論說報告

土木學會誌　第七卷第四號　大正十年八月

吊橋ノ振動並ニ其衝撃作用ニ對スル關係

會員　工學博士　物部長穗

目次

第一節　吊橋ノ振動研究ノ必要

普通ノ吊橋ハ剛性ヲ有セザル鋼索ヲ主體ト爲スヲ以テ頗ル振動シ易キ性質ヲ有ス而シテ活荷重ガ週期的カ又ハ衝撃作用ヲ有スル種類ノモノナル時ハ振動ハ著シク累積スベク爲メニ現今吊橋ノ鐵道橋トシテ使用セラルルモノ皆無ニシテ徑間長大ニ死荷重大ナルモノニ於テハ數線ノ軌道ヲ負載スルモノアリ而シテ本邦ニ於テハ主トシテ長徑間ヲ要スル地點ニシテ木桁橋輕便ナル鋼桁等ヲ架スルニ不利ナル場合ニ輕荷重ニ對シテ使用セラレ從テ其構造モ一般ニ輕易ナルモノニシテ主索其他ノ鐵鋼線以外凡テ木造ナルモノ最モ多ク支柱ノ鋼造ナルモノ之ニ次キ補剛桁ヲモ鋼構桁トナセルモノハ極メテ稀ナリ

從來吊橋ハ其ノ構造上極メテ振動シ易キヲ以テ重大ナル活荷重ニ對シテハ使用ス可カラザルモノニシテ且ツ輕易ナル荷重ニ於テハ振動ノ大小ハ論ズルニ足ラズト做シ爲メニ其振動ハ未ダ科學的ニ研究サレタルヲ聞カズ

然ルニ本邦ニ廣ク使用サルルガ如キ輕便ナル吊橋ニ於テハ適度ナル隊列又ハ數輛ノ荷馬車等ヲ渡過セシムルヲ目的トスルヲ以テ動荷重ハ輕少ナリト雖モ其內週期的ニ變化スル部分又ハ衝撃的ニ作用スル部分ハ割合ニ大ナリ例ヘバ隊列ガ一致セル歩調ヲ以テ渡過スル場合ニハ活荷重ノ殆ンド半ハ週期的ニ變化スベク數輛ノ荷馬車ノ通過ニ際シテモ其重量ノ一部ハ衝撃的ニ作用スベシ而シテ橋ノ固有振動週期ト外力ノ週期トガ相接近スル時ハ共鳴作用ニ依リテ重大ナル影響ヲ曳起スベク加フルニ速度小ナルヲ以テ渡過ニ長キ期間ヲ要シ振動ノ累積ヲ大ナラシムルヲ以テ頗大ナル大吊橋ニ對スル急速ナル列車ノ作用ニ比シテ少シモ劣ル所ナク其ノ爲メニ生ズル衝撃作用 (Impact) ハ頗ル大ナルモノナルベシ

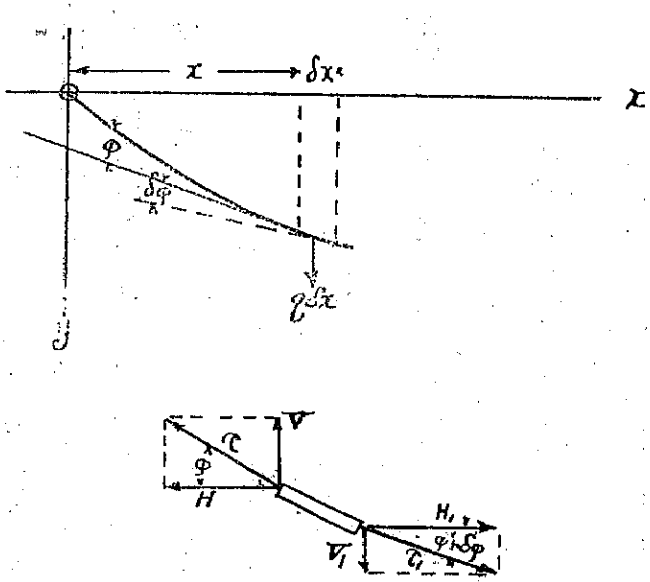
而シテ從來此等吊橋ノ設計ニ當リテハ活荷重ノ量ト主索ノ安全率トヲ大ニ採リテ此危險ニ備ヘタリト雖モ富士川釜口橋ノ如ク設計荷重ノ半ニ過ギザル軍隊ノ渡過ニ依リテ墜落セシハ全ク振動ノ作用ニ依ルモノナルヲ以テ吊橋振動ノ研究ハ

ル振動ノ累積ヲ理論的ニ解キ數多ノ實物ニ就キテ振動ノ檢測ヲ行ヒ其ノ結果ニ由リテ週期公式ノ價値ヲ照査シ且ツ外力ノ强迫作用ヲ說キ更ニ振動ノ衝擊作用ニ對スル關係ヲ論ゼントス

第二節　補鋼構 (Stiffening truss) ヲ有セザル吊橋ノ上下振動 (Vertical vibration)

鋼索ニ依リテ吊架サルル吊橋ニ於テ補鋼構ヲ有セザル場合ニ重力ノ作用ヲ無視スル時ハ其ノ上下振動ハ大體張ラレタル索ノ振動トシテ之ヲ取扱ヒ得ルヲ以テ從來既ニ物理學者ニ依リテ研究セラレタル所ナリ然レドモ吊橋ノ靜力學的平衡ノ形態ハ既ニ重力ノ作用ヲ前提トスル所ナルヲ以テ張リタル糸ノ理論ヲ直チニ此レニ適用スル事能ハザルヤ勿論ナリ

今吊橋ノ主徑間ノミヲ考ヘ兩端ノ塔上ニ於テ固定セラレ塔ノ剛性ハ極メテ大ナルモノト考フ



第一圖

索ノ左端ヲ坐標ノ原點ニ採リx軸ヲ水平ニy軸ヲ鉛直ニ下方ニトル（第一圖參照）靜力的平衡狀態ニ於ケル索ノ張力ニ比シ振動ノ爲メノ變化ハ微少ナルヲ以テ先ヅ本節ニ於テハ此ノ變動ヲ無視シ且ツ荷重ハ水平單位長ニ對シテ殆ンド一樣ニ分布スルモノト假定シ之ヲqト置ク

τ＝x點ニ於ケル索ノ張力

H＝同　上　τノ水平分力

V＝同　上　〃　鉛直分力

φ＝同　上　索ノ水平軸ニ對スル傾斜

τ_1＝$x+\delta x$點ニ於ケル索ノ張力

H_1＝同　上　τ_1ノ水平分力

V_1＝同　上　τ_1ノ鉛直分力

$\varphi_1=\varphi+\partial\varphi=x+\partial x$ 點ニ於ケル索ノ水平軸ニ對スル傾斜

今微區間 ∂x ノ運動ヲ考フルニ

鉛直外力ノ合成力$=V_1+q\partial x-V$

然ルニ $V=H\tan\varphi,\qquad V_1=H_1\tan\varphi_1,\qquad H_1=H$

$$\varphi_1=\varphi+\partial\varphi,\qquad \tan\varphi_1=\tan(\varphi+\partial\varphi)=\tan\varphi+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\partial x$$

∴ 鉛直外力ノ合成力 $=H\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}\partial x+q\,\partial x$

此合成力ニ依リテ ∂x ガ運動ヲ爲ス時ハ

Force = Mass × acceleration

$$\text{or}\qquad H\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\partial x+q\,\partial x=\frac{q}{g}\partial x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\qquad\cdots\cdots\cdots\ (a)$$

$$\text{or}\qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\frac{q}{H}=\frac{q}{gH}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\qquad\cdots\cdots\cdots\ (1)$$

是即チ吊橋ノ振動ヲ現ハス一般的微分方程式ナリ此方程式ヲ解ク爲メニ y ヲ二ツノ部分 y_1 及ヒ y_2 ニ分チ y_1 ハ x ノミノ函數ニシテ y_2 ハ x 及ビ t ノ函數ナリト考フ　即チ

$$y=y_1+y_2\qquad\therefore\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{d^2 y_1}{dx^2}+\frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2},\qquad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2}$$

故ニ方程式(1)ハ $\dfrac{d^2 y_1}{dx^2}+\dfrac{\partial^2 y_2}{\partial x^2}+\dfrac{q}{H}=\dfrac{q}{gH}\cdot\dfrac{\partial^2 y_2}{\partial t^2}$

即チ此方程式ヲ滿足スル爲メニハ次ノ二微分方程式ヲ滿足スレバ可ナリ

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}+\frac{q}{H}=0 \qquad \cdots \qquad (b)$$

及ヒ

$$\frac{\partial^2y_2}{\partial x^2}=\frac{q}{gH}\cdot\frac{\partial^2y_2}{\partial t^2} \qquad \cdots \qquad (c)$$

(b)式ヲ解ケハ　$y_1=-\frac{q}{2H}x^2+c_1x+c_2$

然ルニ　$x=0$ 及ヒ $x=l$ ニ於テ y_1 ハ常ニ零ナルヲ以テ y_1 モ亦然リ故ニ

$$c_2=0, \qquad c_1=\frac{q}{2H}l$$

故ニ

$$y_1=\frac{q}{2H}(lx-x^2) \qquad \cdots \qquad (b')$$

若シ　$x=l$ ニ於テ索端ガ $y=+a$ ニ固定サルル場合ハ

$$c_1=\frac{2Ha+ql^2}{2lH}$$

次ニ微分方程式(c)ヲ解クニ

$$y_2=\left(A\cos\frac{mx}{l}+B\sin\frac{mx}{l}\right)(A_1\cos kt+B_1\sin kt)$$

茲ニ

$$\left(\frac{q}{gH}\right)^2k^4=\left(\frac{m}{l}\right)^4 \qquad \therefore\ k=\pm\left(\frac{gH}{q}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{m}{l}$$

然ルニ両端ハ如何ナル場合ニ於テモ不動ナルヲ以テ

$x=0$　及ヒ　$x=l$　ニ於テ　$y_2=0$

$$\therefore\ A=0, \qquad \sin\frac{ml}{l}=0, \qquad \therefore\ m=\pm n\pi \qquad \therefore\ k=\left(\frac{gH}{q}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{n\pi}{l}$$

而シテ時ノ原點ヲ y_1 ノ極大ナル時ニトレバ

$B_1=0$ 而シテ $BA_1=C_n$ ト置ケバ

$$y_1=C_n\sin\frac{2\pi x}{l}\cos\left(\frac{gH}{q}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{2\pi}{l}t \quad \cdots\cdots (c')$$

故ニ

$$y=\frac{q}{2H}(lx-x^2)+C_n\sin\frac{2\pi x}{l}\cos\left(\frac{gH}{q}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{2\pi}{l}t \quad \cdots\cdots (2)$$

及ヒ

$$T=\frac{2l}{n}\sqrt{\frac{q}{gH}} \quad \cdots\cdots (3)$$

即チ重力ヲ無視シタル場合ニ H ナル張力ヲ以テ水平ニ張ラレタル索ノ振動ト同一ノ週期ヲ有ス然ルニ q ナル等布荷重ニ因ル水平張力 H ハ

$$H=\frac{ql^2}{8h}$$

ナルヲ以テ

$$T=\frac{4\sqrt{2}}{n}\sqrt{\frac{h}{g}} \quad \cdots\cdots (3')$$

茲ニ n ハ任意ノ整數ニシテ斯クノ如キ場合ハ多數ノ固有ノ振動週期ヲ有ス

第三節　鋼索張力ノ變動ヲ考フル場合

然ルニ吊橋ノ如ク死荷重極メテ大ナルモノニ於テハ振動ニ際シテ張力ノ變動ニ依ル位置勢力ノ變化ハ頗ル重大ナルモノナリ而シテ主振動即チ索ノ凡テノ點ガ同一ノ向キニ運動スル場合ニハ索ノ形狀ハ一定スルヲ以テ張力ノ變動ニ伴フ影響ヲ算定スルコトヲ得ベシ

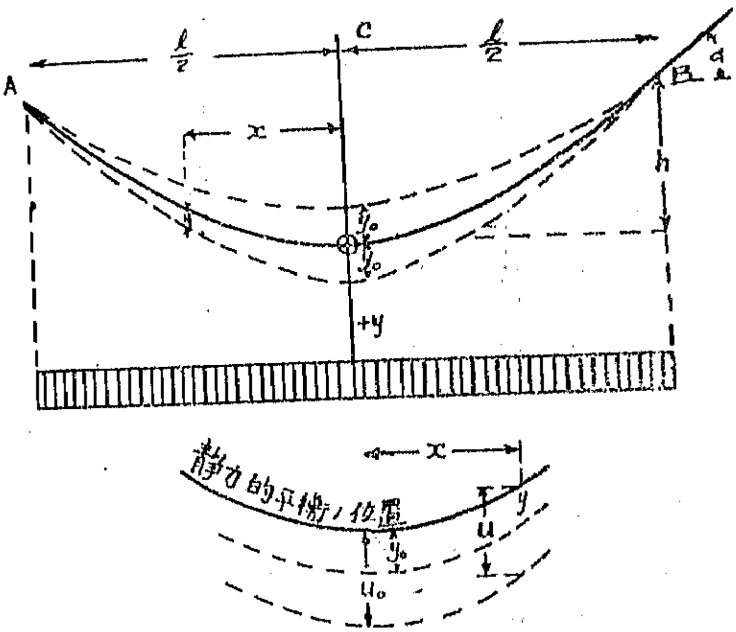
前節ト同樣荷重ヲ等布ナリト假定シ索ハ兩端ノ塔項 AB ニ於テ固定サレ AB ハ一水平線上ニ存スルモノト考フ（第二圖

參照)床上ニ成ル余死活荷重ヲ W' トシ $\frac{W'}{g}$ ナル質量ガ索上ニ水平距離ニ對シテ等布ニ掛ルヲ以テ索自身ノ質量ガ水平單位長ニ對シ $m_1 + \frac{W'}{g} = m$（茲ニ m_1 ハ索ノ單位長ノ質量）ナリト考フルモ振動ヲ論ズル上ニ於テハ支障ナシ此場合 m_1 ハ水平單位距離ニ對シテ不均等ナルモ $\frac{W'}{g}$ ニ比シ頗ル小ナルヲ以テ全體トシテ m ハ水平ニ等布ナリト考フルヲ得ベク從テ索ノ形ハ鉛直線 OC ヲ軸トスル抛物線ナリ

而シテ索ニ作用スル張力ハ中央 O ニ於テ最小ニシテ兩端ニ大ニシテ

$$\tau_{center} = \tau_{end} \times \cos\alpha$$

ナリ然レドモ之レヲ不均一ト考フル時ハ問題ノ解決困難ナルヲ以テ全體ノ平均ノ張力ガ全長ニ亘リテ一樣ニ作用スルモノト考フ



第二圖

今 Generalized co-ordinate トシテ抛物線ノ鉛直軸 OC ヨリノ水平距離 x ト靜力的平衡ノ位置 (AOB) ヨリノ鉛直ノ下リ y トヲ採用ス振動ニ際シ張力 τ 及ビ索ノ微區間 ds ノ最大變化ヲ $\delta\tau$ 及ビ δds トスレバ振動體ノ有スル運動ノ勢力 E_K ハ

$$E_K = \sum \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2}\int m\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 dx$$

振動ハ單一ナル主振動ノミヲ考フルヲ以テ

$$y = u\sin pt \qquad \therefore \quad \frac{\partial y}{\partial t} = u p \cos pt$$

索ハ凡テノ位置ニ於テ抛物線ナルヲ以テ

$$u \doteqdot u_0\left\{1-\left(\frac{2}{l}\right)^2 x^2\right\}$$

$$\therefore \quad = E_k = \frac{m}{2}(p\cos pt)^2\int u_0^2\left\{1-\left(\frac{2}{l}\right)^2 x^2\right\}dx = \frac{m}{2}(p\cos pt)^2 u_0^2\,\frac{7}{12}\,l$$

次ニ位置ノ勢力E_pハ

$$E_p = \frac{1}{2}\int_0^l \partial\tau\cdot\partial ds = \frac{1}{2}\,\partial\tau\cdot\partial s$$

然ルニ索ノ長サ s ハ Sag ヲ h トシテ

$$s = l\left\{1+\frac{2}{3}\left(\frac{2h}{l}\right)^2-\frac{2}{5}\left(\frac{2h}{l}\right)^4+\cdots\cdots\right\}$$

然ルニ振動ノ最下ノ位置ニ於テ Sag ハ $h+u_0$ ニシテ索ノ長サ $s+\partial s$ ハ

$$s+\partial s = l\left\{1+\frac{8}{3l^2}(h+u_0)^2-\frac{32}{5l^4}(h+u_0)^4+\cdots\cdots\right\}$$

故ニ

$$\partial s = l\left\{\frac{8}{3l^2}(2hu_0+u_0^2)-\frac{32}{5l^4}(4h^3u_0+6h^2u_0^2+4hu_0^3+u_0^4)+\cdots\cdots\right\} \doteqdot \frac{16hu_0}{l}\left\{\frac{1}{3}-\frac{8}{5}\left(\frac{h}{l}\right)^2\right\}$$

故ニ

$$E_p = \frac{\partial\tau}{2}\cdot\frac{16h}{l}u_0\left\{\frac{1}{3}-\frac{8}{5}\left(\frac{h}{l}\right)^2\right\} \doteqdot \frac{8}{3}\cdot\frac{hu_0AE}{l^2}\cdot\frac{16hu_0}{l}\left\{\frac{1}{3}-\frac{8}{5}\left(\frac{h}{l}\right)^2\right\} = \frac{(16hu_0)^2AE}{6l^3}\left\{\frac{1}{3}-\frac{8}{5}\left(\frac{h}{l}\right)^2\right\}$$

茲ニAハ索ノ斷面積ニシテEハ其彈性率ナリ

然ル時ハ

$$\partial s = \frac{s\partial\tau}{AE} \quad \therefore \quad \partial\tau \doteqdot \frac{16}{3}\cdot\frac{hu_0AE}{l^2}$$

然ルニ最大位置ノ勢力ト最大運動勢力トハ相等シキヲ以テ

$$\frac{m}{2}p^2u_0^2\frac{7}{12}l=\frac{(16hu_0)^2AE}{6l^2}\cdot\frac{1}{3}, \quad \therefore \quad p^2=\frac{12\times 16^2}{63}\cdot\frac{h^2AE}{l^4m}$$

故ニ

$$T=\frac{2\pi}{p}=0.6\frac{l^2}{h}\sqrt{\frac{m}{AE}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4)$$

今少シク精確ニ計算スレバ

$$T\doteqdot 0.6\left(1+\frac{h^2}{l^2}\right)\frac{l^2}{h}\sqrt{\frac{m}{AE}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4')$$

然レドモ普通ノ吊橋ニ於テハ h/l ハ $1/10$ 内外ナルヲ以テ h^2/l^2 ハ 1 ニ對シテ無視シテ可ナリ

第四節　補剛構側徑間等ノ振動ニ對スル影響

次ニ補剛構(Stiffening truss)ヲ有スル吊橋ノ上下振動ヲ論ゼンニ此場合吊材(Hangers)ノ伸縮ヲ無視スル時ハ索ト構トノ運動ハ全ク同一ニシテ恰カモ索自身カ構ノ剛性ヲ併有スルモノト考フル事ヲ得而シテ索ノ撓ミ曲線ハ略二次拋物線ニシテ構ノ夫レハ三次拋物線ナルヲ以テ兩者結合セルモノノ撓ミノ曲線ハ其ノ中間ノモノタルベシト雖モ今索ノ位從ノ動力ハ構ニ比シテ稍大ナルト撓度微小ナル時ハ構ノ撓ミモ亦近似的ニ二次拋物線ヲ以テ現ハシ得ヘキヲ以テ

$$=u_0\left\{1-\left(\frac{2}{l}\right)^2x^2\right\}$$

$$E_p,\ \text{cable}=\frac{(16h)^2}{2l(3l^2)}AEu_0^2\sin^2 pt \quad (E=\text{索ノ彈性率})$$

$$E_p\ \ \text{truss}=\frac{E_1I}{2}\int\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2dx \quad (E_1=\text{補剛構材料ノ彈性率})$$

然ルニ

$$y=u\sin pt, \qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2u}{dx^2}\sin pt=-u_0\sin pt\,\frac{8}{l^2}$$

故ニ

$$E_p \text{ truss} = \frac{64}{l^4}\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{E_1 I}{2} u_1 \sin pt$$

故ニ

$$E_p = \frac{(16)^2}{l^3}\left\{\frac{h^2AE}{18} + \frac{IE_1}{16}\right\}(u_1 \sin pt)$$

$$\therefore\quad p^2 = \frac{24}{7lm}\cdot\frac{(16)^2}{l^3}\left\{\frac{h^2AE}{18} + \frac{IE_1}{16}\right\}$$

故ニ

$$T = 0.6\,l^2\sqrt{\frac{m}{h^2AE + \frac{9}{8}IE_1}} = 0.6\,l^2\sqrt{\frac{1}{\frac{h^2AE}{m} + \frac{IE_1}{m}}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

次ニ側徑間（Side spans）ノ影響ヲ見ルニ補剛桁及ヒ牀ハ中央徑間ト全ク連絡ナキヲ常トシ唯主索ノミガ支柱上ノ支點（輾子又ハ滑面）ヲ通シテ連絡ス而シテ支點ニ於ケル摩擦大ニシテ荷重小從テ索ノ伸長小ナル時ハ中央徑間ノ索ノ伸長ハ側徑間ニ傳達セス反對ニ支點ノ摩擦小ニ索ノ伸長大ナル時ハ側徑間ニ傳ハルヲ以テ若シ主徑間ノミ荷重ヲ載スル時ハ主索ノ伸長ハ自己ノ伸長ニ側索ノ影響ヲ加ヘタルモノナルヲ以テ中央徑間ノ撓度ハ中央徑間ノミヲ考フル場合ヨリ大ニシテ從テ振動ニ際シテE_kハ著シク增大シ爲メニ振動週期ヲ延長セシム即チ滑面支點ニシテ活荷重大ナラザル場合ニハ側徑間ノ影響ヲ參酌スル必要ナク輾子支點ニテ活荷重大ナル時ハ側徑間ノ影響ヲ生ズ而シテ此影響ヲ近似的ニ採算スルニハ中央徑間索ノ有效彈性率E_eヲ次ノ如ク取レハ可ナリ

$$E_e = E\frac{l}{l + l_1 + l_2}$$

茲ニlハ中央徑間l_1及ヒl_2ハ二側徑間トス

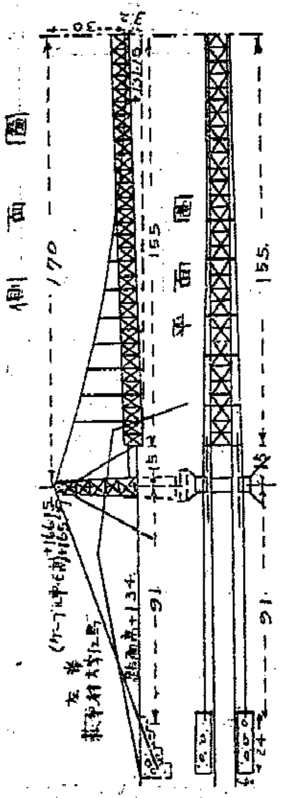
前節及本節ニ得タル結果ニ綜合シ吊橋中央徑間ノ上下振動週期ヲ與フル公式ヲ求ムルニ

$$T=0.6\,l^2\sqrt{\frac{1}{\frac{h^2AE}{m}+\frac{IE_1}{m}+\frac{0.36\,l^4}{h}}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(6)$$

茲ニ l=中央徑間(呎), h=中央ニ於ケル Sag(呎), $m=\frac{1}{g}$(長一呎當リノ總荷重)

E=索ノ彈性率, E_1=剛構材料ノ彈性率, A=索ノ斷面積

I=剛構材料ノ慣性能率, 單位ハ呎, 听, 秒トス



第三圖

今一例ヲ取リテ上式諸項ノ輕重ヲ見ルニ例トシテ用フル荻原橋ハ三重縣多氣郡荻原村ニ於テ宮川ニ架セルモノニシテ岩井藤太郎氏ノ設計ナリ(工學第三號)

$l=340'$, $h=30'$, 幅員$=8'.5$, 死荷重$=30^{\text{lb}}/□'$, 活荷重$=20^{\text{lb}}/□'$

主索ハ坩堝鋼索ニシテ十九本線六ツ撚中心麻ニシテ周圍六吋、麻ヲ除ク斷面積二・一七平方吋ヲ有ス活荷重滿載ノ場合ニ於テ一呎當リノ質量ハ

$$m=\frac{1}{g}(30+20)\times 8.5=13.2^{\text{lb}}$$

索ノ彈性率ハ其ノ材料ノ夫レヨリ著シク少ニ普通ノ商品ニテハ約四割位ノモノナリ 故ニ

$E=30\times10^6\,{}^{\#}/□''$ ナル鋼ヲ以テ製造セシ索ノ彈性率ハ約

$$E=0.4\times30\times10^6=12\times10^6\,{}^{\text{lb}}/□''$$

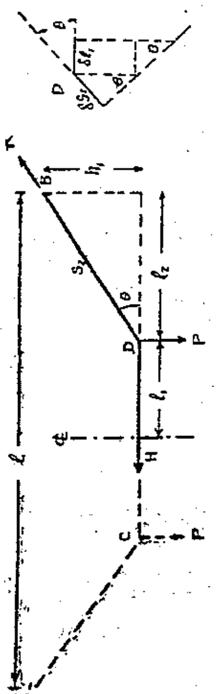
$$\therefore\ \frac{h^2AE}{m}=\frac{\overline{30}^2\times\frac{2\times2.17}{144}\times12\times10^6\times144}{13.2}=3.56\times10^9$$

次ニ補剛桁ハ檜材ニシテ桁ノ高サ六呎上臥材ハ $6^{寸}\times 7^{寸}$ 下臥材ハ $7^{寸}\times 9^{寸}$ ナリ

故ニ
$$I=2(0.7\times 0.9\times \overline{2.4}^2+0.6\times 0.7\times \overline{3.6}^2)=18.16\,(\mathrm{ft})^4$$

$$E_1=144{,}000{,}000\ {}^{\mathrm{lb}}/_{\square'}$$

$$\therefore\ \frac{IE_1}{m}=\frac{18.16\times 144\times 10^7}{13.2}=1.98\times 10^8$$



第四圖

$$\frac{0.36\,l^4}{h}=\frac{0.36\times \overline{340}^4}{30}=1.51\times 10^8$$

一般ニ第一項即チ主索ノ張力ノ變化ノ影響主要ナルモノニシテ他ノ諸項ハ凡テ補正項タルニ過ギス即チ本邦ノ輕易ナル吊橋ニ使用スル補剛桁ハ橋ノ主振動ヲ輕減スル上ニ充分ナル效果ナシ

第五節　斜吊線ヲ有スル場合ノ上下振動

吊橋ニ於テハ主索ヲ助クル爲メニ多クノ斜吊線ヲ用フルモノアリ其或者ハ支柱頂ヨリ下臥材ニ逹シテ止マリ或者ハ臥材ニ添フテ左右ノ斜線連絡スルモノアリ（第四圖參照）圖ニ於テ C 及 D 點ニ各 P ナル荷重ヲ掛ケタル場合 C 又ハ D 點ノ下リ (δ) ヲ求ムルニ

$$T=P\,\mathrm{cosec}\,\theta,\qquad H=P\cot\theta,\qquad s_2=h_1\,\mathrm{cosec}\,\theta,\qquad l_1=\frac{l}{2}-h_1\cot\theta$$

今索ノ斷面積ヲ A 彈性率ヲ E トスレバ s_2 及 l_1 ノ伸長ハ

$$\delta s_2=\frac{T}{AE}h_1\,\mathrm{cosec}\,\theta=\frac{Ph_1}{AE}\mathrm{cosec}^2\,\theta$$

$$\delta l_1 = \frac{H}{AE}\left(\frac{l}{2} - h_1 \cot\theta\right) = \frac{P}{AE}\cot\theta\left(\frac{l}{2} - h_1 \cot\theta\right)$$

$$\therefore \quad \delta = \delta s_1 \operatorname{cosec}\theta + \delta l_1 \cot\theta = \frac{P}{AE}\left(h_1 \operatorname{cosec}^3\theta + \frac{l}{2}\cot^2\theta - h_1 \cot^3\theta\right)$$

然ルニ

$$\operatorname{cosec}^3\theta = \left(\frac{s_2}{h_1}\right)^3, \qquad \cot^2\theta = \left(\frac{l_2}{h_1}\right)^2, \qquad \cot^3 = \left(\frac{l_2}{h_1}\right)^3$$

$$\therefore \quad \delta = \frac{P}{AE}\cdot\frac{1}{h_1^2}\left(s_2^3 + \frac{l\,l_2^2}{2} - l_2^3\right)$$

然ルニ振動體ノ最大位置ノ勢力ト最大運動ノ勢力トハ相等シキヲ以テ

$$E_p = \frac{1}{2}P\delta, \qquad E_k = \frac{1}{2}\cdot\frac{P}{g}v^2$$

今D點ノ振動ヲ　$y = \delta \sin pt$　ト置ケバ

$$v = \delta p \cos pt \qquad \therefore \ \text{最大ノ} \ v = \delta . p$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}P\delta = \delta^2 p^2 \frac{P}{2g}, \qquad p^2 = \frac{g}{\delta}$$

$$T = \frac{2\pi}{p} = 2\pi\sqrt{\frac{\delta}{g}}$$

$$\therefore \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{P}{gAE}\cdot\frac{1}{h_1^2}\left(s_2^3 + \frac{l\,l_2^2}{2} - l_2^3\right)} \qquad \cdots\cdots \qquad (7)$$

若シ AC, BD, 等ノ單獨ナル斜吊線ナル時ハ

$$\delta l_1 = 0$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{P}{gAE}\cdot\frac{s_2^3}{h_1^2}} \quad \cdots\cdots \quad (7')$$

若シ此等ノ多數ヲ有スル場合ニハ

$$T=2\pi\sqrt{\frac{1}{h_1^2\left\{\sum\frac{gAE}{P}\cdot\frac{1}{\left(s_2^3+\frac{l l_2^2}{2}-l_2^3\right)}+\sum\frac{gAE}{P}\cdot\frac{1}{s_2^3}\right.}} \quad \cdots\cdots \quad (8)$$

尚ホ主索及ヒ補剛構ト併用スル時ハ

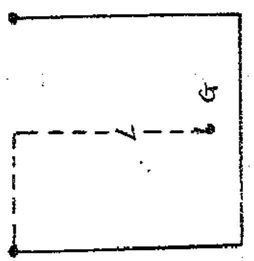
$$T=0.6\,l^2\sqrt{\frac{1}{\frac{h^2AE}{m}+\frac{IE_1}{m}+0.09\left(\frac{h_1 l^2}{\pi}\right)^2\left\{\sum\frac{gAE}{P}\cdot\frac{1}{\left(s_2^3+\frac{ll_2^2}{2}-l_2^3\right)}+\sum\frac{gAE}{P}\cdot\frac{1}{s_2^3}\right\}}} \quad \cdots \quad (9)$$

第六節　吊橋ノ横振動（水平補剛構ヲ有セサル場合）

(I)　兩主索面カ並行ナル場合

此場合全振動系ノ重心ヲGトシ索兩端ノ支點ヨリノ鉛直距離ヲLトスレバ振動ハ單一ナル振子ト同様ニシテ

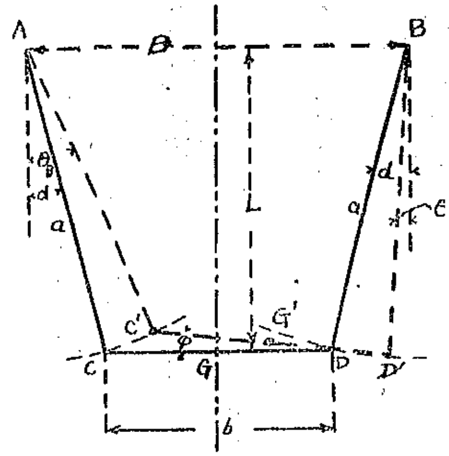
$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad \cdots\cdots \quad (10)$$



第五圖

(II)　兩索面ガ傾斜スル場合 (Cradle suspension bridge)

長徑間ノ吊橋ニ於テハ索ハ支點ニ於テ二條ノ距離最大ニシテ中央ニ近キ所程互ニ接近スル如ク置カレタリ是ハ一ハ橋ノ幅員ニ比シ支柱ノ高サ大ナル場合其横方向ノ强度ヲ增ス爲メナルト二ハ吊橋ノ横振動ヲ輕減セン爲ナリ此場合兩索ハ之ヲ正面ヨリ見レバ鉛直線ニ少シク傾キ殆ンド直線狀ヲナス（第六圖參照）



第六圖

牀ハ索ニ比シテ重量頗ル大ナルヲ以テ牀ガ水平ニ震動スル時其ノ運動ノ範圍ガ小ナル限リC又ハD點ハA又ハB點ヲ中心トスル圓周上ニ運動ス而シテ平衡ノ位置ニ於テハ牀ノ重量ハ二索ニ均等ニ分布シ振動ニ際シテモ其ノ振幅ハ幅員　$CD(=b)$　ニ比シテ微小ナルヲ以テ矢張リ均等ニ傳ハルモノト考フルヲ得

θ_1 = 左索平面ノ鉛直ニ對スル傾斜角

θ_2 = 右索平面ノ鉛直ニ對スル傾斜角

φ = 牀面ノ水平ニ對スル傾斜角

θ_1 θ_2 ト φ トノ關係ハ

$$b\cos\varphi = B - a\sin\theta_1 - a\sin\theta_2 \quad \cdots\cdots \text{A}$$

$$b\sin\varphi = a\cos\theta_1 - a\cos\theta_2 \quad \cdots\cdots \text{B}$$

今全系ノ重心ヲG全質量ヲM、Gノ速度ヲvトスレバ全系ノ有スル運動ノ勢力ハ

$$E_k = \frac{I}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{M}{2}v^2$$

茲ニ

I = Mass moment of inertia,　$\dot{\varphi} = \frac{\partial\varphi}{\partial t}$

次ニ平衡位置ニ於ケル位置ノ勢力ヲ零トシ圖ノ如キ位置ニ於ケル位置ノ勢力ヲ求ムルニ索ノ重量ヲ無視スレバGガG'ニ移リシ爲メニ生ズルモノナリ又ハC及ビDニ在リシ$\frac{M}{2}$ガC'及ビD'ニ移リタルモノト考フルモ同一ニシテ

$$E_p = \frac{M}{2}g\,(a\cos\alpha - a\cos\theta_1) + \frac{M}{2}g\,(a\cos\alpha - a\cos\theta_2) = +Mg\,a\cos\alpha - \frac{M}{2}ga\,(\cos\theta_1 - \cos\theta_2) \quad \cdots\cdots \text{C}$$

然ルニθ_1又ハθ_2トαトノ差ハ僅少ナリ故ニ

$$\cos\theta_1 = \cos\alpha + \left(\frac{\partial\cos\theta_1}{\partial\theta_1}\right)_\alpha \delta\theta_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\cos\theta_1}{\partial\theta_1}\right)_\alpha \delta\theta_1^2 + \cdots\cdots\cdots$$

$$\cos\theta_2 = \cos\alpha + \left(\frac{\partial\cos\theta_2}{\partial\theta_2}\right)_\alpha \delta\theta + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\cos\theta_2}{\partial\theta_2}\right)_\alpha \delta\theta_2^2 + \cdots\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad \cos\theta_1 + \cos\theta_2 = 2\cos\alpha - \sin\alpha\,(\delta\theta_1 + \delta\theta_2) - \frac{1}{2}\cos\alpha\,(\delta\theta_1^2 + \delta\theta_2^2) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad \mathrm{D}$$

同様ニ

$$\sin\theta_1 + \sin\theta_2 = 2\sin\alpha + \cos\alpha\,(\delta\theta_1 + \delta\theta_2) - \frac{1}{2}\sin\alpha\,(\delta\theta_1^2 + \delta\theta_2^2) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad \mathrm{D}'$$

故ニAヨリ

$$B - b\cos\varphi = a\,(\sin\theta_1 + \sin\theta_2) = 2a\sin\alpha + a\cos\alpha\,(\delta\theta_1 + \delta\theta_2) - \frac{a}{2}\sin\alpha\,(\delta\theta_1^2 + \delta\theta_2^2)$$

$$\fallingdotseq B - b\left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right) = 2a\sin\alpha + \frac{b}{2}\varphi^2$$

然ルニ$\delta\theta$トφトハ同程度ノ少量ナルヲ以テφノ一乘ノミヲ採ル場合ハ

$$\delta\theta_1 + \delta\theta_2 = 0 \qquad \text{or} \qquad \delta\theta_1 \fallingdotseq -\delta\theta_2$$

ニシテE_yハ常數トナル故ニ二乘迄ヲ採リテ

$$\delta\theta_2 = -\delta\theta_1 + \frac{\tan\alpha}{2}\left(\overline{\delta\theta_1}^2 + \overline{\delta\theta_2}^2\right) + \frac{b}{2a}\varphi^2$$

然ルニB及Dニ依リ

$$b\sin\varphi \fallingdotseq b\varphi = a\,(\cos\theta_1 - \cos\theta_2) = a\sin\alpha\,(\delta\theta_2 - \delta\theta_1) + \frac{a}{2}\cos\alpha\left(\overline{\delta\theta_2}^2 - \overline{\delta\theta_1}^2\right)$$

一乘ノミヲ取レバ

此値ヲ(ろ)ノ式ニ挿入シテ

[illegible]

主要項ノミヲトレバ

[illegible]

一方(11)及(14)ニ由リ

[illegible]

然ルニ運動ノ方程式ハ

[illegible]

然ルニ

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\theta}_1} = \frac{4Ia^2}{b^2}\sin^2\alpha\,\dot{\theta}_1 + Ma^2\cos^2\alpha\,\dot{\theta}_1$$

$$\therefore\quad \frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\theta}_1} = \frac{4Ia^2}{b^2}\sin^2\alpha\,\ddot{\theta}_1 + Ma^2\cos^2\alpha\,\ddot{\theta}_1$$

又

$$\frac{\partial E_p}{\partial \theta_1} = \frac{M}{2}a\,g\,\frac{b+2a\sin^3\alpha}{b\cos\alpha}\,2\delta\theta_1 \qquad (\because\ \partial\delta\theta_1 = \partial\theta_1)$$

$$\therefore\quad \left(\frac{4Ia^2}{b^2}\sin^2\alpha + Ma^2\cos^2\alpha\right)\delta\ddot{\theta}_1 + Mag\,\frac{b+2a\sin^3\alpha}{b\cos\alpha}\,\delta\theta_1 = 0$$

$$\therefore\quad T = 2\pi\sqrt{\frac{4Ia^2\sin^2\alpha + Ma^2b^2\cos^2\alpha}{ab}\times\frac{Mgb\cos\alpha}{Mg(b+2a\sin^3\alpha)}}\quad \cdots\ \cdots\ \cdots$$

然ルニαガ小ナル時ハ

$$a\cos\alpha = L,\qquad \sin\alpha = \alpha,\qquad \text{及ヒ}\qquad I = Mr^2$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\sqrt{\cos\alpha + \frac{4\alpha^2r^2}{b^2}}\quad \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ (11)$$

即チ兩索面ノ傾斜ハ週期ニ著シキ影響ヲ與ヘズ今狄原橋ニ就テ之ヲ計算スルニ索面ノ傾斜ヲ考ヘテ横振動ノ週期ヲ求ムルニ

$$B = 16',\qquad b = 10',\qquad \sin\alpha \doteqdot \frac{3}{32},\qquad a = 32'$$

$$L \doteqdot 30',\qquad \frac{I}{M} = 16,\qquad r = 4',$$

$$\therefore\quad T = 2\pi\sqrt{\frac{30}{32.2}}\sqrt{1 - \frac{1}{200} + \frac{4\times16}{100\times100}}$$

即チ索面ノ傾斜ハ週期ニ影響スル事極メテ微少ナリ

次ニ著名ナル吊橋ニ於ケル索面ノ傾斜ヲ表示スレバ

橋名	中央徑間	Sag	$\tan\alpha$
Footbridge at Easton Park over Lehigh river	280′		$\frac{1}{5}$
Highway B. at Saane at Freiburg	870′	63′	$\frac{1}{8}$
Foot B. at Passau over Donau	418′	19′	$\frac{1}{17}$
Brooklin B. over East River at New York	1,600′		$\frac{1}{5}$
Highway B. at Bucaramanga at New-Granada	184′		$\frac{1}{30}$
Highway B. at Langenargen	237′	29.′6	$\frac{1}{5.7}$
(荻　原　橋)	(340′	30′	$\frac{1}{10}$)

次ニ索面傾斜(α)ノ大小ニ依ル横振動ノ難易ヲ研究センニ同一ノ角變位 $\delta\theta$ ヲ生スル爲メニ要スル力ノ大小ハ $\delta\theta$ ナル角變位ニヨリテ得ル位置ノ勢力ノ大小ニ依ル今角變位 $\delta\theta$ ニ依ル位置ノ勢力ノ變化 δE_p ヲ求ムルニ

索面並行ナル場合　$\delta E_p = \dfrac{M}{2}\,a\,g\,\overline{\delta\theta_1}^2$

索面傾斜セル場合　$\delta E_p' = \dfrac{M}{2}\,a\,g\,\dfrac{b+2a\sin^3\alpha}{b\cos\alpha}\,\overline{\delta\theta_1}^2$

$$\therefore\ \frac{\delta E_p'}{\delta E_p} = \frac{b+2a\sin^3\alpha}{b\cos\alpha} = \left(1+\frac{2a}{b}\sin^3\alpha\right)\left(1-\frac{\alpha^2}{2}\right)^{-1} \fallingdotseq 1+\left(\frac{2a}{b}\alpha+\frac{1}{2}\right)\alpha^2$$

今 $a = 30'$, $b = 10'$ トシテ

$$\alpha \qquad = \frac{1}{10}, \qquad \frac{1}{5}, \qquad \frac{1}{3}$$

$$\frac{\partial E'_p}{\partial E_p} = 1+\frac{1.1}{100}, \qquad 1+\frac{6.8}{100}, \qquad 1+0.28$$

即チ振動ヲ輕減スルニ有效ナル爲メニハ α ハ $\frac{1}{3}$ 以上ナルヲ要ス

次ニ風荷重ニ對スル横ノ剛性ヲ見ルニ荻原橋ニ於テ鉛直曝露面積ヲ長一呎ニツキ 2×3.5□′トシ一平方呎當リ十五听ノ風ヲ受クル時ハ

$$長一呎當リ水平風壓 = 7\times15 = 105^{lb}$$

$$全長ニ對スル風壓\ P = 105\times310 = 32{,}550^{lb}$$

今 W ヲ以テ全鉛直荷重トスレバ

$$W = 30\times8.5\times310 = 79{,}000^{lb}$$

今 P ノ爲メニ水平ニ δ_0 タケ撓ミ索面ハ鉛直ニ對シ θ_0 ナル傾斜ヲ爲セリトスレバ

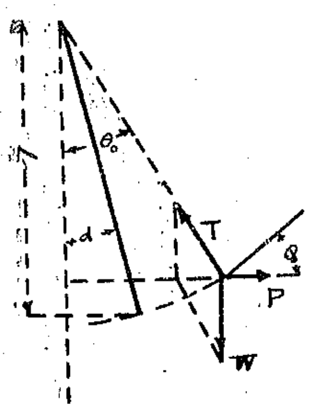
$$\tan\theta_0 = \frac{32{,}550}{79{,}000} = 0.41$$

$$\delta_0 = h\,(\tan\theta_0 - \tan\alpha) = 0.31\,h$$

若シ索面鉛直ナリトスレバ

$$\delta_0' = L\tan\theta_0 = 0.41\,h$$

即チ索面ヲ十分ノ一ダケ傾斜セシメタル爲メニ風力ニ依ル撓ミヲ約四分ノ一ダケ輕減セリ而シテ何レノ場合ニ於テモ撓ミハ極メテ大ナルモノニシテ



第七圖

從ツテ振動甚ダシク水平補剛桁ヲ有セザルニ於テハ到底渡過シ得ズ要スルニ吊橋ノ水平ノ剛度ハ主トシテ水平補剛構ニヨルモノニシテCradle式ハ主振動ヲ輕減スル上ニ於テ著シキ效果ナシ

第七節　水平補剛構ヲ有スル場合ノ横振動

吊橋ガ水平補剛構ヲ有スル場合其横變位ニ依リテ生ズル位置ノ勢力ハ重心Gノ變位ニ依ルモノト水平構ノ彈性變形ニ依ルモノトノ和ナリ

單位等布荷重ニ依ル構ノ撓ミ曲線ハ　$y=\dfrac{1}{24EI}\left\{2lx^3-x^4-l^3x\right\}$

之ニ因ル位置ノ勢力ハ　$E_p'=\dfrac{EI}{2}\displaystyle\int\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2dx$

重心Gノ位置ノ變化ハyニ依テ定マルヲ以テα小ナル時ハ

$$\delta\theta\fallingdotseq\frac{y}{a},\qquad\therefore\quad\dot{\theta}=\delta\dot{\theta}=\frac{1}{a}\cdot\frac{\partial y}{\partial t},\qquad(y=u\sin pt)$$

$$E_p''=\text{Const.}+\frac{M}{2}\cdot\frac{g}{a}\cdot\frac{h+2a\sin^2\alpha}{h\cos\alpha}\,y^2\fallingdotseq\text{Const.}+\mu\frac{Mg}{2a}y^2$$

故ニ全勢力ハ　$E_p=\text{Const.}+\dfrac{EI}{2}\displaystyle\int\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2dx+\mu\frac{Mg}{2a}\int y^2dx$

運動ノ勢力ハ　$E_k=\left(\dfrac{2I}{h^2}\sin^2\alpha+\dfrac{M}{2}\cos^2\alpha\right)\left(\dfrac{\partial y}{\partial t}\right)^2$

故ニ　$\dfrac{d}{dt}\cdot\dfrac{\partial E_k}{\partial\dot{y}}+\dfrac{\partial E_p}{\partial y}=0$　ニ於テ

$$\frac{\partial E_k}{\partial\dot{y}}=\left(\frac{4I}{h^2}\sin^2\alpha+M\cos^2\alpha\right)\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial y}=\frac{EI}{2}\int\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2dx+\mu\frac{Mg}{a}\int y\,dx$$

今 δy ナル微變位ニ對スル E_p ノ變化ヲ求ムルニ

$$\delta E_p=EI\int\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2\delta y}{\partial x^2}+\mu\frac{Mg}{a}\int\delta y dx=EI\left\{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial\delta y}{\partial x}-\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\delta y+\int\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}\delta y dx\right\}+\mu\frac{Mg}{a}\int\delta y\ dx$$

今水平構ノ兩端ヲ單支ナリトスレバ

$$\frac{d^2y}{dx^2}=0,\qquad \delta y=0$$

故ニ

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial\delta y}{\partial x}-\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\delta y=0$$

故ニ

$$\frac{\partial E_p}{\partial y}=EI\int\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}dx+\mu\frac{Mg}{a}\int y\,dx$$

故ニ δx ナル微區間ノ運動ノ方程式ハ

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+\mu\frac{Mg}{la}y+\left(\frac{4I}{b^2l}\sin^2\alpha+\frac{M}{l}\cos^2\alpha\right)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0$$

然ルニ此微分方程式ヲ解ク事ハ煩雜ナルヲ以テ單ニ振動週期ヲ求ムルタメニハ Barling's ノ Hypothesis ニ依リ δx 微區間ノ有スル總勢力ハ不變ナリト假定スレバ

$$\delta E_p=\mathrm{Const.}+\frac{EI}{2}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2\delta x+\mu\frac{Mg}{2la}y^2\delta x$$

$$\delta E_k=\left(\frac{2I}{b^2l}\sin^2\alpha+\frac{M}{2l}\cos^2\alpha\right)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2\delta x$$

$$y=u\sin pt$$

故ニ $$\frac{\partial \delta E}{\partial t}=0, \qquad \therefore \frac{\partial \delta E_k}{\partial t}+\frac{\partial \delta E_p}{\partial t}=0,$$

故ニ $$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)^2=\left\{\left(\frac{4I}{b^2l}\sin^2\alpha+\frac{M}{l}\cos^2\alpha\right)p^2-\mu\frac{Mg}{al}\right\}\frac{u^2}{EI}$$

今αヲ小ナリトスレバ $\frac{4I}{b^2l}\sin^2\alpha \doteqdot 0,\quad \cos^2\alpha \doteqdot 1,\quad \mu \doteqdot 1$

$$\therefore \frac{d^2u}{dx^2}=-\sqrt{\frac{\frac{M}{l}p^2-\frac{Mg}{al}}{EI}}\times u$$

$u=u_0\sin\frac{\pi x}{l}$ ト置ケバ

$$\left(\frac{\pi}{l}\right)^2=\sqrt{\frac{\frac{M}{l}\left(p^2-\frac{g}{a}\right)}{EI}}$$

故ニ $$p=\sqrt{\left(\frac{\pi}{l}\right)^4\frac{EIl}{M}+\frac{g}{a}}$$

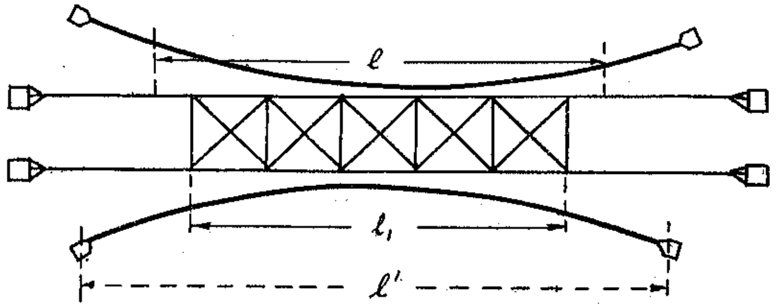
$$\therefore T=\frac{2}{\pi}l^2\sqrt{\frac{1}{\frac{lEI}{M}+\left(\frac{l}{\pi}\right)^4\frac{g}{a}}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (12)$$

次ニ水平耐風索ヲ併有スル場合ノ振動週期ヲ求ムルニ（第八圖參照）

l = 主索ノ徑間，　l_1 = 水平構ノ徑間，　l' = 耐風索ノ徑間

E_1, I_1 等ハ水平構ニ對スルモノ

E', b', A' 等ハ耐風索ノ彈性率 Sag ノ斷面積



第八圖

然ル時ハ

$$T = \frac{2}{\pi} l^2 \sqrt{\frac{1}{\frac{l_1 E_1 I_1}{M} + \left(\frac{l}{\pi}\right)^4 \frac{g}{a} + 1.12 \frac{E' A' b'^2 l'}{M}}} \quad \cdots\cdots \quad (13)$$

第八節　週期的外力ニ因ル振動ノ累積

活荷重ガ橋梁ノ一端ヨリ前進スル時ハ動荷重及其重心並ニ週期的外力ノ大サ及ヒ作用點等ハ刻々移動ス今全荷重及ヒ週期的外力ガ共ニ中央ニ集中シテ作用スルモノト假定スレバ運動ノ微分方程式ハ

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{M} y = \frac{p}{M} \sin p_1 t$$

茲ニ　y = 徑間中央ノ鉛直變位，　M = 總荷重ノ質量，　p = 週期的外力ノ最大値

k = 桁ノ中央ニ於テ單位撓ミヲ生ゼシムル爲メニ中央ニ加フヘキ荷重

p = 中央徑間ノ主固有振動ノ Frequency，　p_1 = 週期的外力ノ Frequency

然ル時ハ

$$y = \frac{1}{p^2 - p_1^2} \cdot \frac{p}{M} \left(\sin p_1 t - \frac{p_1}{p} \sin pt \right)$$

茲ニ

$$p = \sqrt{\frac{k}{M}}$$

今　$p = p_1(1+\varepsilon)$　ト置キテ一振動間ノ半振幅ノ增大ヲ求ムレバ

$$\delta Y = \frac{p}{M(p^2 - p_1^2)} \varepsilon \cdot \frac{p_1^2}{p} \cdot \frac{2\pi}{p_1} \doteqdot \frac{\pi p}{M p_1^2} \left(1 - \frac{3}{2} \varepsilon \right)$$

今 ε ノ値ガ $+\varepsilon_0$ ヨリ $-\varepsilon_0$ ニ達スル間ニ n 回振動セリトスレバ最初零ナリシ半振幅ハ

第九節　釜口橋ノ振動

釜口橋ハ靜岡縣富士郡芝富村地內ニ於テ富士川ノ一分派上ニ架セルモノニシテ其ノ大要ハ第九圖ニ示ス如ク設計荷重ハ一平方尺當リ死荷重一三•六听活荷重一五•〇听ニシテ輕易ナル構造ナリ而シテ本橋梁ハ大正七年十月二十七日夜濱松步兵第四十八聯隊第三大隊ノ行軍ニ際シテ墜落セルモノナリ軍隊ハ三列縱隊ニシテ墜落セル瞬間ニ橋上ニ在リシ兵ハ將校一名兵卒六十五名ニシテ一人當リ重量二十三貫（但シ體重十五貫行軍武裝約八貫トス）トスレバ總活荷重ハ約

$$L \fallingdotseq \frac{23}{0.12} \times 66 = 12{,}650^{\text{lb}}$$

一平方尺當リ

$$\frac{L}{180 \times 9} = 7.8^{\text{lb}}$$

ニシテ設計活荷重ノ約二分ノ一位ニ過ギズ然ルニ右岸支柱ノ挫折ニ依リテ墜落ノ災ヲ生シタルハ軍隊ノ渡橋ニ因リ週期的外力ノ作用シテ振動ヲ累積セシメタルニ依ルモノノ如シ支柱ハ略圖ニモ明ナルガ如ク地面上ノ高サ約二十尺ニシテ末口七寸ノ丸太主柱ト同寸法ノ斜支柱トヨリ成リ斜支材ハ主柱ヲ少シク切リ缺キテ合セぼーるとニテ締メ付ケタリ今墜落當時ノ荷重ニ依リテ索ニ生ズル最大張力ヲ求ムルニ

徑間 $= 195^{\text{尺}}$,　幅員 $= 9^{\text{尺}}$,　Sag $= 15^{\text{尺}}$,

死荷重 $= 13.6^{\text{lb}}/\square'$,　活荷重 $= 7.8^{\text{lb}}/\square'$

$$T = \frac{wl^2}{8h}\sqrt{1+16\frac{h^2}{l^2}} = \frac{\frac{9}{2}\,21.4 \times \overline{195}^2}{8 \times 15}\sqrt{1+16\left(\frac{15}{195}\right)^2} = 13{,}800^{\text{lb}}$$

支柱頂ノ鉛直反力 $= 2T\cos 73^\circ \fallingdotseq 8{,}000^{\text{lb}}$

今滑面（鐵板ト索トノ）ノ摩擦係數ヲ〇•三トシテ柱頂ニ作用スル水平力 F ヲ求ムルニ

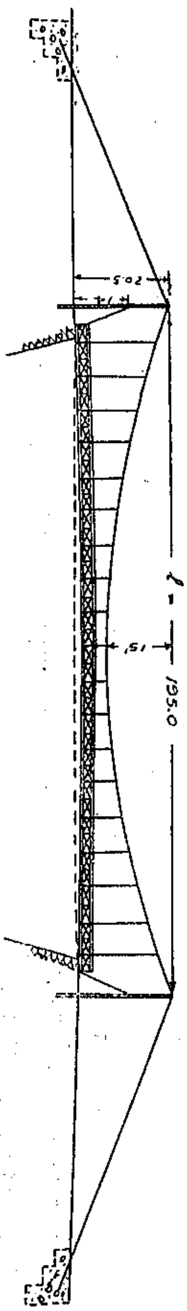
$$F = 0.3 \times 8{,}000 = 2{,}400^{lb}$$

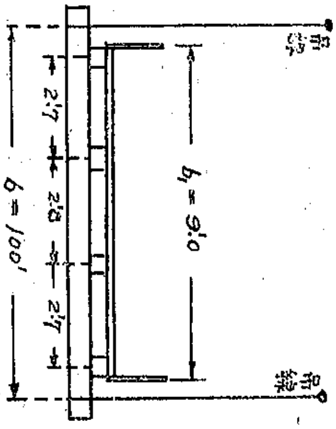
依テB點ニ作用スル彎曲力率ヲ求ムレバ

$$BM = 2{,}400 \times 9.5 \times 12 = 274{,}000^{in-lb}$$

今B點ノ有效直徑ヲ七吋トスレバ最大緣維應力fハ

第九圖



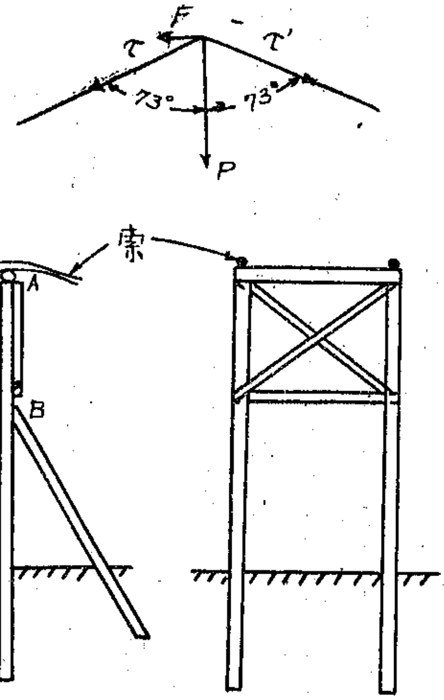


應力計算書

吊橋部分徑間	ℓ = 195'0
吊線ト吊線トノ距離	ℓ' = 6'0
橋桁ニ於ケル吊線ト吊線ノ距離	b = 10.0
橋板長（橋幅）	b_1 = 9.0
橋梁計算徑間	= 180.0
木塔高橋台面ヨリ	= 20.5
サツグ	V = 150.0
橋反リ	= 2.0
靜荷重（一平方尺ニ付）	D = 13'6
動荷重	L = 15'0
木材保安係数（一平方吋ニ付封度）	f = 150'0

$$f = \frac{M}{I} y = \frac{274{,}000}{\frac{3.14 \times 7^4}{64}} \times 3.5 = 912^{lb}/□''$$

然ルニ墜落當時檢査セルニB點附近ニ於テハ何等腐朽ノ跡ナク良質ナル杉材ナルヲ以テ一平方吋ニツキ三千听以上ノ緣



第十圖

維耐力ヲ期待シ得ヘク即チ靜力的ニハ破折ノ理由ナキモノニシテ當時振動ノ累積即チ衝擊作用ノ大ナリシヲ想像スルニ足ル依テ次ニ該橋ノ振動週期ヲ算定センニ一主索ハ八番鐵線九拾本ヨリ成リ純斷面積一・八九平方吋ヲ有ス 橋面ノ長サハ百八十尺ニシテ補剛桁ヲ有セス

長一尺當リノ質量 $= \frac{1}{32.2}(108.8+70) = 5.56^{\text{lb}}$

索ノ斷面積 $= 2\times1.89^{\square''}$

鍊鐵ノ彈性率 $= 28\times10^{6}\,{}^{\text{lb}}/_{\square''}$

故ニ上下振動ノ週期ハ公式(4)ニ依リ

$$T = 0.6\,l^2\sqrt{\frac{m}{AEl^2}} = 0.6\times\overline{195}^2\sqrt{\frac{5.56}{\frac{2\times1.89}{144}\times28\times10^6\times144}} \fallingdotseq 0.36\text{秒}$$

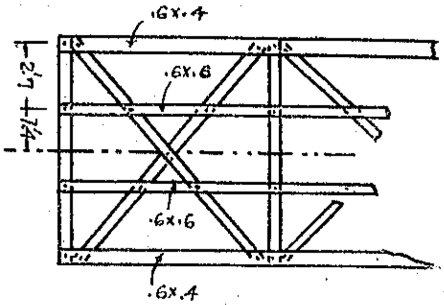
側徑間ノ索ノ伸長ヲ參酌スレバ

$$E' = \frac{195}{195+2\times83}E = \frac{195}{361}E$$

故ニ

$$T = 1.36\times0.36 = 0.49\text{秒}$$

然ルニ九十本ノ鐵線ヲ撚リ合セタルモノノ彈性率ハ個々ノモノノ夫レヨリ若干低キヲ以テTハ上ニ算出セルモノヨリ稍大ナルベシ然ルニ兵ノ歩調ハ並足ニテ一分間ニ百十七歩ナルヲ以テ 其週期ハ約〇・五一秒ニシテ 兩者共鳴シ易キモノナリ



第十一圖

次ニ横振動ヲ考フルニ水平桁ノ慣性能率ハ

$$I = 2\left(0.6\times0.4\times4.1^2 + 0.6\times0.6\times1.4^2\right) = 9.5\,(\text{尺})^4$$

公式12) ニ依リ

$$T = \frac{2}{\pi}\,l_1^2\sqrt{\frac{1}{\frac{l_1E_1I_1}{M}+\left(\frac{l}{\pi}\right)^4\frac{g}{a}}}$$

E_1 = 杉材ノ彈性率 $\fallingdotseq 1\times10^6$ lb/□″

$l_1 = 180$ 尺, $\frac{M}{l_1} = 5.56^{\text{lb}}$

$$T = \frac{2}{\pi}\,180^2\sqrt{\frac{1}{\frac{9.5\times10^6\times144}{5.56}+\left(\frac{180}{3.14}\right)^4\frac{32.2}{16}}} = 1.09\ \text{秒}$$

即チ上下振動ノ約二倍ニ當ルヲ以テ互ニ助長スル性質ヲ有ス即チ二百尺内外ノ徑間ヲ有スルモノハ其上下振動ノ週期ハ通常ノ歩調ニ近似セルモノナルヲ以テ隊伍ヲ成シテ渡橋スルハ最モ危險ナリ徑間三百尺位ニテモ剛度大ナル補剛構ヲ有スル場合ニハ其ノ週期ハ矢張リ歩調ニ近キモノナルヲ以テ注意ヲ要スベシ

第十節 富士川橋ノ振動

本橋梁ハ當時本邦最大ノ吊橋ニシテ中央徑間五百四十一呎ヲ有シ靜岡縣富士郡芝富村字芝川ニ於テ富士川本流ヲ横斷セルモノナリ其築造ハ芝川所在ノ四日市製紙株式會社ガ工場用原料燃料等ヲ運搬ノ目的ヲ以テ輕便軌道ヲ敷設センガ爲メ獨立經營セル所ニシテ設計荷重ハ普通一般ノ吊橋ニ比シ頗ル大ニシテ兩岸ノ支柱ハ鋼製構柱ナリ（附圖第一參照）

中央徑間 = 541′, 左右側徑間各々 = 151′, 中央ノ Sag = 35′

支柱ノ高サ $= 45'$,　　幅員 $= 9'$,　　死荷重(長一尺當リ) $= 2\times 187^{\text{lb}}$

主索ハ八番鋼線五百本ヲ撚リ合セタルモノニシテ振レ止メハ八番鋼線二百本ヲ撚リ合セタルモノ補剛桁ハ深サ四呎三分ニシテ上下臥材ハ $0.5'\times 0.8'$ ノ檜材ナリ

鋼索ノ彈性率ハ其ノ材料タル鋼ノソレヨリ著シク低ク普通吊橋索道等ニ用フル丸鋼線ヲ撚リ合セタルモノニ於テハ材料鋼ノ約四割位ノモノナリ即チ $12\times 10^{7}\ ^{\text{lb}}/_{\square''}$ 位ナリ

(I) 上下振動

公式(6)ニ依リ
$$T = 0.6\,l^2\sqrt{\frac{1}{\dfrac{h^2AE}{m}+\dfrac{IE_1}{m}+\dfrac{0.36\,l^4}{h}}}$$

然ルニ
$$m = \frac{2\times 187}{32.2} = 11.6^{\text{lb}}, \qquad A = 2\times 10.306^{\square''}$$

$$\therefore\ \frac{h^2AE}{m} = \frac{\overline{35}^2\times 2\times 10.306\times\dfrac{1}{144}\times 12\times 10^{7}\times 144}{11.6} = 2.62\times 10^{10}$$

補剛桁ノ慣性能率ハ構ノ高サ四呎三分臥材ハ凡テ 0.5×0.8 ナルヲ以テ
$$I = 4\times 0.5\times 0.8\times\left(\frac{4.3}{2}\right)^2 = 7.4\ (\text{ft}^4), \qquad E = 1{,}000{,}000^{\text{lb}}/_{\square''} = 144\times 10^{7}/_{\square'}$$

$$\frac{IE_1}{m} = \frac{7.4\times 144\times 10^{7}}{11.6} = 0.92\times 10^{8}, \qquad \frac{0.36\times\overline{541}^4}{h} = 8.87\times 10^{8}$$

故ニ
$$T = 0.6\times\overline{541}^2\sqrt{\frac{1}{2.62\times 10^{10}+0.92\times 10^{8}+8.87\times 10^{8}}} = 1.11\ \text{秒}$$

即チ括弧内ノ分母ノ第一項ガ主要ナルモノニシテ他ノ項ノ影響ハ微小ナリ第一項ノミヲ採レバ $T = 1.13$ 秒 トナル而

シテ本橋ニ於テハ支柱上ニ輾子ナク且ツ動荷重微小ナル場合ニ於テハ支點ニ於テ索ハ滑動セサルヲ以テ側徑間ノ影響ハ受ケサルモノト考ヘテ可ナリ

(II)　横振動

水平耐風構ノ　$I = 67.8$ (呎⁴)，　水平耐風構ノ　$E = 144 \times 10^{6}$ lb/□′

水平振レ止メ索一本ノ斷面積 $= 4.12$ □″，　水平振レ止メ索一本ノ　$E = 12 \times 10^{6} \times 144$ lb/□′

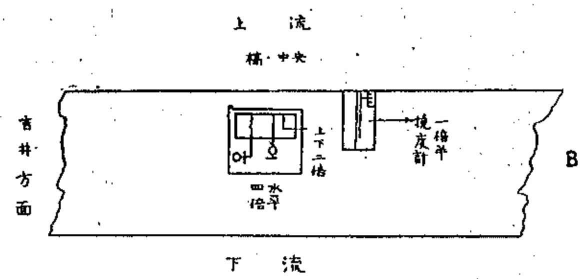
$$T = \frac{2}{\pi} l^2 \sqrt{\frac{1}{\frac{E_1 I_1}{m} + \left(\frac{l}{\pi}\right)^4 \frac{g}{a} + 1.12 \frac{h'^2 A' E'}{m}}}$$

$$= \frac{2}{3.14} \times \overline{541}^2 \sqrt{\frac{1}{\frac{67.8 \times 144 \times 10^{6}}{11.6} + \left(\frac{541}{3.14}\right)^4 \frac{32.2}{35+5} + 1.12 \frac{\overline{50}^2 \times 4.12 \times 12 \times 10^{6}}{11.6}}} = 1.25\ 秒$$

即此場合ハ水平振レ止メ索ノ力最モ大ニシテ長徑間ノ吊橋ニシテ之ヲ缺ク者ハ極メテ横ニ振レ易ク風力ニ對シテモ危險ナルモノナリ尤モ此結果ハ本邦ニ普通用フル如キ幅員拾尺以下ニシテ水平構ノ慣性能率モ亦小ナル場合ニ對スルモノナリ

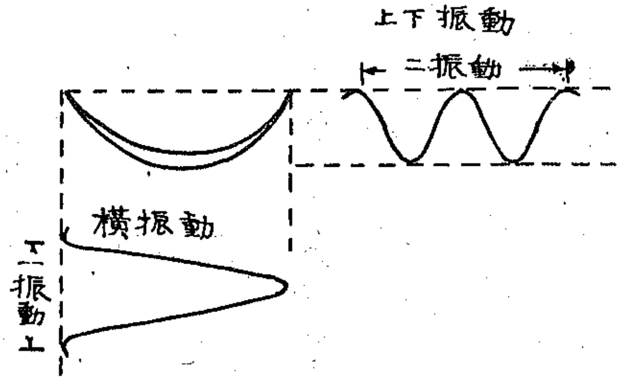
(III)　振動ノ實測

本橋ノ振動實測ハ神田橋吉井橋等ト同シク震災豫防調査會ノ事業トシテ大森理學博士ノ檢測セラレタル所ニシテ大森式自記振動計ヲ用ヒ著者モ亦之ニ參加シタルモノナリ依テ大森博士ノ許可ヲ得テ玆ニ其成績ノ一部ヲ參表スルモノナリ檢測ハ大正八年二月十九日午前十時ヨリ午後二時ニ亘リテ施行セシモノニシテ適當ナル活荷重ノ準備不能ナリシ爲メニ撓度ノ實驗ヲ行ハズ唯各方向ノ振動週期ヲ檢測スル程度ニ止メ數人ノ步行驅足馱馬風力等ニ因ル上下振動及ビ水平横振動等ヲ檢測セリ振動計ハ凡テ第十二圖ノ如ク橋ノ中央下流側ノ床板上ニ取付ケタリ檢測結果振動週期ハ次表ノ如シ



第十二圖

但シ第十三圖ノ振動圖ハ原圖表ノ水平及上下振動二分ノ一撓度計圖ハ 1/? ニ縮寫セルモノナリ



第十三圖

		上下振動週期	橫振動週期
(1) 三人歩調ヲ揃ヘテ徐行ス	(平均)	0.55 秒	1.10 秒
(2) 同　　　上	(同)	0.55	1.16
(3) 駄馬一頭通過	(同)	0.31	1.16
(4) 人夫一人走ル	(同)	0.315	0.315
(5) 人夫三人走ル	(同)	0.326	0.326

而シテ歩調ハ徐行ノ場合ハ〇・五秒乃至〇・六秒ニシテ走行ノ場合ハ一分時ニ百七十歩乃至百九十歩即チ週期ハ〇・三二秒乃至〇・三五秒ナリキ駄馬ハ其歩調ヲ計算セサリシモ訓練サレタルモノニアリテハ速歩ニテ一分二百(足ニテ床ヲ打ツ數)位ヲ普通トスルヲ以テ其ノ週期ハ約〇・三秒ナリ 即チ吊橋ニ於テハ之ニ週期的外力ヲ作用セシムル時ハ其ノ外力ト同一ノ週期ヲ以テ振動シ橋自身ノ固有週期ト接近セザル場合ハ振動一般ニ輕微ナリ徐行ノ場合ニ橫振動ハ一・一〇乃至一・一六秒ニシテ上下振動週期ノ二倍ニ當リ其ノ振動ノ徑路ハ第十三圖ニ示スガ如ク同時ニ橫振動ノ固有週期ニ接近セルヲ以テ明瞭ナル振動ヲ生セリ

第十一節　神田橋ノ振動

本橋ハ群馬縣甘樂郡富岡村字神田ニ於テ利根川支川鏑川ニ架セル吊橋ニシテ振動ノ檢測ハ大正八年七月二十四日午前十一時ヨリ午後一時ニ亘リテ施行セリ本橋ハ中央徑間四百二十尺ニシテ左側百六十五尺右側百尺ノ鎭索ヲ有ス有效幅員七尺五寸ニシテ兩岸ノ支柱ハ各二本ノ丸太末口一尺一寸本口一尺八寸ノモノヲ水平材斜材ヲ以テ組立テタルモノニシテ橋面上ノ高サ四十二尺ナリ主索ハ各々十番線百六十六本ヲ合セタルモノニシテ其他各十番線七本合セノ十八本ノ斜吊線ヲ有シ最モ中央ニ近キ二線ハ牀下ヲ通シテ互ニ連絡シ以テ橋ノ剛性ヲ助ケ別ニ補剛構ヲ有セズ(附圖第二參照)耐風並ニ振レ止メノ爲メニ兩側ニ於テ第十四圖ニ示スガ如ク各十番線五本合セノ吊索ヲ設備セリ即チ本橋ハ本邦ニ於テ使用スル極メテ輕易ナル吊橋ノ型式ナリ

中央徑間 $= 420^{R}$, 索ノ Sag $= 34^{R}$, 全死荷重 $= 47{,}040^{lb}$

橋長一尺當リ死荷重 $= 112^{lb}$, 橋長一尺當リ質量 $= \dfrac{112}{32.2} = 3.48$

(I) 上下振動

斜吊線ヲ有スルヲ以テ其ノ振動週期ハ第五節ノ公式(9)ニ依リテ算定スルヲ得ヘシ

而シテ本橋ニ於テハ支柱ハ丸太ニシテ橋長ノ方向ノ剛度小ナルヲ以テ主索ノ張力ハ鎭索ニ傳ハリ之ヲ伸長セシム故ニ主索ノ有效彈性率ハ大體次ノ如シ

$$E_e = E\frac{420}{420+165+100} = 0.613\,E$$

主索二條ノ斷面積 $= 2\times166\times0.0141 = 4.68^{□''}$

主索ノ彈性率 $= 0.613\times12\times144\times10^{6}\ {}^{lb}/_{□'}$

故ニ

$$\frac{h' AE}{m} = \frac{\overline{34}^{2}\times4.68\times0.613\times12\times10^{6}}{3.48} = 114.5\times10^{6}$$

斜吊線中中央ニ近キモノ一條ハ十番線十本合セナルヲ以テ兩側二條ニ對シ

断面積 $= 2\times10\times0.0141 = 0.282^{\square''}$,　　有效彈性率 $= 12\times10^6\times0.613\ {}^{\mathrm{lb}}/_{\square''}$

$$P = \frac{47,040}{2} = 23,520\ ^{\mathrm{lb}}$$

故ニ

$$\frac{gAE}{P\left(s_2^3+\frac{ll_2^2}{2}-s_2 l_2^2\right)} = \frac{32.2\times0.282\times0.613\times12\times10^6}{23,520\times10^6\left\{\overline{1.27}^3+\frac{4.20\times\overline{0.9}^2}{2}-0.9^3\right\}} = 1.04\times10^{-3}$$

其他ノ斜吊線ハ全部七本合セナルヲ以テ兩側二條ニ對シ断面積ハ　$2\times7\times0.0141 = 0.198^{\square''}$　ナリ

而シテ　$\sum\frac{gAE}{Ps_2^3} = \frac{gAE}{P}\sum\frac{1}{s_2^3}$　ニ於テ

$s_2 = 115.'5$	$104.'5$	$94.'0$	$83.'5$	74.0	64.0	55.5	48.5
$\frac{10^6}{s_2^3} = 0.75$	0.92	1.13	1.43	1.82	2.44	3.25	4.26

$$\therefore\quad \sum\frac{1}{s_2^3} = 16.0\times10^{-6}$$

$$\therefore\quad \frac{gAE}{P}\sum\frac{1}{s_2^3} = \frac{32.2\times0.198\times0.613\times12\times10^6}{23,520}\times\frac{16}{10^6} = 32.2\times10^{-3}$$

故ニ公式(9)ニ依リ

$$0.09\left(\frac{h_1 l^2}{\pi}\right)^2\left\{\sum\frac{AEg}{P}\frac{1}{\left(s_2^3+\frac{ll_2^2}{2}-l_2^3\right)}+\sum\frac{gAE}{P}\cdot\frac{1}{s_2^3}\right\} = 0.09\left(\frac{34\times\overline{420}^2}{3.14}\right)^2\left(1.04+32.2\right)\frac{1}{10^3}$$

$$= 109\times10^8$$

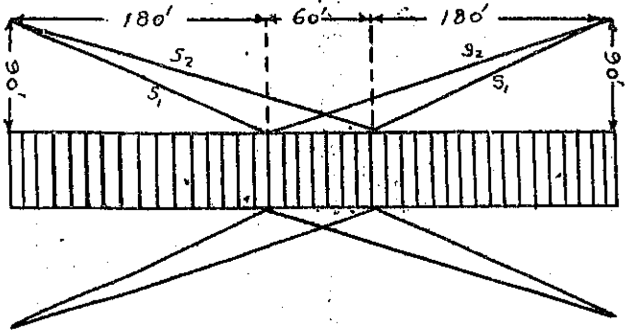
故ニ

$$T=0.6\times\overline{420}^2\sqrt{\frac{1}{(114.5+109)\,10^8}}=0.73\text{秒}$$

此場合橋ノ剛性ヲ增ス爲メノ斜吊線ハ其效果顯著ナルモノナリ而シテ剛構ハ活荷重ノ分布ノ爲メニ有效ナルベキモ主振動ヲ輕減スル上ニハ著シキ效力ナク此爲メニハ寧ロ斜吊線ヲ使用スルヲ有利ナリト思考ス

(II) 橫振動

本橋ハ振レ止メノ爲メニ十番線五本合セノ索ヲ以テ第十四圖ニ示スカ如キ構造トナセリ



第十四圖

橫振動ノ週期ハ公式(9)ニ依リ

$$T=0.6\,l^2\sqrt{\frac{1}{0.09\left(\frac{h_1l^2}{\pi}\right)^2\left\{\sum\frac{gAE}{P}\cdot\frac{1}{s_2{}^3}\right\}+\frac{IE_1}{m}}}$$

水平構ニ於テハ縱桁ト敷板ノ二分ノ一トヲ有效ナリトスレバ

$$E_1=144\times10^3\ {}^{\text{lb}}/_{\square^{\prime}},\quad I_1=2\,(0.4\times0.4\times4^2+0.4\times0.4\times2^2)+\frac{0.2\times8^3}{2\times12}=10.7\text{ ft}^4$$

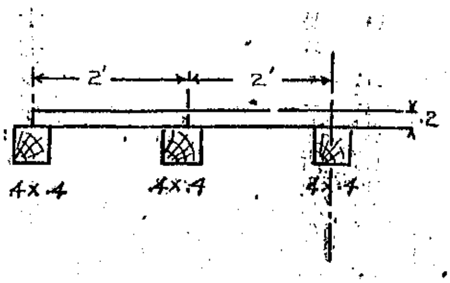
振レ止メ索 $A=5\times0.0141=0.0705\ \square^{\prime\prime}$

$$s_1=\sqrt{\overline{90}^2+\overline{180}^2}=201,\qquad s_2=256^{\prime}$$

$$\sum\frac{gAE}{P}\cdot\frac{1}{s_2{}^3}=\frac{gAE}{P}\left\{\frac{4}{s_1{}^3}+\frac{4}{s_2{}^3}\right\}$$

故ニ

$$0.09\left(\frac{h_1l^2}{\pi}\right)^2\sum\frac{gAE}{Ps_2{}^3}=0.9\left(\frac{90\times\overline{420}^2}{3.14}\right)^2\frac{32.2\times0.0705\times12\times10^6\times4}{47{,}040}\times\left\{\frac{1}{\overline{201}^3}+\frac{1}{\overline{256}^3}\right\}=9.42\times10^8$$



第十五圖

水平構 $\frac{IE_1}{m}=\frac{10.7\times144\times10^5}{3.48}=4.42\times10^8$

故ニ $T=0.6\times\overline{420}^2\sqrt{\frac{1}{(4.42+9.42)10^8}}=2.85$ 秒

即チ斯ル薄弱ナル索ヲ以テシテモ其效果ハ水平構ノ二倍以上ナリ若シ索ヲ二十本合セトスル時ハ週期ハ一・四三秒トナリ四十本合セトスル時ハ約〇・七一秒ニシテ水平ノ剛度ヲ充分大ナラシムル事ヲ得ヘシ

(III) 振動ノ實測

振動ノ檢測ハ大正八年七月二十四日午前十一時ヨリ午後一時ニ至ル間ニ施行セルモノニシテ檢測回數十一回ニ及フ適當ナル活荷重ノ準備不能ナリシ爲メ撓度ノ觀測ヲ行ハズ單ニ上下横縦ノ振動週期ノ檢測ニ止メタリ

第一回動荷重ナク無風ニシテ振動明ナラズ

第二回一人荷物ヲ擔フテ小早足ニテ渡ル步數ハ七秒ニ二十步位ナリ此場合橋ノ上下ノ振動ハ步調ト同一ナル〇・三五秒位ノモノト其固有振動週期ト目スヘキ〇・八秒ノモノトヲ混合シ横振動ハ約〇・八四秒ニシテ上下振動ト同一ナルモノノ如シ

第三回一人空車ヲ曳キテ渡ル步調ハ〇・五秒ニシテ上下振動ノ週期ハ一・二二秒位ナリ

第四回二人步調ヲ揃ヘテ徐行ス步調ハ〇・六六秒位ニシテ上下振動ノ主ナル週期ハ〇・七二秒ナリ

第五回二人步調ヲ揃ヘテ徐行ス〇・六四秒ニシテ橋ノ上下振動ノ週期ハ〇・六四秒ニシテ横振動ハ不明瞭ナリ

第七回一人驅ル步調ハ〇・三五秒ナリ橋ノ上下振動ハ週期〇・三二秒ニシテ横振動ハ〇・八四秒ナリ

第八回一人徐行ス步調〇・五秒ニシテ橋ノ振動ハ上下横共ニ〇・五四秒位ナリ

第十回軟風活荷重ナシ此場合上下振動ハ其固有週期ト見做スヘキモノニシテ〇・八秒ヲ示セリ 横振動モ之レト同一ニシテ平均〇・八二秒ナリ

此等ノ振動ハ之ヲ促進スル活荷重輕少ナルヲ以テ振幅微小ニシテ上下最大半吋横ハ最大八分ノ一吋ニ過キズ

要スルニ本橋ノ如キ複雜ナル部分ヲ不完全ニ結合セル構造ニ於テハ一點ニ作用スル外力ニ對シテ凡テノ部分ガ理論通リニ作用ヲ爲ス事難ク其或者ハ冗材トシテ遊ヒ居ルヲ以テ其週期ノ算定頗ル困難ナリ本橋檢測ノ結果モ他橋ニ比シ稍不規則ニシテ上下振動ニ於テハ固有週期ト目スベキモノヲ測定シ得タリト雖モ横振動ニ對シテハ其決定頗ル困難ナリキ

第十二節　多胡橋ノ振動

本吊橋ハ群馬縣多野郡吉井町地内ニ於テ利根川支川鏑川ニ架セルモノニシテ大正八年十月竣工セリ中央徑間三百六十呎中央ノ垂矢三十四呎有效幅員十呎ヲ有シ左岸ハ支柱ヲ越エテ直チニ絶壁ニ達シ右岸ハ支點ヨリ百二十呎ニシテ河岸ニ鎮碇サル兩端ノ支柱ハ鋼製構柱ニシテ柱頭ニ輾子ヲ具ヘ依テ以テ主索ヲ支持セリ補剛構ハ木鐵混用ノ複叉構ナリ主索ハ三十七線六ツ撚リ中心麻ノ坩堝鋼索ニシテ周圍六吋直徑一・九〇九吋ノモノヲ一側ニ各二本ツヽヲ用ヒタリ(附圖第三參照)

鋼線一本ノ斷面積 $= 0.00665\ \square''$,　一索中ノ鋼斷面積 $= 6 \times 37 \times 0.00665 = 1.48\ \square''$

全死荷重 $= 108{,}400^{lb}$,　橋長一尺當リ死荷重 $\fallingdotseq 300^{lb}$

橋面一平方尺當リ死荷重 $= 30^{lb}$　設計活荷重 $= 39{,}600^{lb}$

橋長一尺當リ設計活荷重 $= 110^{lb}$　橋面一平方尺當リ設計死荷重 $= 11^{lb}$

要スルニ本橋ハ今日本邦ニ於テ普ク使用セラルル設計ニシテ大體ニ於テ此種吊橋ノ代表ト見做ス事ヲ得

(I) 上下振動週期ノ計算

死荷重　長一尺當リノ質量 $= \dfrac{300}{32.2} = 9.3$

主索　彈性率 $E = 12\times10^3\times144$ 噸/□', 　斷面積 $A = \frac{4\times1.48}{144}$ □', 　垂矢 $h = 34'$

補剛桁　桁ノ高サ九尺ニシテ上下弦材ハ共ニ 0.7×0.7 ノ鋼材ナリ

慣性能率 $I = 2\times2\left(0.7\times0.7\times4.5^2\right) = 39.6$(呎)^4, 　彈性率 $E_1 = 144\times10^3$ 噸/□'

(1) 活荷重ナキ場合

$$\frac{AEh^2}{m} = \frac{12\times10^3\times144\times\frac{4\times1.48}{144}\times34^2}{9.3} = 8.32\times10^6, \qquad \frac{IE_1}{m} = \frac{39.6\times144\times10^3}{9.3} = 6.12\times10^5$$

$$0.36\frac{l^2}{h} = \frac{0.36\times360^2}{34} = 1.78\times10^3$$

公式(6)ニ依リ

$$T = 0.6\,l^2\sqrt{\frac{1}{\frac{AEh^2}{m}+\frac{IE_1}{m}\times0.36\frac{l^2}{h}}} = 0.6\times360^2\sqrt{\frac{1}{8.32\times10^6+6.12\times10^5\times1.78\times10^3}} = 0.82\text{秒}$$

支柱頂ニ輾子ヲ具ヘタルヲ以テ側徑間ノ伸縮ヲ考慮スレバ

$$E_s = \frac{360}{360+140\times2}E = 0.69E$$

$$\therefore\quad T = 0.6\times360^2\sqrt{\frac{1}{5.75\times10^6+6.12\times10^5\times1.78\times10^3}} = 0.98\text{秒}$$

(2) 小學校生徒百人渡過ノ場合　一人平均體重八貫ナルヲ以テ

$$\text{全活荷重} = \frac{100\times8}{0.12} = 6,667^{\text{貫}}$$

$$\text{橋長一尺當リ活荷重} = \frac{6,667}{360} = 18.5^{lb}$$

故ニ

$$m = \frac{300+18.5}{32.2} = 9.9$$

$$\therefore \quad T \doteqdot 0.82\sqrt{\frac{9.9}{9.3}} = 0.85\text{秒}$$

$$T' \doteqdot 0.98\sqrt{\frac{9.9}{9.9}} = 1.03\text{秒}$$

(3)　小學校生徒二百五十人渡過ノ場合

$$\text{橋長一尺當リ荷重} = \frac{250\times 8}{0.12} = 46.25^{lb}$$

$$\therefore \quad m = \frac{300+46.25}{32.2} = 10.8$$

故ニ

$$T = 0.82\sqrt{\frac{10.8}{9.3}} = 0.89\text{秒}$$

$$T' = 0.82\sqrt{\frac{10.8}{9.3}} = 1.06\text{秒}$$

(II)　橫　振　動

本橋ハ水平ナル振レ止メ索ヲ有セズ依テ水平耐風構ノ慣性能率ヲ稍正確ニ算定セサルヘカラス然ルニ上臥材及敷板ノ效力ヲ適當ニ見積ル事困難ナリ先ツ下臥材縱小桁及敷板ノ二分ノ一ガ有效ナリト考フレバ（第十七圖參照）

$$I_1 = 2\left\{0.7\times 0.7\times \overline{6.0}^2 + 0.47\times 0.65\left(\overline{4.8}^2+\overline{2.4}^2\right) + \frac{0.2\times \overline{10}^3}{2\times 12}\right\} = 69.5\,(\text{ft})^4$$

$$\therefore \quad \frac{E_1 I_1}{m} = \frac{69.5 \times 144 \times 10^6}{9.3} = 10.8 \times 10^8$$

$$\left(\frac{l}{\pi}\right)^4 \frac{g}{35} = \left(\frac{360}{3.14}\right)^4 \frac{32.2}{35} = 1.58 \times 10^8$$

故ニ公式(13)ニ依リ橋振動ノ週期ハ

$$T = \frac{2}{\pi} l^2 \sqrt{\frac{1}{\frac{E_1 I_1}{m} + \left(\frac{l}{\pi}\right)^4 \frac{g}{h}}} = 0.637\, l^2 \sqrt{\frac{1}{10.8 \times 10^8 + 1.58 \times 10^8}} = 2.33 \text{秒}$$

尚上臥材ヲ三分ノ一ダケ有效ナリト考フレバ

$$I_1 = 69.5 + 2 \times 8.8 = 87.1\ (\text{呎}^4), \qquad \therefore \quad \frac{E_1 I_1}{m} = 12.9 \times 10^8$$

$$\therefore \quad T = 0.637 \times \overline{360}^2 \sqrt{\frac{1}{12.9 \times 10^8 + 1.58 \times 10^8}} = 2.16 \text{秒}$$

(III) 徑間ノ中央ニ於ケル撓度

δ = 徑間ノ中央ニ於ケル撓度 (呎)

H = 同 張力 (听)

然ル時ハ $\delta \doteqdot \frac{3}{16} \cdot \frac{l}{h} \cdot \frac{Hl}{AE} \left\{1 + \frac{16}{3}\left(\frac{h}{l}\right)^2\right\}$

茲ニ $H = \frac{ql^2}{8h}$, q = 橋長一呎當リノ活荷重

然ルニ $l = 360'$, $h = 34'$, $A = 4 \times 1.48$, $E = 12 \times 10^6$ 听/吋² ナルヲ以テ

$$\delta = \frac{3\times\overline{360}^2\times q\times\overline{360}^2}{16\times8\times h^2\times4\times1.48\times12\times10^6}\left\{1+\frac{16}{3}\left(\frac{34}{360}\right)^2\right\} = 0.0604\,q.$$

故ニ小學校生徒三十五人ヲ載スル時ハ

$$q = \frac{35\times8}{0.12\times360} = 6.5^{\text{lb}},\qquad \delta = 6.5\times0.0604 = 0.''39$$

小學校生徒百人ヲ載スル時ハ

$$q = 18.5^{\text{lb}},\qquad \delta = 18.5\times0.0604 = 1''.12$$

小學校生徒二百五十人ヲ載スル時ハ

$$q = 46.3^{\text{lb}},\qquad \delta = 46.3\times0.0604 = 2''.8$$

而シテ二百五十人ノ場合ハ撓度大ニ過ギテ携帶ノ撓度計ヲ以テ測定シ能ハザリシモ其他ノ場合ハ凡テ實測シ下表ノ如シ

檢測番號	一尺當リ荷重（听）	中央ニ於ケル撓ミ 計算（吋）	中央ニ於ケル撓ミ 實測（δ）	中央ニ於ケル振幅ノ $^1/_2$（η）	$\frac{\eta}{\delta_0}$ (%)
12	46.3 (250人)	2″.8	—	—	—
10	18.5 (100人)	1″.12	1″.82	0″.0	0.0
8	6.5 (35人)	0″.39	0″.50	0″.04	8.0
9	6.5 (35人)	0″.39	0″.33	0″.08	24.0

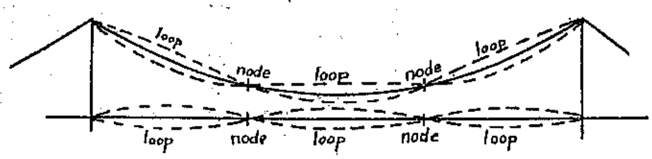
補剛構ノ影響ヲ採集スル時ハ算出値ハ今少シク小トナルベシ尚振動ノ爲メノ撓度ノ增加ハ荷重大ナル場合即チ靜力的撓度大ナル場合ニハ輕微ナルモノニシテ從テ衝擊係數モ小ナリ

(IV) 振動並ニ撓度ノ實測

測定ハ大正八年十月十九日午前十一時ヨリ午後四時ニ亘リテ行ハレ自記撓度計及ヒ自記振動計ハ凡テ大森式ヲ使用セリ

（一）第三回檢測

一人驅足ニテ渡橋ス此間橋ハ歩調ト同一ノ週期ヲ以テ上下ニ振動ス即チ週期ハ約〇・三四秒ナリ而シテ渡過後橋ノ上下振動ハ次第ニ固有振動ニ變ジ規則正シク之ヲ繼續シ其週期ハ約〇・九九秒ナリ然ルニ計算ノ結果ハ〇・八三秒乃至〇・九八秒ノ間ナルヲ以テ大體ニ於テ一致セルヲ見ル從テ本橋ノ上下振動週期ハ驅足又ハ並足ノ歩調ト著シク異ナルヲ以テ振動ノ累積ヲ起ス事ナク從テ大ナル衝擊係數ヲ用フル必要ナシ



第十六圖

（二）第四回檢測

六人大股ニ徐行ス橋ノ振動週期ハ歩調ト同一ニシテ約〇・五四秒ナリ而シテ振動ハ微弱ナリ此場合横振動モ歩調ト同一週期ニシテ橋ハ強迫振動ヲ爲セルヲ見ル

（三）第五回檢測

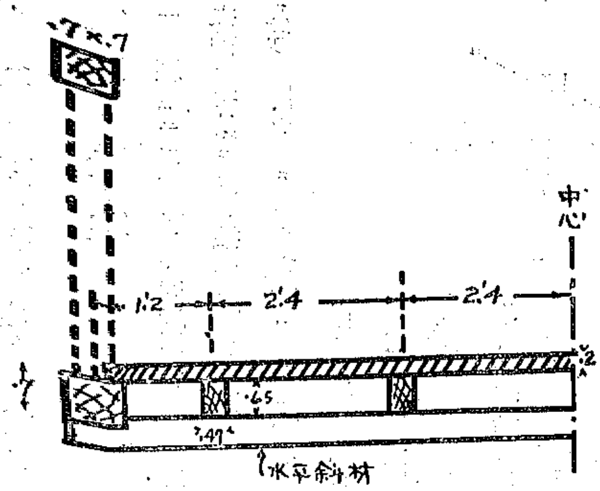
五人歩調ヲ揃ヘテ驅足ス橋ノ上下振動ハ週期〇・三三秒（上下振動計ニ依ルモノモ撓度計ニ依ルモノモ全ク同一ニシテ器械ノ信頼スベキヲ示ス）ニシテ明ニ驅足ノ歩調ト同一ナリ即チ此場合橋ハ強迫振動ヲ爲セルモノニシテ其固有週期〇・八三秒乃至〇・九八ト著シキ差アルヲ以テ共鳴累積ノ現象ヲ生セサルモノナリ而シテ走者ガ兩端又ハ中央附近ニ在ル場合ニ顯著ナル振動ヲ現ハスハ振動ニ際シテ橋ノ撓ミノ曲線ハ大體附圖第三二ノ如キモノニシテ其腹部ニ週期的力ノ作用スル場合ニ大ナル振動ヲ生シ節（Node）部ニ近ク作用スル場合ニ振動輕微ナルヲ示スモノナリ而シテ振動圖表ニ於テ明ナルガ如ク振動ノ形態ハ不完全ニシテ橋ノ彈性力ト外力トノ振動週期ノ不一致ヲ示スモノナリ

（四）第十回檢測（附圖第四參照）

吉井町尋常高等小學校生徒尋常六年以上ノ者百人四列縱隊ヲナシテ並足ニテ渡橋セリ歩調ハ成人ノ並足ヨリモ少シク早ク橋ノ振動週期ハ上下〇・四二秒ニシテ生徒ノ歩調ト同一ナリ此活荷重ヲ積載スル場合ノ橋ノ固有振動週期ハ〇・八五秒乃至一・〇三秒ニシテ兩者共鳴累積スル惧ナシ　事實荷量ノ重心ガ徑間ノ中央ニ接近シ撓度最大ナル場合ニ上下振動ハ却テ小ナリ此場合實測ノ最大撓度ハ一・三二吋ニシテ算出値ハ一・一二吋ニシテ大體相一致ス而シテ振動ノ為メノ撓度ノ增加ハ殆ントナク衝擊作用ハ殆ントナシ

（五）第十二回檢測（附圖第四參照）

吉井小學校生徒二百五十八人四列縱隊ヲ成シテ渡過ス　上下振動ハ歩調ト同一ナル約〇・四二秒ノ週期ノモノ最モ顯著ナルモ其振動ハ最大〇・二五吋ニ過ギズ　隊列ノ主要部ノ渡過セル後ハ橋自身ノ横振動ト同一週期即チ約二秒ノ週期ヲ現ハセリ而シテ此場合橋ノ横振動ハ始終自身ノ固有週期ヲ以テ繼續シ圖表ノ示ス所ニ依レハ振幅極メテ大ニシテ最大一・五吋ニ達セリ　尤モ横振動計ハ約二秒ノ固有振動週期ヲ有スルヲ以テ兩者共鳴シ圖上ノ振動ヲ大ナラシメタルヤノ疑アリ



第十七圖

多胡橋振動週期表

檢測番號	上下振動 週期(秒)	上下振動 最大振幅(吋)	横振動 週期(秒)	横振動 最大振幅(吋)
3	0.99 0.34	0.05 0.03	0.88	0.01
4	0.54	0.03	0.54	0.02
5	0.33	0.16	—	—
10	0.42	0.19	不規則	0.08
12	0.42	0.41	2.0	1.625

第十三節　結論

吊橋ハ剛性ニ乏シク調索ヲ主體トスルヲ以テ極メテ振動シ易キモノナリ而シテ作用スル外力ノ週期ガ橋ノ固有振動週期ト一致スル場合ニ於テハ振動ヲ累積セシムル事著シク為メニ橋ノ危險ヲ惹起スル事アリ而シテ本邦ニ於テハ山地峡谷等ニ比較的大ナル徑間ニ用ヒ構造極メテ輕易ナルモノニ於テハ上下並ニ横方向共ニ剛性極メテ少ナシ故ニ本編ニ於テハ各種構造ノ吊橋ニ於テ各種振動ノ週期ヲ算出スルノ方法ヲ理論的ニ研究シ上下振動ニ對シテハ第五節公式(1)

$$T = 0.6\,l\sqrt{\frac{g}{\frac{\lambda^2 AE}{m} + \frac{IE_s}{m} + 0.00\left(\frac{\lambda l}{\pi}\right)^2\left\{\sum\frac{\nu AE}{p}\cdot\frac{1}{s_1^2+\frac{a_1^2}{4}-l_1^2}+\sum\frac{\nu AE}{p}\cdot\frac{1}{s_2^2}\right\}}}$$

玆ニ右邊分母中第一項ハ主索ノ伸縮ニ依ル影響ヲ現ハスモノ第二項ハ補剛構ノ影響第三項ハ斜吊材ノ影響ヲ現ハスモノナリ

横振動ニ對シテハ第七節公式(13)

$$T = \frac{2}{\pi}\,l\sqrt{\frac{g}{\frac{4EI_h}{M} + \left(\frac{l}{\pi}\right)^2\frac{g}{a} + 1.12\,\frac{E'A'h^2}{M}}}$$

玆ニ右邊分母中第一項ハ水平耐風構ノ影響ヲ第二項ハ橋ノ振子作用ノ影響第三項ハ水平耐風索ノ影響ヲ現ハスモノナリ

次ニ週期的外力ト橋ノ上下振動トノ關係ヲ理論的ニ研究シ橋桁ノ場合ト同樣ニ振幅ノ累積ヲ現ハス數式ヲ得タリ

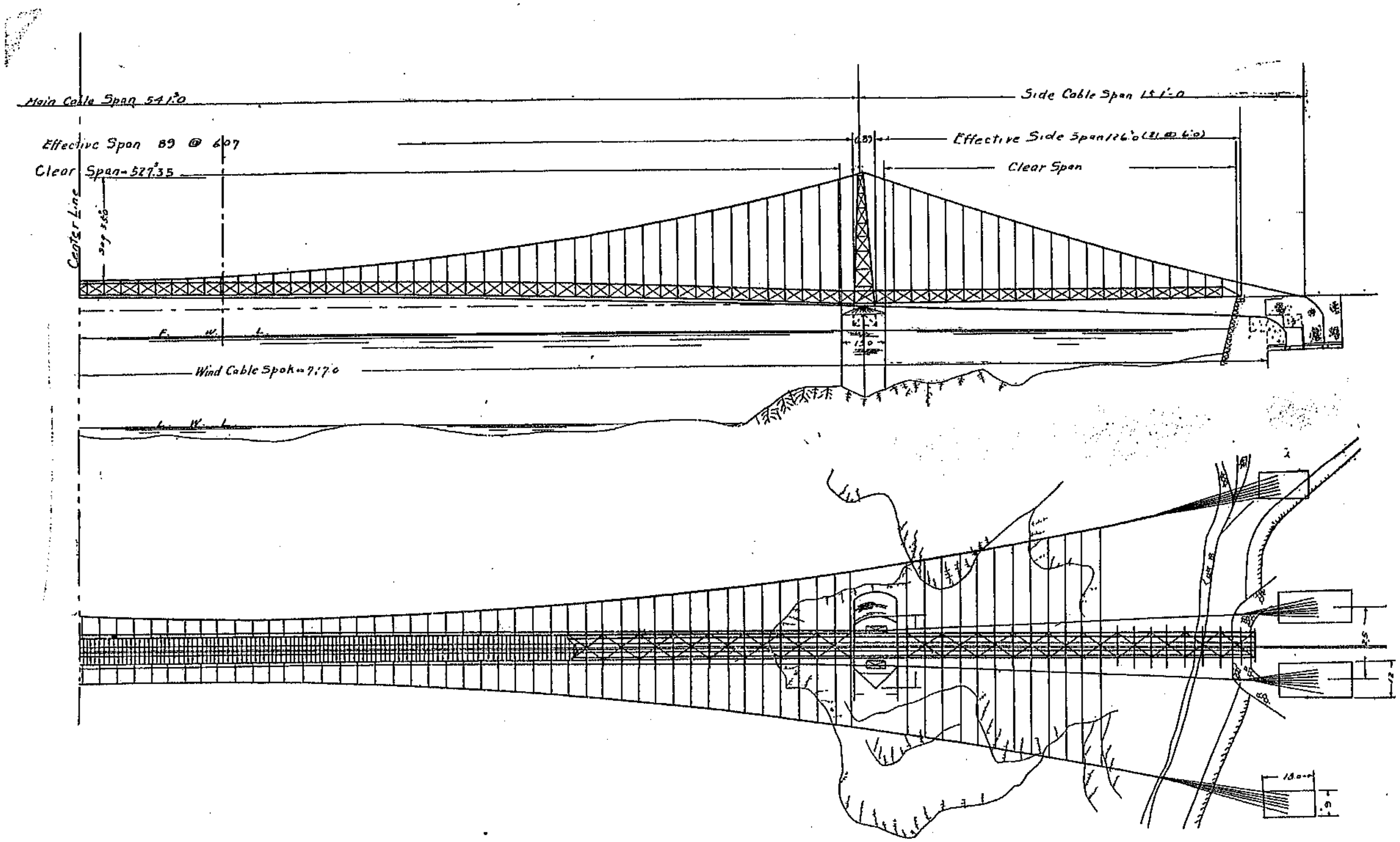
此等理論的研究ノ結果ニ依レハ補剛桁ハ本邦ニ於テ普通ニ用ヒラルルカ如キ程度ノモノヲ以テシテハ主振動ヲ輕減スル上ニ著シキ效果ナク水平構モ亦徑間大ニ橋幅小ナル時ハ耐風及ヒ耐振ノ目的ニ對シテ不充分ナルヲ以テ別ニ耐風索ヲ設クルヲ可トス尚くれーどる式ハ橋ノ振動ヲ輕減スル上ニ於テハ效果少ナク只徑間大ニ幅員小ナル吊橋ニ於テ端支柱ノ横方向

ノ強サヲ大ナラシムル上ニ於テ有效ナリ

次ニ各種ノ實在吊橋ニ就キ振動並ニ撓度實測ノ結果ヲ視ルニ多クノ場合ニ於テ吊橋ハ外力ノ週期ト同一ノ週期ヲ以テ強迫振動ヲ爲シ外力ヨリ解放サレタル後カ又ハ風力ノ作用ニ依リテ固有振動ヲ生スルモノナルヲ知レリ是レ橋桁ニ比シ變位ノ爲メニ生ズル彈性力小ナルヲ以テ外力ニ作用サレツツ固有振動ヲ敢行スル能ハサル爲メナリ而シテ一般ニ徑間大ニ剛性小ナル吊橋ニ於テハ其振動週期ハ群衆ノ步調ヨリ著シク大ニシテ隊列ノ渡過ニ依リテ振動ノ累積ヲ生ズル憂ナク之ニ反シテ徑間二百尺前後ナルカ又ハ三百尺位ニテモ強大ナル補剛構ヲ有スルモノニ於テハ步調ト近似セル振動週期ヲ有スルヲ以テ隊列ノ渡過ニ對シテ共鳴ヲ起シ易キモノナリ　而シテ固有振動週期ガ〇・八秒以上ナル吊橋ニ於テハ鉛直活荷重ノ衝擊係數ハ二十ぱーせんとヲ超ユル事ナシト推定サル

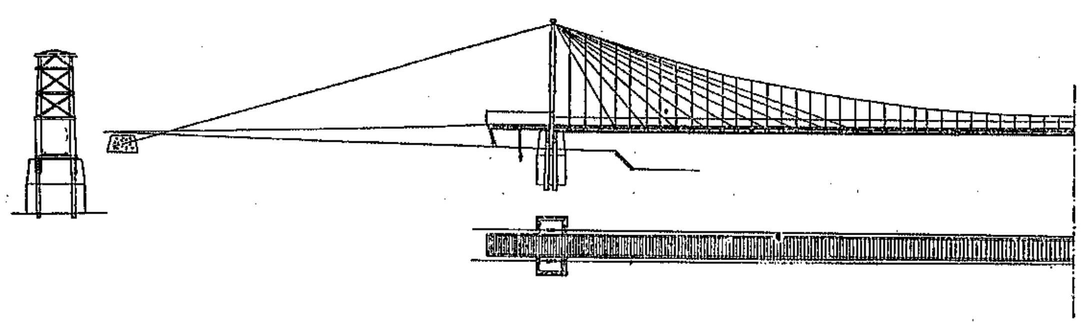
（完）

附圖第一　　　富士川吊橋



附圖第二　　神田橋

鏑川通北甘樂郡富岡町高瀬村大字富岡高瀬字神田　　縮尺九百分ノ一



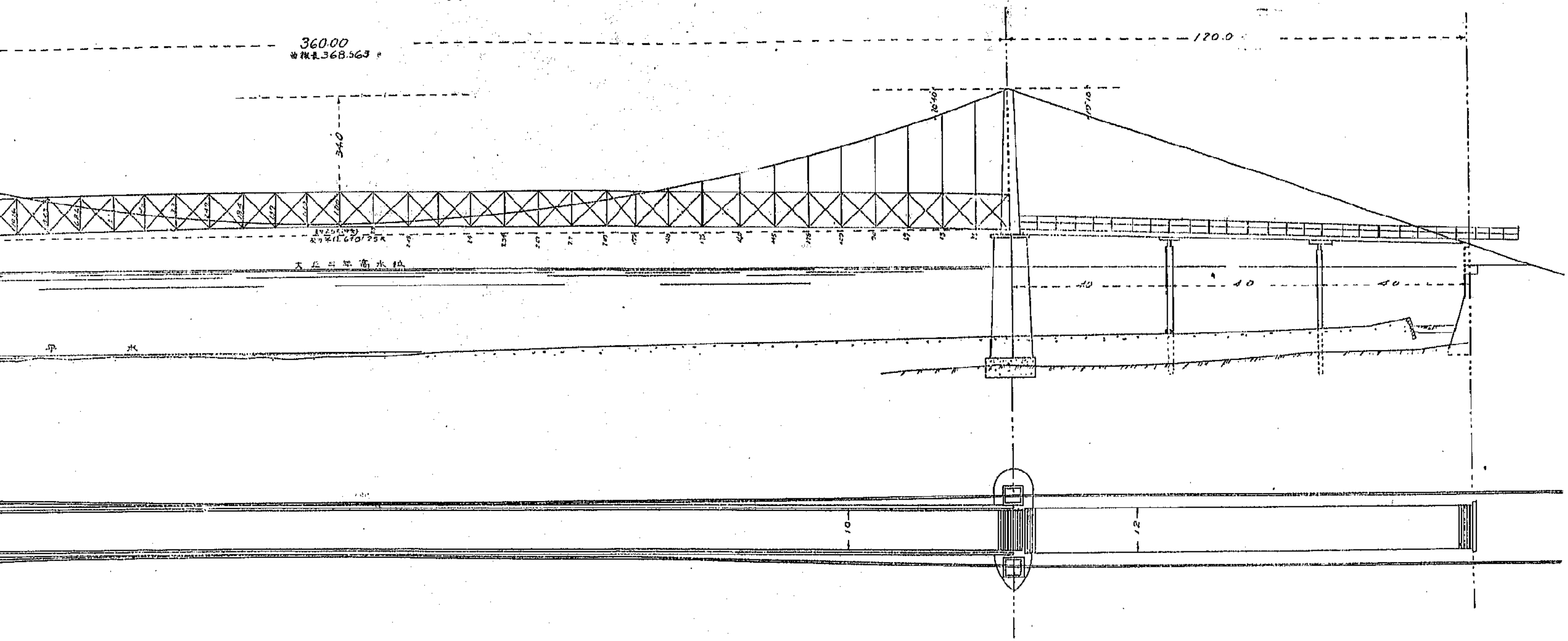
（土木學會誌第七卷四號附圖）

附圖第三

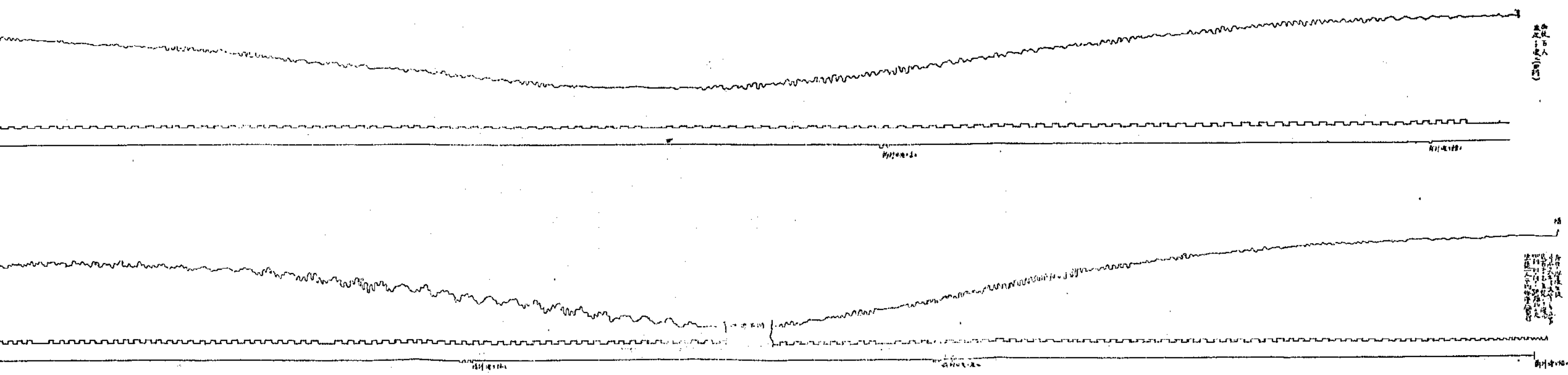
多胡橋之圖

（本圖ハ震災豫防調査會ノ事業トシテ同會委員大森博士ノ檢測ニ係ルモノナリ）

其一



其二



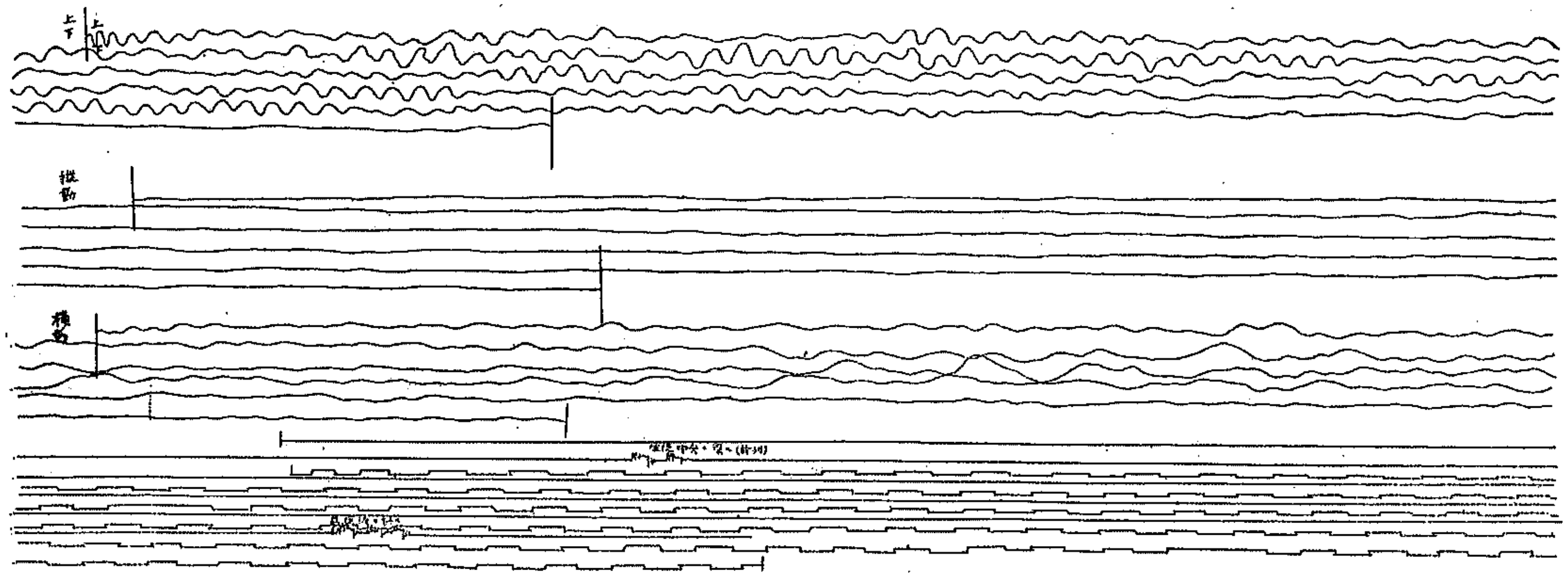
群馬縣吉井町多胡橋
大正八年十月十八日檢測午後二時ヨリ午後四時迄
晴微風　橋ノ撓度二分ノ一

（土木學會誌第七卷第四號附圖）

附圖第四

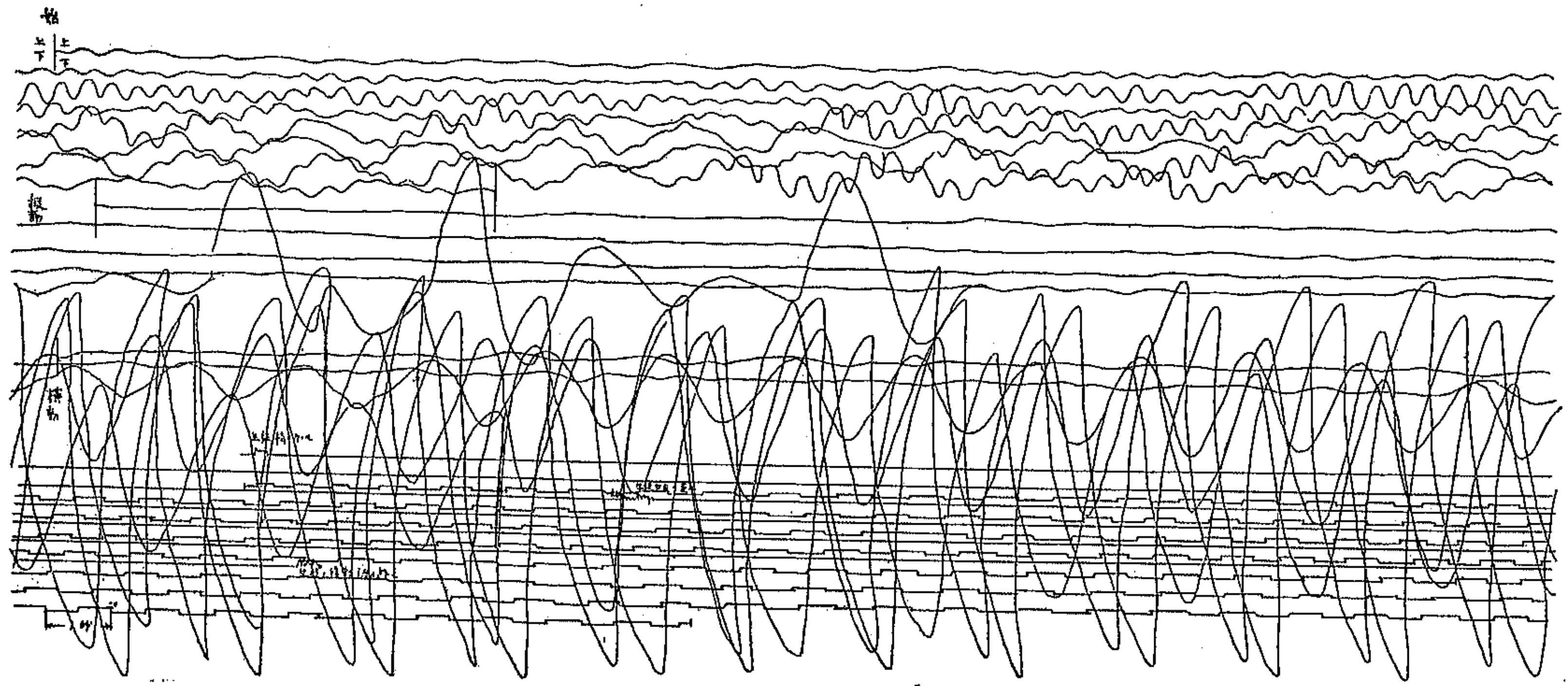
No. 10　水平一倍半
上下四分ノ三

同日晴微風
吉井小學校生徒百人並足ニテ渡ル(四列)



No. 12　水平一倍半
上下四分ノ三

同日晴微風
吉井町尋常高等小學校生徒二百五十人並足ニテ(四列)通過
生徒ハ尋常六年ヨリ高等二年迄列ト列トノ距離約三尺
生徒平均體重約八貫目



(本圖ハ震災豫防調査會ノ事業トシテ同會委員大森博士ノ檢測ニ係ルモノナリ)