討議

土木學會誌　第四卷第五號　大正七年十月

變斷面積ヲ有スル無鉸楕圓拱

（第三卷第五號所載）

工學士　花房周太郎

楕圓ハ他ノ二次曲線ノ如ク幾何學的解法ノ困難ナル點多ク拋物線拱、缺圓拱ニ關シテハ從來彈性拱肋ノ解法多キモ楕圓拱ニ關スル解法極メテ少シ著者野口工學士カ最少働原則ヲ應用シテ此ノ解法ヲ發表シ諸種ノ有益ナル算式ヲ誘導セラレタルハ拱肋設計上有力ナル參考トシテ誠ニ感謝スル處ナリ記者モ亦此ノ問題ニ關シテ平素聊カ趣味ヲ有スルヲ以テ菲才ヲ顧ミス茲ニ研究ノ一端ヲ略述シ大方諸兄ノ高教ヲ仰カント欲ス。

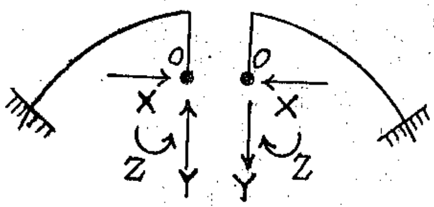
一　不靜定未知量ノ位置

無鉸拱肋ノ不靜定未知量ハ三個ニシテ著者ハ之等ヲ支點ノ垂直反力、水平反力及力率ノ三者ト定メ公式ヲ誘導セラレタリ其ノ結果トシテ此等三値ヲ求ムル稍複雜ナル三個ノ聯立方程式ヲ求メラレタルモ諸種ノ荷重ニ對シテ一々此等ノ聯立方程式ノ解法ヲ行フハ甚タ手數ヲ要スヘキモノニシテ實際ノ拱肋設計ニ不便少ナシトセス

茲ニ記述セントスル方法ハ未知量ヲ特種ノ位置ニ撰定シ此ノ不便ヲ少ナクセンカ爲メノ一工夫ニ過キスシテ聯立方程式ニヨラサル直接ノ公式ヲ誘導スルニアリ而シテ著者ノ誘導セラレタル

聯立方程式ニヨッテモ座標ノ變更及靜力學上ノ平衡條件ヲ挿入シ公式ノ變化ヲ行ヘハ記者ノ直接誘導セル公式ト同一結果ヲ得ヘキモノナルコト明カナリ

次キニ著者ハ集荷重及部分等布荷重ニ關スル計算ヲ別々ニ誘導セラレタルモ實際ノ設計ニ際シテハ靜荷重及動荷重アリテ荷重ノ分布狀態正負彎曲率軸壓力等ノ計算ヲ必要トスヘキカ故ニ未知量ニ對シテ影響線ヲ作成スルヲ以テ便利ナリトス故ニ茲ニ誘導セントスル公式ハ直接影響線作成ニ便ナル樣考案セラレタルモノナリ



第一圖

第一圖ニ示スカ如ク拱肋ヲ拱頂ニ於テ二分シ圖中O點ニ三ツノ未知量X Y Zヲ想像シ拱肋ノ半分ヲ肱木(曲線ノ)ト考ヘ解法ヲ行ハヽ相對拱肋ニ於テ特ニ公式ノ簡約ヲナシ得ヘシ

二　不靜定未知量ノ算定

楕圓拱肋ノ應用ニ先キタチ一般ノ曲線拱肋ヲ考ヘ前項ノ如ク未知量ノ位置ヲ撰フ時ハ第二圖ノ如ク其ノ半分ヲ考ヘ公式ノ誘導ヲナシ得ヘシ

今一般ニ剪力影響ヲ無視セル時ノ最少働公式ヲ記セハ次キノ如シ

$$\int\frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial X_0}ds+\int\frac{N}{EA}\frac{\partial N}{\partial X_0}ds+\varepsilon t\int\frac{\partial N}{\partial X_0}ds=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

但シX_0ハ一般ノ不靜定未知量トス彈率Eハ常數ナリトシ次キノ如キ諸種ノ假定及ヒ略號ヲ用フルモノトス

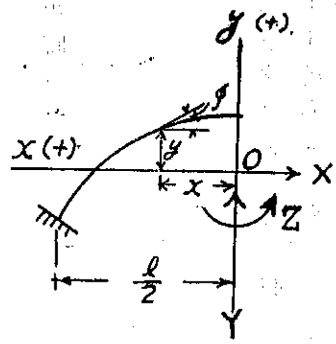
$I=I_0\sec\phi$　）

$$\left.\begin{aligned} A &= A_0 \sec\phi \\ dx &= ds\cos\phi \\ \frac{I_0}{A_0} &= K \\ \text{et } EI_0 &= f \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(2)$$

然ル時ハ

$$\int M\frac{\partial M}{\partial X_0}dx + K\int N\frac{\partial N}{\partial X_0}dx + f\int\frac{\partial N}{\partial X_0}\sec\phi\, dx = 0 \quad \cdots\cdots(3)$$

ノ如キ形トナル



第二圖

第二圖ニ於ケル如ク座標ノ原點ヲOトシ其ノ方向ヲ圖ノ如ク定メ

M_0……荷重ノミヨリ起ル曲肱木ノ彎曲率

V_0……荷重ノミヨリ起ル曲肱木ノ垂直剪力トセハ

$$M = Z + Yx + Xy - M_0 \quad \cdots\cdots(4)$$

$$N = -Y\sin\phi - X\cos\phi + V_0\sin\phi \quad \cdots\cdots(5)$$

トナルコト明カニシテ$X\ Y\ Z$ニ關スル此等二値ノ偏微分係數ハ次式ノ如シ

$$\frac{\partial M}{\partial Z} = 1, \quad \frac{\partial N}{\partial Z} = 0 \quad \cdots\cdots(6)$$

$$\frac{\partial M}{\partial Y} = x, \quad \frac{\partial N}{\partial Y} = -\sin\phi \quad \cdots\cdots(7)$$

$$\frac{\partial M}{\partial X}=y, \quad \frac{\partial N}{\partial X}=-\cos\phi \quad \cdots\cdots\cdots (8)$$

(3)(4)及(6)ニヨリ

$$\int(Z+Yx+Xy-M_0)dx=0$$

$$Z\int dx+Y\int x\,dx+X\int y\,dx-\int M_0dx=0$$

而シテ相對拱肋ナルヲ以テ

$$\int x\,dx=0$$

又、x 軸(彈性軸)ノ位置ヲ次式ノ滿足セラルヘキ様撰フモノトス

$$\int y\,dx=0 \quad \cdots\cdots\cdots (9)$$

然ル時ニハ

$$Z\int dx-\int M_0dx=0$$

$$\therefore \quad Z=\frac{\int M_0dx}{\int dx} \quad \cdots\cdots\cdots (10)$$

ニヨリ Z ノ値ヲ定メ得ヘシ

(3)(4)(5)及(7)ニヨリ

$$\int(Z+Yx+Xy-M_0)x\,dx+K\int(-Y\sin\phi-X\cos\phi+V_0\sin\phi)(-\sin\phi)dx+f\int(-\sin\phi)\sec\phi\,dx=0$$

$$Z\int x\,dx+Y\int x^2dx+X\int xy\,dx-\int M_0x\,dx+KY\int\sin^2\phi\,dx+KX\int\sin\phi\cos\phi\,dx-K\int V_0\sin^2\phi\,dx-f\int\sin\phi\sec\phi\,dx=0$$

而シテ幾何學的關係ヨリ

$$\int x\,dx=0,\ \int xy\,dx=0,\ \int\sin\phi\cos\phi\,dx=0,\ \int\sin\phi\sec\phi\,dx=0$$

ナルコト明カニシテ

$$Y\int x^2dx-\int M_0x\,dx+KY\int\sin^2\phi\,dx-K\int V_0\sin^2\phi\,dx=0$$

$$\therefore\quad Y=\frac{\int M_0x\,dx+K\int V_0\sin^2\phi\,dx}{\int x^2dx+K\int\sin^2\phi\,dx}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(11)$$

ニヨリYノ値ヲ定メ得ヘシ

(3)(4)(5)及(8)ニヨリ

$$\int(Z+Yx+Xy-M_0)y\,dx+K\int(-Y\sin\phi-X\cos\phi+V_0\sin\phi)(-\cos\phi)dx+f\int(-\cos\phi)\sec\phi\,dx=0$$

$$Z\int y\,dx+Y\int xy\,dx+X\int y^2dx-\int M_0y\,dx+KY\int\sin\phi\cos\phi\,dx+KX\int\cos^2\phi\,dx-K\int V_0\sin\phi\cos\phi\,dx-f\int dx=0$$

同様ニ幾何學的關係ニヨリ

$$\int xy\,dx=0,\quad\int\sin\phi\cos\phi=0$$

ナルヲ以テ

$$X\int y^2dx-\int M_0y\,dx+KX\int\cos^2\phi\,dx-K\int V_0\sin\phi\cos\phi\,dx-f\int dx=0$$

$$\therefore\quad X=\frac{\int M_0y\,dx+K\int V_0\sin\phi\cos\phi\,dx+f\int dx}{\int y^2dx+K\int\cos^2\phi\,dx}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

ニヨリXヲ定メ得ヘシ但シ(12)式分子ノ末項ハ温度影響ニ關スル値ナルヲ以テ荷重及温度ノ影響ヲ各別ニ算定スル場合ニハ(12)式ヲ同一分母ヲ有スル二箇ノ公式ニ分割スレハ可ナリ

但シ$\int dx=l$ナルコト明カナリ

三　楕圓拱肋ニ對スル應用

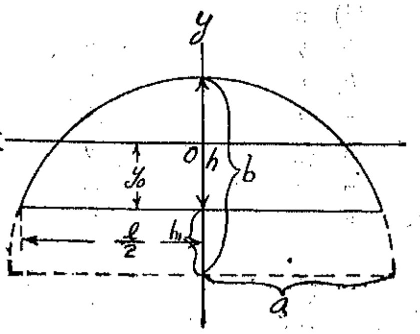
公式(9)(10)(11)(12)ノ四式ニヨリ拱肋ノ未知量及着力點ヲ見出シ得ヘク此等ノ式中特ニ楕圓拱肋ナラストモ直チニ算定シ得ルモノト楕圓拱肋ニ關シテノミ特ニ算定スヘキモノトノ二種アルモ同時ニ公式ノ積分値ニツキ簡單ニ説明セントス

(9)式ハ彈性軸即チ温度反力ノ働線ヲ定ムヘキ公式ニシテ第三圖ノ如キ楕圓拱ヲ考ヘy_0ヲ定ムル時ハ

$$y_0=\frac{ab}{l}\sin^{-1}\left(\frac{l}{2a}\right)-\frac{1}{2}h_1\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

（計算省略）

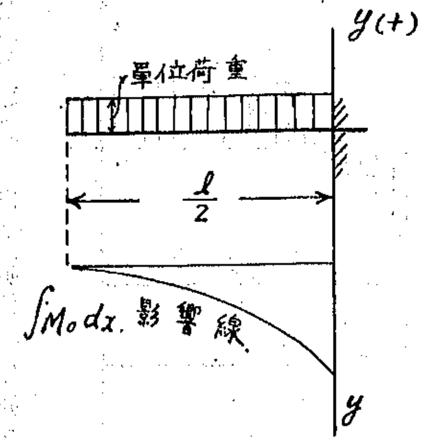
トナリ著者ノ誘導セラレタル熱應力ノ水平反力及彎曲率ノ公式ニヨッテモ誤謬ナキコト明カナルヘシ



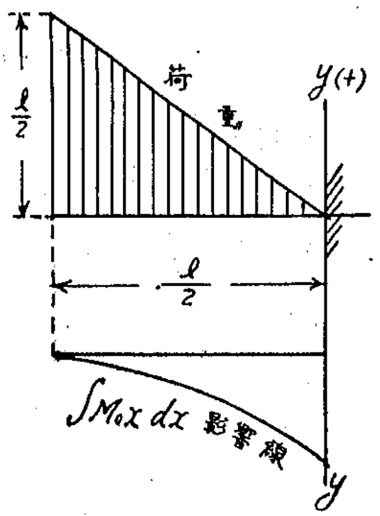
第三圖

(10)式ハZナル力率ヲ定ムヘキ公式ニシテ分母ノ

$$\int dx=2\int_0^{\frac{l}{2}}dx=l$$



第四圖



第五圖

ニシテ楕圓拱肋特有ノ値ニアラス分子ノ$\int M_0 dx$モ亦同様ナルモ今單位荷重(一噸)ニヨリ此値ノ影響線ヲ求ムルニ恰モ第四圖ノ如クy軸ニ於テ固定セラレ單位荷重ノ肱木(直線ノ)ノ彎曲率圖表ト同一トナルヘシ即チ二次拋物線ニシテ影響線ノ縦距若シクハ其ノ部分面積モ容易ニ求メ得ヘシ(此ノ算式ハ著者ノ誘導セル公式中ニモアリ省略ス)

(11)式ハYノ値ヲ定ムヘキ公式ニシテ分母ノ

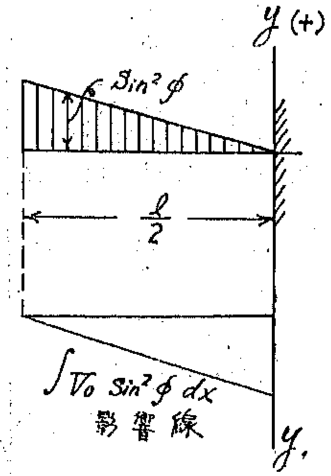
$$\int x^2 dx = 2\int_0^{\frac{l}{2}} x^2 dx = \frac{2}{3}\left(\frac{l}{2}\right)^3 = \frac{1}{12}l^3$$

ニシテ楕圓拱肋特有ノ値ニアラス又分母ノ

$$\int \sin^2\varphi\, dx$$

ハ著者ノ誘導セラレタル式中ニアリ楕圓特有ノ値ナリ分子ノ$\int M_0 x\, dx$ハ前ト同様ニ考フル時ハ一般ノ拱肋ニ對シテ第五圖ノ如クy軸ニ於テ固定セラレタル肱木(直線ノ)カ二等邊三角形ノ荷重ヲ受ケタル時ノ彎曲率圖表カ此値ノ影響線トナリ一般ニ三次拋物線トナルヘシ(此ノ曲線ノ縦距及部分面積ハ著者ノ算式ニ含マルヽ處アリ省略ス)

又(11)式ノ分子$\int V_0 \sin^2\varphi\, dx$ハ楕圓拱肋特有ノ値ニシテ第六圖ノ如キ荷重ノ肱木ニ於テ垂直剪力圖表ヲ求ムレハ可ナリ

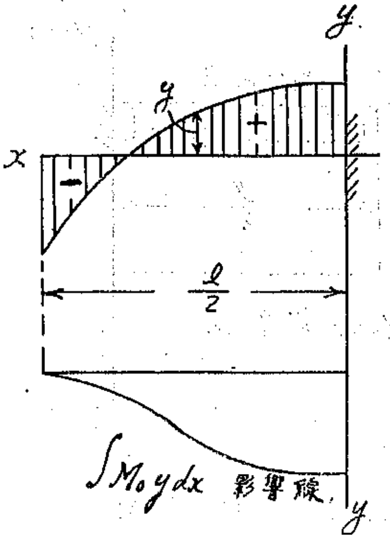


第六圖

(縦距及部分面積ノ算式ハ著者ノ公式中ニアリ省略ス)

(12)式ハXノ値ヲ定ムヘキ公式ニシテ分子及分母ノ諸積分値ハ前ト全ク同様ニ算出シ得ヘク何レモ楕圓拱肋特有ノ値ニシテ$\int M_0 y\,dx$及ヒ$\int V_0 \sin\phi \cos\phi\,dx$ノ影響線ヲ同様ニ第七圖及第八圖ノ如ク求メ得ヘシ(分母ノ値影響線ノ縦距部分面積等ハ著者ノ公式中ニアリ省略ス)

要スルニ以上四公式ニヨリx軸ノ位置荷重ニ對スル影響線及温度影響ヲ求メ得ヘキモノニシテ軸壓力變形影響ヲ無視スル場合ノ公式トシテハV_0ヲ含ム積分値ヲ零トスレハ可ナリ



第七圖

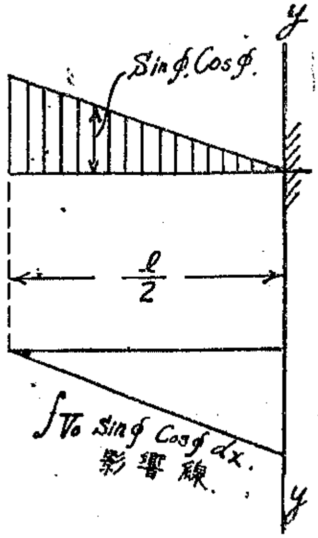
著者ハ算式ヲ以テ諸種ノ積分値ヲ求メラレタル勞ヲ多トスルモ圖式解法ニヨリテ此等ノ値ヲ求ムル時ハ稍々不精密ナルモ大差ナキ結果ヲ得ヘキモノナラント信ス

四　斷面ニ對スル假定

著者ノ公式ニ於テモ記者ノ前陳ノ公式ニ於テモ拱肋面斷トシテ$I=I_0\sec\phi$, $A=A_0\sec\phi$ナル假定ヲ用ヒタリ之レ解法上困難ナル積分値ヲ簡約スヘキ一手段ニ過キズシテ實地ニ設計スヘキ拱肋ノ斷面ニ於テ斯クノ如キモノ殆ントナシ只在來普通ニ用ヒラル丶抛物線拱肋公式ト同一假定トイフニ止マルノミニシテ楕圓拱

ニ對シテ特ニ別途ノ假定ヲ用フル必要ナキヤ

著者ハφカ60°迄ハ用フル如ク論セラルヽモ元來拋物線拱肋公式ハ扁平ナル拱肋ニ限リ應用セラルヽモノニシテ楕圓拱ト稱スルモ扁平率約七分ノ一以內ノ缺楕圓拱ニシテカヽル場合ニハ寧ロ他ノ缺圓拱肋公式又ハ拋物線拱肋公式ヲ用ヒテ略算スルヲ得策トセサルヤ



第八圖

楕圓拱肋ハ殆ント半楕圓若シクハ眞ノ半楕圓ヲ用フル點ニ外觀上頭空上ノ利便アルモノナルモ著者ノ斷面假定ニヨツテハ$\sec\varphi$カ無窮大(半楕圓)トナル爲メ折角ノ公式モ利用シ得サル事トナリ數學的價値ヲ有スルモ實用上利用シ得サルモノトナルカ故ニ更ニ斷面假定或ハ特種假定(斷面ノ物量力率又ハ斷面積ト曲線ノ縱横距及傾斜角トノ特種關係)ヲ研究シ數式ノ簡約ト實地利用上ノ利便ヲ增スヘキ解法ヲ必要トセサルヤ(完)