討　　　議

土木學會誌　第十卷第二號　大正十三年四月

地震動に依る構造體の振動時相に就て

（土木學會誌第十卷第一號所載）

會員　工學博士　物　部　長　穗

私は數年來此種の問題に注目して居りまする關係上此度眞島博士の力作を拜見して其創意と努力とに對し深き敬意を表する次第であります、然し先年會誌上に發表した私の研究に關し誤解されたる節もある樣に思ひまするので玆に其等の辯解をいたし倘博士の御研究に關し二三氣付ました點を述べたいと思ひます。

先づ振動週期の計算から云ふと私の算出可能と云ふのは實際上さしたる困難なく算出する方法—即ち公式の如きものにて—を見出す事が出來ると云ふ意味でこれは私の發表した計算法をよく御覽になれば理解さるゝ事と思ひます、又完全な理論から云ふと次の微分方程式を Rigorous に解かなければならぬ

$$\frac{d^2}{dx^2}\left\{EI\frac{d^2u}{dx^2}\right\}-\rho Ap^2u=0$$

$u=f(x)$ ...... Deflection curve,

I and A are variable or functions of x.

この式を Rigorous に解ける場合は Cylinder, Prism, Cone, Wedge, Truncated cone, 及び Truncated wedge 等であつて最後の二つの場合は私が初めて解いたので其結果は容易に振動週期を算出し得る如き公式となつて居る、其他の場合は近似的に解くより方法がない、近似的解法もいくらでもあるが一系統の形狀でも形や寸法の異なる毎に一々方程式を解かねばならぬ樣では今日の技術者は中々實行しない、著者の案出された方法（式(4)）は Uniformly varying section に對しては上記の微分方程式の近似的表現であつて、微分方程式で微區間に分つて考えたものを Finite sections に分けて考えたもので著者が第十圖に示された樣な Mass が數點に集中して居る場合は誠に合理的な方法であると思ふが一つの構造物に就て週期を見出すには先づ單位荷重に對する區間の數だけの Deflection curve を作り然る後に同數の聯立方程式を解きて初めて眞の Deflection curve を得猶更に

$$\left(\frac{2\pi'}{T}\right)^2 = \frac{\int_0^l EI\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)^2 dx}{\int_0^l \rho A u^2 dx}$$　又は

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2u}{dx^2}\right)}{\rho A u}$$

なる式に依てT'を算出しなければならぬので事實計算は中々容易でないと考へます次に彈性體の振動の一般微分方程式卽ち

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + q + \rho A\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (a)$$

のqでありますが彈性體の振動に於ては其ある部分の運動は其兩端の斷面に於て其部分に作用する Force とか Bending moment とかの作用に依るものであつて此等の作用は振動體自身を Medium として作用の原點から傳達さるるか又は自體の彈性力として潛在するもので此等の關係を現はす式は

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho A\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

であつて One end fixed でも Both ends 又は Many points supported であつてもはたまた作用の原點が如何なる運動を爲し如何なる力を働かすとも一向變らぬ關係式である而てqは彈性體の内部に無關係に作用する力で Friction 其他の External force とか人工的の Extraneous force（Fernkraft の事にして何等個體の Medium を介せずして傳達さるゝ力にして重力、電磁氣力の如し）の如きもので從て地震に依る强迫振動の場合に於ては考慮するに及ばぬと思ひます又著者はqを捨てたが爲めに Solution は自己振動になりはしまいかと案んじられて居る樣であるが實は私の方針は餘りに强迫振動に偏して居つて地震の繼續期間が餘り長くない場合は自己振動をも同時に考慮した方が適切でないかと注意されて居りまして自分も暇のあり次第各種の構造物に對して此種の補正計算をやつて見たいと思ふて居る位であります、而して强迫振動の Solution として私の得た式は地震の週期が固有週期（無限の種類の週期を有す）と一致する場合は振動なり、加速度なりが凡て無限大になる樣になつて居ります例へば小著「塔狀構造物の震動並に其耐震性に就て」（土木學會誌第五卷第三號）中墻體の强迫振動の Solution として次の式が出て居ります

$$y=\frac{e}{2}\left\{(\cos mx+\cosh mx)+\frac{1}{1+\cos ml\cosh ml}\times\right.$$

$$[\mathrm{Sin}\ ml\sinh ml\ (\cosh mx-\cos mx)$$

$$\left.-(\cos ml\sinh ml+\sin ml\cosh ml)(\sinh mx-\sin mx)]\right\}f(t)\cdots(22)$$

然るに $1+\cos ml\cosh ml$ は自已振動の場合には必ず零でありまして同時に $\sinh mx-\sin mx$ は $x=0$ の外一般に零にならぬのでyは凡ての固有週期に對して無限大となります、嚢に此の解法は強迫振動に偏して居ると申しましたが (22) の式に前掲小著の ($8'$)式の現はす固有振動の式を其儘附加しても勿論微分方程式を満足するのであつてGeneral solutionとしては附加した方がよいのでありまするが其當時私の考では既に地震が若干時間繼續して振動體の運動に變化のない狀態となつた場合を考えて居るので短期間の地震の場合は強迫の作用を誇張し過ぎたる傾があるのと固有振動は內部摩擦の爲めに漸衰する性質のものであるから此等を同時に存在するものとしなければ其結果算出の地震應力が著しく過大になりはしないかと惧れたのである、而て (22) 式に ($8'$)式を添加し係數を適當に定むるならば非常に復雑な振動を現はす事となります、此の方面に關しては昨秋以來船舶工學の末廣博士が熱心に研究されて居る

次に博士の御研究に就て思ひ付きたる事項を申しますが

(1) **第三節複式倒振子** 振子と云ふものは重力又はこれと同一性質の Fernkraft の Field でなければ成立しないので此場合も倒振子が現實に成立する爲めには必ず Mass に Direct に作用する重力の存在を條件とし其廻轉力率に耐抗する如き週期的の加速度を支點 (第三圖 A又はD) に加へなければならぬ此加速度は常に剪力又は彎曲力率の形で支點から傳達されるもので若しある斷面から上の部分を考ふれば其斷面に作用する剪力、彎曲力率と上部の質量に作用する重力及其部分の實際の運動の加速度とで一定の Equation of motion が成立してそれ以外に Extraneous force を考ふる事が出來ぬのである又倒振子の如き重力の存在を必要條件とし且つ剛體であつて軸が作用する力に依て形を變ずる事なくいつも直線であつて從て各點の加速度は先天的に一定の割合に定まつて居るものと力の如何に依て形を變ずる彈性構造物の振動とは根本的に性質が異つて居る樣に思はれます

(2) **第四節より第九節に至る中軸曲線** 著者は強迫振動の場合でも彈性體は

其固有振動と全く同一性質の曲線形を成すものと考へて居らるゝ様であるがこれは固定點の運動如何に係らず彈性體の中軸線の形は一定種の曲線であると豫め假定する事になると思ひます、即ち著者が等一斷面振動體の曲線として出された式（3）は $x=A\cos(ly)+B\cos(ly)+Ce^{ly}-De^{-ly})$

であつてこの式は計算を進むるに便利な爲めに普通

$$x=A(\cosh ly+\cos ly)+B(\cosh mx-\cos ly)$$
$$+C(\sinh ly+\sin ly)+D(\sinh mx-\sin mx)$$

の如き Symmetric form で現はされ居るものと同一であつて普通の固有振動にても項上に荷重がある場合にても將又强迫振動の場合にも凡て適用し得るので其現はす所の實際の曲線は $A.B.C.D.$ 及 l なる常數に依て定まるのである、例へば固有振動に於ては $A.B.C.D.$ の比即 $A/B.\ C/A.\ D/A.$ と l とを定むる爲めの環境條件は

固定端に於て $x=0$ $\frac{dx}{dy}=0$

自由端に於て $\frac{d^2x}{dy^2}=0$ $\frac{d^3x}{dy^3}=0$

の四であつて $x=0$ なる條件を入れて初めて固有振動の中軸曲線が出で來るのであつて今一の常數 A は自由端に於ける Deflection 即ち

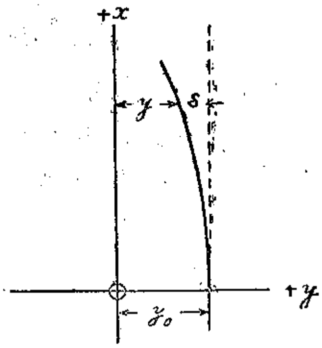
at $y=h$ $x=\delta$

に依て定まるのでこれは單に振幅の大小を示すもので曲線の性質には何等關係がないのである地震の場合には Dynamic equation 即ち $x=f(y,t)$ に於て

at $y=0$ $x=f(t)$

なる函數即固定點の運動が與えられて初めて中軸曲線の性質が定まるのである一方固定點に對する Relative deflection の曲線を考ふるに若し各點の Relative acceleration が固有振動の場合と相似の配置にあるとすれば固有振動の Deflection curve と同性のものとなるがこの前提たる Acceleration の配置の相似と云ふ事は Deflection curve の相似を前提としなければならぬので一方を自明の事實として他を定むる事はどうも困難である樣に思ひます

（3） **本論第一節より第三節迄** 第二節の（5）なる式は普通彈性振動體の微分方程式と見做れ居る所の



$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + C\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad \cdots\cdots \text{(i)}$$

なる式に於て固有振動にても强迫振動にても中軸の Elastic curve の種類は變らぬとの假定を置けば容易に出て來る　先づ

$$y = y_0 - \delta \quad \cdots\cdots \text{(ii)}$$

と置く茲に y_0 は固定點の變位にして δ は同點に對する x 點の相對的變位である i 式に ii 式を插入して

$$\frac{\partial^4 \delta}{\partial x^4} + C\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} = C\frac{d^2 y_0}{dt^2} \quad \cdots\cdots \text{(iii)}$$

然るに δ は x 及 t の函數にして iii 式の Particular solution を求むる事は困難である此に於て若し著者の考へられた樣に强迫振動の場合に於ても Elastic curve は固有振動と全く同種のもので只振幅が時間に依て變ずるのみなりと假定すれば δ は既知の Elastic curve $X = f(x)$ に $T = f(t)$ なる時間の函數を乘じたるもので現はす事が出來る

$$\delta = X \cdot T \quad \cdots\cdots \text{(iv)}$$

iv を iii に入れて $\delta = X \cdot T$ に各項を除し且つ $\frac{d^4 X}{dx^4} = \alpha X$ なる關係を入るれば

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + C' T = \frac{1}{X} \cdot \frac{d^2 y_0}{dt^2} \quad \cdots\cdots \text{(v)}$$

X は既知の函數にして t に無關係なる故に v 式は容易に解く事が出來るが最早强迫振動の性質は失はれ彈性體は週期的の刺激を受けつゝ固有振動を爲し居る事となり從て墻體の最危險點は常に最下端に位する事となり一般の地震の場合に應用する事は困難かと思はれます一體彈性體の强迫振動は中々込み入つた問題で大正六年に私が手を附けた時分には之に關して書いたものは全く見當らなかつた位でありまして合理的に解かんとすれば i 式に於て C の代りに α^2 と置き

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \alpha^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad \cdots\cdots \text{(vi)}$$

之を解く爲めに　$y = X.T$　茲に X は x のみの函數 T は t のみの函數なるも其形は全く未定のもである、これを上式に入れて $X.T$ にて兩項を除せば

$$\frac{1}{X} \cdot \frac{d^4 X}{dx^4} + \frac{\alpha^2}{T} \cdot \frac{d^2 T}{dt^2} = 0 \quad \cdots\cdots \text{(vii)}$$

この微分方程式は次の二の微分方程式と等値である

$$\frac{1}{X}\cdot\frac{d^4X}{dx^4}=\beta^4\ ,\ \frac{\alpha^2}{T}\cdot\frac{d^2T}{dt^2}=-\beta^4\quad \text{但し}\beta\text{は係數}$$

故に(i)の一般積分は

$$y=X,T=\left\{\begin{matrix} A(\cosh\beta x+\cos\beta x)+B(\cosh\beta x-\cos\beta x) \\ +C(\sinh\beta x+\sin\beta x)+D(\sinh\beta x-\sin\beta x)\end{matrix}\right\}\left\{A_1\cos\frac{\beta^2}{\alpha}t+B_1\sin\frac{\beta^2}{\alpha}t\right\}\quad \text{viii}$$

然るに Boundary conditions は非常に複雜であるから y を二の部分に分ち $y=y_1+y_2$ として y_1 も y_2 も viii の形を有するものとし y_1 は

$$at\ x=0\qquad \frac{\partial y_1}{\partial x}=0\ \text{及}\ y_1=f(t)\quad \text{但し}f(t)\text{は固定點の運動}$$

$$x=l\qquad \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}=0\ \text{及}\ \frac{\partial^3 y_1}{\partial x^3}=0$$

等の條件で $A, B, C, D,$ の比及 β を定め y_2 に對しては

$$at\ x=0\qquad \frac{\partial y_2}{\partial x}=0\qquad y_2=0$$

$$x=l\qquad \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2}=0\qquad \frac{\partial^3 y_2}{\partial x^3}=0$$

にて同樣の係數を定め更に $y_1+y_2=y$ に對して Initial condition を入れて他の二の係數を定める然し此等の係數を合理的に定むるには Fourier's series 若しくは Fourier s integral等を用ひねばならぬので左樣簡單には行かぬつまり y_1 はForced vibration であつてこれのみでは Initial conditions を滿足し得ぬので y_2 を附加したる次第なるが y_2は固有振動を現はすもので主振動及無數の副振動を含み其等を適當に組合せて條件を滿足する樣にしなければならぬのである、私が本會誌上に發表したものは振動の始まりを考ふる必要がなかつたのと內應力の極大を知る上に於ては著しい誤差がないと云ふ考から y_1 のみ取つて居るので Initial condition には餘程無理が來て居る次第であるが計算の結果內應力の配置などは餘程實際に近いものが出て居ると考えて居ります、然し前にも述べた樣にy_2 を入れて其主要項のみを取り正式に條件を滿足する樣にしなければ不完全である事は勿論であります

斯の如く强迫振動に於ても彈性體は依然として固有振動と同し形の曲線を取ると云ふ事は兩者の週期が一致する場合か又は極接近して居る時の外一般に成立せぬものであります、同じ會誌の直ぐ後に小著「橋桁の振動並に其の衝擊作用との關係に就て」が載て居るがこれは大正八、九年頃の舊作で其中に桁の振動と週期的

外力との關係を研究して居りますが此場合は桁と外力との週期の一致又は近似に依る振動の累積を算定するのであるから强迫振動の場合も彈性曲線の性質は固有振動のそれと同一であるとして取扱て居る其(12′)式即

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{k}{M}=y=f(t)\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot(\text{ix})$$

に於て

$y=$ 中央に於ける桁軸の變位、$k=$桁の中央に於て單位撓みを生せしむる爲めに中央に加ふべき荷重、$f(t)=$外力と時刻との關係を現はす函數であつて其形は上記（v）式と同一であり眞島博士の出發された微分方程式(5)即ち

$$\frac{d^2y_1}{dt^2}=R^2(y-y_1)+F(h)\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$\text{or}\quad \frac{d^2y_1}{dt^2}+R^2y_1=R^2y+F(h)\frac{d^2y}{dt^2}\text{F}(t)$$

と全く同性質のものであります尙斯樣の場合に於ては桁にても直立彈性體にても其中の一點の振動が明かになれば凡ての點の運動を知る事が出來るので問題は非常に簡單である　例へば ix を解けば

$$y=\sin pt\left\{C_1-\int f(t)\cos pt\,dt\right\}+\cos pt\left\{C_2+\int f(t)\sin pt\,dt\right\}\cdot\cdot\cdot\cdot(\text{X})$$

となり $f(t)$ が如何なる函數であつても微方方程式を解く事が出來る

上式に於て

$$p=\sqrt{\frac{k}{M}}$$

にして p は固有振動の Frequency である尙小著 (p.106) に桁の週期と外力のそれとが多少の相異ある場合に對し外力の變化は單純なる Sine-curve と見做して解いてあるが其結果は

$$y=\frac{Rp_1^2}{p^2-p_1^2}\left\{(1-\frac{p_1}{p})\sin p_1t-\varepsilon\frac{p_1^1}{p}t\cos p_1t\right\}$$

玆に $p_1=$外力の Frequency にして解答の形は著者が(6)乃至(26)式に與へられたものと同一性質のものであります

更に著者の第二節に立戻て見ますると(5)式より發して(18)式に到る迄非常に手數な計算をされて居りまするがこれは彈性曲線の性質が一定不變であると假定さるゝならば其中の一點の振動をさへ明かにすれば凡ての點の振動は自然定て來るのであるから最初より振動中心點Eを取て考ふれば足ると思ひます E點の運動

を採れば

$$I-\frac{C_1C_{11}}{E_1E_{11}}=0 \qquad 從て \qquad F(h)=0$$

(5) なる微分方程式は

$$\frac{d^2y_1}{dt^2}+R^2y_1=R^2y=f(t)$$

で$f(t)$の形如何に係らず Solution が得られ(x)式と全く同一であります

(4)　**本論第四節以下**　第四節に節動振動と云ふのは普通第一、第二・・・等の副振動の事であつて矢張固有振動の場合に主振動に隨伴して起つて居るものであるが其週期は墻體に於ては主振動の 1/6 以下で普通の場合は此副振動と大地震とが共鳴する樣な事はないので私の研究には副振動を凡て捨てゝありますがこれは構造物の週期が3秒以上の場合は稍著しき誤差を生ずるのであります第五節に私の考えたのは同期運動であると云はれて居りまするが私の方法では同期運動に對しては振動がいつも無限に大となる事になつて居るので此點はこの討議の初葉に縷々述べて居ります

此を要する眞島博士の採られた方法は彈性體の固有週期と地震の週期とが近似して居り從て强迫振動の場合の彈性曲線が固有振動の場合のそれと殆んど同一である場合の外は結果に餘程無理が來はしまいかと思ひます著者が斯く假定されたのは剛體にして內力に依て中軸線の性質を變ずる事の出來ぬ倒振子から出發された爲めではないかと察せられます、尤も此方法は構造物と地震とが共鳴する場合の振動の累積、內應力の增大等を解決する上に於て偉大な效力があると思ひます實は私の研究は餘り間口を擴げましたので疎漏の點が澤山ありまするが橋桁の振動に於ては眞島博士と同一の方法で桁と外力の週期の一致に依る振動の累積を解いて居りながら直立構造物に對してはこれを應用する事なく共鳴の場合に對しては其前後の共鳴に近き場合より Extrapolation に依て內應力を定めて居つたのであります

從來少し込入つた問題になると會誌に發表しても眞面目に讀んで吳れる先輩は殆んどなかつた樣な狀態であつたのに學識經驗共に完備して居らるゝ著者がこの重要なる耐震問題に着目されて自ら斯樣な力作を發表された事は學界の爲め極めて有意義な事で以て私共若輩を奮勵努力せしむるに足るものと考へます（完）