

# 論 說 報 告

土木學會誌 第十卷 第五號 大正十三年十月

## 地震上下動に關する考察並に振動雜論

會員 工學博士 物部長 穗

### 内 容 梗 概

本論は從來耐震上全々無視されたる地震上下動の性質を究明し其各種工作物に對する影響を研究し併せて構造物の振動に關する大正 12 年中の研究を發表せるものなり

### 目 次

	頁
緒 言	1
第一編 上下動の作用	3
第一節 物體の轉倒	3
第二節 物體の滑動	5
第三節 家屋倒潰率と震度	6
第四節 地震の土壓に及ぼす影響	9
第五節 Coulomb 氏土楔論及其他の方法に依る土壓	14
第六節 土砂の支持力に對する地震の影響	16
第七節 單體構造物に對する地震の作用	17
第二編 振動雜論	21
第八節 物體の強促搖動	21
第九節 架構構造物の振動週期	25
第十節 彈性錐體の強促振動	28

### 緒 言

我邦に於ける地震並に耐震に關する研究は既に四十餘年の歳月を閱し其間純粹地震學及耐震學に於て多大の進歩發達を見たりしと雖も其對象は主として水平地震動に限られ物體の轉倒、家屋の倒潰等は勿論凡ての工作物の震害は一に

水平加速度の作用に因るものと見做され上下動に對しては一般に其影響微々たるものと做し之を研究圏外に放置し來れり。然るに昨年の關東大地震に當り震央附近に於ける地動の性質及び各種震害の狀況等より推し上下動の加速度は決して從來考へられたる如き第二次的のものにあらずして場合に依ては却て水平動を凌駕する事も絶無にあらざるべしと思考せらる。而して一部の理學者間に震央に最も接近せる小田原地方の如きに於ては上下即ち鉛直の加速度は重力の加速度をも凌駕せるにあらずやとの説さへ生ずるに到れり。而して地動の鉛直加速度が斯く強大なりしとは頗る信據し能はざる所なりと雖も假令鉛直加速度が重力加速度の  $\frac{1}{2}$  乃至若くは夫れ以下なりとするも水平加速度と共同するに於ては各種工作物に及ぼす作用極めて強大にして之を無視せる耐震法は殆ど無意味なる場合も亦尠なからず。

地震學者の説に遵へば昨年の大地震に於ける小田原、鎌倉、北條、濃尾大地震に於ける震央地域等の最激震地方に於ては最大水平加速度  $4,000 \text{ mm/sec}^2$  に達せりと云ふもこは確實なる地震計に依て測定せるにあらずして、直接若くは間接に轉倒せる地上物體の比幅（底幅の  $\frac{1}{2}$  を重心の高さを以て除したるもの）より推定せるものに外ならず。然るに物體の轉倒移動等は後來論ずるが如く上下動の影響多大にして其比幅に依り水平加速度を推察するには極めて困難にして殊に震央に近き區域に對しては全く科學的根據を有せざるものと云はざるべからず。

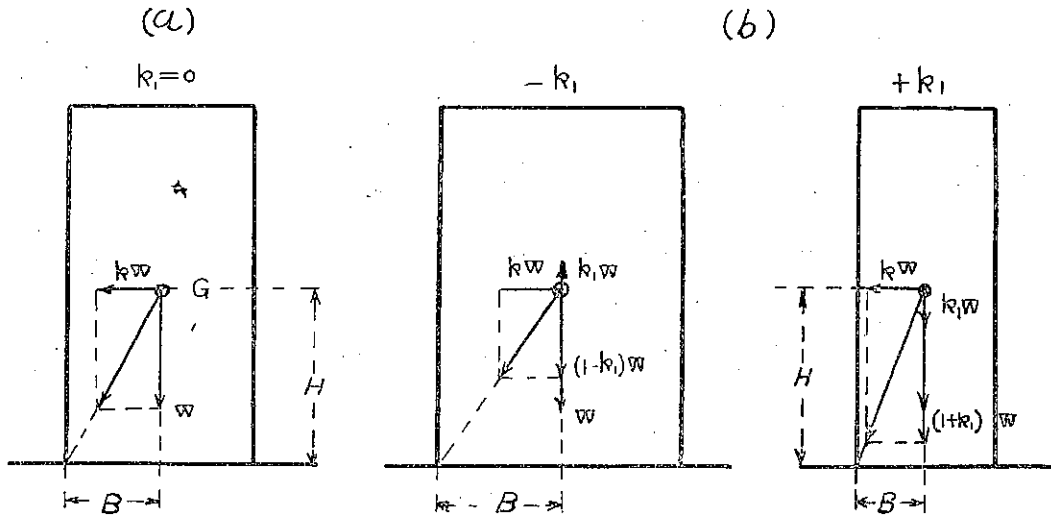
而して確實なる地震計に依て測定せる最強地震は去る大地震に際し本郷臺上地震學教室に於て今村式強震計の記録せるものにして水平加速度約 800 耗に達し古今東西を通じての最高記録たりと雖も上下動に關しては不幸器械の故障に依り確實なる記録を止めざりき。斯の如く 800 耗程度の地震に於てさへ未だ震動の全般を明かにせざる今日に於て加速度數千耗と推定せらるゝ如き大地震に於ける地動の狀勢を想像するは實に至難の業にして、爲めに工作物の耐震法は其目標を確定する事能はず將來の發達をして愈々困難ならしむるものなり。

予は本編に於て從來無視せられたる上下動が物體の轉倒、移動、工作物の震害等に對し如何なる役割を演ずるやを究め大地震の震度（又は最大加速度）に關する從來の推定法の是非を論じ進んで各種工作物に對する上下動の作用の大要を述べんとす。

第一編 上下動の作用

第一節 物體の轉倒

先づ従來と同様に物體の轉倒は之に作用する重力と地震力との合成力の作用線が底面の一邊と交はる場合に起るものと假定し轉倒に對する上下動の影響を考察せんとす。(第一圖參照)



第一圖

茲に

$H$  = 底面より物體の重心迄の高

$B$  = 重心と底面の一邊との水平距離

$W$  = 物體の重量

$kg$  = 地震の爲め物體に作用する水平加速度

$k_2g$  = 同上 鉛直加速度

今水平加速度  $kg$  のみ作用する場合に轉倒の條件を満足する爲めには  $H, B, k$  の間に次の如き關係の成立するを要す (第一圖 a 參照)

$$B = \frac{kW}{W}H \quad \text{or} \quad k = \frac{B}{H} \dots \dots \dots (1)$$

次に上向鉛直加速度が同時に作用する場合を考ふるに (第一圖 b 參照)

$$\frac{B}{H} = \frac{kW}{W - k_2W} = \frac{k}{1 - k_2} \dots \dots \dots (2)$$

同様に下向鉛直加速度の場合に

$$\frac{B}{H} = \frac{k}{1+k_1} \dots \dots \dots (3)$$

即ち上向鉛直加速度が水平加速度と共同作用する場合轉倒すべき物體の比幅  $\frac{B}{H}$  (便宜の爲め  $\frac{B}{H}$  比幅と名づく) は水平動が單獨作用する場合に比し著しく大なるを見る。而して大地震の際轉倒せる物體の比幅の示す所は水平震度  $k$  にてあらずして實は  $\frac{k}{1-k_1}$  なる事明かにして予は此數値を  $K$  を以て表はし地震強度の尺度と爲しこれを合震度と名づけんとす。即ち

$$\text{合震度} = K = \frac{k}{1-k_1} = \frac{kg}{g-k_1g} = \text{比幅} \dots \dots \dots (4)$$

(4) の關係に依り若し上向鉛直加速度が殆ど重力の加速度  $g$  に等しき時は假令水平震度  $k$  微小なる場合と雖も能く礫石をも轉倒せしめ得るを知るべし。

次に  $k$  及  $k_1$  の種々の數値に對し合震度の  $K$  の値を表示す。

第一表  
K の 値

水平震度 ( $k$ )	鉛直震度 ( $k_1$ )					
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.
0.0	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.0
0.1	0.11	0.22	0.33	0.44	0.56	
0.2	0.13	0.25	0.38	0.50	0.63	
0.3	0.14	0.29	0.43	0.57	0.71	
0.4	0.17	0.33	0.50	0.67	0.83	
0.5	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00	
0.6	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	

茲に注意すべきは從來激震に對する推定水平加速度なるものは轉倒物體の比幅に據りしものにして、 $\frac{B}{H}$  に  $g$  を乘じて得たる數値を以て直ちに最大水平加速度と見做したるものなるを以て上下動の作用する場合にありては甚しき誤差を生ずべきは明かなり。而して震度の推定に轉倒物體殊に墓石の比幅を用ふるの方法は調査容易にして所在に豊富なる資料を得るの便あるも種々の缺點を有し其主要なるものを擧ぐれば次の如し。

(a) 墓石直下の地盤は著しく脆弱にして礎石も亦安固ならざる場合多きを以て其示す所の震度は附近自然土質に於けるものより大なるを常とす。

(b) 地震動の方向に依り轉倒に著しき難易あり。

(c) 墓石の底幅は慣例と體裁上高さの2割5分乃至4割を普通とし4割5分を超ゆるものは極めて稀なるを以て、震動如何に強大なる場合と雖も轉倒墓石の示す震度が0.45に達する事稀なり。

(d) 動力學上より論ずれば重力と地震力との合成が底邊に交はる事は物體轉倒の充分なる條件にあらずして、これを轉倒せしめんが爲めには尙數割大なる地震力の作用を必要とす。

以上の事實を總合するも一般に墓石の示す合震度 ( $K$ ) は其附近一帯の自然地盤のそれより稍大なるべく唯震動極めて激烈なる地域に對しては却て過少なる値を示す事となる。従て從來の大地震に於ける最強震度を0.4乃至0.45と推算せるは全く根據なき想定にして合震度0.6, 0.7の如き大震動の絶無なりしを保すべからず。而して此等の事實は恐らくは尙數回の大慘事を繰返すにあざれば到底適確にこれを決定し得ざるものと思はる。

## 第二節 物體の滑動

地震の水平加速度 ( $kg$ ) に依り物體に水平力 ( $kW$ ) 作用するを以て其底面に於て滑動せんとするの傾向を生じ、若し上向加速度 ( $-k_1g$ ) の同時に作用する場合は滑動を著しく容易ならしむべし。而して物體が底面に於てモルタルを以て礎石に礎着されたる場合は其剪力強に依りて水平力に抵抗し滑動を防ぐべしと雖も、モルタルは多く目筋の周邊に近き部分のみに施され地震の水平力に因る轉倒力率に依りて容易に破壊さるゝを以て、結局物體の滑動に抵抗するものは其底面に作用する摩擦のみとなる。今底面の摩擦係数を  $f$  とし物體に  $kg$  なる水平加速度及  $-k_1g$  なる鉛直加速度の作用する場合滑動を初むべき條件を求むるに

$$kW \geq (1 - k_1) W \cdot f \quad \text{即ち}$$

$$f \leq \frac{k}{1 - k_1} = L \quad \dots \dots \dots (5)$$

即ち合震度  $K$  が摩擦係数  $f$  を凌駕したる場合に物體は滑動を起すべし。而

して  $k_1 g$  が下向に作用する場合滑動の條件は

$$f \leq \frac{k}{1+k_1} = K' \quad \dots \dots \dots (6)$$

なり。即ち水平加速度のみ作用する場合に比し (5) に於ては滑動頗る容易なるも (6) に於ては却て困難なり。従て地震に際し地動の方向が水平面とある傾きを有する時は地動の加速度が下向 (物體に相對的に作用するものは反對に上向) なる時は物體は水平加速度の方向に容易に滑動すべきも、その上向なる場合は滑動頗る困難なるを以て物體は一方の向きにのみ滑動し次第に累積して震後著しき移動を残すに到る。尙石材と石材との間の摩擦係數は普通 0.4 以上なるを以て、墓石の如き細長き形狀に於ては純粹なる滑動は容易に起らざるものにして、其移動は概ね搖動 (Rocking) と廻轉運動との同時に起りたる結果なり。

### 第三節 家屋倒潰率と震度

鐵骨又は鐵筋混凝土構造の如く剛性結合を有する架構式建築に於ては地震力に因て部材に生ずる彎曲應力は全體水平震度のみ支配せらるべしと雖も、木造日本家屋の如く軟き結合より成る架構にありては重力と地震力との合成力の方向、即ち合成力の鉛直に對する傾角の大なる程大なる變形を生じ變形大なるほど外力に對する抵抗力愈々減少すべき性質のものなるを以て、その倒潰の危険は主として合震度  $K$  に従て増大するものと考ふる事を得べし。此推定は震央に近き地方に於ては地震の初期即上下動強大にして水平動尙著しからざるの時期に於て多數の倒潰を生じたるの事實に徴して大過なきものと信ぜらる。

而して一地方に於ける家屋の倒潰率即ち倒潰戸數と全戸數との比は地震の強き程大なるべきは明かにして若し何等かの方法に依りて地震の強さを推定しこれと家屋倒潰率との關係を定め置かば、他の場合に於て一地方の家屋倒率を知らば直ちに地震の強さを推定する事を得べし。家屋倒潰率と地震の強さとの關係にして今日一般に適用さるゝものは、大森博士が濃尾大地震の震害に依りて定めたるものにして轉倒物體の比幅に重力の速度を乗じたるものを以て最大水平加速度と見做し、これと倒潰率との關係を示せり即ち

水平加速度	震度	適 要
1,200 mm/sec <sup>2</sup>	0.12	腐朽せる粗悪家屋は倒潰する事あり
2,000	0.20	粗悪なる家屋は倒潰するものあり
2,500	0.25	倒潰率 2 ~ 3%
3,400	0.35	” 15%
3,900	0.40	” 50%
4,500	0.45	” 80%

次に大正三年秋田仙北激震に関する今村博士の調査報告によれば、該地方に於ける倒潰率と最大水平加速度との関係は大體次の如し。

水平加速度 (平均)	家屋倒潰率 (平均)
2,500~3,500 (3,000)	1~8% (5%)
3,500~4,000 (3,750)	8~20% (14%)
4,000~4,500 (4,250)	20~40% (30%)

已に述べたる如く予は家屋の倒潰は物體の轉倒と同様合震度 ( $K$ ) に支配せらるべきものと思ふを以て、次に公算論に據りて倒潰率と合震度との関係を求めて此種の震度スケール (Scale) に理論的根據を與へんとす。

今ある家屋が  $K$  なる合震度に依りて幸うじて倒潰するものとせば  $K$  を以て其家屋の耐震力を現はす事を得べし。仍て一町村内の家屋の標準耐震力 ( $K_0$ ) 即ち  $K_0$  なる地震に依て家屋の半數が倒潰するものと思ふれば  $K_0+p$  又は  $K_0-p$  なる耐震力を有する家屋は略同數なりと見做す事を得。従て  $K$  なる耐震力を有する家屋數 (又は戸數) を總家屋數 (又は總戸數) の百分率を以て現はしたる數 ( $y$ ) と  $K$  との関係は公算曲線を以て現はす事を得。即ち

$$y = 100 \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(K-K_0)^2} \dots \dots \dots (7)$$

$$y_0 = 100 \frac{h}{\sqrt{\pi}} = \text{標準耐震力を有する家屋數又は戸數 (\%)}$$

即ち  $h$  は  $K_0$  に近き耐震力を有する家屋の多き程、換言すれば其町村内の家屋の耐震力の一様なる程大にして反對に差等著しき程小なり。又家屋の構造一様ならざる多數の町村を一括して考ふる場合には  $h$  は愈々小なるべく、之に反して法規を以て家屋の耐震力を一定せる場合に於ては  $h$  は著しく大なるべし。次に  $K$  なる合震度の地震により倒潰すべき家屋數を總數の百分率を以て現はしたる數 ( $Y$ ) は上式を積分して直ちに得らるべく即ち

$$Y = \frac{100}{\sqrt{\pi}} \int_0^{hK} e^{-h^2(K-K_0)^2} d(hK) \dots \dots \dots (8)$$

$$Y_{K=K_0} = 50$$

即ち  $Y$  は家屋倒潰率を百分率を以て現はせるものにして標準震度  $K_0$  に對しては 50 となる。

而して此標準耐震力即標準震度  $K_0$  は家屋の構造上より決定せらるべきものなるも、日本家屋耐震性の全く不明なる今日に於ては到底不可能なるを以て從來の大地震の經驗に依りてこれを推定するの外なし。即ち濃尾大地震に於ては 0.4 (これ以上なりしやと思はる) 秋田仙北地震に於ては約 0.47 にして昨年 of 大地震に於ては 0.45 乃至 0.50 と推定せらる。次に  $h$  の値は濃尾大地震に於て約 15.9 (過大の疑あり) 仙北地震に於ては約 8 にして昨年 of 大地震は區域宏大にして種々雜多の市町村を包含するを以て 7 乃至 10 のに間ありと見做して大過なきものゝ如し。次に  $K_0$  及  $h$  の種々の値に對し倒潰率合震度との關係を表示す。

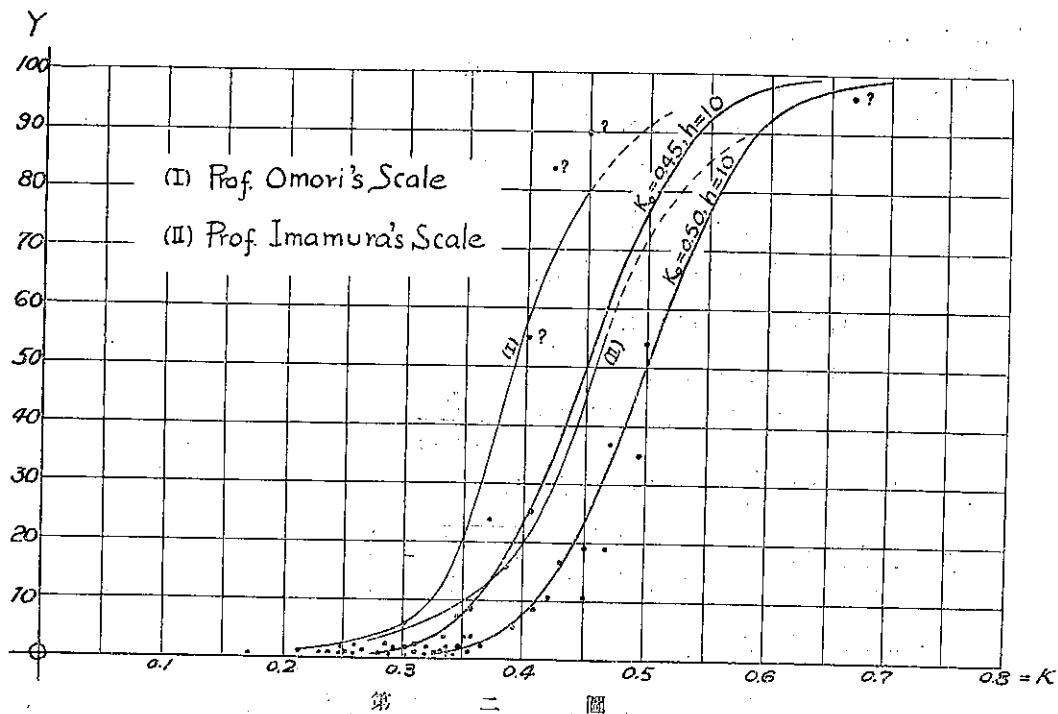
第二表  
家屋倒潰率 (%) と合震度との關係

$h$	$K_0$	$K$											曲線
		0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	
7.5	0.40	1.7	5.8	14.4	29.8	50	70.2	85.6	94.2	98.3			1
	0.45	0.4	1.7	5.8	14.4	29.8	50	70.2	85.6	94.2	98.3		2
	0.50		0.4	1.7	5.8	14.4	29.3	50	70.2	85.6	94.2	98.3	3
10	0.40		1.7	7.9	24	50	76	92.1	98.3	99.8			4
	0.45		0.2	1.7	7.9	24	50	76	92.1	98.3	99.8		5
	0.50			0.2	1.7	7.9	24	50	76	92.1	98.3	99.8	6

先般の大地震に於て轉倒墓石の比幅より得たる合震度と家屋倒潰率との關係及上表 5, 6 の二曲線並に大森今村兩博士の Scale は之を一括して第二圖に示し比較對照に便ぜり。曲線 (6) 即ち  $h=10$   $K_0=0.50$  とすれば家屋の倒潰 90% 以上に達する小田原、北條地方に於ては合震度 0.6 以上ならざるべからず、從來の學說に従へば斯如き強大なる震度は一見不合理なる如きも小田原地方に於て比幅 0.6 以上を有する堅固なる木造平家が倒潰する事なくして搖動に依



り數尺の移動を爲せる事實より推して其誤りならざるを主張し得べし。



#### 第四節 地震の土壓に及ぼす影響

地震の際土砂に水平加速度作用するを以て土壓が著しく増大すべきは勿論にして、大地震の場合に擁壁、橋臺、岸壁、土留石垣等土壓を支持する構造物に於て震害最も甚しきは當然と云ふべし。然れども土砂の性質は頗る複雑にして平時にありても正確に土壓を算定する事は殆ど不可能なる有様なるを以て況んや水平鉛直兩加速度の作用に依り問題は一層複雑となり正確なる解決は全く不可能と云ふを妨げず、然れども今日行はるゝ Rankine, Coulomb 其他の土壓公式は多年の適用に徴し多くの場合に對して大過なき數値を與ふるものと見做し得るものなるを以て、地震の加速度は其最大値を以て恒久的に作用する事恰も重力と同一なりと假定すれば從來の土壓公式の適用に依りて容易に地震に因る土壓の増大を算定する事を得べし。斯く問題を靜力學的に取扱ふ事は、各土粒の相對的運動に依る摩擦係數の減少を無視する事に依りて算出値を過少ならしむる傾向あると同時に、最大加速度が恒久的に作用すとの假定に依りては著し

く過大ならしむべきを以て、結局上記の方針に依りて算出せる土壓は多少地震の影響を誇張せる傾向あり。

(1) 壁背鉛直なる場合 (第三圖及第四圖)

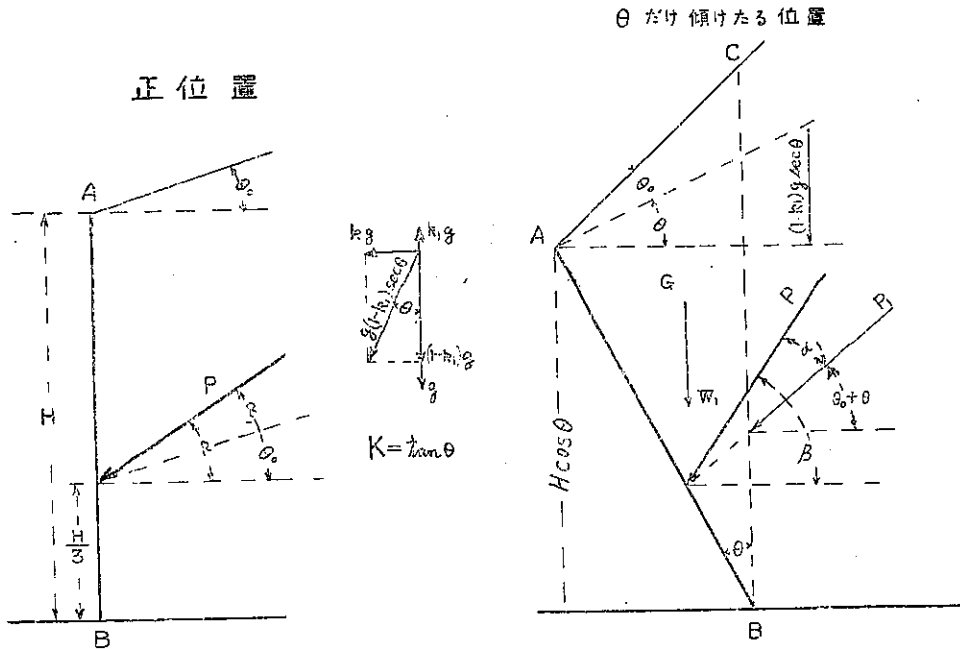
- 記號  $P_0$  = 平時に於ける土壓  
 $P$  = 地震の場合に於ける土壓  
 $H$  = 擁壁の鉛直高  
 $w$  = 土砂單位容積の重量  
 $\theta_0$  = 背土表面の傾斜角  
 $\varphi$  = 土砂の息角  
 $\theta = \tan^{-1}K$  or  $K = \tan\theta = \frac{k}{1-k_1}$

今 Rankine 氏土壓論に依り土壓  $P_0$  は

$$P_0 = \frac{w}{2} H^2 \frac{\cos\theta_0(\cos\theta_0 - \sqrt{\cos^2\theta_0 - \cos^2\varphi})}{\cos\theta_0 + \sqrt{\cos^2\theta_0 - \cos^2\varphi}} \dots\dots\dots (9)$$

$$= \frac{H^2}{2} w E_0 \text{ と置く}$$

今  $K$  なる合震度が土砂に恒久的に作用する場合を考ふるに、一切の力學的狀



第三圖

況は、重力が其方向を  $\theta$  だけ變じ其大き  $(1-k_1) \sec\theta$  倍となりたる場合と全く同一にして此際の力學的關係を見易すからしむるには、第三圖の如く壁及び背土の全體を  $\theta$  だけ前方に廻轉せしむれば可なり。即ち廻轉位置に於ては合成重力は鉛直に働き  $g(1-k_1)\sec\theta$  なる値を有し背土の傾斜は  $\theta_0+\theta$  となり、壁の高さは  $H\cos\theta$ 、其背面の鉛直に對する傾角は  $\theta$  となる。此如き場合の土壓  $P$  を求むれば次式の如し。

$$P = \frac{1}{2} H^2 \cos^2 \theta w (1-k_1) \sec \theta \frac{\cos \theta_0 \left\{ \left( \cos(\theta_0 - \theta) - \sqrt{\cos^2(\theta_0 + \theta) - \cos^2 \varphi} \right)^2 + \left( \sin(\theta_0 + \theta) - \sin(\theta_0 - \theta) \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}}{\cos^2 \theta \left\{ \cos(\theta_0 + \theta) + \sqrt{\cos^2(\theta_0 + \theta) - \cos^2 \varphi} \right\}}$$

$$= \frac{H^2 w}{2} (1-k_1) \cdot E \quad \text{茲に} \dots \dots \dots (10)$$

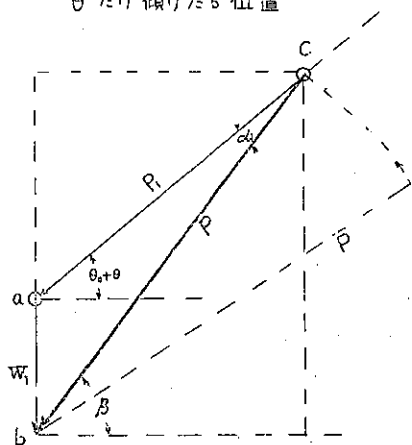
$$E = \frac{\cos \theta_0 \left\{ \left( \cos(\theta_0 - \theta) - \sqrt{\cos^2(\theta_0 + \theta) - \cos^2 \varphi} \right)^2 + \left( \sin(\theta_0 + \theta) - \sin(\theta_0 - \theta) \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}}{\cos \theta \left\{ \cos(\theta_0 + \theta) + \sqrt{\cos^2(\theta_0 + \theta) - \cos^2 \varphi} \right\}} \dots \dots (11)$$

にして與へられる擁壁に於ては  $K$  のみに依て定まるものなり。尙地震の場合の土壓と平時のそれとの比は

$$\frac{P}{P_0} = (1-k_1) \frac{E}{E_0} \dots \dots \dots (12)$$

$\theta_0, \varphi$  及び  $K$  の種々の値に對し  $E$  並に  $\frac{E}{E_0}$  の値を算出し附圖第一に曲線を以て現はせるを以て如何なる場合に對しても直ちに  $E$  を求め得べく從て(10)式に依て所要土壓を算出し得べし。

(2) (1) の場合の土壓の作用線及作用點 第三圖の如く  $\theta$  だけ廻轉せる位置に於て土壓を  $P$  とし其水平に對する傾角を  $\beta$  とす。今壁踵  $B$  を貫く鉛直線  $BC$  の左方にある三角形土砂の重量(合成加速度に依る)を  $W_1$  とし鉛直線  $BC$  に對し右方の土砂の及ぼす土壓を  $P_1$



第四圖

とすれば、其作用線は水平に對して  $\theta_0 + \theta$  なる傾角をなす。依て  $P, P_1, W_1$  なる三力の平衡に依り  $P$  の傾角  $\beta$  を求めんとす。今  $P$  と  $P_1$  との挾角を  $\alpha_1$  とすれば第四圖に依り

$$\frac{W_1}{\sin \alpha_1} = \frac{P}{\cos(\theta + \theta_0)} \quad \therefore \quad \sin \alpha_1 = \frac{W_1}{P} \cos(\theta + \theta_0)$$

然るに

$$W_1 = w(1 - k_1) \sec \theta \frac{H}{2} \sin \theta \left\{ H \cos \theta + H \sin \theta \tan(\theta_0 + \theta) \right\}$$

$$= \frac{w}{2} H^2 (1 - k_1) \tan \theta \left\{ \cos \theta + \sin \theta \tan(\theta_0 + \theta) \right\}$$

$$P = \frac{w}{2} H^2 (1 - k_1) E \quad (\text{式 (10) に依り})$$

$$\therefore \sin \alpha_1 = \frac{\left\{ \sin \theta \cos(\theta_0 + \theta) + \tan \theta \sin \theta \sin(\theta_0 + \theta) \right\}}{E}$$

$$= \frac{\sin \theta}{E} \left\{ \cos(\theta_0 + \theta) + K \sin(\theta_0 + \theta) \right\} \dots \dots \dots (13)$$

$$\beta = \alpha_1 + \theta_0 + \theta = \alpha + \theta, \quad \alpha = \alpha_1 + \theta_0 \dots \dots \dots (14)$$

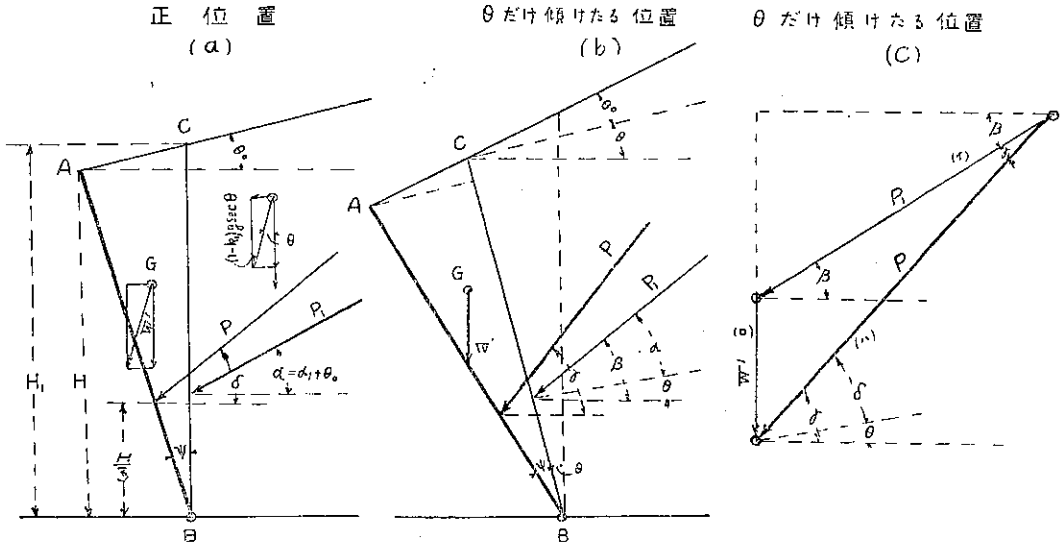
茲に  $\alpha$  は常態に於て  $P$  の作用線の水平に對する傾角なり。

然れども  $P$  の作用線は圖式に依りて容易に之を求め得べし。第四圖の如く  $W_1$  を鉛直に採り其上端より  $P_1$  の方向に  $ac$  線を引き更に下端  $b$  を中心とし  $P$  なる半徑の弧を畫きて  $ac$  線と  $c$  に於て會せしむれば  $bc$  は  $P$  を現はすベクトルにして其水平線となす角は  $\beta$  なり。

作用點の高度は Rankine 理論に據るを以て如何なる場合と雖も壁踵より鉛直高のきの所に存す。

(3) 背面傾斜せる場合の土壓 今第五圖 (a) の示す如く壁背が鉛直に對し  $\Psi$  なる傾きをなす場合の土壓を求むるに壁踵  $B$  を貫く鉛直線  $BC$  の右方の土砂が  $BC$  面に及ぼす土壓  $P_1$  を求め、次に同圖 (b) の如く全體を  $\theta$  だけ廻轉したる状態に於て壁背に作用する土壓  $P, BC$  に作用する土壓  $P_1$  及び  $A$   $BC$  なる三角形土砂の重量 ( $K$  なる地震の作用せる場合の)  $W'$  との平衡を

考ふるに、 $P_1$  は (1) 及 (2) 頂に依り其大さ及方向を知り  $W'$  も亦大さ方向を算出し得るを以て容易に  $P$  の大さ及び方向を求め得べし。即ち



第五圖

$$P_1 = \frac{w}{2} H_1^2 (1 - k_1) E = \frac{w}{2} (1 - k_1) H^2 (1 + \tan \Psi \tan \theta_0)^2$$

$$W' = w(1 - k_1) \sec \theta \frac{H_1}{2} H \tan \Psi = \frac{w}{2} (1 - k_1) \sec \theta H^2 \tan \Psi (1 + \tan \Psi \tan \theta_0)$$

$$\therefore P = \sqrt{(W' + P_1 \sin \beta)^2 + P_1^2 \cos^2 \beta} = P_1 \sqrt{\left(\frac{W'}{P_1} + \sin \beta\right)^2 + \cos^2 \beta} \dots (15)$$

茲に  $\frac{W'}{P_1} = \frac{\sec \theta \tan \Psi}{(1 + \tan \Psi \tan \theta_0) E} = \frac{1}{(\cos \Psi + \tan \theta_0) E \cos \theta}$

尙  $\frac{W'}{\sin \gamma_1} = \frac{P}{\cos \beta} = \frac{P_1}{\cos \gamma}$  (第五圖 (c) 参照)

$$\therefore \cos \gamma = \frac{P_1}{P} \cos \beta = \frac{\cos \beta}{\sqrt{\left(\frac{W'}{P_1} + \sin \beta\right)^2 + \cos^2 \beta}} \dots (16)$$

即 (15) 及 (16) に依て土壓  $P$  の大さ及び廻轉せる状態に於て水平線となす傾き  $\gamma$  を知るべく常態に於ける  $P$  の傾斜角  $\delta$  は

$$\delta = \gamma - \theta \dots (17)$$

然れども  $P_1$  及  $W'$  の大さ及方向を知れば (c) 圖に (イ) (ロ) (ハ) を以て示せる順序に依り圖式を以て容易に  $P$  及  $\gamma$  の値を求め得べし。

若し  $k_1$  の値不明なる時は止むを得ずこれを零とし  $K=k$  なるものとして計算すべし。其結果として土壓の過大となるは勿論なり。

第五節 Coulomb 氏土楔論及其他の方法に依る土壓

(1) Coulomb 氏土楔論に依る土壓 土楔論に於ては壁背と土砂との摩擦を採算し普通其間の摩擦係数を土砂間のそれと同一に採るも、地震の場合には壁背に於て土砂と壁面との間に滑動を起す傾向あるを以て著しき摩擦係数を採用するは危険なりと思惟さる、兎に角普通の土楔論に従ひ土壓を算出するには前節と同様全般を  $\theta$  だけ廻轉して公式を適用すれば可なり。即ち前號と同様の記號を用ひて

$$P = \frac{H^2}{2} w (1-k_1) \frac{\cos^2(\varphi-\theta)}{\cos(\varphi+\theta)\cos\theta \left\{ 1 + \sqrt{\frac{\sin 2\varphi \sin(\varphi-\theta_0)}{\cos(\varphi+\theta)\cos(\theta_0-\theta)}} \right\}^2} \dots (18)$$

$\theta_0=0$  なる場合は

$$P = \frac{H^2}{2} w (1-k_1) \frac{\cos^2(\varphi-\theta)}{(\sqrt{\cos\theta \cos(\varphi+\theta)} + \sqrt{\sin\varphi \sin 2\varphi})^2} \dots (19)$$

$$= \frac{H^2}{2} w (1-k_1) E \quad \text{と置く}$$

今  $\theta_0=0$  の場合に對し土楔論と Rankine 理論との與ふる土壓を比較すれば第六圖の如く土楔論の與ふる所は著しく小なるを見る。

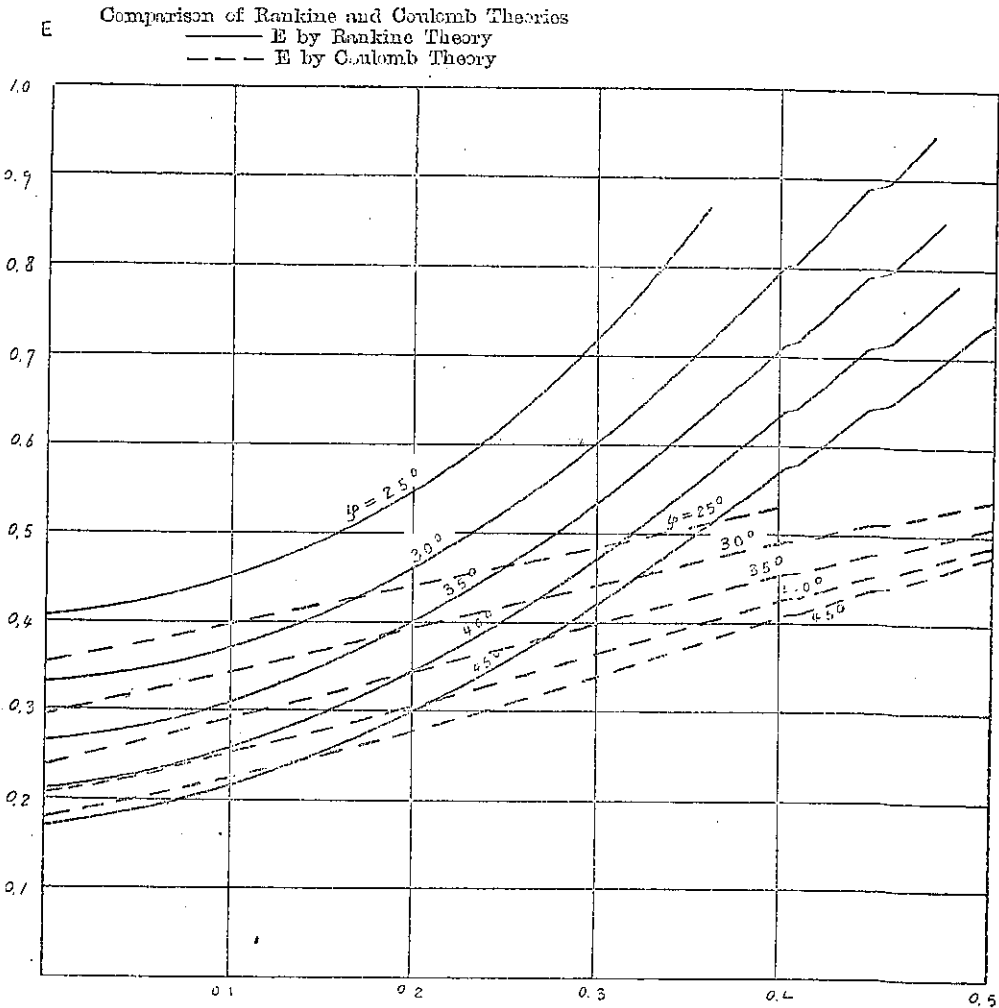
(2) 息角を減却する方法 此方法は凡ての條件は全く平時と同一にして只息角のみ  $\theta$  だけ減少するものとして、普通の土壓公式に依りて算出するものにして最も簡單なる方法なるも其與ふる所は上述の諸方法に比し稍著しき差異あり。即

$$P = \frac{H^2}{2} w \frac{\cos\theta_0 \{ \cos\theta_0 - \sqrt{\cos^2\theta_0 - \cos^2(\varphi-\theta)} \}}{\cos\theta_0 + \sqrt{\cos^2\theta_0 - \cos^2(\varphi-\theta)}} \dots (20)$$

$\theta_0=0$  ならば

$$P = \frac{H^2}{2} w \frac{1 - \sin(\varphi-\theta)}{1 + \sin(\varphi-\theta)} = \frac{H^2}{2} w \cdot \Phi \dots (21)$$

今  $\theta_0=0$  の場合に於て上式より算出せる  $\Phi$  と式(11)に依る  $E$  の値とを比較すれば次第三表の如し



第 六 圖

第 三 表

$K$	0.2		0.3		0.4		0.5	
$\phi$	35°	50°	35°	50°	35°	50°	35°	50°
$E$	0.40	0.28	0.54	0.40	0.75	0.57	1.03	0.77
$\Phi$	0.43	0.23	0.52	0.29	0.63	0.36	0.74	0.43

即ち 息角 35° 以下 震度 0.4 以下の場合は大差なき結果を與ふるを以て、便宜上何れを使用するも差支なきも息角著しく大なる時又は  $K$  の極めて大なる場合に於ては著しき差異を生ず。

第六節 土砂の支持力に對する地震の影響

軟地盤に盛土をなす時は盛土の底面は次第に沈下し盛土直下の Active pressure (正土壓)  $p_1$  と地盤よりの深さ即根入に相當する Passive pressure (負土壓)  $p_2$  とが平衡する状態に及びて止まる。此場合の状況はは第七圖に示すが如く  $p_1$  と  $p_2$  との關係は次の如し。

記號：—  $\varphi$  = 地盤土砂の息角  
 $H$  = 地盤上の盛土の高  
 $h_0$  = 盛土の沈下深

$$p_1 = w(H + h_0) \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}$$

$$p_2 = wh_0 \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}$$

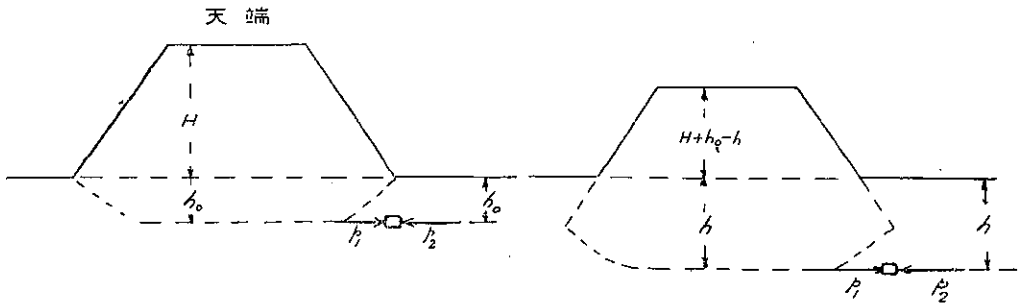
然るに  $p_1 = p_2$  なるを以て

$$\frac{H + h_0}{h_0} = \frac{(1 + \sin \varphi)^2}{(1 - \sin \varphi)^2} \dots \dots \dots (22)$$

然るに合震度  $K$  なる地震に際會せば  $p_1$  は著しく増大し、 $p_2$  は反對に減少するを以て忽ちに平衡を失し盛土は沈下し其底面は地盤下に迄沈下して再び平

平時に於ける状態

地震により沈下せる状態



第七圖

衡を得るに至る、今此關係を數式を以て表はせば次の如し。 (第七圖参照)

$$p_1 = w(1 - k_1) \sec \theta (H + h_0) \sec \theta \frac{\cos \theta - \sqrt{\cos^2 \theta - \cos^2 \varphi}}{\cos \theta + \sqrt{\cos^2 \theta - \cos^2 \varphi}}$$

$$p_2 = w(1 - k_2) \sec \theta h \sec \theta \frac{\cos \theta + \sqrt{\cos^2 \theta - \cos^2 \varphi}}{\cos \theta - \sqrt{\cos^2 \theta - \cos^2 \varphi}}$$



然るに  $p_1=p_2$  なるを以て

$$\frac{H+h_0}{h} = \frac{(\cos\theta + \sqrt{\cos^2\theta - \cos^2\varphi})^2}{(\cos\theta - \sqrt{\cos^2\theta - \cos^2\varphi})^2} \dots \dots \dots (23)$$

上式に (22) 式の關係を挿入すれば

$$\frac{h}{h_0} = \left( \frac{1 + \sin\varphi}{1 - \sin\varphi} \right)^2 \left( \frac{\cos\theta - \sqrt{\cos^2\theta - \cos^2\varphi}}{\cos\theta + \sqrt{\cos^2\theta - \cos^2\varphi}} \right)^2 \dots \dots \dots (24)$$

$\theta$  及  $\varphi$  の値を與へらるゝ時は上式に依て  $h/h_0$  の値を算出し得べく、從て平時と地震の場合との沈下の割合を知り得べく  $h-h_0$  は略盛土天端の沈下高を示す事となる。 $\varphi$  及  $K$  の種々の値に對し  $h/h_0$  の値を算出すれば次表の如し

第四表

$h/h_0$  の 値

K =		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$\varphi =$	15°	1.08	1.41	—	—	—
	25°	1.05	1.20	1.58	2.53	—
	35°	1.04	1.16	1.37	1.79	2.50

上表より  $\varphi$  の値の相違に依る  $h/h_0$  の値の變化はさして顯著ならざるを見る。これ  $\varphi$  の小なる軟地盤に於ては平時に於て既に著しき沈下を爲し居る爲めにして從て地震の強烈なる場合は地盤に多少の良否あるも何れも著しき沈下を免れざる次第なり。尙  $\varphi=15^\circ$  の場合に 0.3 以上の地震  $\varphi=25^\circ$  の場合に 0.5 以上の大地震に際會せば地盤は殆ど支持力を失ひ盛土全體は地盤下に陥没するに到るべし。

次に軟き地盤に孔を穿ちこれに桶又は輕き物體を挿し込む時は平時に於ては孔底の土砂は地盤下の土砂に因る Active pressure が桶又は物體の重量に依りて生ずる Passive pressure より小なる爲めに平衡を保ち得と雖も地震に際會して Active pressure 著しく増大し反對に Passive pressure は減少するを以て土砂は周圍より孔底に向ふて押し出し桶又は物體を押し上げる事となる。此種の現象は先般の大地震に於ても屢々見聞せる所なり。

第七節 單體構造物に對する地震の作用

次に例を橋脚、橋臺等にとり單體構造物に對する水平、上下兩震度の作用を

述べんとす。

(1) 橋脚 (第八圖参照)

- $2b$  = 橋脚底の幅                       $l$  = 同上長
- $W$  = 橋脚の自重                       $H$  = 底面より  $W$  の作用點迄の高
- $W_1$  = 荷重                               $H_1$  = 底面より  $W_1$  の作用點迄の高
- $F$  = 底面に作用する鉛直力
- $Q$  = 同上水平力

今  $k$  なる水平震度、 $k_1$  なる鉛直震度作用する時は

$W$  に因る鉛直力 =  $(1 - k_1)W$  or  $(1 + k_1)W$   
 同上 水平力 =  $kW$

$W_1$  に因る鉛直力 =  $(1 - k_1)W_1$  or  $(1 + k_1)W_1$   
 同上 水平力 =  $kW_1$

水平加速度が左方に向て作用する場合を考へ底の左端  $A$  に於て能率を求むれば

$$M = b(W + W_1)(1 - k_1) - kW H - kW_1 H_1 \quad \text{for } -k_1$$

$$\text{or } = b(W + W_1)(1 + k_1) - kW H - kW_1 H_1 \quad \text{for } +k_1$$

仍て  $F$  の作用點の位置  $x$  を求むれば

$$x = b - K \frac{WH + W_1 H_1}{W + W_1} \quad \text{for } -k_1 \dots \dots \dots (25)$$

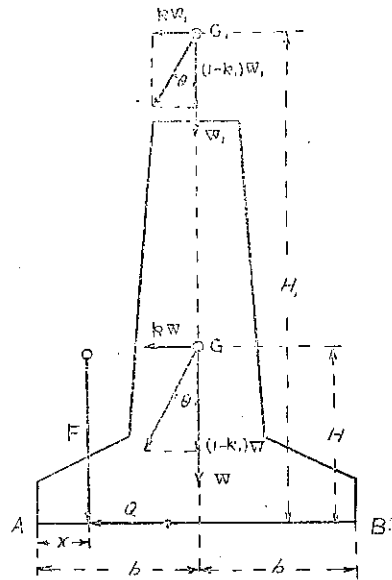
又は

$$x = b - K' \frac{WH + W_1 H_1}{W + W_1} \quad \text{茲に } K' = \frac{k}{1 + k_1} \dots \dots \dots (25')$$

茲に  $x$  は轉倒に對する構造物の安定度を示すものにして合震度  $K$  に依て定まる所なり。而して一般に式 (25) の場合即ち作用鉛直加速度が上向なる場合は式 (25') の場合に比し轉倒の危険極めて大なるものにして、單體構造物の安定を論ずる場合には前者のみを考慮すれば足る。

次に  $A$  點に於て基礎に作用する壓力度を求むるに

$$F = (1 - k_1)(W + W_1)$$



第八圖

$$\begin{aligned}
 p_A &= \frac{2}{3l} \cdot \frac{(1-k_1)(W+W_1)}{b-K \frac{WH+W_1H_1}{W+W_1}} \\
 &= \frac{2}{3l} \cdot \frac{(1-k_1)(W+W_1)^2}{b(W+W_1)-K(WH+W_1H_1)} \dots \dots \dots (26)
 \end{aligned}$$

$k_1$  大なるに従ひ分子は小となるも分母は急速に減少するを以て  $p_A$  も亦主として  $K$  に依て定まる事となる。

次に底面に於ける滑動を考ふるに

$$\begin{aligned}
 Q &= k(W+W_1) \\
 F \cdot f &= Q \quad \text{茲に } f = \text{摩擦係数} \\
 \therefore f &= \frac{Q}{F} = K
 \end{aligned}$$

即ち滑動に對する安否は  $K$  に依て定まる。

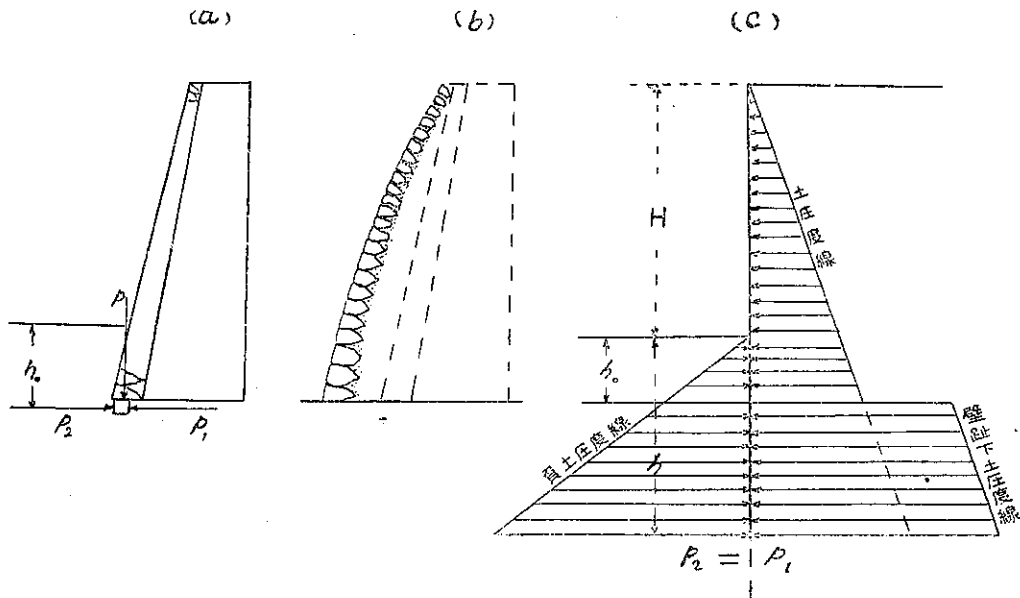
次に各水平断面に於て彎曲力率に對する安定を検するに、今任意の一断面を取り其面積を  $A$  とし慣性能率を  $I$  縁維距離を  $y$  とし断面より各力の作用點迄の高さを  $Y, Y_1$  とすれば縁維應張力  $f_i$  は

$$\begin{aligned}
 f_i &= \frac{M}{I} y - \frac{F}{A} \\
 &= (1-k_1) \left\{ \frac{K(WY+W_1Y_1)}{I} y - \frac{W+W_1}{A} \right\} \\
 &= \frac{k(WY+W_1Y_1)}{I} y - \frac{(1-k_1)(W+W_1)}{A} \dots \dots \dots (27)
 \end{aligned}$$

即ち  $f_i$  も  $k_1$  の大なる程大なりと雖も其影響著しからず彎曲に對する安定は主として水平震度に依ると云ふ事を得べし。若し自重  $W$  の外に多數の荷重  $W_1, W_2, \dots$  を負載する場合は、上記の諸式に於て  $W_1$  の代りに  $\Sigma W, W_1H_1$  又は  $W_1Y_1$  の代りに  $\Sigma WH$  又は  $\Sigma WY$  を挿入すれば足る。

(2) 橋臺 橋臺の場合に於ては橋脚に於て考慮せる力に更に土壓力  $P$  を採算すれば可なり。而して橋臺全體としての安定は圖式に依るを便とす。各断面の安定を論ずる場合は土壓  $P$  を平時と同様の方法に依つて壁背全面に分布し断面の上方に位する力のみを採りて彎曲力率を算定すべし。而して橋臺に於ても全體としての安定は主として合震度  $K$  に依り各断面の安定は水平震度  $k$  に依りて定まるものとす。

(3) 護岸石垣 軟弱なる地盤に護岸石垣等を築造する時は往々諸に推出され空積の場合に於ては屢々中腹の孕出しを起し、地震の場合に於ては此種の被害特に著しく剩へ上半部に於て崩潰する例頗る多し。此等の現象は凡て壁體に作用する土壓に依るものなるは勿論なるも、其直接の原因は底面下に於ける表裏兩側の正負兩土壓の平衡を失せるに因るものにして被害點附近に於ける土壓の特に著大なる事を意味するものにあらず。今第九圖 (a) に於て壁直下の土壓度を考ふるに  $p$  は鉛直壓度、 $p_1$  は之に依て生ずる水平正土壓度、 $p_2$  は根入  $h_0$



第九圖

に相當する負土壓度にして、 $p_2 > p_1$  ならば壁下の土砂は安定を保ち得るも  $p_2 < p_1$  となれば土砂は前方に移動し壁體は諸に推出さるゝ事となる。而して石垣類に於ては下部推出の際上部は取り残さるゝ傾向あるを以て其結果 (b) の如く中腹の孕み出しを生ずる事となる。尙地震の場合には  $p_1$  は著しく増大し  $p_2$  は反對に減少するを以て容易に  $p_2 < p_1$  なる情況となり著しき推出、孕出等を起す。且つ孕出しに依て目筋破壊しゆるく積み重ねたる個々の石塊となるを以て續て襲來する反對の振動に依り上部は容易に崩壊すべし。(c) は地震の場合に作用する水平力を圖示せるものにして  $H$  及  $h$  は第六節に於けるものと同意義を有す。

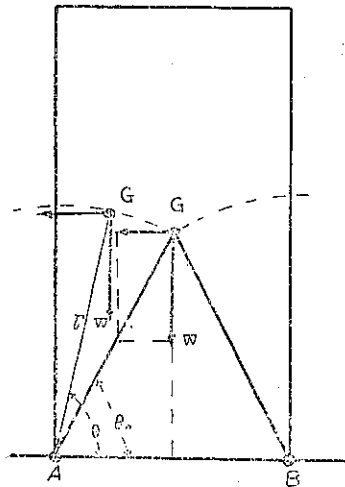
杭打基礎を用ふる場合は杭に推力及彎曲力率が作用するを以て若し杭の達する深さが $h$ に達せざる時は、壁體は杭諸共に推し出さるゝも $h$ 以上遙かに深く打込める時は諸に推出する事少なきも彎曲力率の爲めに杭は傾斜を爲し、壁體は若干の推出を起すべし。

上記の原因の外石垣擁壁類の上部に於て震害を生ずる場合少なからず。例へば背側の地表傾斜せる場合斜面の崩壊に因るもの、橋臺に於て上部桁端と壁頂の相對運動の異なる爲め兩者の間に強大なる推力の作用する場合等の如し。

## 第二編 震 動 雜 論

### 第八節 物體の強促搖動 (Forced rocking of a rigid body.)

第一編第一節に於て重力と地震力との合成が底の縁邊に交はる事は物體轉倒の充分なる條件にあらざる事を述べしが、この條件は單に物體が其縁邊 $A$  (第十圖參照) を軸として廻轉運動を起さんとするの條件にして、若し地震加速度が一層大となれば物體は茲に廻轉を始め重心より廻轉軸に下したる垂線 $GA$ が鉛直の位置を超えたる場合尙地震力が同じ向きに作用するか又は消滅する場合に於て初めて轉倒を生ずべしと雖も、若し此際地震力が逆の方向に作用する時は必ずしも轉倒するにあらず却て逆廻轉をなし垂線は再び原位置 $GA$ に戻り、底面に於て衝突を爲し反撥され $B$ を軸として更に廻轉を起すべし。斯くて物體は強促搖動を爲し遂に轉倒するか或は原位置に復歸する事となる。次に物體の比幅とこれを轉倒せしめ得べき地震動との關係を究めんが爲め、底面水平にして方形斷面 (又は圓形) を有する物體の Forced rocking を理論上より解かんとする。第十圖に於て地震動は底面に並行に作用し其加速度の變化は Sine curve を以て現はし得るものとし、 $G$  を物體の重心  $A$  及  $B$  を地震動の方向に直角なる縁邊とし、 $m$  を以て物體の質量となす。尙



第十圖

り、底面に於て衝突を爲し反撥され $B$ を軸として更に廻轉を起すべし。斯くて物體は強促搖動を爲し遂に轉倒するか或は原位置に復歸する事となる。次に物體の比幅とこれを轉倒せしめ得べき地震動との關係を究めんが爲め、底面水平にして方形斷面 (又は圓形) を有する物體の Forced rocking を理論上より解かんとする。第十圖に於て地震動は底面に並行に作用し其加速度の變化は Sine curve を以て現はし得るものとし、 $G$  を物體の重心  $A$  及  $B$  を地震動の方向に直角なる縁邊とし、 $m$  を以て物體の質量となす。尙

$$p = 2\pi/T \quad (T \text{ は地震動の週期})$$

$$k = \text{最大水平震度} \quad , \quad r = \overline{AG} = \overline{BG}$$

$I = A$  軸に對する物體の慣性能率

$\theta_0 =$  平時に於て  $AG$  線が  $AB$  線となす角

$\theta = t$  なる時刻に於て  $AG$  線が  $AB$  線となす角

然る時は  $A$  の廻りの廻轉運動の方程式は

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = mg k r \sin\theta \cdot \sin pt - mg r \cos\theta \dots \dots \dots (28)$$

若し  $\theta$  は  $\frac{\pi}{2}$  に近き範圍内に存するものとせば、

$$\sin\theta \doteq 1, \cos\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \doteq \frac{\pi}{2} - \theta$$

從て式 (28) は

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} - n^2\theta = n^2 \left( k \sin pt - \frac{\pi}{2} \right) \text{ where } n^2 = \frac{mgr}{I}$$

上式を解けば

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{n^2 k}{n^2 + p^2} \sin pt + A e^{nt} + B e^{-nt} \dots \dots \dots (29)$$

茲に  $A$  及  $B$  は積分常數にして運動の最初の條件に依て定まる所なり。今水平加速度は  $t=0$  の時に 0 にして、それより次第に増加し  $t=t_0$  に於て合成力が  $OG$  線に一致するものとすれば、

$$\text{at } t=t_0, \quad \theta = \theta_0, \quad \frac{d\theta}{dt} = 0$$

これに依て  $A$  及  $B$  を定むれば

$$A = \frac{1}{2} e^{-n t_0} \left\{ \theta_0 - \frac{\pi}{2} + \frac{n k}{n^2 + p^2} (p \cos p t_0 + n \sin p t_0) \right\}$$

$$B = \frac{1}{2} e^{n t_0} \left\{ \theta_0 - \frac{\pi}{2} - \frac{n k}{n^2 + p^2} (p \cos p t_0 - n \sin p t_0) \right\}$$

即ち第一回の廻轉運動を現はす式は

$$\begin{aligned} \theta = & \frac{\pi}{2} + \left( \theta_0 - \frac{\pi}{2} \right) \cosh n(t-t_0) + \frac{npk}{n^2 + p^2} \cos p t_0 \sinh n(t-t_0) \\ & + \frac{n^2 k}{n^2 + p^2} \sin p t_0 \cosh n(t-t_0) - \frac{n^2 k}{n^2 + p^2} \sin p t \dots \dots \dots (30) \end{aligned}$$

從て角速度  $\omega$  即ち  $\frac{d\theta}{dt}$  を現はす式は

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} = \omega = n \left( \theta_0 - \frac{\pi}{2} \right) \sinh n(t-t_0) + \frac{n^2 p k}{n^2 + p^2} \cos p t_0 \operatorname{cosh} n(t-t_0) \\ + \frac{n^3 k}{n^2 + p^2} \sin p t_0 \sinh n(t-t_0) - \frac{n^2 k}{n^2 + p^2} p \cos p t \dots \dots \dots (31) \end{aligned}$$

かくて第二回目の廻轉は  $B$  を軸とし次に  $A$  次に  $B$  と交代に  $A$  又は  $B$  を軸として揺動を起すべし。今  $t_m$  に於て礎面と  $m$  回目の衝突をなし、反撥に依りて  $\omega_m$  なる初角速度を得るものとせば  $m$  回目の廻轉運動及速度の式は次の如し。

$$\begin{aligned} \theta = \frac{\pi}{2} + \left( \theta_0 - \frac{\pi}{2} \right) \cosh n(t-t_m) + \frac{\omega_m}{n} \sinh n(t-t_m) \\ + \frac{kn}{n^2 + p^2} \{ p \cos (p t_m - m\pi) \sinh n(t-t_m) + n \sin (p t_m - m\pi) \cosh n(t-t_m) \\ - n \sin (p t - m\pi) \} \dots (32) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega = \frac{d\theta}{dt} = n \left( \theta_0 - \frac{\pi}{2} \right) \sinh n(t-t_m) + \omega_m \cosh n(t-t_m) \\ + \frac{kn^2}{n^2 + p^2} \{ p \cos (p t_m - m\pi) \cosh n(t-t_m) + n \sin (p t_m - m\pi) \sinh n(t-t_m) \\ - p \cos (p t - m\pi) \} \dots (33) \end{aligned}$$

次に一例として高 4 尺底面 1 尺角即ち比幅 = 0.25 なる角礫をとり、週期 1.5 秒水平震度 0.4 及  $\frac{1}{3}$  の地震に就き振動を算定せんとす。

$$I=22.87 \quad r=2.06 \quad n=1.715 \quad p=4.2 \quad \theta_0=1.321$$

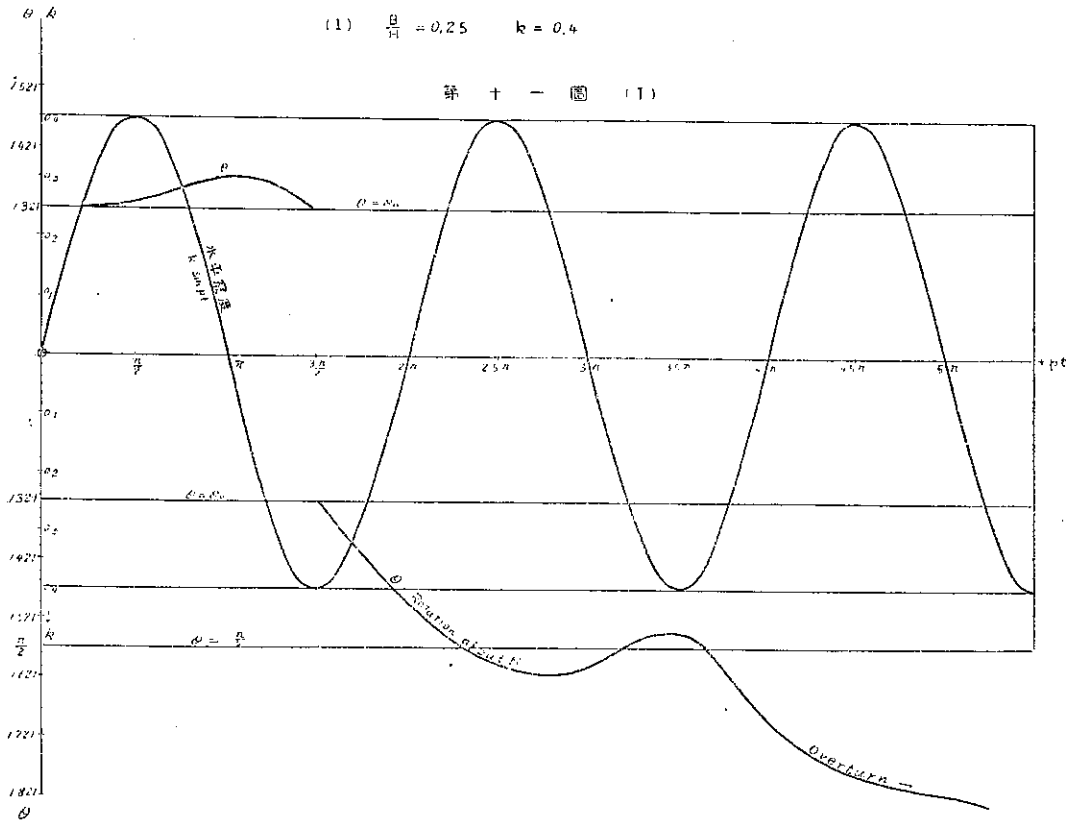
此計算は式 (30) より豫め發撥の時刻  $t_m$  及  $\omega=0$  即ち最大角變位の時刻を求め得ればさしたる困難なきも、此等の時刻を求むるには試算に據らざるべからず、依て一定時刻前に  $\theta$  を算出し其  $\theta_0$  と一致する場合の時刻を求めこの時刻に於ける速度を算出し次回の廻轉はこの速度を初速となし更に計算を進むるの方法をとれり。

尤も反撥に依り其直前の速度の 8 割を保有する場合に就き運動を探究せり。其結果は第十一圖 ( $k=0.4$ ) 及 ( $k=\frac{1}{3}$ ) に示すが如く、前者に於ては二回目の廻轉に於て容易に轉倒するも後者に於ては數回の揺動をなすも尙轉倒せざる事を見る。即ち物體の轉倒は其比幅より餘程大なる震度の作用により初めて轉倒すべきのなるを知る。

方柱の揺動

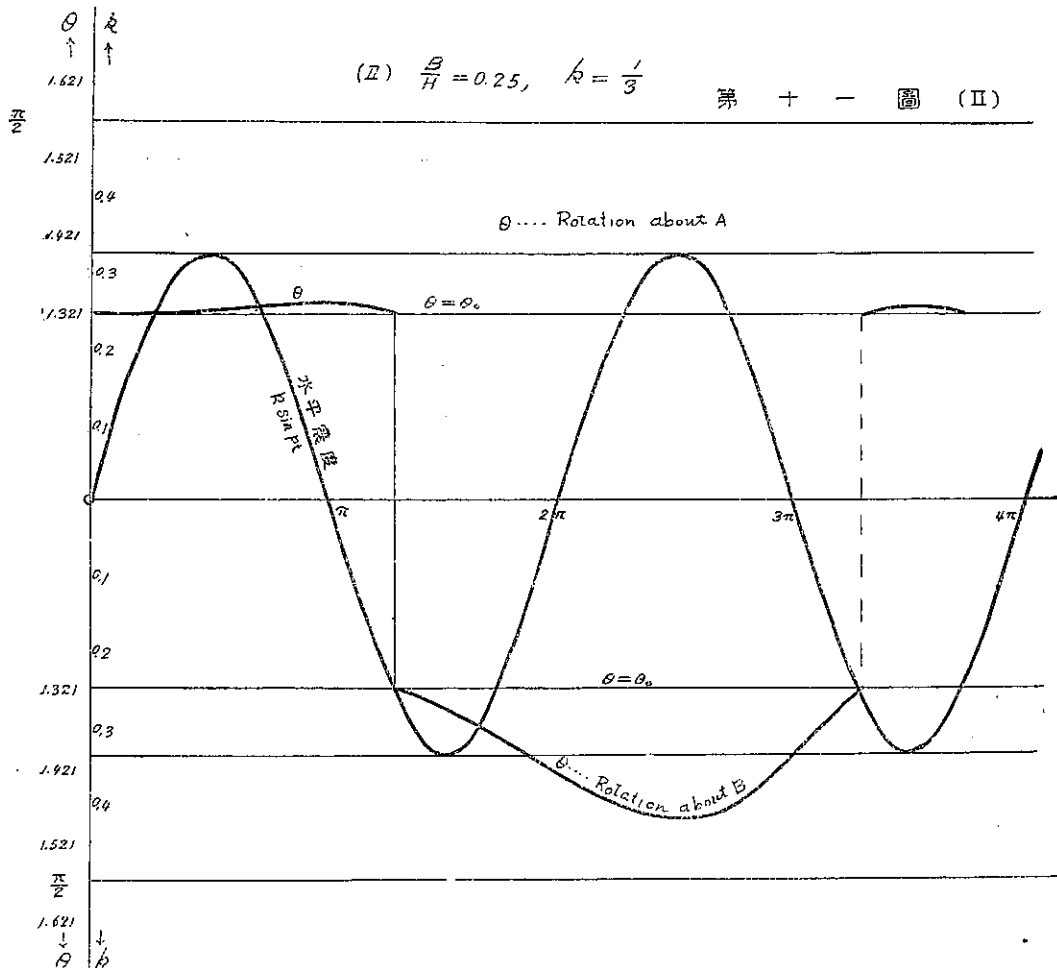
(I)  $\frac{B}{H} = 0.25$   $k = 0.4$

第十一圖 (I)



(II)  $\frac{B}{H} = 0.25$ ,  $k = \frac{1}{3}$

第十一圖 (II)





第九節 架構構造物の振動週期

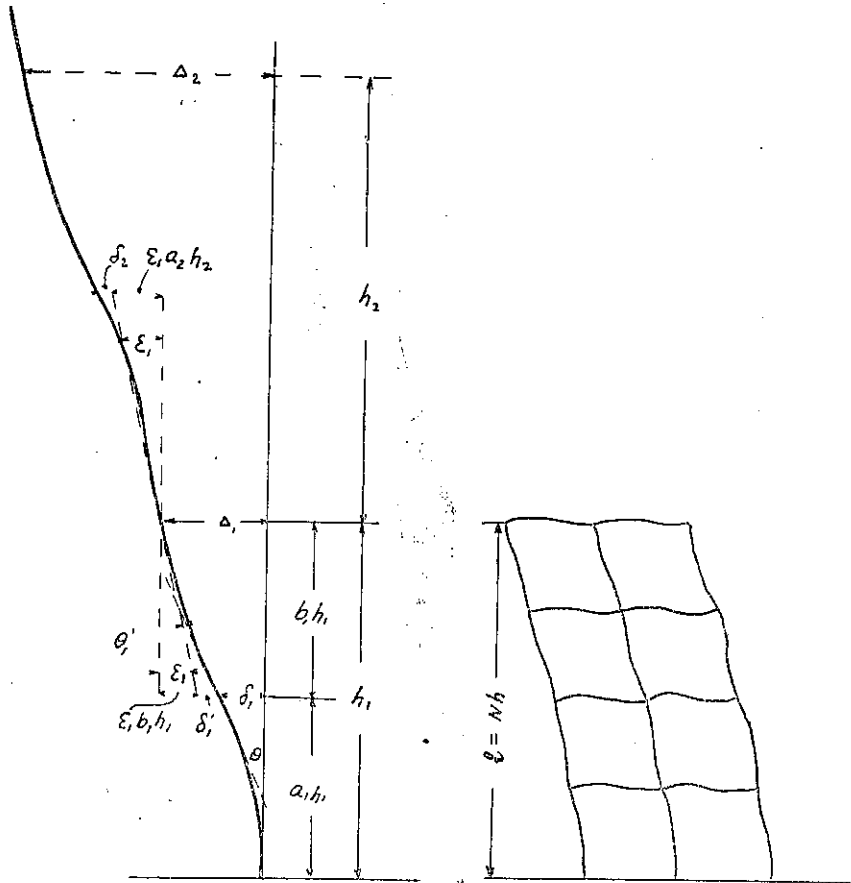
予は曩に本會誌第六卷第四號に發表せる「載荷せる構造物の振動並に其耐震性に就て」に於て架構構造物の振動週期の算定法を記述せしが、其後柱材虚點の位置の推定を誤まり週期の公式に多少の誤差を含む事を發見せしを以て茲に改めて該問題を論じ週期算出の公式を求め、前文の粗漏を補正せんとす。今第十二圖の如き架構ありて各柱の上端に單位水平力を作用せしめたる場合の撓み(變位)を求むるに

$h$  = 柱の理論長

$a_1 h$  = 柱の下端より虚點迄の高

$b_1 h$  = 虚點より柱の上端迄の高

第十二圖



- $\varepsilon$  = 柱の下端に於ける角變位
- $\theta = ah$  の兩端に於ける相對的角變位
- $\theta' = bh$  の 同 上
- $\delta = ah$  の兩端に於ける相對的變位
- $\delta' = bh$  同 上
- $\Delta$  = 柱上端に於ける絕對變位
- $c$  = 撓度係數

尚尾添數字は最下階より數えたる階數なり、今構造物の頂點に單位水平力を作用せしめたる場合の各柱端の變位を求むるに

$$\varepsilon_1 = \theta_1 - \theta_1' = \frac{3}{2} \cdot \frac{\delta_1}{a_1 h_1} - \frac{3}{2} \cdot \frac{\delta_1'}{b_1 h_1}$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 + \theta_2 - \theta_2' \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_2 + \theta_3 - \theta_3' \quad \dots$$

$$\delta_1 = c_1 (a_1 h_1)^3 \quad \delta_m = c_m (a_m h_m)^3 \quad \dots$$

$$\delta_1' = c_1 (b_1 h_1)^3 \quad \delta_m' = c_m (b_m h_m)^3 \quad \dots$$

$$\therefore \varepsilon_1 = \frac{3}{2} \left\{ \frac{c_1 (a_1 h_1)^3}{a_1 h_1} - \frac{c_1 (b_1 h_1)^3}{b_1 h_1} \right\} = \frac{3c_1}{2} h_1^2 (a_1^2 - b_1^2) \quad \dots$$

$$\varepsilon_m = \frac{3}{2} \left\{ c_1 h_1^2 (a_1^2 - b_1^2) + c_2 h_2 (a_2^2 - b_2^2) + \dots + c_m h_m (a_m^2 - b_m^2) \right\}$$

$$\therefore \Delta_1 = \delta_1 + \delta_1' + b_1 h_1 \varepsilon_1$$

$$\Delta_2 = \Delta_1 + h_2 \varepsilon_1 + \delta_2 + \delta_2' + b_2 h_2 \varepsilon_2 = \delta_1 + \delta_2' + \delta_1' + \delta_2' + b_1 h_1 \varepsilon_1 + b_2 h_2 \varepsilon_2 + h_2 \varepsilon_1 \quad \dots$$

$$\Delta_n = \sum_1^n \delta_m + \sum_1^n \delta_m' + \sum_1^n b_m h_m \varepsilon_m + \sum_1^n h_{m+1} \varepsilon_m$$

$$\text{where } b_m h_m \varepsilon_m = \frac{3}{2} b_m h_m \left\{ \sum_1^m c_m h_m^2 (a_m^2 - b_m^2) \right\}$$

$$\therefore \Delta_n = \sum_1^n c_m (a_m h_m)^3 + \sum_1^n c_m (b_m h_m)^3 + \sum_1^n \frac{3}{2} b_m h_m \sum_1^m c_m h_m^2 (a_m^2 - b_m^2)$$

$$+ \sum_1^n h_{m+1} \sum_1^m c_m h_m^2 (a_m^2 - b_m^2) \quad \dots \quad (34)$$

今構造物の階級を  $N$  とし  $c_1 c_2 \dots c_N$  の平均を  $c$ ,  $h_1 h_2 \dots h_N$  の平均を  $h$ ,  $a_1 \dots a_N$  の平均を  $a$ ,  $b_1 \dots b_N$  の平均を  $b$  とし柱は凡て一様に  $c, h, a$ , 及び  $b$  なる常數を有するものと考ふれば

$$\Delta_n = ch^3 n \left\{ a^3 + b^3 + (a^2 - b^2) \left( n - 1 + \frac{3}{2} bn \right) \right\} \dots \dots \dots (35)$$

而して此場合彈性變形の爲めに生ずる位置の勢力は外力即ち頂點に作用する單位水平力の爲したる仕事に等しきを以て

$$\begin{aligned} P.E &= \frac{1}{2} \Delta_n = ch^2 l \left\{ a^3 + b^3 - a^2 + b^2 + (a^2 - b^2) \left( 1 + \frac{3}{2} b \right) \frac{l}{h} \right\} \\ &= ch^2 l \left\{ A + B \frac{l}{h} \right\} \dots \dots \dots (36) \end{aligned}$$

茲に  $l = Nh$  即ち架構の總高

$$A = a^3 + b^3 - a^2 + b^2, \quad B = (a^2 - b^2) \left( 1 + \frac{3}{2} b \right)$$

今作用水平力を急に撤去する時は架構に振動を起すべく、此際架構の下端より上端に貫通する凡ての柱の彈性曲線を上記  $\Delta_n$  を連結する Smooth curve 即ち各階柱の第二次的彎曲を無視したるものと假定するも、振動週期を求むる上に於ては著しき誤差を生ぜず。依て上下貫通する一柱(長  $l$ ) をとり任意點(下端より  $x$  なる高さ) に於ては其絕對變位  $\Delta_x$  を求むれば

$$\begin{aligned} \Delta_x &= ch^2 x \left\{ (a^3 + b^3 - a^2 + b^2) + (a^2 - b^2) \left( 1 + \frac{3}{2} b \right) \frac{x}{h} \right\} \dots \dots \dots (37) \\ &= ch^2 x \left( A + B \frac{x}{h} \right) \end{aligned}$$

次に架構の全重量は各柱の各部に等布さるゝものと考へ、一本の柱の單位長に對し  $w$  なりと假定すれば振動に當り  $x$  點の爲す運動は  $\Delta_x \sin pt$  (茲に  $p$  は單位時間の振動數にして  $2\pi/T$  に等し) を以て現はさる、依て  $x$  點の最大速度は  $p \cdot \Delta_x$  に等し。故に一柱の有する最大運動勢力 ( $K.E$ ) は

$$\begin{aligned} K.E &= \frac{1}{2} \int_0^l \frac{w}{g} p^2 \Delta_x^2 dx = \frac{w}{2g} \int_0^l p^2 c^2 h^4 x^2 \left( A + B \frac{x}{h} \right)^2 dx \dots \dots \dots \\ &= p^2 \frac{w}{2g} c^2 h^4 \left( A^2 \frac{l^3}{3} + \frac{A \cdot B}{2h} l^3 + \frac{B^2}{5h^2} l^5 \right) \dots \dots \dots (38) \end{aligned}$$

然るに  $K.E = P.E$

$$\text{故に } p^2 = \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 = \frac{ch^2 l \left( A + B \frac{l}{h} \right)}{\frac{w}{g} c^2 h^4 \left( \frac{1}{3} A^2 + \frac{AB}{2h} l + \frac{B^2}{5h^2} l^2 \right)}$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} h l \left\{ \frac{\frac{A^2}{3} + \frac{AB}{2h} l + \frac{B^2}{5l^2} l^2}{A + \frac{B}{h} l} \right\}^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{w}{gEI}}$$

茲に  $I$  は柱の慣性能率,  $E$  は材料の弾性率にして  $C = \frac{1}{3EI}$  なり 上式を書換ふれば

$$T = 2.09 \left\{ \frac{A^2 + 1.5 ABN + \frac{3}{5} B^2 N^2}{A + BN} \right\}^{\frac{1}{2}} \frac{l^2}{N} \sqrt{\frac{w}{gEI}} \dots (39)$$

$$= C \frac{l^2}{N} \sqrt{\frac{w}{gEI}} \dots$$

where  $A = a^3 + b^3 - (a^2 - b^2)$ ,  $B = (a^2 - b^2) \left(1 + \frac{3}{2} b\right)$

實際  $a$  及  $b$  は階に依て多少異なるも普通高層建築の架構に於ては、第一階に於ては  $a$  は  $b$  より少しく大なるも上層に於ては兩者殆ど相等し。而して此等の値は架構の耐力計算の必要上必ず各階に對して算出すべきものなるを以て、若し階段に異なる場合は頂點の撓度に對する影響の大小に依り輕重を附して平均を求むれば可なり。此輕重率は普通最上階を 1 としこれより下方に向ふて計算したる階數を用ふれば可なり。即ち

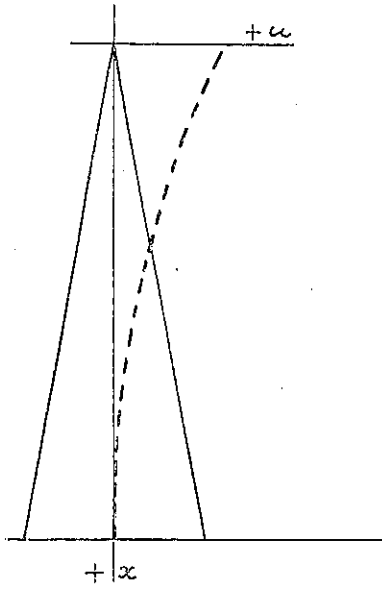
$$a = \frac{\sum_1^N a_m (N+1-m)}{\sum_1^N m}, \quad b = \frac{\sum_1^N b_m (N+1-m)}{\sum_1^N m} \dots (40)$$

尙  $w$  及  $I$  も下層程大なるを常とす。然れども  $\frac{w}{I}$  が大體一樣なる時は最下層の柱に對する  $w$  及  $I$  を採用して大過なし。

次に計算の便利の爲め  $a$  及  $b$  の種々の値に對して係數  $c$  の値を算出し附圖第二に曲線を以て示せり。

### 第十節 彈性錐體の強促振動

予は曩に本誌第五卷第三號所載の「塔狀構造物の振動並に其耐震性に就て」に於て錐體自由振動週期に關する Kirchhoff 氏の解法を記述せしが、當時此種形狀の構造物の強促振動を解き其結果と檣體の強促振動とより烟突燈臺等の如き截



第十三圖

頭錐體の強促振動を推測せんと企てたりしも其理論的解決には多數の未知無限級數の數値を算出せざるべからずして遂に目的を達し得ざりしが、其後此等の級數値を算出し錐體強促振動に於ける軸線の形狀及之に因て各部に生ずる彎曲力率及び縁維應力の分布を算定し得たるを以下に其大要を述べんとす。

第十三圖の如き記號を用ひ振動に於ける錐體の軸線の一般的解式は

$$u = A\Phi(v) + B\Psi(v) + C\Phi_1(v) + D\Psi_1(v)$$

茲に  $u$  = 上端より  $x$  なる點の最大變位

$$v = \mu x = p_1 l \sqrt{\frac{\rho A_0}{E I_0}}$$

$p_1$  = 地動の振動數

$$\Phi(v) = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{v}{(1)^2 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{v^2}{(1 \cdot 2)^2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{v^3}{(1 \cdot 2 \cdot 3)^2 \cdot 4 \cdot 5} + \dots$$

$$\Psi(v) = \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{v}{(1)^2 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{v^2}{(1 \cdot 2)^2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{v^3}{(1 \cdot 2 \cdot 3)^2 \cdot 4 \cdot 5} + \dots$$

$$\Phi_1(v) = \frac{d^2 \varphi_1}{d v^2} \quad \Psi_1(v) = \frac{d^2 \Psi_1}{d v^2}$$

$$\varphi_1 = \varphi \ln v - 2 \left\{ \frac{v}{1^2} + \frac{v^2 \left(1 + \frac{1}{2}\right)}{(1 \cdot 2)^2} + \frac{v^3 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)}{(1 \cdot 2 \cdot 3)^2} + \dots \right\}$$

$$\Psi_1 = \Psi \ln v + 2 \left\{ \frac{v}{1^2} - \frac{v^2 \left(1 + \frac{1}{2}\right)}{(1 \cdot 2)^2} + \frac{v^3 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)}{(1 \cdot 2 \cdot 3)^2} - \dots \right\}$$

$$\varphi = 1 + \frac{v}{1^2} + \frac{v^2}{(1 \cdot 2)^2} + \frac{v^3}{(1 \cdot 2 \cdot 3)^2} + \dots$$

$$\Psi = 1 - \frac{v}{1^2} + \frac{v^2}{(1 \cdot 2)^2} - \frac{v^3}{(1 \cdot 2 \cdot 3)^2} + \dots$$

今地動の振幅の 1/2 を  $e$  とすれば強促振動に於ける環境條件は

$$x=0 \text{ or } v=0 \text{ に於て} \quad \frac{d^2 u}{d v^2} = 0 \quad \& \quad \frac{d}{d v} v^4 \frac{d^2 u}{d v^2} = 0$$

$$\therefore C=0 \quad D=0$$

$$\therefore u=A\Phi(v)+B\Psi(v)$$

$$x=l \text{ or } v=\mu l=v_1 \text{ に於て } u=e \quad \& \quad \frac{du}{dv}=0.$$

$$\therefore A=e \frac{\Psi'}{\Phi\Psi' - \Phi'\Psi}, \quad B=-e \frac{\Phi'}{\Phi\Psi' - \Phi'\Psi}$$

茲に

$$\Phi' = \left( \frac{d\Phi}{dv} \right)_{x=l}, \quad \Psi' = \left( \frac{d\Psi}{dv} \right)_{x=l}$$

$$\therefore u = \frac{e}{\Phi(v_1)\Psi'(v_1) - \Phi'(v_1)\Psi(v_1)} \{ \Psi'(v_1)\Phi(v) - \Phi'(v_1)\Psi(v) \} \quad (41)$$

$x$  點に作用する彎曲力率は

$$M_x = EI_x \frac{d^2 u}{dx^2} = EI_1 \mu^2 \frac{d^2 u}{dv^2} \left( \frac{x}{l} \right)^4 \dots \dots \dots (42)$$

茲に  $I_1$  = 下端に於ける慣性能率

従來の耐震法に依れば各部の質量に地動の最大加速度を乗じたるだけの水平力が各點に作用すと假定せるを以て之に因て $x$ 點に起る彎曲力率を $M'_x$ とすれば

$$M'_x = \frac{e}{12} EI_1 \mu^2 \left( \frac{x}{l} \right)^4 \quad M'_l = \frac{e}{12} EI_1 \mu^2$$

今  $M_x$  と  $M'_x$  との比を求むれば

$$\frac{M_x}{M'_x} = 12 \frac{\Psi'(v_1)\Phi''(v) - \Phi'(v_1)\Psi''(v)}{\Phi(v_1)\Psi'(v_1) - \Phi'(v_1)\Psi(v_1)} \dots \dots \dots (43)$$

これを  $12\zeta$  と置く

次に従來の方法に依る  $x$  點の縁維應力は

$$f_x = \frac{M'_x}{I_x} r = \frac{M'_1 \left( \frac{x}{l} \right)^4}{I_1 \left( \frac{x}{l} \right)^4} r_1 \left( \frac{x}{l} \right) = \frac{M'_1}{I_1} r_1 \left( \frac{x}{l} \right)$$

強促振動に因る縁維應力は

$$f_x = \frac{M_x}{I_x} r = 12\zeta \frac{M'_1}{I_x} r_1 \left( \frac{x}{l} \right) = 12\zeta \frac{M'_1}{I_1} r_1 \left( \frac{x}{l} \right) = 12\zeta f'_x \dots \dots (44)$$

今  $x$  點と下端即  $x=l$  點との應力の割合を知らんが爲め舊法に依る下端の應力との比を求むれば

$$f_x' = \frac{\omega}{l}, \quad f_x = 12 \zeta \left( \frac{x}{l} \right) \dots \dots \dots (45)$$

次に計算の便宜の爲めに式 (41) 及 (42) を書き換へれば...

$$u = \frac{e}{\Phi(\mu l) \Psi'(\mu l) - \Phi'(\mu l) \Psi(\mu l)} \{ \Psi'(\mu l) \Phi(v) - \Phi'(\mu l) \Psi(v) \} \dots (41')$$

$$M_x = \frac{e E I_1 x^4}{\{ \Phi(\mu l) \Psi'(\mu l) - \Phi'(\mu l) \Psi(\mu l) \} l^4} \{ \Psi'(\mu l) \Phi''(v) - \Phi'(\mu l) \Psi''(v) \} \dots \dots \dots (42')$$

$$\frac{M_x}{M_x'} = 12 \zeta, \quad \frac{f_x}{f_0'} = 12 \zeta \left( \frac{x}{l} \right) \dots \dots \dots (45')$$

茲に  $v = p l \sqrt{\frac{\rho A_1}{E I_1}} \cdot x = \mu x, \quad v_1 = \mu l$

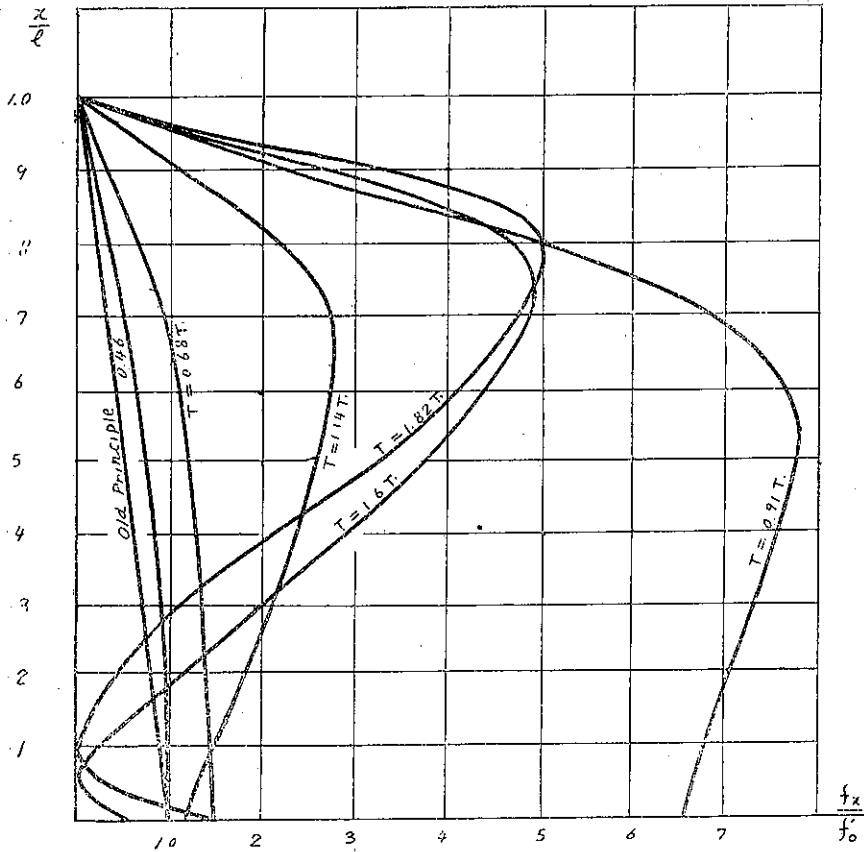
$$\left. \begin{aligned} \Phi(v) &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{v}{(1)^2 2 \cdot 3} + \frac{v^2}{(1 \cdot 2)^2 3 \cdot 4} + \dots \dots \dots \\ \Psi(v) &= \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{v}{(1)^2 2 \cdot 3} + \frac{v^2}{(1 \cdot 2)^2 3 \cdot 4} - \dots \dots \dots \\ \Phi'(v) &= \frac{1}{3} + \frac{v}{1 \cdot 4} + \frac{v^2}{2 \cdot 5} + \dots \dots \dots \\ \Psi'(v) &= -\frac{1}{3} + \frac{v}{1 \cdot 4} - \frac{v^2}{2 \cdot 5} + \dots \dots \dots \\ \Phi''(v) &= \frac{1}{4} + \frac{v}{1 \cdot 5} + \frac{v^2}{2 \cdot 6} + \frac{v^3}{3 \cdot 7} + \dots \dots \dots \\ \Psi''(v) &= \frac{1}{4} - \frac{v}{1 \cdot 5} + \frac{v^2}{2 \cdot 6} - \frac{v^3}{3 \cdot 7} + \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} (46)$$

次に錐體の固有週期を  $T$  地震の週期を  $T_1$  とすれば

$$\begin{aligned} T &= 0.719 l^2 \sqrt{\frac{\rho A_1}{E I_1}} = c l^2 \sqrt{\frac{\rho A_1}{E I_1}} \\ v = \mu x = p_1 l^2 \sqrt{\frac{\rho A_1}{E I_1}} \cdot \frac{x}{l} &= \frac{2\pi}{c} \cdot \frac{T}{T_1} \cdot \frac{x}{l} = 8.8 \frac{T}{T_1} \frac{x}{l} \dots \dots \dots (47) \end{aligned}$$

0 より 16 迄の  $v$  の値に對し式 (46) の 6 級數を計算したる結果は附圖第三に曲線を以て示せるが如し。

更に強促振動に因て各断面に生ずる最大縁維應力と從來の耐震計算法に依る下端のそれとの比即  $f_x/f_0'$  を式 (45') に依て算出したる結果は第十四圖の如し。即一般に應力は舊法に依るものより著しく大にして固有週期と地震週期と接近



第十四圖

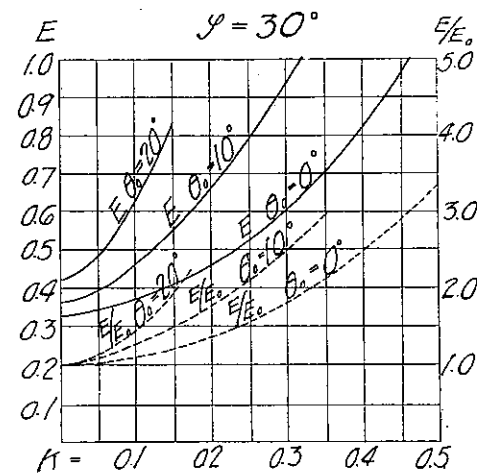
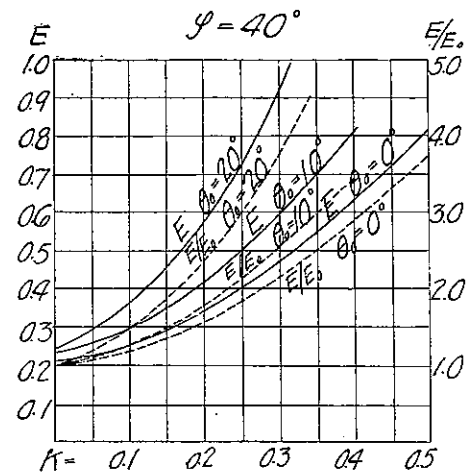
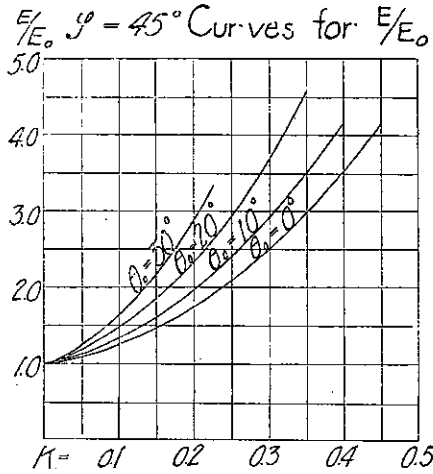
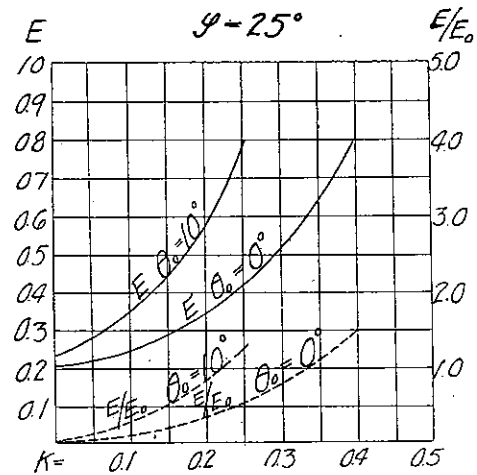
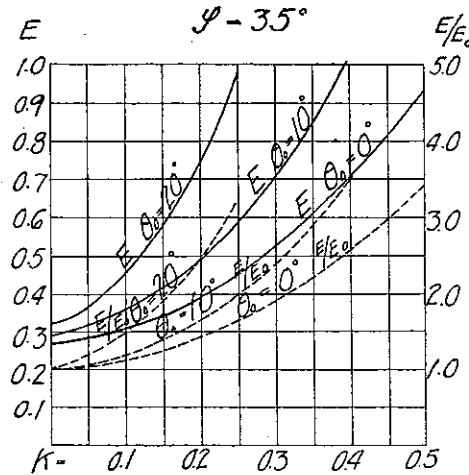
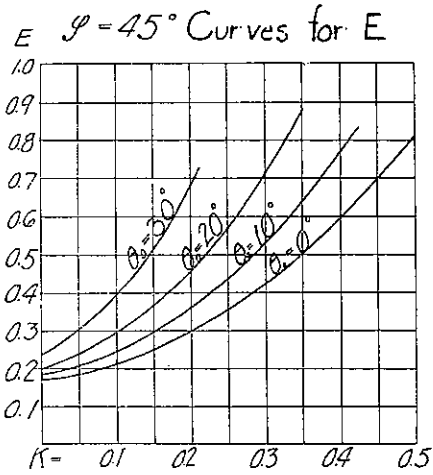
する程愈々甚しきを見る。且つ固有週期 ( $T$ ) が地震の週期 ( $T_1$ ) より著しく小なる間は絶対最大應力は常に最下端に存在するも反對に  $T$  の稍大となるに従ひ最大應力の發生する位置は次第に上昇し  $T=1.82 T_1$  の場合に於ては總高の  $\frac{8}{10}$  割位の高さに於て最大應力を生ず。一方墻體にては  $T=1.5 T_1$  位迄は最大應力は下端に生ずるを以て兩者の中間の性質を有する塔狀構造物に於ては  $T=T_1$  迄は一般に下端最も危険なるも固有週期地震週期より長きに従つて危険點は次第に上昇すべし。 (完)



附圖第一

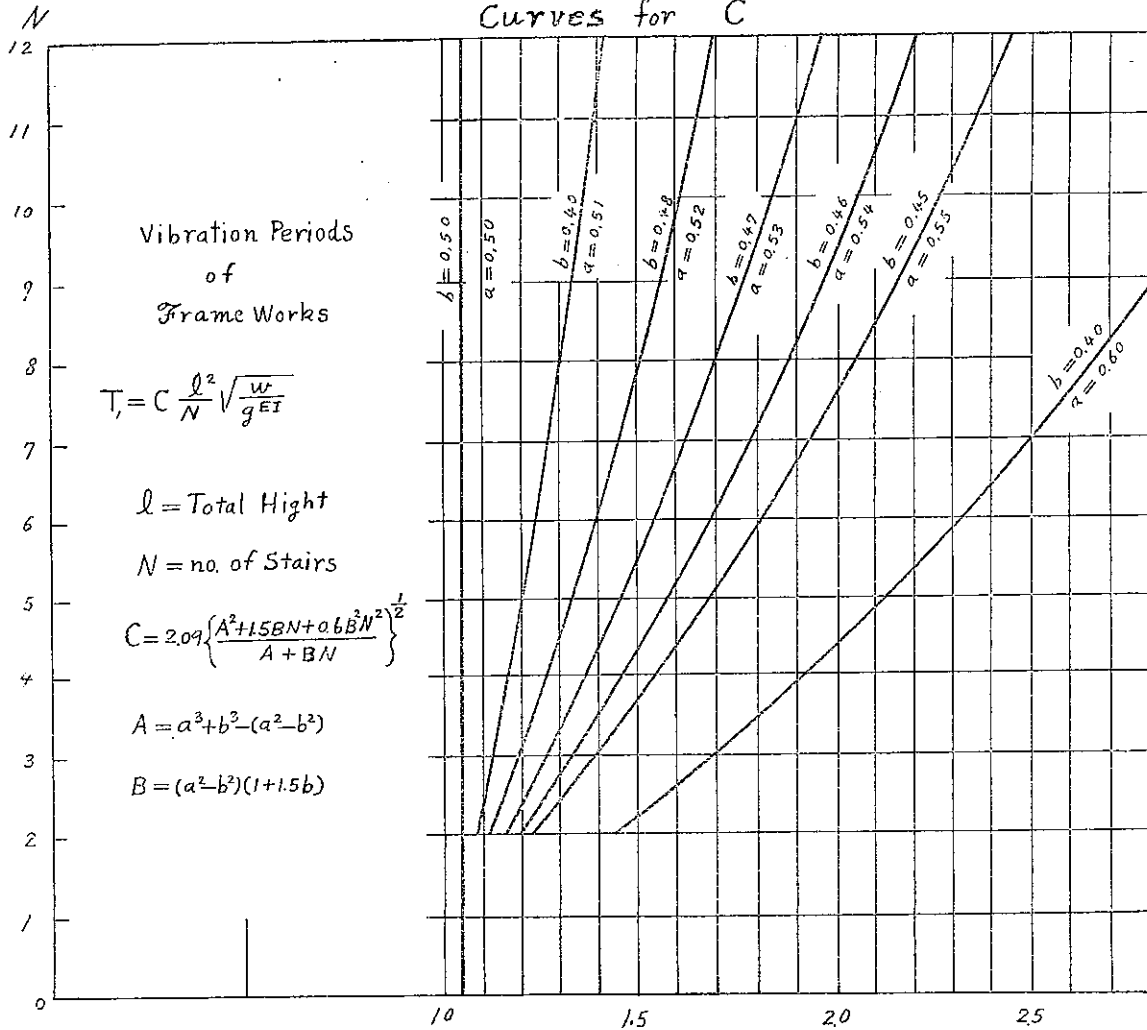
Curves for  $E$  and  $E/E_0$

$$P = \frac{H^2}{2} w(1-k)E$$



# 附圖 第二

Curves for C



Vibration Periods  
of  
Frame Works

$$T_v = C \frac{l^2}{N} \sqrt{\frac{w}{gEI}}$$

$l$  = Total Hight

$N$  = no. of Stairs

$$C = 2.09 \left\{ \frac{A^2 + 1.5BN + 0.6B^2N^2}{A + BN} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$A = a^2 + b^2 - (a^2 - b^2)$$

$$B = (a^2 - b^2)(1 + 1.5b)$$

(土木學百餘年第十卷第五期附圖)

### 附圖第三

