討　　　　議

土木學會誌　第十卷第五號　大正十三年十月

地震動に依る構造體の振動時相に就て

（第十卷第一號所載）

著者　會員　工學博士　眞　島　健　三　郎

小著に對する物部博士の御討議には已に前號で御答へ致しましたが其第三項に於て同博士の論文（第五卷第三號所載）第十四節强迫振動式(22)を振期一致の場合無限大とせられたるを御尤もと思ふて述べて置きましたが、尙克く調べて見ると誤謬と解せられますので玆に訂正旁々些か本式に就て鄙見を補足して置きたいと思ひます。

博士の出發せられました振動原式は下記の通りでありまして

$$y=\left\{\begin{array}{l} A(\cos mx+\cosh mx)+B(\cos mx-\cosh mx) \\ +\ C(\sin mx+\sinh mx)+D(\sin mx-\ \sinh mx) \end{array}\right\}\sin brm^2t\cdots\cdots\cdots(1)$$

又之より(22)式を得られたる環境條件は下記の通りであります。

$at\ x=0$ の場合　$\dfrac{dy}{dx}=0\quad y=e\ \sin\ brm^2t.$　　e＝振幅、

$at\ x=l$ の場合　$\dfrac{d^2y}{dx^2}=0\quad \dfrac{d^3y}{dx^3}=0$　　m は任意振期に相當するもの、

然るに原式(1)の系數 $A\ B\ C\ D$ 及び m を決定するに適當なる條件は上記中３條件しかありません、其 $y=e\ \sin\ brm^2t.$ なる條件は e 即ち A と m を當初から無條件で定めてかゝつて居るのでありますから是等と他の系數間の關係を考慮して居ない事になつて居ります、元來原式５系數間には始原條件や環境條件から定まるべき關係があつて夫れに依つて算出したるものにあらざれば原式を滿足し得ないものであるべきは申す迄もない事です、故に５系數の１を任意に定めて他を適當の條件から求むるは差支ありませんが、２ 系數を豫め定めて原式を滿足するものを得樣とするは出來ない事と思ひます、此場合少くも４條件を要し且つ其條件は中軸の形相が時に無關係のものでありますから時相の何れの場合にも適合すべ

き一定不變のものであつて系數間の相互關係を規定し得るものでなくてはならん筈であります。假令ば或點が不動とか定着とか或は又曲率剪力の如きが零と云ふ樣な條件と思ひます、依つて博士の與へられたる上記の條件は更に1條件を加へざれば原式を滿足し得る系數は出て來ない事になります、然るに任意の m 値を(22)式に入れて其値が $1+\cos ml\ \cosh ml=0$ とならば振期一致の振相が得られ其結果が無限大となつて現はれ共鳴作用を現はして居るものと見て一層其方法を正當なりと誤解されて居る樣に察せられますが、實は任意に系數値を定めて無限大相を得たのであります。若し之に適條を入れて算出さるれば必らず有限相が出るのは疑ひない所と思ひます、且又著者の(22)式を克く調べて見ると振期一致の場合無限大ではなくて最小限相を現はして居ると思はれます、其系數 B 及び D の値は下記の通りでありまして

$$B(1+\cos ml\ \cosh ml)=\sin ml\ \sinh ml.$$

$$D(1+\cos ml\cosh\ ml)=-(\cos ml\ \sinh ml+\ \sin ml\ \cosh ml.)$$

若し $1+\cos ml\ \cosh ml=0$ の場合 B と D を無限大と考ふれば上式の左項は $\infty\times 0$ となり又 B と D を有限と考ふれば右項は何れも 0 となりますから上式は Indeterminate form として其極限値を取る方が適當と思はれる、又其方が他の m 値を入れて算出された高著第十四節の算出表と對照して筋の通つた結果が得られます、依つて m 値の極微變化に對し B, D に變化ないものと考ふれば B と D の値は下の如くなります。

$$B=-\frac{e}{2}\cdot\frac{\sin ml\ \cosh ml+\cos ml\ \cosh ml}{-\sin ml\ \cosh ml-\cos ml\sinh ml}$$

$$D=\frac{e}{2}\cdot\frac{2\ \cos\ ml\cosh\ ml}{-\sin ml\ \cosh ml-\cos ml\ \sinh ml}$$

之を入れると(22)式は下記の如くなる

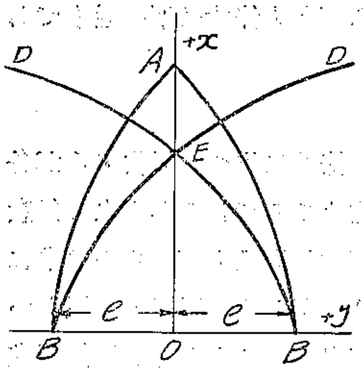
$$y=\frac{e}{2}\left\{\begin{matrix}(\cos mx- \\ \cosh mx)\end{matrix}\frac{\left[\begin{matrix}(\sin ml\cosh ml+\cos ml\ \sinh ml)(\cos mx-\cosh mx) \\ -2\ \cos ml\ \cosh ml\ \ (\sin mx-\sinh mx)\end{matrix}\right]}{\cos me\ \cosh ml-\sin ml\ \cosh ml}\right\}\sin b\ rm^2t\ \ (2)$$

上式に $x=l$ を入れると

$$y_{x=0}=\frac{e}{2}\Big\{(\cos ml+\ \cosh ml)-(\cos ml+\cosh ml)\Big\}\sin brm^2t=0$$

上の如くなり末端は不動となつて第一圖 $A\ B$ の如く又高著第十四節に掲げられ

たる數表から振相を畫いて見ると CDE の如くなりまして振期の差が大なる程振相は大きくなつて一貫した結果が現はれます、若し振期一致の場合を(22)式其儘を取つて無限大とすれば之より極微の振期變化は (2) 式の如く最小となり更に其振期差を增加するに隨ひ振相は限りなく增す樣な奇態を現はしますから振期一致の場合(22)は(2)式に依るを正當と考へられます、然るに此結果を見ると振期一致の場合が最小で其差が增せば段々大きくなると云ふ結果で共鳴作用から考へると全く正反對であり又 A,E の如き不動點が出る、斯の如き不動點には普通反力がなければ振動原式 (1) を滿足しない事になる、若し之を考慮すると條件も變り原式適用の方法も修正を要します、元來原式 (1) は振體の或點を不動と考ふれば夫れより兩端に至る何れの點にも反力があつては其微分方程式には外力 q が加はりますから滿足しないものとなります、但し起點として考ふる不動點にも反力がない樣な特別の場合は勿論別です、故に第二圖の如く h 點を不動として原式 (1) の應用を考ふるに同點より以上の振相は下記の條件を滿足する、但し下底定着可動の場合



第一圖

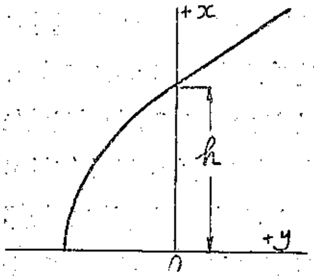
$$at\ x=h\ で\ y=0$$

$$at\ x=l\ で\ \frac{d^2y}{dx_1^2}=0\quad \frac{d^3y}{dx_1^3}=0$$

又同點より以下は次の通りであります

$$at\ x=0\ で\ \frac{dy}{dx_2}=0\quad \frac{d^3y}{dx_2^3}=0$$

$$at\ x=h\ で\ y=0$$



第二圖

上記中 x_1 は h 點以上 x_2 は同點以下の x と假定す、詰まり不動點を限界として振體を上下2部に分ちて考へざれば反力が存在するから原式の適用は出來ない事になります、又上の條件は上下共1條件追加を要する、其新に加ふべき條件は上下兩部が一齊運動に必要なる共通條件でなくてはならん故に h 點の Tangent を上

$$at\ x=h\ \frac{dy}{dx_1}=\frac{dy}{dx_2}$$

下同一とする上記の條件を加ふれば凡ての系數は定まり h 點を不動として或一定

の振期で自己運動をなし得る振相が出る、又h點を變數としmを任意値とすれば之に適應するh値が得られる、更に又h點は不動であつて且つ反力がないとすれば下記の條件

$$at\quad x=h\qquad \frac{d^3y}{dx_1^3}+\frac{d^3y}{dx_2^3}=0$$

を加ふればh及びmの値が得られる、若し又$h=l$ならば著者の所謂振期一致の場合で前揭(2)式と同一のものが出て來る、但し加ふべき1條件は下の通りであります。

$$at\quad x=h=l\qquad \frac{d^2y}{dx_2^2}=0$$

斯の如く原式(1)より誘導し得べきものは種々なる條件に依つて變化するが各系數間には凡て犯すべからざる關係があつて其値も定まるのであるから之を任意に定めては全然原式と關係ないものとなります、又原式を滿足すべきものは常に自己振動であると云ふ事も明瞭と思ひます、且又自己振期が地動振期より短かいものは自己の振期を延長して一層長いものとする事が出來ませんから、全然原式の應用は不可能であります。上述の如く振動原式(1)より合理的に出るものは凡て或種の自己振動であつて之より Particular solution として强迫振動が出る筈はないと斷じて差支ないと思ひます、若し又此原式を借りて任意に其系數を定め一種の近似式とするも近似の程度が如何なるものなるや不明なるのみならず、共鳴作用が現れて居ない所から察するも實際に近いとは認めがたいと思はれます要するに原式に下底可動の條件を挿入すれば該點には反力の存在を許さぬ事になりますから、振體は地動より勢力の得樣がなく唯始原に與へられたるものがあれば夫れで動くの外ないのでりあります。然るに下底不動であれば玆に絕へず反力が起り得るのでありますから、若し地動が別に働けば此反力を增減し相對的に上部の振動力を增減する事になる斯の如く振動勢力の增減は地動の場合下底不動の條件があつて始めて可能であり之に定着の條件を加ふれば振動形相は一定し下底か如何なる外力を受くるも振體の相對的形相は相似變化で斯く各點は勢力の分配を受くる外ないものと解するが正當と考へるのであります。又小著の方法は單に中軸の形相と其振期を知つた計りでは出て來ないので、振動中心點を求めて始めて刻々振動體が地動力より受け得べき分量が決定され夫れで時相が得らるゝ事になつて居ります。以上御參考迄に追加し更に博士並に會員各位の御精査を御願ひ致します。(完)