

# 論 說 報 告

土木學會誌 第十一卷第三號 大正十四年六月

## NEUE VERSUCHE FÜR DIE ELASTISCHE LINIE UND DIE VERDREHUNG DES AUF DEN QUERSCHNITT BIEGUNGS-BZW. TORSIONSMOMENT WIRKENDEN BALKENS.

Von Dr. Ing., Yosei Yamada, Mitglied

### Einleitung.

Unter der Annahme der Erhaltung der Querschnittsebenen eines gebogenen Stabes ist die ganze Formänderung durch diejenige der Stabachse vollständig bestimmt. War die Stabachse ursprünglich gerade, so wird sie infolge der Wirkung des Biegemomentes in eine Kurve, die sog. elastische Linie, übergehen, deren Krümmungsradius  $\rho$  durch die Gl.

$$(1) \quad \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

gegeben ist.

Bezeichnen wir ganz allgemein die Verschiebungen von Stabachsenpunkten in der Ebene des Biegemomentes mit  $z$ , so wird der Ausdruck für den Krümmungsradius

$$(2) \quad \frac{1}{\rho} = \frac{d^2z}{dx^2}$$

und aus (1)

$$(3) \quad EI \frac{d^2z}{dx^2} = M$$

Wenn eine nach beliebiger Richtung neigende Last den Balken angreift, dann erleidet der Querschnitt sowohl eine Verdrehung als auch eine Verschiebung in horizontaler und vertikaler Richtung. Bezeichnet man mit

$M$  und  $B$  das Biegemoment in Vertikaler-bzw. Horizontalerebene durch den Schwerpunkt des Querschnitts.

$T$  das Torsionsmoment.

$z$  und  $y$  den Vertikal- bzw. Horizontalabstand des Schwerpunktes des Querschnitts.

$\varphi$  die Verdrehung des Querschnitts.

dann ist man gewohnt für die Auslenkungen und Verdrehung die folgenden Differentialgleichungen

$$(4) \quad \begin{cases} EI \frac{d^2 z}{dx^2} = M \\ EI' \frac{d^2 y}{dx^2} = B \\ \mu J \frac{d\varphi}{dx} = T \end{cases}$$

zu erhalten. Hierin bedeuten

$E$  den Elastizitätsmodul des Materials,

$\mu$  den Gleitmodul des Materials,

$I$  und  $I'$  das Trägheitsmoment des Querschnitts um die polare Achse durch den Schwerpunkt,

$J$  die von der Querschnittsform abhängigen, mit dem Flächenträgheitsmoment dimensionsgleichen Grösse.

Die zugehörigen Momente aber müssen sich ergeben aus der Überlegung, dass die Momente  $M$ ,  $B$  und  $T$  in drei den geneigten Hauptebenen parallele Komponenten zerfallen.

Die vorliegende Abhandlung gründet sich auf diesem Gedanken.

## I Entwicklung der Grundgleichungen.

Der in Abb. I dargestellte Balken  $OA$  ist an beiden Enden eingebaut und eine Last  $P$  greift den Balken an beim Punkte  $(x_0, y_0, z_0)$ . Die Komponenten von  $P$  in drei Achsenrichtungen sind  $P_x, P_y$  und  $P_z$ . Der durch die Einspannung hervorgerufene Widerstand der Stützung ist durch 6 Kraftgrössen, den lotrechten Stützendruck  $V_0$ , den wagerechten Schub  $H_0, N_0$  und das Biegemoment  $\mathfrak{M}_0, \mathfrak{S}_0$  und das Torsionsmoment  $\mathfrak{T}_0$  definiert.

Ein beliebiger Querschnitt im Abstände  $x$  vom Anfangspunkte  $O$  verdreht

$\frac{dz}{dx}$  um die im unbelasteten Zustande horizontale Hauptachse durch den

Schwerpunkt wie in Abb. 2<sub>a</sub> gezeigt,

$\frac{dy}{dx}$  um die im unbelasteten Zustande vertikale Hauptachse durch den

Schwerpunkt wie in Abb. 2<sub>b</sub> gezeigt,  
 $\varphi$  um die polare Achse durch den Schwerpunkt wie in Abb. 2<sub>c</sub> gezeigt,  
 und verschiebt sich

$\Delta S$  in der Achsenrichtung  $ox$ .

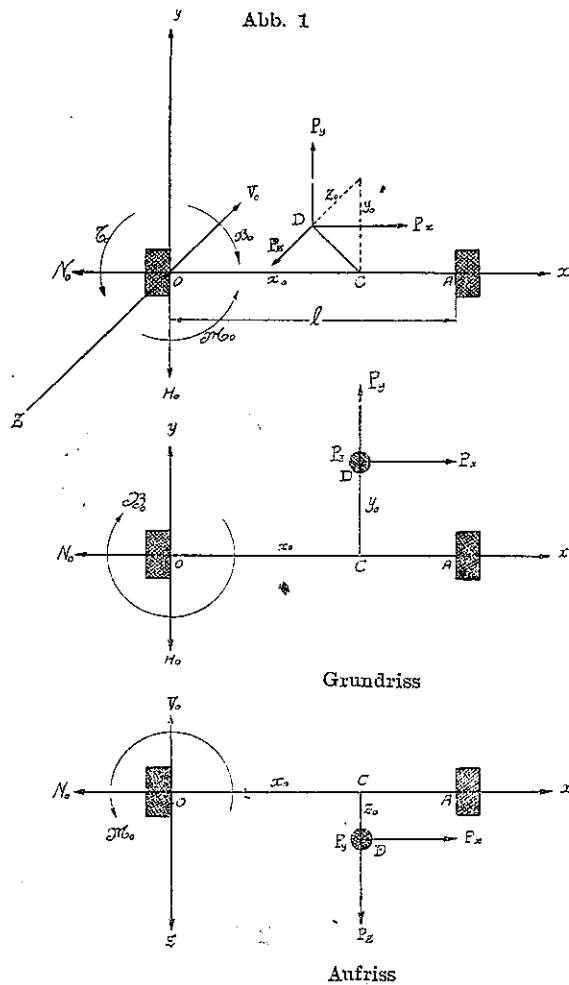
Die Zugehörigen Momente und Achsialkraft ergeben sich alsdann aus

$$(1) \quad M' = M - T \frac{dy}{dx} + B\varphi$$

$$(2) \quad B' = B + T \frac{dz}{dx} - M\varphi$$

$$(3) \quad T' = T - B \frac{dz}{dx} + M \frac{\alpha y}{dx}$$

$$(4) \quad N' = N + V \frac{dz}{dx} + H \frac{dy}{dx}$$



worin  $N$  Achsialkraft des Querschnitts,  
 $V$  vertikale Schubkraft des Querschnitts,  
 $H$  horizontale Schubkraft des Querschnitts,

Die Differentialgleichungen für die Formänderungen sind

$$(5) \quad EI \frac{d^2 z}{dx^2} = M' = M - T \frac{dy}{dx} + B\varphi$$

$$(6) \quad EI' \frac{d^2 y}{dx^2} = B' = B + T \frac{dz}{dx} - M\varphi$$

$$(7) \quad \mu J \frac{d\varphi}{dx} = T' = T - B \frac{dz}{dx} + M \frac{dy}{dx}$$

$$(8) \quad EF \frac{d\Delta s}{dx} = N' = N + V \frac{dz}{dx} + H \frac{dy}{dx}$$

worin  $F$  Querschnittsinhalt.

Die Momente, Schubkräfte und Achsialkraft eines Querschnitts des Balkens sind

$$(9) \quad \begin{aligned} M &= M_0 - V_0 x \\ &= M_0 - V_0 x + P_z(x - x_0) + P_x z_0 \end{aligned}$$

$$(10) \quad \begin{aligned} B &= B_0 - H_0 x \\ &= B_0 - H_0 x + P_y(x - x_0) + P_x y_0 \end{aligned}$$

$$(11) \quad \begin{aligned} T &= T_0 \\ &= T_0 + P_z y_0 - P_y z_0 \end{aligned}$$

$$(12) \quad \begin{aligned} V &= V_0 \\ &= V_0 - P_z \end{aligned}$$

$$(13) \quad \begin{aligned} H &= H_0 \\ &= H_0 - P_y \end{aligned}$$

$$(14) \quad \begin{aligned} N &= N_0 \\ &= N_0 - P_x \end{aligned}$$

für  $0 < x < x_0$   
 "  $x_0 < x < l$   
 "  $0 < x < x_0$   
 "  $x_0 < x < l$   
 "  $0 < x < x_0$   
 "  $x_0 < x < l$   
 "  $0 < x < x_0$   
 "  $x_0 < x < l$   
 "  $0 < x < x_0$   
 "  $x_0 < x < l$

Abb. 2a  
Anfriss

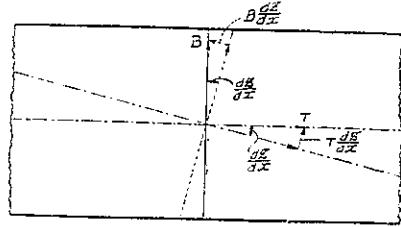


Abb. 2b  
Grundriss

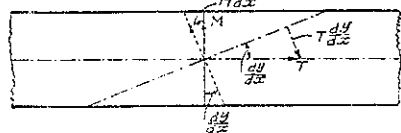
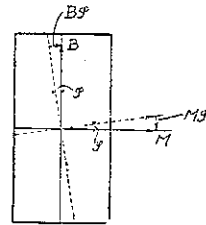


Abb. 2c  
Querschnitt



Die Stützenwiderstände ergeben sich annäherungsweise aus den folgenden Gleichungen :

$$(15) \quad V_0 = \frac{l-x_0}{l} \{6z_0x_0P_x + (l-x_0)(l+2x_0)P_z\}$$

$$(16) \quad H_0 = \frac{l-x_0}{l} \{6x_0y_0P_x + (l-x_0)(l+2x_0)P_y\}$$

$$(17) \quad N_0 = \frac{l-x_0}{l} P_x$$

$$(18) \quad \mathfrak{M}_0 = \frac{l-x_0}{l^2} \{z_0(3x_0-l)P_x + x_0(l-x_0)P_z\}$$

$$(19) \quad \mathfrak{B}_0 = \frac{l-x_0}{l^2} \{y_0(3x_0-l)P_x + x_0(l-x_0)P_y\}$$

$$(20) \quad \mathfrak{S}_0 = \frac{l-x_0}{l} (P_y z_0 - P_z y_0)$$

Nach nochmaliger Differentiation der Gl. (7) und durch Gl. (5) und (6) erhält man

$$(21) \quad \mu J \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \left( \frac{M^2}{EI} + \frac{B^2}{EI} \right) \varphi = \left( H_0 + \frac{MT}{EI'} \right) \frac{dz}{dx} + \left( \frac{BT}{EI'} - V_0 \right) \frac{dy}{dx} - \left( \frac{1}{EI} - \frac{1}{EI'} \right) BM$$

Voraussetzt man annäherungsweise

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{EI} \left( \mathfrak{M}_0 x - V_0 \frac{x^2}{2} \right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI'} \left( \mathfrak{B}_0 x - H_0 \frac{x^2}{2} \right),$$

dann wird die Gl. (21) für  $0 < x < x_0$

$$(22) \quad \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + (ax^2 + bx + c)\varphi = \alpha x^2 + \beta x + \gamma x + \delta$$

wobei

$$a = \frac{1}{\mu J E I I'} (I V_0^2 + I' H_0^2)$$

$$b = -\frac{2}{\mu J E I I'} (I \mathfrak{M}_0 V_0 + I' \mathfrak{B}_0 H_0)$$

$$c = \frac{1}{\mu J E I I'} (I \mathfrak{M}_0^2 + I' \mathfrak{B}_0^2)$$

$$\alpha = \frac{1}{2E} \cdot \frac{\mathfrak{S}_0 (V_0^2 + H_0^2)}{\mu J E I I'}$$

$$\beta = -\frac{1}{\mu J E I I'} \left\{ \frac{3}{2} (I' - I) H_0 V_0 + \frac{3 \mathfrak{S}_0}{2E} (V_0 \mathfrak{M}_0 + H_0 \mathfrak{B}_0) \right\}$$

$$\gamma = \frac{1}{\mu J E I I'} \left\{ (2I' - I) \mathfrak{M}_0 H_0 + (I' - 2I) \mathfrak{B}_0 V_0 + \frac{\mathfrak{T}_0}{E} (\mathfrak{M}_0^2 + \mathfrak{B}_0^2) \right\}$$

$$\delta = -\frac{1}{\mu J E I I'} (I' - I) \mathfrak{B}_0 \mathfrak{M}_0$$

Um die Gl. (22) zu lösen, setzt man

$$(23) \quad \varphi = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots = \sum A_n x^n$$

dann erhält man aus (22)

$$(24) \quad \sum \{ (n+2)(n+1) A_{n+2} + a A_{n-2} + b A_{n-1} + c A_n \} x^n = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$$

wobei kein Koeffizient  $A_n$  mit dem Minuszeichen angenommen ist.

Setzt man  $n=0$ , dann wird

$$(25) \quad 2A_2 + cA_0 = \delta$$

$A_0$  und  $A_1$  sind danach zu bestimmen, dass  $\varphi$  für  $x=0$  gleich Null sein und dass

$\frac{d\varphi}{dx}$  beider Gl. (7) und (23) für  $x=0$  denselben Wert haben muss.

Gl. (23) gibt  $A_0 = 0$

Für  $x=0$  wird auch  $\frac{dz}{dx} = 0$  und  $\frac{dy}{dx} = 0$ ; damit ergibt sich

$$A_1 = \frac{\mathfrak{T}_0}{\mu J}$$

Aus (25)

$$A_2 = \frac{\delta}{2}$$

Setzt man  $n=1$ ,  $n=2$  und  $n=3$ , dann

$$A_3 = \frac{\gamma - cA_1}{3 \cdot 2}$$

$$A_4 = \frac{\beta - bA_1 - cA_2}{4 \cdot 3}$$

$$A_5 = \frac{\alpha - aA_1 - bA_2 - cA_3}{5 \cdot 4}$$

Für  $n=4$ ,

$$A_6 = -\frac{aA_2 + bA_3 + cA_4}{6 \cdot 5}$$

oder im allgemeinem

$$A_{n+2} = -\frac{aA_{n-2} + bA_{n-1} + cA_n}{(n+2)(n+1)}$$

worin

$$n \geq 4$$

Man erhält alsdann

$$(26) \quad \varphi = A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} A_n x^n$$

Wegen der starken Konvergenz dieser Reihe bekommt man schon einen guten Näherungswert, wenn man nur wenige Glieder beibehält. Setzt man in die rechte Seite von Gl. (5) und (6) für  $\varphi$  den Wert von Gl. (26), so wird

$$(27) \quad z = \frac{1}{EI} \left[ \mathfrak{M}_0 \frac{x^2}{2} - \left( V_0 + \frac{\mathfrak{T}_0 \mathfrak{B}_0}{EI} - \mathfrak{B}_0 A_1 \right) \frac{x^3}{6} \right. \\ \left. + \left( \frac{\mathfrak{T}_0 H_0}{2EI'} + \mathfrak{B}_0 A_2 - H_0 A_1 \right) \frac{x^4}{12} + (\mathfrak{B}_0 A_3 - H_0 A_2) \frac{x^5}{5 \cdot 4} \right. \\ \left. + (\mathfrak{B}_0 A_4 - H_0 A_3) \frac{x^6}{6 \cdot 5} + \dots + (\mathfrak{B}_0 A_{n-2} - H_0 A_{n-3}) \frac{x^n}{n(n-1)} + \dots \right]$$

$$(28) \quad y = \frac{1}{EI} \left[ \mathfrak{B}_0 \frac{x^2}{2} - \left( H_0 - \frac{\mathfrak{T}_0 \mathfrak{M}_0}{EI} + \mathfrak{M}_0 A_1 \right) \frac{x^3}{6} \right. \\ \left. - \left( \frac{\mathfrak{T}_0 V_0}{2EI} + \mathfrak{M}_0 A_2 - V_0 A_1 \right) \frac{x^4}{12} + (V_0 A_2 - \mathfrak{M}_0 A_3) \frac{x^5}{5 \cdot 4} \right. \\ \left. + (V_0 A_3 - \mathfrak{M}_0 A_4) \frac{x^6}{6 \cdot 5} + \dots + (V_0 A_{n-3} - \mathfrak{M}_0 A_{n-2}) \frac{x^n}{n(n-1)} + \dots \right]$$

Aus (8)

$$(29) \quad \Delta s = \frac{1}{EF} (N_0 x + V_0 z + H_0 y)$$

### Zahlenbeispiel.

Als Beispiel werde ein rechtwinkliger Balken von 100 cm, Stützenweite und  $12 \times 6$  cm<sup>2</sup> Querschnitte betrachtet.

Die Komponente der Last  $P$  sei  $P_x = P_y = P_z = 1,000$  kg, die Koordinaten des Angriffspunktes  $x_0 = 50$  cm,  $y_0 = 3$  cm,  $z_0 = 6$  cm, des Trägheitsmoment  $I = 1,152$  cm<sup>4</sup>,  $I' = 216$  cm<sup>4</sup>,  $J = 1,368$  cm<sup>4</sup>, der Elastizitätsmodul  $E = 2,000,000$  kg. cm<sup>2</sup>, der Gleitmodul  $\mu = 800,000$  kg. cm<sup>2</sup>, Die Stützenwiderstände sind

$$\begin{aligned} V_0 &= 590 \text{ kg}, & H_0 &= 545 \text{ kg}, & N_0 &= 500 \text{ kg}, \\ \mathfrak{M}_0 &= 14,000 \text{ kg-cm}, & \mathfrak{B}_0 &= 13,250 \text{ kg-cm}, & \mathfrak{T}_0 &= 1,500 \text{ kg-cm}. \end{aligned}$$

Man erhält alsdann

$$(1) \quad \varphi = 0.000,001,370,614x \\ + 1,836,063 \times 10^{-12} (86,814x^2 - 3,635,983x^3 + 0,037,622,425x^4)$$

$$(2) \quad z = 0,434,027,778 \times 10^{-9} (7,000x^2 - 98,337,974x^3 + 0,000,016,776x^4)$$

$$(3) \quad y = 2,314,815 \times 10^{-9} (6,625x^2 - 90,835,012x^3 + 0,000,051,198x^4)$$

$$(4) \quad \Delta s = 0,006,944,444 \times 10^{-6} (500x + 590z + 545y)$$

Es ergibt sich dann für die Anwendung der Gl. (1), (2), (3) und (4) für die linke Balkenhälfte nachstehende Zusammenstellung:

### Zusammenstellung

$x$ in cm.	$10^3 \phi$	$10^2 z$ in cm.	$10^2 y$ in cm.	$10^3 \Delta s$ in cm.
5	0.006,856	0.070,620	0.357,114	0.017,363
10	0.013,716	0.261,138	1.323,301	0.043,728
15	0.020,576	0.539,544	2.740,880	0.052,096
20	0.027,434	0.873,828	4.452,149	0.069,465
25	0.034,288	1.231,977	6.299,417	0.086,834
30	0.041,138	1.581,983	8.124,991	0.104,204
35	0.047,984	1.891,833	9.771,184	0.121,572
40	0.054,829	2.129,520	11.080,302	0.138,940
45	0.061,675	2.263,030	11.894,665	0.156,304
50	0.068,526	2.260,355	12.056,582	0.173,666

## II Besondere Fälle.

(i) Fall wobei  $y_0 = z_0 = 0$

$$V_0 = \frac{(l-x_0)^2(l+2x_0)}{l^3} P_z, \quad H_0 = \frac{(l-x_0)^2(l+2x_0)}{l^3} P_y, \quad N_0 = \frac{l-x_0}{l} P_x$$

$$\mathfrak{M}_0 = \frac{x_0(l-x_0)^2}{l^2} P_z, \quad \mathfrak{B}_0 = \frac{x_0(l-x_0)^2}{l^2} P_y, \quad \mathfrak{T}_0 = 0$$

$$a = \frac{1}{\mu J E I I'} (I V_0^2 + I' H_0^2), \quad b = -\frac{2}{\mu J E I I'} (I \mathfrak{M}_0 V_0 + I' \mathfrak{B}_0 H_0),$$

$$c = \frac{1}{\mu J E I I'} (I \mathfrak{M}_0^2 + I' \mathfrak{B}_0^2), \quad \alpha = 0$$

$$\beta = -\frac{3(I'-I)}{2\mu J E I I'} H_0 V_0, \quad \gamma = \frac{1}{\mu J E I I'} \left\{ (2I'-I) \mathfrak{M}_0 H_0 + (I'-2I) \mathfrak{B}_0 V_0 \right\}$$

$$\delta = -\frac{1}{\mu J E I I'} (I'-I) \mathfrak{B}_0 \mathfrak{M}_0, \quad A_0 = 0, \quad A_1 = 0$$

$$A_2 = \frac{\delta}{2}, \quad A_3 = \frac{\gamma}{3 \cdot 2}, \quad A_4 = \frac{\beta - c A_2}{4 \cdot 3}, \quad A_5 = -\frac{b A_2 + c A_3}{5 \cdot 4}$$



$$A_6 = -\frac{\alpha A_2 + b A_3 + c A_4}{6 \cdot 5}, \dots$$

$$A_{n+2} = -\frac{\alpha A_{n-2} + b A_{n-1} + c A_n}{(n+2)(n+1)}, \dots$$

$$\varphi = A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + A_5 x^5 + \dots$$

$$z = \frac{1}{EI} \left[ \mathfrak{M}_0 \frac{x^2}{2} - V_0 \frac{x^3}{6} + \mathfrak{B}_0 A_2 \frac{x^4}{12} + (\mathfrak{B}_0 A_3 - H_0 A_2) \frac{x^5}{5 \cdot 4} \right. \\ \left. + (\mathfrak{B}_0 A_4 - H_0 A_3) \frac{x^6}{6 \cdot 5} + \dots \right.$$

$$\left. + (\mathfrak{B}_0 A_{n-2} - H_0 A_{n-3}) \frac{x^n}{n(n-1)} + \dots \right]$$

$$y = \frac{1}{EI} \left[ \mathfrak{B}_0 \frac{x^2}{2} - H_0 \frac{x^3}{6} - \mathfrak{M}_0 A_2 \frac{x^4}{12} + (V_0 A_2 - \mathfrak{M}_0 A_3) \frac{x^5}{5 \cdot 4} \right. \\ \left. + (V_0 A_3 - \mathfrak{M}_0 A_4) \frac{x^6}{6 \cdot 5} + \dots \right.$$

$$\left. + (V_0 A_{n-3} - \mathfrak{M}_0 A_{n-2}) \frac{x^n}{n(n-1)} + \dots \right]$$

$$\Delta s = \frac{1}{EF} (N_0 x + V_0 z + H_0 y)$$

(ii) Fall worin  $P_x = P_y = 0$

$$V_0 = \frac{(l - x_0)^2 (l + 2x_0)}{l^3} P_z, \quad H_0 = 0, \quad N_0 = 0$$

$$\mathfrak{M}_0 = \frac{x_0 (l - x_0)^2}{l^2} P_z, \quad \mathfrak{B}_0 = 0, \quad \mathfrak{Z}_0 = -\frac{y_0 (l - x_0)}{l} P_z$$

$$a = \frac{V_0^2}{\mu J EI}, \quad b = -\frac{2 \mathfrak{M}_0 V_0}{\mu J EI}, \quad c = \frac{\mathfrak{M}_0^2}{\mu J EI}$$

$$\alpha = \frac{\mathfrak{Z}_0 V_0^2}{2 \mu J EI EI}, \quad \beta = -\frac{3 V_0 \mathfrak{Z}_0 V_0}{2 \mu J EI EI}, \quad \gamma = \frac{\mathfrak{Z}_0 \mathfrak{M}_0^2}{\mu J EI EI}$$

$$\delta = 0, \quad A_0 = 0, \quad A_1 = \frac{\mathfrak{Z}_0}{\mu J}, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = \frac{\gamma - c A_1}{3 \cdot 2},$$

$$A_4 = \frac{\beta - b A_1}{4 \cdot 3}, \quad A_5 = \frac{\alpha - a A_1 - c A_3}{5 \cdot 4}, \quad A_6 = -\frac{b A_3 + c A_4}{6 \cdot 5},$$

$$A_7 = -\frac{\alpha A_3 + b A_4 + c A_5}{7 \cdot 6}, \dots$$

$$A_{n+1} = -\frac{aA_{n-2} + bA_{n-1} + cA_n}{(n+2)(n+1)}, \dots$$

$$\varphi = A_1 x + A_3 x^3 + A_5 x^5 + \dots$$

$$z = \frac{1}{EI} \left( \mathfrak{M}_0 \frac{x^2}{2} - V_0 \frac{x^3}{6} \right)$$

$$y = \frac{1}{EI'} \left[ \left( \frac{\mathfrak{X}_0 \mathfrak{M}_0}{EI} - \mathfrak{M}_0 A_1 \right) \frac{x^2}{6} + \left( V_0 A_1 - \frac{\mathfrak{X}_0 V_0}{2EI} \right) \frac{x^4}{12} - \mathfrak{M}_0 A_3 \frac{x^5}{5.4} \right. \\ \left. + (V_0 A_3 - \mathfrak{M}_0 A_4) \frac{x^5}{6.5} + \dots \right. \\ \left. + (V_0 A_{n-3} - \mathfrak{M}_0 A_{n-2}) \frac{x^n}{n(n-1)} + \dots \right]$$

$$\Delta s = \frac{V_0}{EF} z$$

(iii) Fall worin  $y_0 = z_0 = 0$  und  $P_x = P_y = 0$

$$V_0 = \frac{(l-x_0)^2 (l+2x_0)}{l^3} P_x, \quad H_0 = 0, \quad N_0 = 0, \quad \mathfrak{M}_0 = \frac{x_0(l-x_0)^2}{l^2} P_x,$$

$$\mathfrak{B}_0 = 0, \quad \mathfrak{X}_0 = 0, \quad \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$$

$$A_0 = A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = \dots = 0$$

$$\varphi = 0$$

$$z = \frac{1}{EI} \left( \mathfrak{M}_0 \frac{x^2}{2} - V_0 \frac{x^3}{6} \right)$$

$$y = 0$$

$$\Delta s = \frac{V_0}{EF} z$$

(iv) Fall worin  $P_y = P_z = 0$

$$V_0 = \frac{6z_0 x_0 (l-x_0)}{l^3} P_x, \quad H_0 = \frac{6x_0 y_0 (l-x_0)}{l^3} P_x, \quad N_0 = \frac{l-x_0}{l} P_x$$

$$\mathfrak{M}_0 = \frac{z_0 (l-x_0) (3x_0 - l)}{l^2} P_x, \quad \mathfrak{B}_0 = \frac{y_0 (l-x_0) (3x_0 - l)}{l^2} P_x, \quad \mathfrak{X}_0 = 0,$$

$$a = \frac{1}{\mu J E I I'} (I V_0^2 + I' H_0^2), \quad b = -\frac{2}{\mu J E I I'} (I \mathfrak{M}_0 V_0 + I' \mathfrak{B}_0 H_0)$$

$$c = \frac{1}{\mu J E I I'} (I \mathfrak{M}_0^2 + I' \mathfrak{B}_0^2), \quad \alpha = 0, \quad \beta = \frac{3(I' - I)}{2\mu J E I I'} H_0 V_0,$$

$$\gamma = \frac{1}{\mu J E I I'} \{ (2I' - I) \mathfrak{M}_0 H_0 + (I' - 2I) \mathfrak{B}_0 V_0 \}, \quad \delta = - \frac{I' - I}{\mu J E I I'} \mathfrak{B}_0 \mathfrak{M}_0,$$

$$A_0 = 0, \quad A_1 = 0, \quad A_2 = \frac{\delta}{2}, \quad A_3 = \frac{\gamma}{3 \cdot 2}, \quad A_4 = \frac{\beta - c A_2}{4 \cdot 3},$$

$$A_5 = \frac{\alpha - b A_2 - c A_3}{5 \cdot 4}, \quad A_6 = - \frac{a A_2 + b A_3 + c A_4}{6 \cdot 5} \dots$$

$$A_{n+2} = - \frac{a A_{n-2} + b A_{n-1} + c A_n}{(n+2)(n+1)}, \dots$$

$$\varphi = A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + \dots$$

$$z = \frac{1}{EI} \left[ \mathfrak{M}_0 \frac{x^2}{2} - V_0 \frac{x^3}{6} + \mathfrak{B}_0 A_2 \frac{x^4}{12} + (\mathfrak{B}_0 A_2 - H_0 A_2) \frac{x^5}{5 \cdot 4} \right. \\ \left. + (\mathfrak{B}_0 A_4 - H_0 A_3) \frac{x^6}{6 \cdot 5} + \dots + (\mathfrak{B}_0 A_{n-2} - H_0 A_{n-3}) \frac{x^n}{n(n-1)} + \dots \right]$$

$$y = \frac{1}{EI'} \left[ \mathfrak{B}_0 \frac{x^2}{2} - H_0 \frac{x^3}{6} - \mathfrak{M}_0 A_2 \frac{x^4}{12} + (V_0 A_2 - \mathfrak{M}_0 A_3) \frac{x^5}{5 \cdot 4} \right. \\ \left. + (V_0 A_3 - \mathfrak{M}_0 A_4) \frac{x^6}{6 \cdot 5} + \dots + (V_0 A_{n-3} - \mathfrak{M}_0 A_{n-2}) \frac{x^n}{n(n-1)} + \dots \right]$$

$$\Delta s = \frac{1}{EF} [N_0 x + V_0 z + H_0 y]$$

(v) Fall worin  $P_y = P_z = 0$  und  $y_0 = 0$

$$V_0 = \frac{6z_0 x_0 (l - x_0)}{l^3} P_z, \quad \mathfrak{M}_0 = \frac{z_0 (l - x_0) (3x_0 - l)}{l^3} P_z, \quad N_0 = \frac{l - x_0}{l} P_z,$$

$$H_0 = \mathfrak{B}_0 = \mathfrak{T}_0 = 0, \quad \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0, \quad A_0 = A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = \dots = 0$$

$$\varphi = 0, \quad z = \frac{1}{EI} \left( \mathfrak{M}_0 \frac{x^2}{2} - V_0 \frac{x^3}{6} \right), \quad y = 0, \quad \Delta s = \frac{N_0 x + V_0 z}{EF}.$$

(vi) Fall worin  $P_y = P_z = 0$  und  $y_0 = z_0 = 0$

$$V_0 = H_0 = \mathfrak{M}_0 = \mathfrak{B}_0 = \mathfrak{T}_0 = 0, \quad N_0 = \frac{l - x_0}{l} P_x.$$

$$a = b = c = \alpha = \beta = \gamma = \delta = A_0 = A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = \dots = 0$$

$$\varphi = 0, \quad z = 0, \quad y = 0, \quad \Delta s = \frac{N_0 x}{EF}$$

### III Kipperscheinungen

Ein auf Biegung beanspruchter Balken, dessen Querschnitt Hauptachsen von

sehr verschiedenem Trägheitsmoment besitzt und dessen Biegungsebene mit der Ebene seiner grössten Biegungssteifigkeit zusammenfällt, weicht senkrecht zur Biegungsebene aus, sobald die biegende Kraft einen gewissen Betrag überschreitet.

Dieses Ausweichen bezeichnet man als Kippen oder Umkippen des Stabes. Diese Erscheinung wollen wir an einem einseitig fest eingespannten horizontalen Balken untersuchen, dessen Querschnitt die beiden Hauptträgheitsmomente  $I' < I$  besitzt.

Die zugeordneten Hauptachsen des Querschnitts mögen im unbelasteten Zustande des Balkens vertikal- bzw. horizontal stehen.

In Abb. 3<sub>a</sub> ist der Stab vor dem Erreichen der Kipplast im Raum gezeichnet. Abb. 3<sub>b</sub> zeigt ihn im Raum, Abb. 3<sub>c</sub> im Grundriss und Abb. 3<sub>d</sub> im Aufriss nach dem Überschreiten der Kipplast.

Die Last  $P_z$  projiziert sich im Grundriss als Punkt. Man sieht aus der Abbildung, dass der Stab nach Überschreiten der Kipplast eine vollkommen andere Gleichgewichtslage einnimmt.

Gleichzeitig erkennt man, dass der Stab sowohl in seiner neuen Gleichgewichtslage als auch beim Übergang von der alten in die neue Gleichgewichtslage neben seiner Beanspruchung auf Biegung auch auf Verdrehen beansprucht wird. Diese Verdrehung wird durch das Drehmoment der Kraft  $P_z$  infolge der seitlichen Auslenkung des Stabendes aufrechterhalten und ist besonders gross für die Querschnitte nahe am festgehaltenen Ende des Stabes, da für diese der Hebelarm der Kraft die grössten Werte annimmt. Nach dieser rein qualitativen Betrachtung der Kipperscheinung wenden wir uns ihrer mathematischen Behandlung zu, um die Erscheinung auch quantitativ zu erforschen.

Wir verwenden ein Koordinatensystem  $xyz$ , dessen Anfangspunkt mit dem eingebauten Ende des Stabes, und zwar mit dem Schwerpunkt des Endquerschnitts zusammenfällt. Die  $z$ -Achse verläuft senkrecht nach unten im Sinne der Kraft  $P_z$ ; die  $x$ -Achse geht entlang der ursprünglichen Stabrichtung und ist nach dem Stab hin gerichtet; schliesslich steht die  $y$ -Achse senkrecht zu den beiden anderen.

Infolge der Kippung erleidet dann der Querschnitt sowohl eine als klein angenommene Verdrehung  $\varphi$  als auch eine Verschiebung in horizontaler und vertikaler Richtung, welchen Biegungen um die dazu normalen Achsen entsprechen.

Das Biegemoment des Stabes in vertikaler- bzw. horizontaler Ebene ist

$$(1) \quad M = M_0 - \mathfrak{Z}_0 \frac{dy}{dx} - V_0 x$$

und

$$(2) \quad B = 0$$

Auser dem Biegemoment wirkt aber auf den Querschnitt noch ein Torsionsmoment, welches sich zu

$$(3) \quad T = \mathfrak{Z}_0 + M_0 \frac{dy}{dx} - V_0 \left( x \frac{dy}{dx} - y \right)$$

ergibt. Hierin bedeuten  $M_0, \mathfrak{Z}_0, V_0$  die Stützenwiderstände und haben die folgenden Werte :

$$(4) \quad \begin{cases} M_0 = P_z l \\ \mathfrak{Z}_0 = -P_z y_0 \\ V_0 = P_z \end{cases}$$

worin  $y_0$  die Horizontalauslenkung des freien Endes des Stabes, in dem auch die Kraft  $P_z$  angreifend zu denken ist, bezeichnet.

Die Biegungsgleichungen und die Torsionsgleichung lauten aus Gl.

(5), (6), (7) von Abschnitt I,

$$(5) \quad EI \frac{d^2 z}{dx^2} = P_z \left[ l - x + 2y_0 \frac{dy}{dx} - y \frac{dy}{dx} - (l-x) \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right]$$

$$(6) \quad EI' \frac{d^2 y}{dx^2} = P_z \left[ (l-x) \left( \frac{dy}{dx} \right) \times \frac{dz}{dx} - \varphi \right] - (y_0 - y) \frac{dz}{dx}$$

$$(7) \quad \mu J \frac{d\varphi}{dx} = P_z \left[ 2(l-x) \frac{dy}{dx} - (y_0 - y) \right]$$

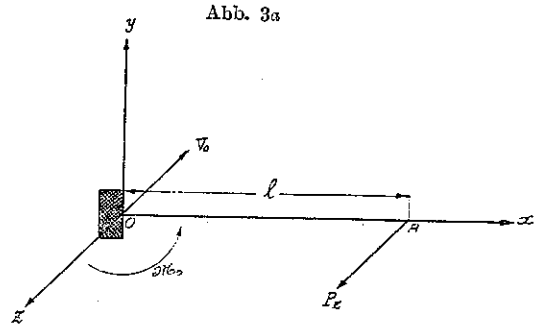


Abb. 3a

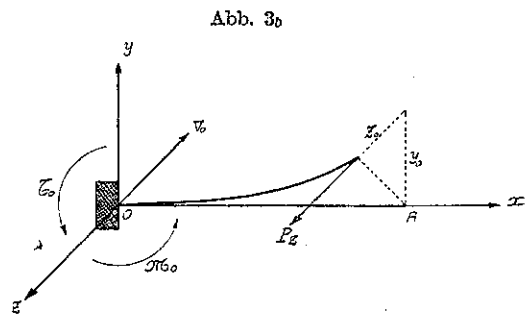


Abb. 3b

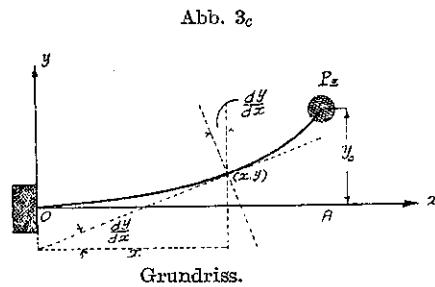


Abb. 3c

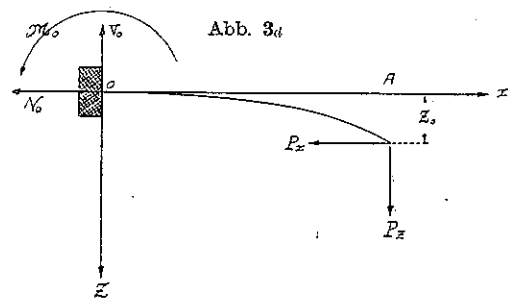


Abb. 3d

Aufriss.

Nach nochmaligen Differentiation der Gl. (7)

$$(8) \quad \mu J \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = P_z \left\{ 2(l-x) \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} \right\}$$

Aus (8) und (6) erhält man

$$(9) \quad \mu J \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = P_z \left[ 2(l-x) \frac{P_z}{EI'} \left\{ (l-x) \left( \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} - \varphi \right) - (y_0 - y) \frac{dz}{dx} \right\} - \frac{dy}{dx} \right]$$

Man kann hier annäherungsweise so voraussetzen dass

$$\frac{dz}{dx} \doteq \frac{P_z}{EI} \left( lx - \frac{x^2}{2} \right)$$

$$y \doteq \frac{y_0}{l^3} x^3,$$

Die Gl. (9) wird alsdann

$$(10) \quad \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + (a_0 + a_1 x + a_2 x^2) \varphi = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \alpha_5 x^5 + \alpha_6 x$$

worin

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{2P_z^2 l^2}{\mu J E I'} & \alpha_1 &= -\frac{4P_z^2 l}{\mu J E I'} & \alpha_2 &= \frac{2P_z^2}{\mu J E I'} \\ \alpha_1 &= y_0 \alpha_1' & \alpha_1' &= -\frac{2P_z^3 l^2}{\mu J E I E I'} \\ \alpha_2 &= y_0 \alpha_2' & \alpha_2' &= \frac{3P_z}{\mu J E I E I' l^3} (P_z^2 l - E I E I') \\ \alpha_3 &= y_0 \alpha_3' & \alpha_3' &= \frac{5P_z^3}{\mu J E I E I'} \\ \alpha_4 &= y_0 \alpha_4' & \alpha_4' &= -\frac{13P_z^3}{\mu J E I E I' l} \\ \alpha_5 &= y_0 \alpha_5' & \alpha_5' &= \frac{9P_z^3}{\mu J E I E I' l^2} \\ \alpha_6 &= y_0 \alpha_6' & \alpha_6' &= -\frac{2P_z^3}{\mu J E I E I' l^3} \end{aligned}$$

Die weitere Behandlung der Erscheinung hängt von der Lösung dieser Differentialgleichung zweiter Ordnung ab. Folgender Ansatz führt zum Ziel, bei dem  $\varphi$  als eine nach Potenzen von  $x$  ansteigende Reihe eingeführt wird:

$$\varphi = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots = \sum A_n x^n$$

Durch Einsetzen in Gl. (10) ergibt sich für die Koeffizienten  $A_n$  folgende Rekursionsformel:

$$(11) \quad \sum \left\{ (n+2)(n+1)A_{n+2} + a_0 A_n + a_1 A_{n-1} + a_2 A_{n-2} \right\} x^n = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_6 x^6$$

Ferner sieht man sofort, dass

$$A_0 = 0 \quad A_1 = y_0 A_1'; \quad A_1' = -\frac{P_z}{\mu J}$$

$$A_2 = 0$$

sein muss und damit wegen Gl. (11) sämtliche höheren Koeffizienten ermittelt werden, nämlich

$$A_3 = y_0 A_3'; \quad A_3' = \frac{\alpha_1' - a_0 A_1'}{3 \cdot 2}$$

$$A_4 = y_0 A_4'; \quad A_4' = \frac{\alpha_2' - a_1 A_1'}{4 \cdot 3}$$

$$A_5 = y_0 A_5'; \quad A_5' = \frac{\alpha_3' - a_2 A_1' - a_0 A_3'}{5 \cdot 4}$$

$$A_6 = y_0 A_6'; \quad A_6' = \frac{\alpha_4' - a_1 A_3' - a_0 A_4'}{6 \cdot 5}$$

$$A_7 = y_0 A_7'; \quad A_7' = \frac{\alpha_5' - a_2 A_3' - a_1 A_4' - a_0 A_5'}{7 \cdot 6}$$

$$A_8 = y_0 A_8'; \quad A_8' = \frac{\alpha_6' - a_2 A_4' - a_1 A_5' - a_0 A_6'}{8 \cdot 7}$$

$$A_9 = y_0 A_9'; \quad A_9' = -\frac{a_2 A_5' + a_1 A_6' + a_0 A_7'}{9 \cdot 8}$$

.....

$$A_{n+2} = y_0 A_{n+2}'; \quad A_{n+2}' = -\frac{a_2 A_{n-2}' + a_1 A_{n-1}' + a_0 A_n'}{(n+2)(n+1)}$$

.....

Die Lösung für  $\varphi$  ergibt sich

$$(12) \quad \varphi = y_0 (A_1' x + A_3' x^3 + A_4' x^4 + A_5' x^5 + \dots)$$

Die Grösse der seitlichen Ausweichung  $y$  folgt aus Gl. (6) durch Einsetzen des Wertes für  $\varphi$  und durch Lösung darauffolgender Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$(13) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + (a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) \frac{dy}{dx} + (b_1 x + b_2 x^2) y = \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \dots + \beta_n x^n + \dots$$

worin

$$a_1 = -\frac{P_z^2 l^2}{EI EI'} \quad a_2 = \frac{3l P_z^2}{2EI EI'}$$

$$a_3 = -\frac{P_z^2}{2EI EI'} \quad b_1 = -\frac{l P_z^2}{EI EI'} \quad b_2 = \frac{P_z^2}{2EI EI'}$$

$$\beta_1 = y_0 \beta_1'; \quad \beta_1' = \frac{P_z^2 l (EI - \mu J)}{\mu J EI EI'}$$

$$\beta_2 = y_0 \beta_2'; \quad \beta_2' = \frac{P_z^2 (\mu J - 2EI)}{2\mu J EI EI'}$$

$$\beta_3 = y_0 \beta_3'; \quad \beta_3' = -\frac{P_z^2 A_3'}{EI'}$$

$$\beta_4 = y_0 \beta_4'; \quad \beta_4' = -\frac{P_z}{EI'} (l A_4' - A_3')$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\beta_n = y_0 \beta_n'; \quad \beta_n' = -\frac{P_z}{EI'} (l A_n' - A_{n-1}')$$

Um die Gl. (13) zu lösen, setzt man

$$y = \sum C_n x^n,$$

dann ergibt sich für die Koeffizienten  $C_n$  folgende Rekursionsformel:

$$\sum \left[ (n+2)(n+1) C_{n+2} + a_1 n C_n + \{a_0(n-1) + b_1\} C_{n-1} + \{a_2(n-2) + b_2\} C_{n-2} \right] x^n = \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \beta_4 x^4 + \dots$$

Man sieht sofort, dass

$$C_0 = C_1 = C_2 = 0$$

sein muss, und die folgenden höheren Koeffizienten festgelegt werden.

$$C_3 = y_0 C_3'; \quad C_3' = \frac{\beta_1'}{3 \cdot 2}$$

$$C_4 = y_0 C_4'; \quad C_4' = \frac{\beta_2'}{4 \cdot 3}$$



$$C_5 = y_0 C_5'; \quad C_5' = \frac{\beta_5' - 3a_1 C_3'}{5.4}$$

$$C_6' = y_0 C_6'; \quad C_6' = \frac{\beta_6' - (3a_2 + b_1) C_3' - 4a_1 C_4'}{6.5}$$

$$C_7' = y_0 C_7'; \quad C_7' = \frac{\beta_7' - (3a_3 + b_2) C_3' - (4a_2 + b_1) C_4' - 5a_1 C_5'}{7.6}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$C_{n+2} = y_0 C_{n+2}'; \quad C_{n+2}' = \frac{\beta_n - \{(n-2)a_3 + b_2\} C_{n-2}' - \{(n-1)a_2 + b_1\} C_{n-1}' - na_1 C_n'}{(n+2)(n+1)}$$

Die Lösung für  $y$  ist alsdann

$$(14) \quad y = y_0 (C_3' x^3 + C_4' x^4 + C_5' x^5 + C_6' x^6 + \dots)$$

Damit am freien Ende des Stabes  $y = y_0$  wird, muss nach Gl. (14)

$$1 = C_3' l^3 + C_4' l^4 + C_5' l^5 + C_6' l^6 + \dots$$

sein.

Von den unendlich vielen Wurzeln dieser Gleichung kommt zur Bestimmung der kleinsten Kipplast nur die kleinste Wurzel in Betracht. Wegen der starken Konvergenz dieser Reihe bekommt man schon einen guten Näherungswert, wenn man nur zwei Glieder beibehält.

Damit würde sich die Kipplast zu

$$P_z = \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{24 E I E' \mu J}{2 E I - 3 \mu J}}$$

ergeben. Ferner sieht man sofort, dass

$$I > \frac{3\mu}{2E} J$$

sein muss. Überschreitet der Wert von  $I$  um  $\frac{3\mu}{2E} I'$ , so kann eine Kip-

$$1 - \frac{3\mu}{2E}$$

plung erscheinen.

Zum Beispiel erhält man mit  $E = 2,000,000 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\mu = 800,000 \text{ kg/cm}^2$ ,

$$I > 0,6J \quad \text{oder} \quad I > 1,51I'$$

Die Grösse der vertikalen Auslenkung  $z$  folgt aus Gl. (5) durch Einsetzen des

Wertes für  $y$  und  $\frac{dy}{dx}$  und darauffolgende zweimalige Integration nach  $x$ :

$$\begin{aligned}
 (15) \quad z = & \frac{P_z}{EI} \left[ \frac{l}{2} x^2 - \frac{x^3}{6} + 2y_0^2 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{C_n'}{n+1} x^{n+1} \right. \\
 & - \frac{y_0^2}{2} \left\{ \sum_{n=3}^{\infty} C_n'^2 \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + 2 \left( C_3' \sum_{n=4}^{\infty} C_n' \frac{x^{n+4}}{n+4} \right. \right. \\
 & \left. \left. + C_4' \sum_{n=5}^{\infty} C_n' \frac{x^{n+5}}{n+5} + \dots \right) \right\} \\
 & - ly_0^2 \left\{ \sum_{n=3}^{\infty} n^2 C_n'^2 \frac{x^{2n}}{2n(2n-1)} + 2 \left( 3 C_3' \sum_{n=4}^{\infty} n C_n' \frac{x^{n+3}}{(n+3)(n+2)} \right. \right. \\
 & \left. \left. + 4 C_4' \sum_{n=5}^{\infty} n C_n' \frac{x^{n+4}}{(n+4)(n+3)} + \dots \right) \right\} \\
 & + y_0^2 \left\{ \sum_{n=3}^{\infty} n^2 C_n'^2 \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)2n} + 2 \left( 3 C_3' \sum_{n=4}^{\infty} n C_n' \frac{x^{n+4}}{(n+4)(n+3)} \right. \right. \\
 & \left. \left. + 4 C_4' \sum_{n=5}^{\infty} n C_n' \frac{x^{n+5}}{(n+5)(n+4)} + \dots \right) \right\} \Big]
 \end{aligned}$$

Die Verschiebung des Querschnitts in der Achsrichtung folgt aus Gl. (8), Abschnitt I, durch einmalige Integration:

$$(16) \quad \Delta s = \frac{P_z}{EF} z$$

### Zum Schlusse.

Die Theorie der Kipperscheinungen eines Stabes ist zuerst von Prof. L. Prandtl in seiner Dissertation, München 1899, eingehend behandelt worden. In diesem Jahre hat A. G. M. Michel auch eine Abhandlung über das Problem veröffentlicht in "Philosophical Magazine and Journal of Science," Bd. XLVIII, London.

Über dasselbe Problem liegen noch von Dr. J. Prescott zwei Veröffentlichungen vor. Vgl. "Philosophical Magazine and Journal of Science" Bd. XXXVI s. 297 und XXXIX s. 194.

In den erwähnten Dissertationen ist das Biegemoment  $M$  in der vertikalen Ebene so gewählt worden, dass  $M = P_z(1-x)$ . Nach dem Überschreiten der Kipplast ist aber der Stab im Grundriss gekrümmt worden und man muss noch die Komponente des Torsionsmomentes in der vertikalen, tangentialen Ebene auf den Gedanken kommen lassen. Damit hat der Verfasser das Biegemoment so angenommen, dass

$$M = P_z \left( l - x + y_0 \cdot \frac{dy}{dx} \right)$$

Das Torsionsmoment  $T$  ist so angegeben, dass

$$T = P_z \left\{ (l - x) \frac{dy}{dx} - (y_0 - y) \right\}$$

Dieser Ausdruck ist ganz gleich wie das Ergebnis des Verfassers. Die Differentialgleichungen für die Auslenkungen und Verdrehung lauten

$$(17) \quad \begin{cases} EI \frac{d^2 z}{dx^2} = M = P_z (l - x) \\ EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -M\varphi = -P_z (l - x)\varphi \\ \mu J \frac{d\varphi}{dx} = T = P_z \left\{ (l - x) \frac{dy}{dx} - (y_0 - y) \right\} \end{cases}$$

Man sieht aber aus den Grundgleichungen des Verfassers, dass

$$(18) \quad \begin{cases} EI \frac{d^2 z}{dx^2} = P_z \left\{ (l - x) + (2y_0 - y) \frac{dy}{dx} - (l - x) \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right\} \\ EI \frac{d^2 y}{dx^2} = P_z \left\{ (l - x) \left( \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dz}{dx} - \varphi \right) - (y_0 - y) \frac{dz}{dx} \right\} \\ \mu J \frac{d\varphi}{dx} = P_z \left\{ 2(l - x) \frac{dy}{dx} - (y_0 - y) \right\} \end{cases}$$

sein muss.

Prof. S. Timoschenko hat in einer sehr inhaltsreichen russischen Abhandlung, die im Auszug in deutscher Sprache in der "Zeitschrift für Mathematik und Physik" 1910, s. 360, erschienen ist, die Torsion und die Kipperscheinungen des Doppel-T-Trägers behandelt. In dieser Dissertation lauten die Torsions- und Biegungsgleichungen für die Kipperscheinung des Doppel-T-Trägers:

$$(19) \quad \mu J \frac{d\varphi}{dx} - \frac{Dh^2}{2} \cdot \frac{d^3 \varphi}{dx^3} = P_z \left\{ (l - x) \frac{dy}{dx} - (y_0 - y) \right\}$$

$$(20) \quad EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -P_z (l - x)\varphi$$

wobei  $h$  die Höhe des Balkenprofils und  $D$  die Biegungssteifigkeit der Flanschen bedeuten.

Das zweite Glied der linken Seite der Gl. (19) kommt aus einem Moment der Schubkräfte in den beiden Flaschenquerschnitten.

Vernachlässigt man den Einfluss der Flaschenbiegung des Trägers, so verschwindet sich das Glied  $\frac{Dl^2}{2} \frac{d^3\varphi}{dx^3}$  und kommt man zu der von Prof. Prandtl untersuchten Biegung eines Stabes mit rechteckigem Querschnitte.

#### IV Knickung und Kippung.

Ferner ist noch der in Abb. 4 angegebene Fall zu besprechen, bei dem der Stab im Querschnitte  $x=0$  eingespannt ist, während sich das Stabende  $x=l$  frei verschieben und zugleich frei drehen kann.

Sobald die Lasten  $P_z$  und  $P_x$  geeignete Grössen erlangt haben, vermögen sie den Stab in der aus der Zeichnung ersichtlichen ausgebogenen Lage dauernd im Gleichgewichte zu halten.

Die Stützenwiderstände ergeben sich aus

$$(1) \quad \begin{array}{lll} \mathfrak{M}_0 = P_z l, & \mathfrak{B}_0 = P_x y_0, & \mathfrak{T}_0 = -P_z y_0, \\ V_0 = P_z, & H_0 = 0, & N_0 = -P_x \end{array}$$

Die Momente beim Punkte  $(x, y, z)$  sind

$$(2) \quad \begin{cases} M = P_z \left( l - x + y_0 \frac{dy}{dx} \right) \\ T = P_z \left\{ (l - x) \frac{dy}{dx} - (y_0 - y) \right\} \\ B = P_x (y_0 - y) \end{cases}$$

Die Differentialgleichung der elastischen Linien und der Verdrehung des Querschnitts lauten hier

$$(3) \quad EI \frac{d^2 z}{dx^2} = P_x \left\{ (l - x) + (2y_0 - y) \frac{dy}{dx} - (l - x) \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right\} + P_x (y_0 - y) \varphi$$

$$(4) \quad EI' \frac{d^2 y}{dx^2} = P_z \left\{ (l - x) \left( \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dz}{dx} - \varphi \right) - (y_0 - y) \frac{dz}{dx} \right\} + P_x (y_0 - y)$$

$$(5) \quad \mu J \frac{d\varphi}{dx} = P_z \left\{ 2(l - x) \frac{dy}{dx} - (y_0 - y) \right\} - P_x (y_0 - y) \frac{dz}{dx}$$

Nach nochmaliger Differentiation der Gl. (5) und durch Einsetzen des Wertes für

$$\frac{d^2 z}{dx^2}, \frac{d^2 y}{dx^2} \text{ aus}$$

$$(6) \quad \mu J \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = \frac{2P_x(l-x)}{EI'} \left[ P_x(y_0-y) + P_x \left\{ (l-x) \left( \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dz}{dx} - \varphi \right) - (y_0-y) \frac{dz}{dx} \right\} \right] - \frac{P_x(y_0-y)}{EI} \left[ P_x \left\{ (l-x) + (2y_0-y) \frac{dy}{dx} - (l-x) \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right\} + P_x(y_0-y) \varphi \right] + \left( P_x \frac{dz}{dx} - P_x \right) \frac{dy}{dx}$$

Voraussetzt man hier

$$\frac{dz}{dx} \doteq \frac{1}{EI} P_x \left( lx - \frac{x^2}{2} \right), \quad y \doteq \frac{y_0}{l^2} x^2,$$

dann wird die Gl. (6)

$$(7) \quad \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_4 x^4) \varphi = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \alpha_5 x^5$$

worin

$$a_0 = \frac{1}{\mu J E I'} (2 I P_x^2 l^2 + I' P_x^2 y_0^2)$$

$$a_1 = -\frac{4 P_x^2 l}{\mu J E I'}$$

$$a_2 = \frac{2}{\mu J E I'} \left( I P_x^2 - \frac{I'}{l^2} P_x^2 y_0^2 \right)$$

$$a_4 = \frac{1}{\mu J E I'} P_x^2 y_0^2$$

$$\alpha_0 = y_0 \alpha_0'; \quad \alpha_0' = \frac{2I - I'}{\mu J E I' l} P_x P_x l$$

$$\alpha_1 = y_0 \alpha_1';$$

$$\alpha_1' = -\frac{P_x}{\mu J E I' l} \left\{ 2 P_x^2 l^3 + 2 P_x l^2 E I + P_x E I' (4 y_0^2 - l^2) + 2 E I E I' \right\}$$

$$\alpha_2 = y_0 \alpha_2';$$

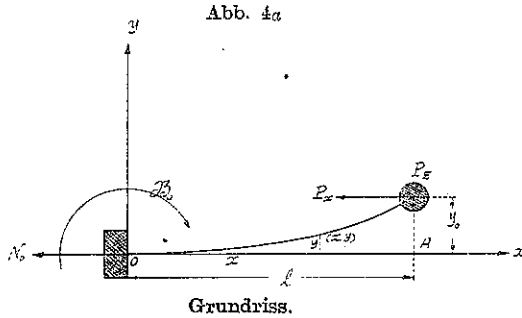
$$\alpha_2' = \frac{1}{\mu J E I' l^2} \left\{ P_x (7 P_x^2 l^2 - 2 P_x E I + 3 P_x E I') + 4 P_x P_x E I' \frac{y_0^2}{l} \right\}$$

$$\alpha_3 = y_0 \alpha_3';$$

$$\alpha_3' = -\frac{1}{\mu J E I' l^2} \left\{ 2 P_x \left( \frac{9}{2} P_x^2 l^2 - E I P_x \right) + 2 E I' P_x P_x \left( 1 - \frac{y_0^2}{l^2} \right) \right\}$$

$$\alpha_4 = y_0 \alpha'_4; \quad \alpha'_4 = \frac{5P_z^3 l}{\mu J E I E I' l^2} - \frac{4P_z P_z y_0^2}{\mu J E I l^2}$$

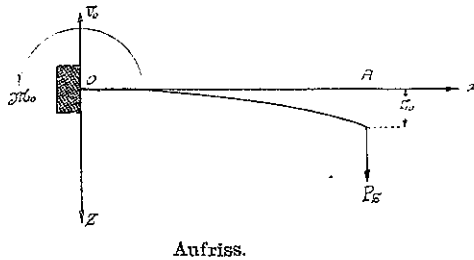
$$\alpha_5 = y_0 \alpha'_5; \quad \alpha'_5 = -\frac{P_z^3}{\mu J E I E I' l^2} + \frac{2P_z P_z y_0^2}{\mu J E I l^2}$$



Um die Differentialgleichung (7) zu lösen, führt man als eine nach Potenzen von  $x$  ansteigende Reihe:

$$\varphi = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots = \sum A_n x^n$$

Durch Einsetzen in Gl. (7) ergibt sich für die Koeffizienten  $A_n$  folgende Rekursionsformel:



$$\sum \left[ (n+2)(n+1) A_{n+2} + a_0 A_n + a_1 A_{n-1} + a_2 A_{n-2} + a_4 A_{n-4} \right] x^n = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_5 x^5$$

Man erhält alsdann

$$A_0 = 0 \quad A_1 = y_0 A'_1; \quad A'_1 = -\frac{P_z}{\mu J}$$

$$A_2 = y_0 A'_2; \quad A'_2 = \frac{\alpha'_0}{2}$$

$$A_3 = y_0 A'_3; \quad A'_3 = \frac{\alpha'_1 - a_0 A'_1}{3 \cdot 2}$$

$$A_4 = y_0 A'_4; \quad A'_4 = \frac{\alpha'_2 - a_1 A'_1 - a_3 A'_2}{4 \cdot 3}$$

$$A_5 = y_0 A'_5; \quad A'_5 = \frac{\alpha'_3 - a_2 A'_1 - a_4 A'_2 - a_0 A'_3}{5 \cdot 4}$$

$$A_6 = y_0 A'_6; \quad A'_6 = \frac{\alpha'_4 - a_2 A'_2 - a_4 A'_3 - a_0 A'_4}{6 \cdot 5}$$

$$A_7 = y_0 A'_7; \quad A'_7 = \frac{\alpha'_5 - a_4 A'_1 - a_2 A'_3 - a_4 A'_4 - a_0 A'_5}{7 \cdot 6}$$

$$A_3 = y_0 A'_3; \quad A'_3 = -\frac{a_0 A'_0 + a_1 A'_1 + a_2 A'_2 + a_3 A'_3}{8.7}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$A_{n+2} = y_0 A'_{n+2}; \quad A'_{n+2} = -\frac{a_0 A'_n + a_1 A'_{n-1} + a_2 A'_{n-2} + a_3 A'_{n-3}}{(n+2)(n+1)}$$

Die Lösung für  $\varphi$  wird

$$(8) \quad \varphi = y_0 (A'_1 x + A'_2 x^2 + A'_3 x^3 + A'_4 x^4 + \dots)$$

Die Grössen der seitlichen Auslenkungen und vertikalen Durchbiegungen ergeben sich aus:

$$(9) \quad y = y_0 (C'_2 x^2 + C'_3 x^3 + C'_4 x^4 + C'_5 x^5 + \dots)$$

$$(10) \quad EIz = P_z \left[ \frac{l}{2} x^2 - \frac{x^3}{6} + 2y_0^2 \sum_{n=2}^{\infty} C'_n \frac{x^{n+1}}{n+1} \right. \\ \left. - \frac{y_0^2}{2} \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} C'_n{}^2 \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + 2 \left( C'_2 \sum_{n=3}^{\infty} C'_n \frac{x^{n+3}}{n+3} \right. \right. \right. \\ \left. \left. + C'_3 \sum_{n=4}^{\infty} C'_n \frac{x^{n+4}}{n+4} + C'_4 \sum_{n=5}^{\infty} C'_n \frac{x^{n+5}}{n+5} + \dots \right) \right\} \\ - ly_0^2 \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} n^2 C'_n{}^2 \frac{x^{2n}}{2n(2n-1)} + 2 \left( 2C'_2 \sum_{n=3}^{\infty} n C'_n \frac{x^{n+2}}{(n+2)(n+1)} \right. \right. \\ \left. \left. + 3C'_3 \sum_{n=4}^{\infty} n C'_n \frac{x^{n+3}}{(n+3)(n+2)} \right. \right. \\ \left. \left. + 4C'_4 \sum_{n=5}^{\infty} n C'_n \frac{x^{n+4}}{(n+4)(n+3)} + \dots \right) \right\} \\ \left. + y_0^2 \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} n^2 C'_n{}^2 \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)2n} + 2 \left( 2C'_2 \sum_{n=3}^{\infty} n C'_n \frac{x^{n+3}}{(n+3)(n+2)} \right. \right. \right. \\ \left. \left. + 3C'_3 \sum_{n=4}^{\infty} n C'_n \frac{x^{n+4}}{(n+4)(n+3)} \right. \right. \\ \left. \left. + 4C'_4 \sum_{n=5}^{\infty} n C'_n \frac{x^{n+5}}{(n+5)(n+4)} + \dots \right) \right\} \Bigg] \\ + P_z y_0^2 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} A'_n \frac{x^{n+2}}{(n+2)(n+1)} - \left( A'_1 \sum_{n=2}^{\infty} C'_n \frac{x^{n+3}}{(n+3)(n+2)} \right. \right.$$

$$+ A'_2 \sum_{n=2}^{\infty} C'_n \frac{x^{n+4}}{(n+4)(n+3)} + A'_3 \sum_{n=2}^{\infty} C'_n \frac{x^{n+5}}{(n+5)(n+4)} + \dots \Big\}$$

worin  $C'_2 = \frac{\beta'_0}{2}, \quad C'_3 = \frac{\beta'_1}{3 \cdot 2},$

$$C'_4 = \frac{\beta'_2 - (2a_1 + b_0) C'_2}{4 \cdot 3} \quad C'_5 = \frac{\beta'_3 - (2a_2 + b_1) C'_2 - (3a_1 + b_0) C'_3}{5 \cdot 4}$$

$$C'_6 = \frac{\beta'_4 - (2a_3 + b_2) C'_2 - (3a_2 + b_1) C'_3 - (4a_1 + b_0) C'_4}{6 \cdot 5}$$

.....

$$C'_{n+2} = \frac{\beta'_n - (a_1 n + b_0) C'_n - \{a_2(n-1) + b_1\} C'_{n-1} - \{a_3(n-2) + b_2\} C'_{n-2}}{(n+2)(n+1)}$$

$$a_1 = -\frac{P_z^2 \bar{v}^2}{EIEI'}, \quad a_2 = \frac{3P_z^2 l}{2EIEI'}$$

$$a_3 = -\frac{P_z^2}{2EIEI'}, \quad b_0 = \frac{P_w}{EI'}, \quad b_1 = -\frac{P_z^2 l}{EIEI'}$$

$$b_2 = \frac{P_z^2}{2EIEI'}, \quad \beta'_0 = \frac{P_w}{EI'}, \quad \beta'_1 = \frac{P_z^2 l (EI - \mu J)}{EIEI' \mu J}$$

$$\beta'_2 = -\frac{1}{EI'} \left( P_z l A'_2 - P_z A'_1 - \frac{P_z^2}{2EI} \right)$$

$$\beta'_3 = -\frac{1}{EI'} (P_z l A'_3 - P_z A'_2)$$

.....

$$\beta'_n = -\frac{P_z}{EI'} (l A'_n - A'_{n-1})$$

.....

Um die Grösse der Knick- bzw. Kipplast zu erhalten, ist in Gl. (9)- bzw. (10) für  $x$  der Wert 1 einzusetzen, nämlich annäherungsweise

$$(11) \quad 1 = C'_2 \bar{v}^2 + C'_3 \bar{v}^3$$

$$(12) \quad EI z_0 = P_z \left( \frac{\bar{v}^3}{3} + 2y_0^2 C'_2 \frac{\bar{v}^3}{3} \right) + P_w y_0^2 A'_1 \frac{\bar{v}^3}{6}$$

worin  $z_0$  die Durchbiegung des Stabendes bedeutet.

Aus (11) und (12) erhält man



$$(13) \quad P_z^3 + pP_z + q = 0$$

wobei

$$p = \frac{6EI EI' \mu J \{ y_0^2 (EI' - 2\mu J) - \mu J^2 \}}{l^3 y_0^2 (EI - \mu J) (2\mu J - EI')}$$

und

$$q = \frac{18(EI)^2 EI' (\mu J)^2 Z_0}{l^3 y_0^2 (EI - \mu J) (2\mu J - EI')}$$

Der Wert von  $P_z$  ergibt sich alsdann

$$(14) \quad P_z = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

und

$$(15) \quad P_z = \frac{2EI' \mu J (3EI z_0 - P_z l)}{P_z l^2 y_0^2 (2\mu J - EI')}$$

—Der Schluss—