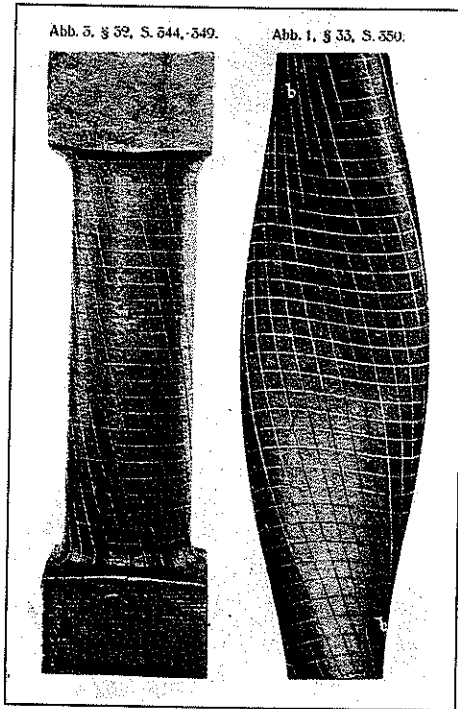
$$K_a = 1,238 \text{ kg/qcm}, \quad \therefore K_a/K_z = 0.74,$$

$$K_a = 1,194 \text{ kg/qcm}, \quad \therefore K_a/K_z = 0.71$$

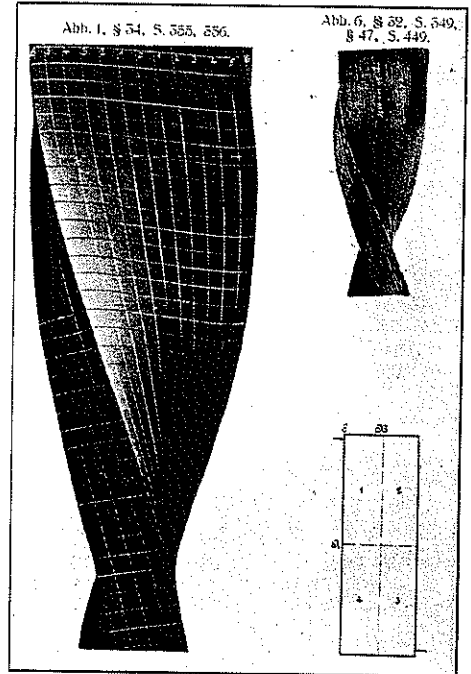
故に此の場合にも (290), (314) 兩式の結果と大體に於て一致するを見る可し。加之, (315) 式を用ひて圓形断面に就て算出せる破壊抗扭強度の値 K_a と, (316) 式を用ひて圓形中空断面に就て算出せる K_a とは, その間に大差なく, 鑄鐵の破壊抗扭強度として確定的の値を與ふるものと言ふ可く, 軸の破壊に際して使用す可き公式としての (315) 及び (316) 式の實驗的證明たらしむるに足る。斯の如き公式を使用することに依りて, 物體の抗扭強度を定め得るものとせば, 軸の抗扭強度が漸面形狀に依りて相違す可しとするバウシंगाの推論 (本編第一章第二節) は, 根柢より覆へされざる可らず。果して然るか。此の點に關する著者の結論は之を, 後編に於て混凝土供試體の抗扭強度を論ずる場合に總括す可し。

以上は今日迄に研究せられたる扭力に關する理論及び實驗の梗概なり。著者は更に進んで混凝土に關する之が應用を研究せんとす。 (未完)

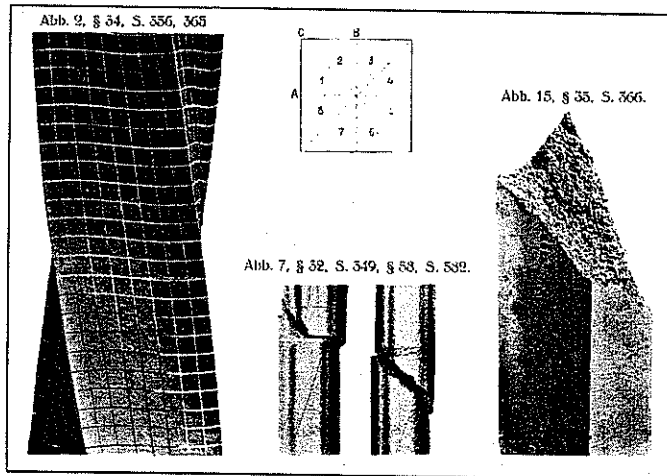
寫真第一



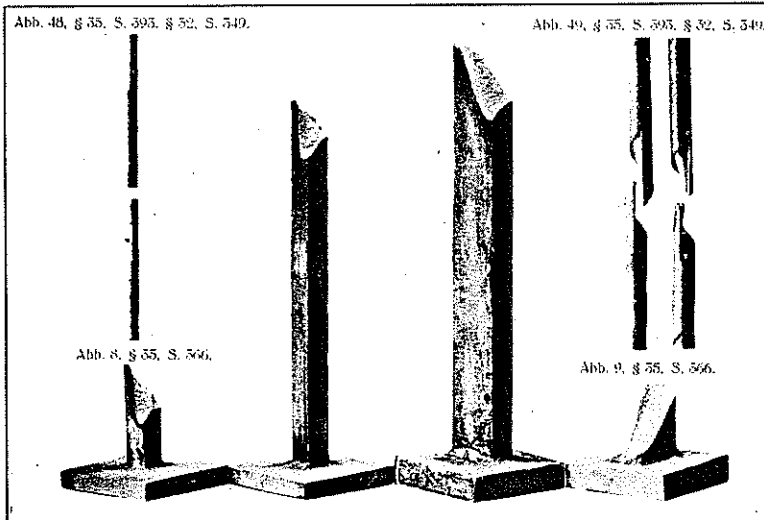
寫真第二



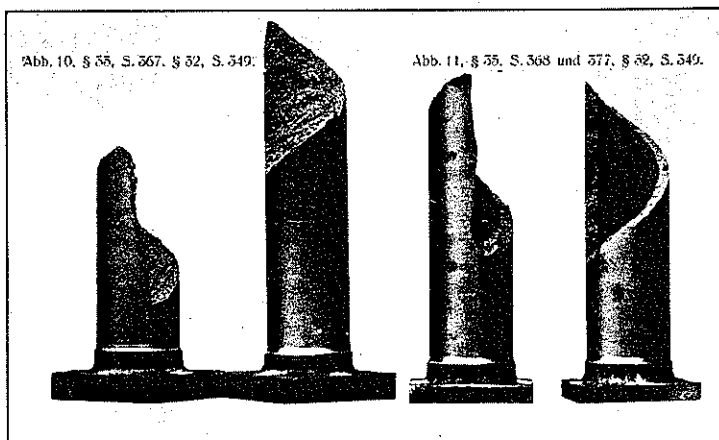
寫真第三



寫真第四



寫真第五



寫真第六

